QUINZAINE DU 09/11 AU 22/11

1 Contenu du cours

Chapitre 6 - Suites et séries de fonctions (cours et TD)

1. Modes de convergence

Convergence simple pour une suite de fonctions, convergence uniforme, la convergence uniforme implique la convergence simple, convergence simple pour une série de fonctions, convergence uniforme, convergence normale, la convergence normale implique la convergence absolue en tout point, la convergence normale implique la convergence uniforme.

2. Théorèmes d'interversion et de régularité

Continuité de la limite d'une suite de fonctions, continuité de la somme d'une série de fonctions, double limite pour les séries de fonctions, limite et intégrale sur un segment, intégration terme à terme (sur un segment), régularité $\mathcal{C}^1$ de la limite et de la somme, régularité $\mathcal{C}^k$.

Chapitre 7 - Réduction (cours et début du TD)

1. Exemples d'introduction

Étude à la main d'une matrice de symétrie et d'une matrice d'un quart de tour dans $\mathbb{R}^3$.

2. Polynômes d'endomorphismes

Polynômes de matrices et d'endomorphismes, deux polynômes en u commutent, conséquence sur la stabilité du noyau et de l'image, polynômes annulateurs, utilisation pour le calcul d'une puissance, d'un inverse.

3. Éléments propres

Droite stable, définition de vecteurs propres et valeurs propres, sous-espaces propres, stabilité par un endomorphisme qui commute avec u, définition du spectre, adaptation au cas des matrices, lien entre spectre et polynôme annulateur, les sous-espaces propres sont en somme directe.

4. Polynôme caractéristique

Définition, le polynôme caractéristique est unitaire, son degré est n, coefficients remarquables, polynôme caractéristique de matrices semblables, traitement du cas des projecteurs, lien avec les valeurs propres, multiplicité des valeurs propres, majoration de la dimension des sous-espaces propres, théorème de Cayley-Hamilton.

5. Diagonalisabilité

Définition, caractérisation par les sous-espaces propres (en somme directe, dimension), caractérisation par le polynôme caractéristique avec dimension des sous-espaces propres, caractérisation des endomorphismes diagonalisable avec sous-espaces propres de dimension 1, condition suffisante de diagonalisabilité en ayant n valeurs propres distinctes.

2 Questions de cours

Question de cours des chapitres 3 à 6 sur https://cahier-de-prepa.fr/pc-fauriel/docs?rep=239 ou bien :

1. **Exemple :** (f_n) avec $f_n : t \mapsto t^2 + \frac{\sin(nt)}{n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction carrée.
2. **Exemple :** $\sum g_n$ avec $g_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
3. **Exemple :** Donner l'ensemble de définition et prouver la continuité de $G : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$.
4. **Exemple :** Déterminer la limite en $+\infty$ de $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
5. **Exemple :** Déterminer les valeurs propres avec leurs multiplicités de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. **Exemple :** Déterminer une base des sous-espaces propres de $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sachant que $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2\}$.