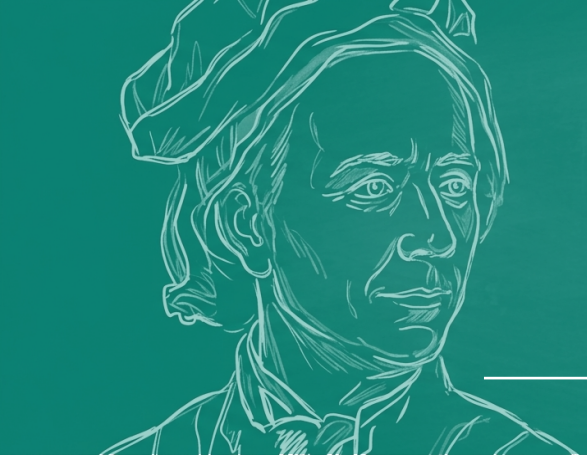


# 8

# Intégrales généralisées

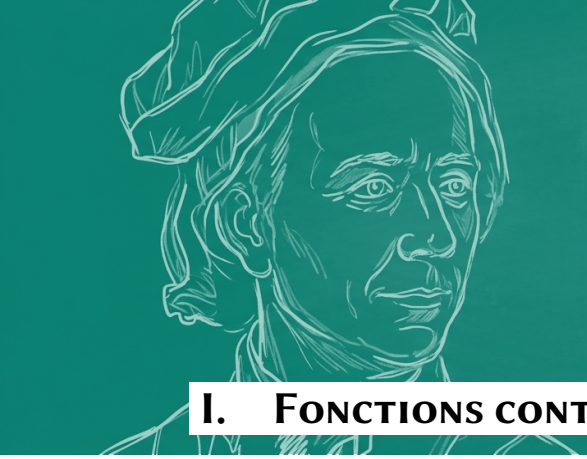
Leonhard Euler (1707 – 1783)

En première année, l'intégrale $\int_a^b f$ a été définie pour une fonction $f$ continue sur un segment $[a, b]$. Ces deux hypothèses, la continuité et le segment, sont commodes mais trop étroites : on veut pouvoir parler de l'aire sous la courbe d'une fonction qui saute, et de l'aire sous une courbe qui s'étend jusqu'à l'infini ou qui s'approche d'une asymptote verticale.
Ce chapitre relâche les deux hypothèses l'une après l'autre. D'abord les fonctions continues par morceaux, qui présentent un nombre fini de sauts sur chaque segment : leur intégrale sur un segment est la somme des aires sous chaque morceau. Ensuite les intervalles qui ne sont pas des segments : l'intégrale sur $[a, b[$ est définie comme la limite de $\int_a^x f$ quand $x$ tend vers $b$, exactement comme la somme d'une série est la limite de ses sommes partielles. Le vocabulaire des séries, convergence et divergence, convergence absolue, comparaison à des fonctions de référence, se transpose, et une bonne partie du chapitre consiste à repérer ce qui se transpose tel quel et ce qui change.

**Programme officiel**

**Intégration sur un intervalle quelconque**

a) Fonctions continues par morceaux
b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque
d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables



# 8 Intégrales généralisées

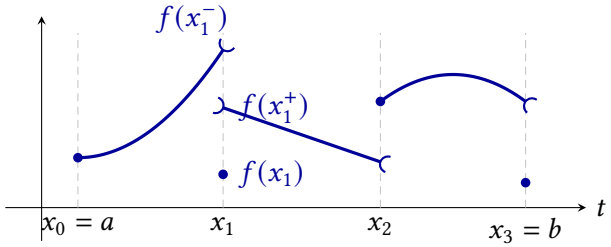
## I. Fonctions continues par morceaux

En première année, l'intégrale $\int_a^b f$ a été définie pour une fonction $f$ continue sur un segment $[a, b]$ : c'est l'aire algébrique comprise entre la courbe de $f$ et l'axe des abscisses. Cette section étend la définition à des fonctions qui présentent un nombre fini de sauts, sans rien changer à l'idée d'aire sous la courbe : on découpe le segment en morceaux sur lesquels la fonction se comporte comme une fonction continue, et on ajoute les aires.

### 1. Sur un segment

**Définition 8.1 (Fonction continue par morceaux sur un segment)**

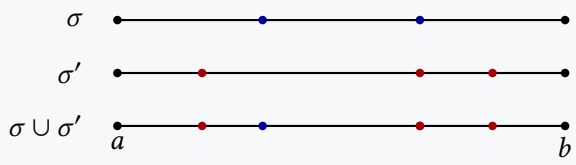
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$ s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $I$, c'est-à-dire une famille finie de réels telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, vérifiant : pour chaque indice $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de $f$ à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$.
Une telle subdivision est dite adaptée à $f$.




Sur chaque morceau ouvert $]x_k, x_{k+1}[$, la fonction est continue et admet une limite finie à chaque extrémité : ce sont ces limites qui prolongent la restriction. Un petit arc marque une extrémité qui n'appartient pas au graphe ; les valeurs de $f$ aux points de la subdivision (points pleins) sont quelconques : en $x_1$, la fonction ne vaut ni sa limite à gauche ni sa limite à droite, et en $x_2$ elle vaut sa limite à droite.

**Remarque (Le choix de la subdivision n'a pas d'importance)**

Si $(x_0, \dots, x_n)$ est adaptée à $f$, toute subdivision plus fine, obtenue en ajoutant des points, l'est encore : couper un morceau $]x_k, x_{k+1}[$ en deux par un point $c$ donne deux morceaux sur lesquels le prolongement continu $\tilde{f}_k$ convient toujours. Par conséquent, si $\sigma$ et $\sigma'$ sont deux subdivisions adaptées à $f$, la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ formée de tous leurs points est adaptée à $f$, et plus fine que chacune des deux. On s'en servira pour comparer des calculs menés avec deux subdivisions différentes : il suffit de les mener tous les deux sur $\sigma \cup \sigma'$.




**Remarque (Les valeurs aux points de la subdivision)**

La définition ne fait intervenir que les restrictions de $f$ aux intervalles ouverts $]x_k, x_{k+1}[$. Modifier la valeur de $f$ en un point de la subdivision, ou plus généralement en un nombre fini de points (qu'on ajoute à la subdivision), ne change donc pas le fait que $f$ soit continue par morceaux.

**Remarque (Ce que dit la définition)**

L'essentiel tient dans le mot *prolongeable* : sur chaque morceau ouvert, $f$ est continue et admet une limite finie aux deux bornes. Une fonction continue par morceaux peut donc sauter d'une valeur à une autre en un nombre fini de points, mais elle ne peut ni tendre vers l'infini, ni osciller sans limite au voisinage d'un point. En particulier, elle est bornée sur le segment, puisque chaque prolongement $\tilde{f}_k$ est borné sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Cette lecture de la définition en donne une reformulation.

**Proposition 8.2 (Caractérisation)**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. La fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si elle est continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, en chacun desquels elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite (à droite seulement en $a$, à gauche seulement en $b$).

**Démonstration**

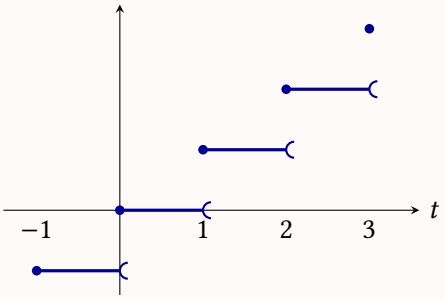
Supposons $f$ continue par morceaux et soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée. Sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$, $f$ coïncide avec le prolongement continu $\tilde{f}_k$, donc est continue : les seuls points de discontinuité possibles sont les $x_k$, en nombre fini. En $x_k$ (pour $0 < k < n$), $f$ admet pour limite à gauche $\tilde{f}_{k-1}(x_k)$ et pour limite à droite $\tilde{f}_k(x_k)$, toutes deux finies ; de même en $a$ et $b$ pour la limite d'un seul côté.
Réciproquement, soient $c_1 < \cdots < c_p$ les points de $]a, b[$ où $f$ n'est pas continue, et posons $x_0 = a$, $x_k = c_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et $x_{p+1} = b$. Sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$, la fonction $f$ est continue. En $x_k$, elle admet une limite finie à droite : soit parce que $x_k$ est un point de discontinuité où l'hypothèse la fournit, soit parce que $f$ y est continue et la limite est $f(x_k)$. De même, elle admet une limite finie à gauche en $x_{k+1}$. La fonction qui vaut $f$ sur $]x_k, x_{k+1}[$ et ces deux limites aux bornes est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ : la subdivision est adaptée à $f$. □

**Exemple 8.3 (Fonctions continues)**

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ : la subdivision $(a, b)$, réduite aux deux extrémités, est adaptée. Les fonctions continues par morceaux généralisent donc les fonctions continues.

**Exemple 8.4 (La partie entière)**

Soit $f : [-1,3] \to \mathbb{R}, t \mapsto \lfloor t \rfloor$. Cette fonction est constante sur chacun des intervalles $[-1,0[$, $[0,1[$, $[1,2[$ et $[2,3[$, et $f(3) = 3$. Elle est donc continue sur $[-1,3]$ sauf en 0, 1, 2 et 3 ; en chacun de ces entiers $m$, elle admet $m-1$ pour limite à gauche et, sauf en 3, $m$ pour limite à droite. Elle est continue par morceaux sur $[-1,3]$, et la subdivision $(-1,0,1,2,3)$ lui est adaptée.

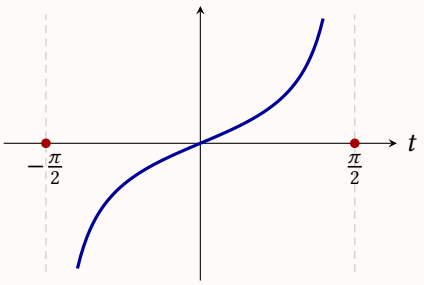



**Exemple 8.5 (La fonction indicatrice des rationnels)**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction qui vaut 1 en tout rationnel et 0 en tout irrationnel (la restriction à $[0,1]$ de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$). Elle n'est pas continue par morceaux. Elle n'admet de limite en aucun point : tout intervalle ouvert contient des rationnels et des irrationnels, donc des points où elle vaut 1 et des points où elle vaut 0. Aucune subdivision ne peut donc convenir, puisqu'il faudrait que $f$ ait une limite en chaque point de chaque morceau ouvert.

**Exemple 8.6 (La tangente prolongée)**

La fonction $f$ définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par $f(t) = \tan t$ si $|t| < \pi/2$ et $f(\pm\pi/2) = 0$ n'est pas continue par morceaux. Elle est continue sur l'intervalle ouvert, mais n'admet pas de limite finie en $\pi/2$ à gauche : elle tend vers $+\infty$. Prolonger la fonction par la valeur 0 ne change rien, puisque la définition ne regarde que les restrictions aux morceaux ouverts. Une fonction continue par morceaux n'a pas de saut infini.




**Proposition 8.7 (Opérations)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions $f+g$, $\lambda f$ et $fg$ sont continues par morceaux sur $[a,b]$.
2. La restriction de $f$ à tout segment $[c,d] \subset [a,b]$ est continue par morceaux sur $[c,d]$.

3. La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

**Démonstration**

1. D'après la remarque sur le choix de la subdivision, il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ adaptée à la fois à $f$ et à $g$ : la réunion d'une subdivision adaptée à $f$ et d'une subdivision adaptée à $g$. Sur $]x_k, x_{k+1}[$, notons $\tilde{f}_k$ et $\tilde{g}_k$ les prolongements continus à $[x_k, x_{k+1}]$. Les fonctions $\tilde{f}_k + \tilde{g}_k$, $\lambda\tilde{f}_k$ et $\tilde{f}_k\tilde{g}_k$ sont continues sur $[x_k, x_{k+1}]$ et prolongent respectivement $f + g$, $\lambda f$ et $fg$ : la subdivision leur est adaptée.
2. Soit $(x_0, \dots, x_n)$ adaptée à $f$. Les points $c$, $d$ et les $x_k$ appartenant à $]c, d[$ forment une subdivision de $[c, d]$. Chacun de ses morceaux ouverts est inclus dans un morceau $]x_k, x_{k+1}[$, sur lequel $f$ se prolonge continûment : la restriction de $\tilde{f}_k$ convient.
3. Avec les mêmes notations, $\left|\tilde{f}_k\right|$ est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ et prolonge $|f|$.
4. De même, $\operatorname{Re}\tilde{f}_k$ et $\operatorname{Im}\tilde{f}_k$ sont continues et prolongent $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$. Réciproquement, si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues par morceaux, $f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f$ l'est d'après le premier point.

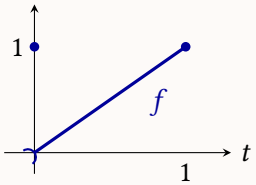
□

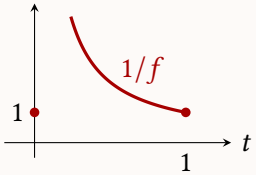
**Remarque (L'inverse)**

L'inverse d'une fonction continue par morceaux qui ne s'annule pas n'est pas nécessairement continue par morceaux. Pour que $1/f$ soit prolongeable par continuité aux bornes de chaque morceau, il faut que les *limites* de $f$ aux bornes des morceaux soient non nulles, ce qui est plus fort que demander que $f$ ne s'annule pas.

**Exemple 8.8 (Un inverse qui n'est pas continu par morceaux)**

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$ si $t > 0$ et $f(0) = 1$. La fonction $f$ est continue sur $]0, 1[$, de limite 0 en 0 et 1 en 1 : elle est continue par morceaux sur $[0, 1]$, avec la subdivision $(0, 1)$. Elle ne s'annule en aucun point. Son inverse vaut $1/f(t) = 1/t$ pour $t > 0$ et $1/f(0) = 1$ : sur le morceau $]0, 1[$, elle est continue mais tend vers $+\infty$ en $0^+$, et comme 0 doit être un point de toute subdivision de $[0, 1]$, aucune subdivision n'est adaptée à $1/f$. Elle n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.



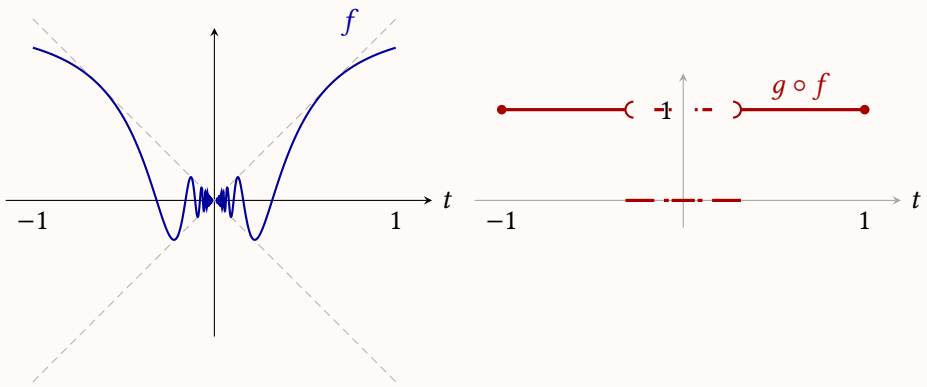




**Remarque (La composition)**

La composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux. Si $f$ oscille une infinité de fois autour d'un point de discontinuité de $g$, la composée $g \circ f$ saute une infinité de fois, et n'a plus de limite.

**Exemple 8.9 (Une composée qui n'est pas continue par morceaux)**

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\sin(1/t)$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$. Comme $|f(t)| \leqslant |t|$, la fonction $f$ est continue en 0, donc sur $[-1,1]$ : elle est continue par morceaux. Soit $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = 1$ si $u > 0$ et $g(u) = 0$ sinon : elle est continue par morceaux, avec la subdivision $(-1,0,1)$. Les deux fonctions sont à valeurs dans $[-1,1]$, et $g \circ f$ est définie sur $[-1,1]$, vaut 1 aux points où $t\sin(1/t) > 0$ et 0 ailleurs.
Pour $t > 0$, le signe de $t\sin(1/t)$ est celui de $\sin(1/t)$, qui est strictement positif pour $\frac{1}{(2k+1)\pi} < t < \frac{1}{2k\pi}$ et strictement négatif pour $\frac{1}{(2k+2)\pi} < t < \frac{1}{(2k+1)\pi}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ces intervalles s'accumulent en 0 : sur tout intervalle $]0,\varepsilon[$, la composée $g \circ f$ prend les valeurs 0 et 1. Elle n'a donc pas de limite en $0^+$, et comme 0 est un point de toute subdivision de $[-1,1]$, elle n'est pas continue par morceaux.




## 2. Intégrale sur un segment

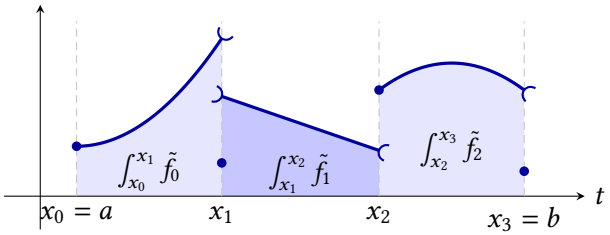
**Définition 8.10 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, soit $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à $f$ et, pour chaque $k$, soit $\tilde{f}_k$ le prolongement continu à $[x_k, x_{k+1}]$ de la restriction de $f$ à $]x_k, x_{k+1}[$. On pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note aussi $\int_a^b f$ cette intégrale.

Chaque terme de la somme est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, définie en première année : l'intégrale de $f$ est la somme des aires algébriques sous chacun des morceaux. Sur la figure, la fonction du dessin de la page 2 : son intégrale est la somme des trois aires colorées, et les valeurs de $f$ aux points de la subdivision n'y contribuent pas.

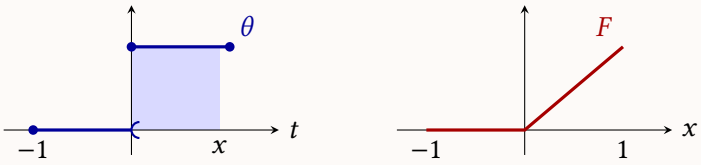


**Exemple 8.11 (La fonction de Heaviside)**

Soit $\theta : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = 0$ si $t < 0$ et $\theta(t) = 1$ si $t \geqslant 0$. Elle est continue par morceaux, avec la subdivision $(-1, 0, 1)$. Calculons $F(x) = \int_{-1}^{x} \theta(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [-1,1]$. Si $x \leqslant 0$, la fonction $\theta$ est nulle sur $]-1, x[$ et $F(x) = 0$. Si $x > 0$, la subdivision $(-1, 0, x)$ est adaptée et

$$F(x) = \int_{-1}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = x.$$

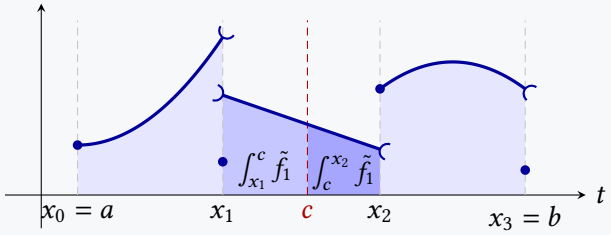
Ainsi $F(x) = \max(x, 0)$ : l'aire sous la courbe de $\theta$ entre $-1$ et $x$ est celle d'un rectangle de hauteur 1 et de largeur $x$ quand $x > 0$.




La fonction $F$ est continue sur $[-1,1]$, mais elle n'est pas dérivable en 0 : sa dérivée à gauche vaut 0 et sa dérivée à droite vaut 1.

**Remarque (La valeur ne dépend pas de la subdivision)**

Pour que la définition ait un sens, il faut vérifier que la somme ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie. Si l'on ajoute un point $c$ à une subdivision adaptée, dans le morceau $]x_k, x_{k+1}[$, le terme $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k$ est remplacé par $\int_{x_k}^{c} \tilde{f}_k + \int_{c}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k$, ce qui ne change pas la somme d'après la relation de Chasles pour la fonction continue $\tilde{f}_k$ : l'aire du morceau est coupée en deux, sans que le total change.




Ainsi raffiner une subdivision adaptée ne modifie pas la somme. Deux subdivisions adaptées $\sigma$ et $\sigma'$ donnent donc la même somme que $\sigma \cup \sigma'$, et par conséquent la même somme l'une que l'autre.

**Remarque (La définition prolonge celle de première année)**

Si $f$ est continue sur $[a, b]$, la subdivision $(a, b)$ est adaptée, le prolongement $\tilde{f}_0$ est $f$ elle-même et la somme se réduit à l'intégrale de première année. Les deux définitions coïncident donc sur les fonctions continues, et l'on peut garder la même notation.

**Remarque (Modifier $f$ en un nombre fini de points)**

Modifier la valeur de $f$ en un nombre fini de points ne change ni le fait qu'elle soit continue par morceaux, ni son intégrale : en ajoutant ces points à la subdivision, les

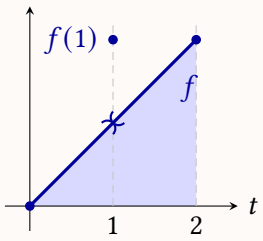
restrictions aux morceaux ouverts, et donc les prolongements $\tilde{f}_k$, sont inchangés. L'intégrale ne voit pas les valeurs de $f$ aux points de la subdivision.

**Exemple 8.12 (Une fonction modifiée en un point)**

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 2$. Elle est continue par morceaux, avec la subdivision $(0,1,2)$ : sur chacun des morceaux $]0,1[$ et $]1,2[$, elle coïncide avec $t \mapsto t$, qui est son prolongement continu. Donc

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t.$$

La valeur $f(1) = 2$ n'intervient pas : l'aire colorée est la même que sous la droite $t \mapsto t$.




**Proposition 8.13 (Propriétés de l'intégrale sur un segment)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. *Linéarité.* Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. *Relation de Chasles.* Pour tout $c \in [a,b]$,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. *Positivité et croissance.* On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ ; si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
4. *Inégalité triangulaire.*
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration**

On choisit une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ adaptée à la fois à $f$ et à $g$ (la réunion de deux subdivisions adaptées), et on note $\tilde{f}_k$, $\tilde{g}_k$ les prolongements continus sur $[x_k, x_{k+1}]$. Chaque propriété est connue pour les fonctions continues sur un segment ; il s'agit de la transporter à travers la somme qui définit l'intégrale.

1. Le prolongement continu de $\lambda f + \mu g$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ est $\lambda\tilde{f}_k + \mu\tilde{g}_k$. On applique la linéarité de l'intégrale des fonctions continues sur chaque morceau, puis on regroupe les sommes.

2. On ajoute $c$ à la subdivision, ce qui ne change pas l'intégrale. Les morceaux se répartissent alors entre ceux inclus dans $[a,c]$ et ceux inclus dans $[c,b]$, et la somme se coupe en deux : la première partie est $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$, calculée avec la subdivision adaptée formée des points de $[a,c]$, la seconde est $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Si $f \geqslant 0$ sur $]x_k, x_{k+1}[$, alors $\tilde{f}_k \geqslant 0$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ par passage à la limite aux bornes, donc chaque terme de la somme est positif. La croissance s'en déduit en appliquant la positivité à $g - f$ et la linéarité.
4. Le prolongement continu de $|f|$ est $\left|\tilde{f}_k\right|$. On écrit

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|\tilde{f}_k(t)\right|\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

par l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ puis celle de l'intégrale des fonctions continues.

□

**Remarque (Le théorème aux quatre hypothèses)**

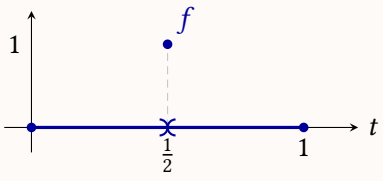
En première année, on a vu que si $f$ est *continue* et *positive* sur $[a,b]$ avec $a < b$, et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est nulle sur $[a,b]$. Ce résultat ne s'étend pas aux fonctions continues par morceaux : l'intégrale ne voit pas les valeurs de $f$ aux points de la subdivision, qui peuvent donc être strictement positives sans que l'intégrale le soit. Dans ce théorème, l'hypothèse de continuité ne se laisse pas affaiblir.

**Exemple 8.14 (Une fonction positive, non nulle, d'intégrale nulle)**

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \neq \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Elle est positive sur $[0,1]$ et n'est pas la fonction nulle. Elle est continue par morceaux, avec la subdivision $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ : sur chacun des deux morceaux ouverts, elle est nulle, et son prolongement continu est la fonction nulle. Donc

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Les hypothèses « positive », « intégrale nulle » et « $a < b$ » sont satisfaites ; c'est la continuité qui manque, en $\frac{1}{2}$.




**Remarque (La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$)**

Soit $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [a,b]$. On a vu qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée : soit $M$ un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$. Pour $x \leqslant y$ dans $[a,b]$, la relation de Chasles, l'inégalité triangulaire puis la croissance donnent

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(y-x).$$

Ainsi $F$ est $M$-lipschitzienne sur $[a,b]$, donc continue. En revanche $F$ n'est pas nécessairement dérivable, comme le montre la fonction de Heaviside : le théorème fondamental de l'analyse, qui affirme que $F$ est une primitive de $f$, utilise la continuité de $f$ et ne s'étend pas.

**Proposition 8.15 (Sommes de Riemann)**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration (hors-programme)**

Soit $(x_0,\dots,x_p)$ une subdivision adaptée à $f$, $M$ un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$ (qui majore aussi les $\left|\tilde{f}_j\right|$, limites de valeurs de $f$), $h=\frac{b-a}{n}$, $t_k=a+kh$ pour $0\leqslant k\leqslant n$, et $S_n$ la somme de l'énoncé. Disons qu'un indice $k\in\{0,\dots,n-1\}$ est *mauvais* si le segment $[t_k,t_{k+1}]$ contient un point de la subdivision, et *bon* sinon.
Un point $x_j$ appartient à au plus deux segments $[t_k,t_{k+1}]$, donc il y a au plus $2(p+1)$ mauvais indices. Leur contribution à $S_n$ est majorée en valeur absolue par $2(p+1)hM$. De même, la réunion des $[t_k,t_{k+1}]$ pour $k$ mauvais a une longueur au plus $2(p+1)h$, et la contribution à $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ des portions de morceaux qu'elle recouvre est majorée en valeur absolue par $2(p+1)hM$. Ces deux quantités tendent vers 0.
Si $k$ est bon, $[t_k,t_{k+1}]$ est inclus dans un unique morceau $]x_j,x_{j+1}[$, sur lequel $f=\tilde{f}_j$. Soit $\varepsilon>0$. Chaque $\tilde{f}_j$ est uniformément continue sur $[x_j,x_{j+1}]$ (théorème de Heine) ; comme ils sont en nombre fini, il existe $\eta>0$ tel que $|u-v|\leqslant\eta$ entraîne $\left|\tilde{f}_j(u)-\tilde{f}_j(v)\right|\leqslant\varepsilon$ pour tout $j$.
Pour $h\leqslant\eta$ et $k$ bon,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\tilde{f}_j(t)\,\mathrm{d}t - hf(t_k)\right| = \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\tilde{f}_j(t)-\tilde{f}_j(t_k)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant h\varepsilon.$$

En sommant sur les bons indices, qui sont au plus $n$, l'écart entre leur contribution à $S_n$ et la partie correspondante de l'intégrale est au plus $nh\varepsilon=(b-a)\varepsilon$. Au total, pour $h\leqslant\eta$,

$$\left|S_n-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 4(p+1)hM+(b-a)\varepsilon,$$

et le membre de droite est inférieur à $(b-a+1)\varepsilon$ dès que $n$ est assez grand. □

## 3. Sur un intervalle quelconque

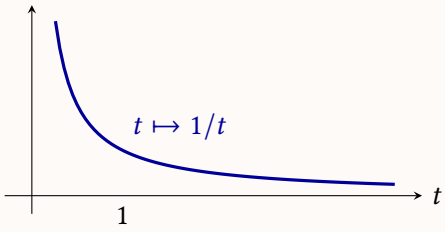
**Définition 8.16 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f:I\to\mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur $I$ si sa restriction à tout segment inclus dans $I$ est continue par morceaux.

**Exemple 8.17 (Une fonction continue)**

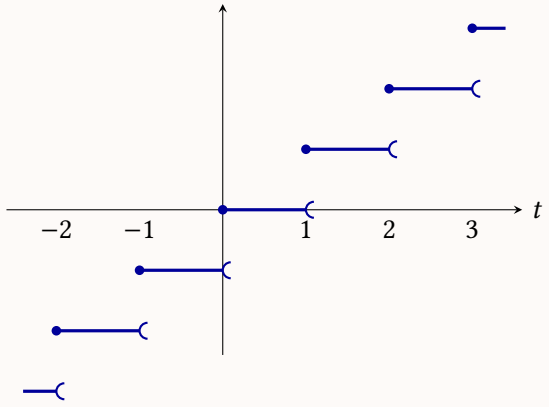
Toute fonction continue sur un intervalle $I$ est continue par morceaux sur $I$ : sa restriction à un segment inclus dans $I$ est continue, donc continue par morceaux. Ainsi $t\mapsto 1/t$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. La définition ne demande rien au voisinage de 0, qui n'appartient pas à l'intervalle : la fonction peut y tendre vers

l'infini.



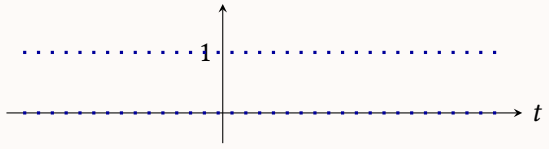

**Exemple 8.18 (La partie entière sur $\mathbb{R}$)**

La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle a une infinité de points de discontinuité, les entiers, mais un segment $[a, b]$ n'en contient qu'un nombre fini, et la restriction à $[a, b]$ est continue par morceaux avec la subdivision formée de $a$, de $b$ et des entiers de $[a, b]$.



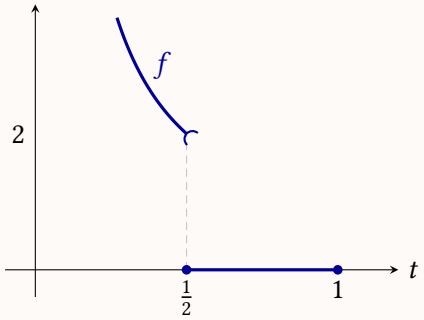

**Exemple 8.19 (L'indicatrice des rationnels sur $\mathbb{R}$)**

La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, qui vaut 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels, n'est continue par morceaux sur aucun segment : on l'a vu sur $[0, 1]$, et l'argument vaut sur tout segment. Elle n'est donc continue par morceaux sur aucun intervalle. Son graphe ne se dessine pas : tout intervalle contient des rationnels et des irrationnels, de sorte que chacune des deux droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$ est « pleine de trous ».



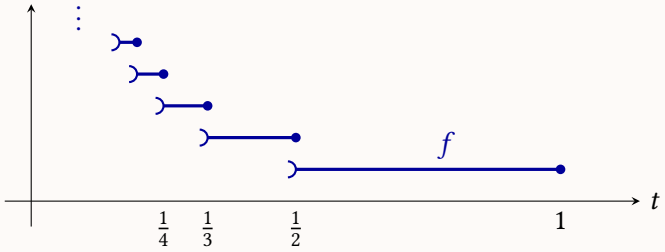

**Exemple 8.20 (Un saut et une explosion)**

Soit $f : ]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1/t$ si $t < \frac{1}{2}$ et $f(t) = 0$ si $t \geqslant \frac{1}{2}$. Soit $[c, d]$ un segment inclus dans $]0, 1]$, donc $c > 0$. Sur $[c, d]$, la fonction $f$ est continue sauf éventuellement en $\frac{1}{2}$, où elle a une limite à gauche finie, 2, et une limite à droite, 0 : elle est continue par morceaux sur $[c, d]$. Ainsi $f$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$, bien qu'elle ne soit pas bornée.




**Exemple 8.21 (Une infinité de sauts vers une borne)**

Soit $f : ]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \lfloor 1/t \rfloor$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, elle vaut $n$ sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ : ses points de discontinuité sont les $\frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$, en nombre infini, et ils s'accumulent en 0. Mais 0 n'appartient pas à l'intervalle : un segment $[c,d]$ inclus dans $]0,1]$ ne contient que les $\frac{1}{n}$ avec $n \leqslant \frac{1}{c}$, en nombre fini, et entre deux d'entre eux la fonction est constante. Ainsi $f$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.




**Proposition 8.22 (Le cas d'un segment)**

Si $I = [a,b]$ est un segment, une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $I$ au sens de cette définition si et seulement si elle l'est au sens de la définition sur un segment.

**Démonstration**

Si $f$ est continue par morceaux sur $I$ au sens de la nouvelle définition, sa restriction au segment $[a,b]$, qui est inclus dans $I$, est continue par morceaux : c'est $f$ elle-même. Réciproquement, si $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, sa restriction à tout segment $[c,d] \subset [a,b]$ l'est d'après la proposition sur les opérations. □

**Proposition 8.23 (Opérations sur un intervalle)**

Soient $I$ un intervalle, $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions $f+g$, $\lambda f$ et $fg$ sont continues par morceaux sur $I$.
2. La restriction de $f$ à tout intervalle $J \subset I$ est continue par morceaux sur $J$.
3. La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur $I$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur $I$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

**Démonstration**

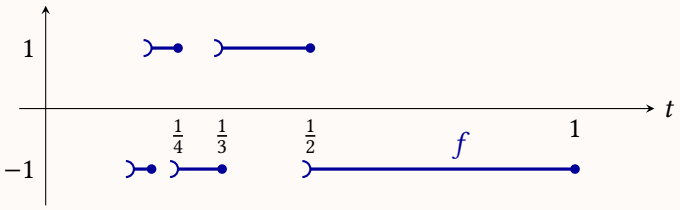
Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $I$. Les restrictions de $f$ et $g$ à $[c,d]$ sont continues par morceaux, donc d'après la proposition sur les opérations sur un segment, celles de $f+g$, $\lambda f$, $fg$ et $|f|$ le sont, ainsi que celles de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ; réciproquement, si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues par morceaux sur $I$, leurs restrictions à $[c,d]$ le sont, donc celle de $f$ aussi. Comme $[c,d]$ est quelconque, cela prouve les points 1, 3 et 4. Pour le point 2, un segment inclus dans $J$ est inclus dans $I$, et la restriction de $f$ à ce segment est continue par morceaux par hypothèse. □

**Remarque (Une infinité de points de discontinuité)**

Une fonction continue par morceaux sur un segment a un nombre fini de points de discontinuité. Sur un intervalle quelconque, ce nombre peut être infini, comme pour la partie entière sur $\mathbb{R}$ ou pour $t \mapsto \lfloor 1/t \rfloor$ sur $]0,1]$, mais pas n'importe comment : chaque segment inclus dans $I$ n'en contient qu'un nombre fini. Les points de discontinuité peuvent donc s'accumuler vers une borne de $I$ qui n'appartient pas à $I$, ou vers $\pm\infty$, mais pas vers un point de $I$ : un segment inclus dans $I$ et contenant ce point en contiendrait une infinité. Les exemples qui suivent vont par deux : la même formule, sur deux intervalles qui ne diffèrent que par un point.

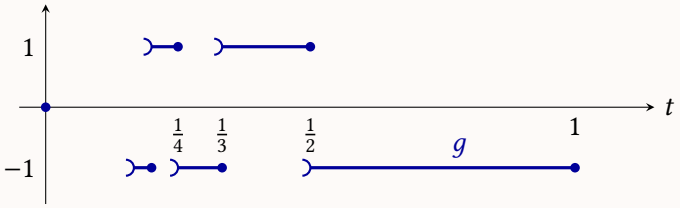
**Exemple 8.24 (Des sauts qui s'accumulent hors de l'intervalle)**

Soit $f : ]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (-1)^{\lfloor 1/t \rfloor}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, elle vaut $(-1)^n$ sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ : elle est bornée, et ses points de discontinuité sont les $\frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$. Montrons qu'elle est continue par morceaux sur $]0,1]$. Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $]0,1]$. Les points $\frac{1}{n}$ qui sont dans $[c,d]$ vérifient $n \leqslant \frac{1}{c}$ : ils sont en nombre fini, et la subdivision de $[c,d]$ formée de $c$, de $d$ et de ces points est adaptée à $f$, qui est constante sur chacun de ses morceaux ouverts. Donc la restriction de $f$ à $[c,d]$ est continue par morceaux, et $f$ l'est sur $]0,1]$.



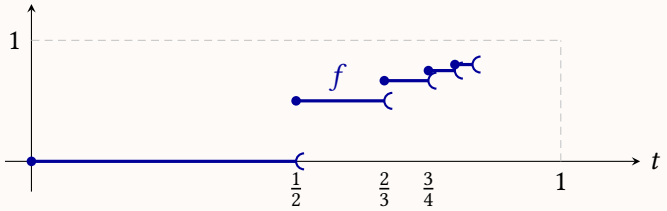

**Exemple 8.25 (Des sauts qui s'accumulent dans l'intervalle)**

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = (-1)^{\lfloor 1/t \rfloor}$ si $t > 0$ et $g(0) = 0$. Montrons que $g$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$, quelle que soit la valeur choisie en 0. Le segment $[0,1]$ est inclus dans l'intervalle $[0,1]$ ; si $g$ était continue par morceaux, il existerait une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[0,1]$ adaptée à $g$, et $g$ serait continue sur le premier morceau $]0,x_1[$. Or ce morceau contient tous les $\frac{1}{n}$ avec $n > \frac{1}{x_1}$, en lesquels $g$ est discontinue. Il n'existe donc pas de subdivision adaptée. La valeur $g(0)$ n'intervient pas : ce sont les sauts qui s'accumulent en 0, point de l'intervalle, qui empêchent la continuité par morceaux.



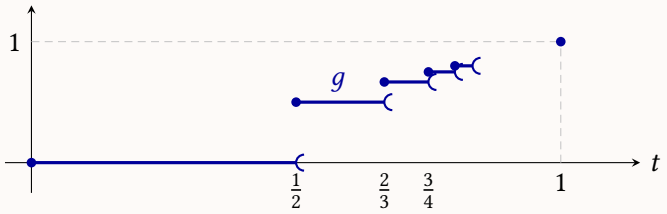

**Exemple 8.26 (Une limite au bord, bord exclu)**

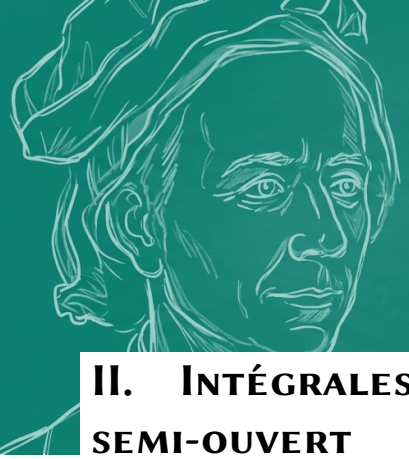
Soit $f : [0,1[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1 - \frac{1}{\lfloor 1/(1-t) \rfloor}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}[$, on a $1-t \in ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, donc $\lfloor 1/(1-t) \rfloor = n$ et $f(t) = 1 - \frac{1}{n}$ : la fonction vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2}[$, puis $\frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$, puis $\frac{2}{3}$ sur $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}[$, et ainsi de suite. Elle est croissante, et tend vers 1 en 1. Ses points de discontinuité sont les $1 - \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$, qui s'accumulent en 1. Un segment $[c,d]$ inclus dans $[0,1[$ vérifie $d < 1$, et ne contient que les $1 - \frac{1}{n}$ avec $n \leqslant \frac{1}{1-d}$, en nombre fini ; entre deux d'entre eux, $f$ est constante. Ainsi $f$ est continue par morceaux sur $[0,1[$.




**Exemple 8.27 (Une limite au bord, bord inclus)**

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec la fonction $f$ précédente sur $[0,1[$, et telle que $g(1) = 1$. Comme $f$ tend vers 1 en 1, la fonction $g$ est continue en 1. Pourtant $g$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ : si elle l'était, il existerait une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[0,1]$ adaptée à $g$, et $g$ serait continue sur le dernier morceau $]x_{n-1}, 1[$, qui contient tous les $1 - \frac{1}{k}$ avec $k > \frac{1}{1-x_{n-1}}$, en lesquels $g$ est discontinue. Avoir une limite au bord, et même y être continue, ne suffit pas : c'est l'accumulation des sauts en un point de l'intervalle qui compte.





# 8 Intégrales généralisées

## II. Intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert

Pour une série $\sum u_n$, on ne donne pas de sens direct à une somme infinie : on forme les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, qui sont des sommes finies, et on regarde si elles ont une limite. On procède de même pour intégrer une fonction sur un intervalle qui n'est pas un segment : on intègre sur un segment $[a, x]$, ce que la section précédente permet, puis on fait tendre $x$ vers la borne manquante. L'analogie avec les séries guide une bonne partie de ce chapitre ; elle a aussi ses limites, qui seront signalées.

### 1. Généralités

**Définition 8.28 (Intégrale généralisée sur $[a, b[$)**

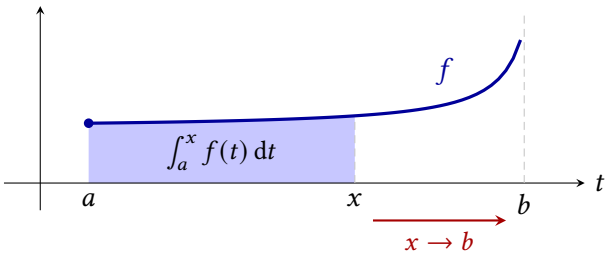
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Pour tout $x \in [a, b[$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, ce qui définit

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* (en $b$) si $F$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $b$. On note alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et aussi $\int_a^b f$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale *diverge* (en $b$).




**Remarque (La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$)**

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Écrire $b \in \overline{\mathbb{R}}$ permet de traiter d'un seul coup deux situations :

- $b$ est un réel, l'intervalle $[a, b[$ est borné et $x \to b$ signifie $x \to b^-$ ;
- $b = +\infty$, l'intervalle est $[a, +\infty[$ et $x \to b$ signifie $x \to +\infty$.

Dans les deux cas, le point $b$ n'appartient pas à l'intervalle, et la fonction $f$ n'a aucune raison d'y être définie, bornée, ou d'y admettre une limite.

**Remarque (Vocabulaire et notation)**

On parle d'intégrale *généralisée*, ou *impropre*, en $b$. La convergence est une propriété, comme pour une série : avant de l'avoir établie, le symbole $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne une question, et non un nombre. On dit aussi que l'on étudie la *nature* de l'intégrale.

**Remarque (Le caractère généralisé ne se lit pas sur les bornes)**

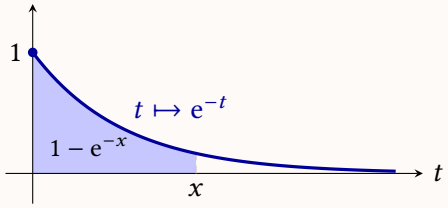
Pour une série, la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ affiche l'infini : on voit qu'il y a un passage à la limite. Pour une intégrale, c'est le cas en $\pm\infty$, mais pas toujours ailleurs. L'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale ordinaire si $f$ est continue par morceaux sur $[0,1]$, et une intégrale généralisée en 0 si $f$ n'est définie, ou continue par morceaux, que sur $]0,1]$ : les bornes s'écrivent de la même façon dans les deux cas.

**Exemple 8.29 (Une exponentielle sur $[0,+\infty[$)**

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. L'aire sous la courbe entre 0 et $x$ se rapproche de 1 sans jamais l'atteindre.

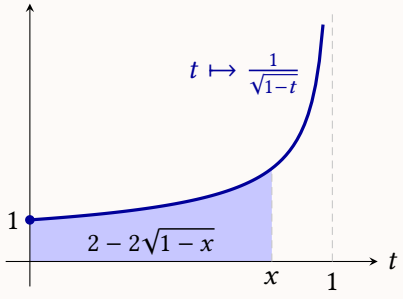



**Exemple 8.30 (Une fonction qui explose en une borne finie)**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$ et tend vers $+\infty$ en 1. Pour $x \in [0,1[$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x} \xrightarrow[x\to1]{} 2.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge et vaut 2 : la région sous la courbe n'est pas bornée, mais son aire est finie.

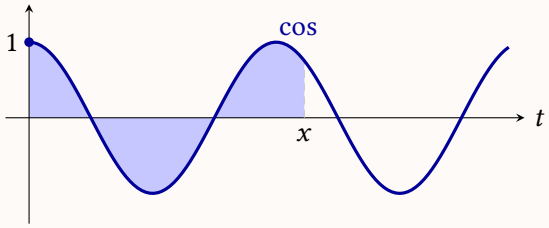


**Exemple 8.31 (Une intégrale qui diverge sans tendre vers l'infini)**

La fonction cos est continue sur $[0, +\infty[$. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x).$$

La fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$ : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Diverger ne signifie pas tendre vers l'infini : ici, l'aire algébrique entre 0 et $x$ oscille entre $-1$ et 1, les parties au-dessus et en dessous de l'axe se compensant sans cesse.




**Remarque (Sur un intervalle $]a, b]$)**

La construction se transpose en échangeant les rôles des bornes. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f$ continue par morceaux sur $]a, b]$. Pour tout $x \in ]a, b]$, l'intégrale $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie, et on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge en $a$ si $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $a$, c'est-à-dire $x \to a^+$ si $a$ est réel, $x \to -\infty$ si $a = -\infty$. On note alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

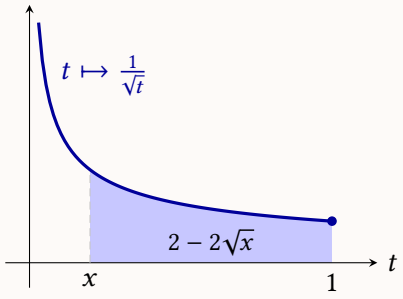
Tout ce qui est dit dans cette section pour $[a, b[$ vaut pour $]a, b]$, en remplaçant $b$ par $a$ : le problème est maintenant à gauche.

**Exemple 8.32 (L'inverse de la racine sur $]0, 1]$)**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$ et tend vers $+\infty$ en 0. Pour $x \in ]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 2.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge en 0 et vaut 2. C'est le symétrique de l'exemple précédent par $t \mapsto 1 - t$.



**Remarque (Un seul côté ouvert)**

Dans cette section, l'intervalle est fermé d'un côté et ouvert de l'autre : il n'y a qu'une borne qui pose problème. Sur $[a, b[$, la fonction est continue par morceaux sur chaque segment $[a, x]$, et la seule question est le comportement de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en $b$. Si l'intervalle est ouvert des deux côtés, comme $]0, +\infty[$ pour $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, les deux bornes posent chacune leur problème, et il faut les traiter séparément : c'est l'objet de la section suivante.

**Remarque (Tendre vers zéro ne suffit pas)**

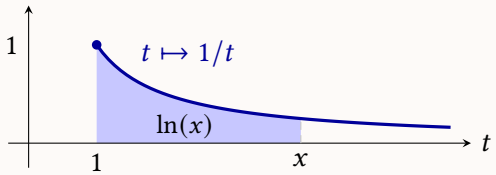
Pour qu'une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il ne suffit pas que $f$ tende vers 0 en $+\infty$. L'aire sous la courbe peut être infinie même si la courbe se rapproche de l'axe : tout dépend de la vitesse à laquelle elle s'en rapproche. L'exemple qui suit en est le modèle, et c'est l'analogue de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, qui diverge bien que son terme général tende vers 0.

**Exemple 8.33 (L'inverse sur $[1, +\infty[$)**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. Pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge. La courbe se rapproche de l'axe, mais trop lentement : l'aire entre 1 et $x$ croît comme $\ln(x)$, sans borne.




**Remarque (Tendre vers zéro n'est pas nécessaire non plus)**

Pour une série, la convergence impose $u_n \to 0$, car $u_n = S_n - S_{n-1}$. Rien de tel pour les intégrales : la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ impose $\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x+1) - F(x) \to 0$, ce qui ne dit rien sur les valeurs de $f$ en chaque point. L'exemple qui suit est une fonction continue dont l'intégrale converge et qui ne tend pas vers 0.
Ce qui reste vrai : si $f$ admet une limite $\ell$ en $+\infty$ et si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\ell = 0$. En effet, si par exemple $\ell > 0$, il existe $A \geqslant a$ tel que $f \geqslant \ell/2$ sur $[A, +\infty[$, d'où par croissance $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}(x - A) \to +\infty$, et l'intégrale diverge.

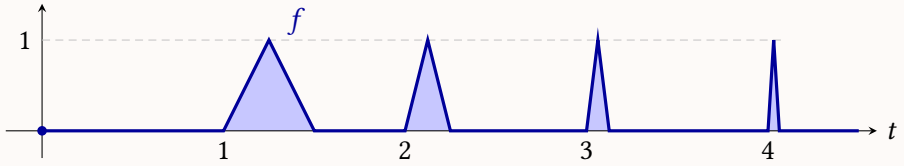
**Exemple 8.34 (Des pics de plus en plus fins)**

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la fonction continue, nulle en dehors des intervalles $[n, n + 2^{-n}]$ pour $n \geqslant 1$, et dont le graphe sur chacun de ces intervalles est un triangle de hauteur 1 : $f$ est affine sur chaque moitié de l'intervalle, nulle aux deux extrémités et vaut 1 au milieu. Le $n$-ième triangle a pour aire $\frac{1}{2} \cdot 2^{-n} \cdot 1 = 2^{-n-1}$.
Soit $x \geqslant 1$ et $n = \lfloor x \rfloor$. Les triangles d'indices $1, \ldots, n-1$ sont contenus dans $[0, x]$, car le $(n-1)$-ième se termine en $n - 1 + 2^{1-n} \leqslant n \leqslant x$ ; ceux d'indice au moins $n + 1$

commencent en $n+1 > x$, hors de $[0,x]$. Comme $f \geqslant 0$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k-1} \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{-k-1}, \quad \text{soit} \quad \frac{1-2^{1-n}}{2} \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1-2^{-n}}{2}.$$

Quand $x \to +\infty$, $n \to +\infty$ et les deux bornes tendent vers $\frac{1}{2}$ : l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. Pourtant $f$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$, puisque $f(n+2^{-n-1}) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.




**Proposition 8.35 (Relation de Chasles et nature)**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ et $c \in [a,b[$.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature : l'une converge si et seulement si l'autre converge.
2. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration**

Pour $x \in [c,b[$, la relation de Chasles sur le segment $[a,x]$ donne

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le premier terme du membre de droite est une constante. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet donc une limite finie en $b$ si et seulement si $x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en admet une, et les limites vérifient alors l'égalité annoncée. □

**Remarque (La relation de Chasles a un sens)**

La formule du second point n'est écrite que lorsque ses deux membres existent. Le premier point garantit que c'est le cas dès que l'un des deux existe : on ne peut pas avoir un membre convergent et l'autre divergent. Hors convergence, la formule n'a pas de sens, et on ne l'écrit pas.

**Remarque (La nature se décide au bord)**

D'après le premier point, la nature de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de $a$, ni des valeurs de $f$ sur un segment $[a,c]$ : on peut modifier $f$ sur $[a,c]$, en gardant la continuité par morceaux, sans changer la nature de l'intégrale. Seul compte le comportement de $f$ au voisinage de $b$. C'est ce qui justifie le vocabulaire « converge en $b$ », et c'est

ainsi qu'on procède en pratique : pour discuter la nature d'une intégrale, on étudie $f$ près de la borne qui pose problème, et rien d'autre.

## 2. Exemples de référence

Les intégrales qui suivent se calculent directement. Elles serviront de points de comparaison dans la suite : la nature d'une intégrale plus compliquée s'obtiendra souvent en comparant la fonction à l'une d'elles.

**Proposition 8.36 (Intégrales de référence)**

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
4. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

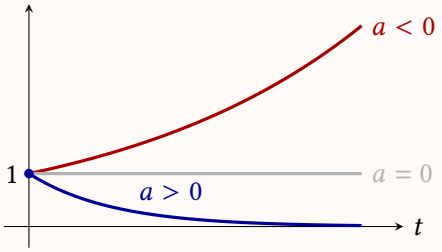
Les deuxième et troisième intégrales sont appelées *intégrales de Riemann*, en $+\infty$ et en 0. Les quatre exemples qui suivent démontrent chacun des points. Seule la nature de ces intégrales est au programme : les calculs donnent aussi leur valeur, mais celle-ci n'est pas un résultat de cours, et il faudra la recalculer à chaque fois qu'on en aura besoin.

**Exemple 8.37 (L'exponentielle sur $[0, +\infty[$)**

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Si $a \neq 0$, pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{a}.$$

Si $a > 0$, $\mathrm{e}^{-ax} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et l'intégrale converge, de valeur $\frac{1}{a}$. Si $a < 0$, $\mathrm{e}^{-ax} \to +\infty$ et l'intégrale diverge. Si $a = 0$, $\int_0^x \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = x \to +\infty$ et l'intégrale diverge.

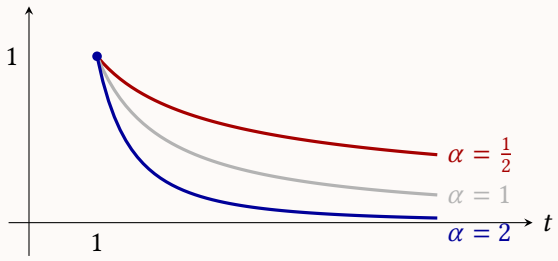



**Exemple 8.38 (L'intégrale de Riemann en $+\infty$)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Si $\alpha \neq 1$, pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Si $\alpha > 1$, l'exposant $1-\alpha$ est négatif, $x^{1-\alpha} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et l'intégrale converge, de valeur $\frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$. Si $\alpha < 1$, $x^{1-\alpha} \to +\infty$ et l'intégrale diverge. Si $\alpha = 1$, $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x) \to +\infty$ et l'intégrale diverge : c'est l'exemple de la sous-section précédente.

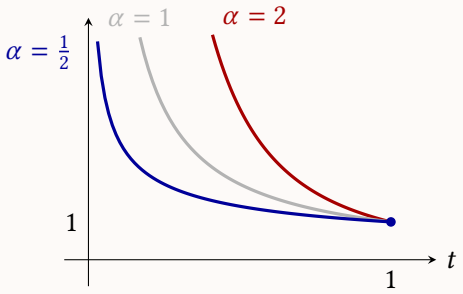



**Exemple 8.39 (L'intégrale de Riemann en 0)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$. Si $\alpha \neq 1$, pour $x \in ]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1 - x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Si $\alpha < 1$, l'exposant $1 - \alpha$ est positif, $x^{1-\alpha} \to 0$ quand $x \to 0$ et l'intégrale converge, de valeur $\frac{1}{1-\alpha}$. Si $\alpha > 1$, $x^{1-\alpha} \to +\infty$ et l'intégrale diverge. Si $\alpha = 1$, $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x) \to +\infty$ et l'intégrale diverge.




**Remarque (Les deux intégrales de Riemann)**

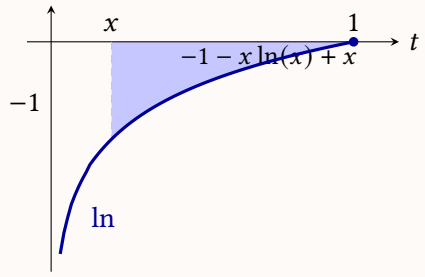
Les conditions sont inversées d'un cas à l'autre. En $+\infty$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ tend vers 0 dès que $\alpha > 0$, mais il faut $\alpha > 1$ pour que la décroissance soit assez rapide. En 0, elle tend vers $+\infty$ dès que $\alpha > 0$, mais l'aire reste finie tant que $\alpha < 1$ : l'explosion est assez lente. Le cas $\alpha = 1$ diverge des deux côtés.

**Exemple 8.40 (Le logarithme sur $]0, 1]$)**

La fonction ln est continue sur $]0, 1]$ et tend vers $-\infty$ en 0. Une primitive de ln est $t \mapsto t\ln(t) - t$, donc pour $x \in ]0, 1]$,

$$\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x.$$

Par croissances comparées, $x\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc, et vaut $-1$ : l'aire algébrique entre la courbe et l'axe est finie, bien que la courbe descende vers $-\infty$.

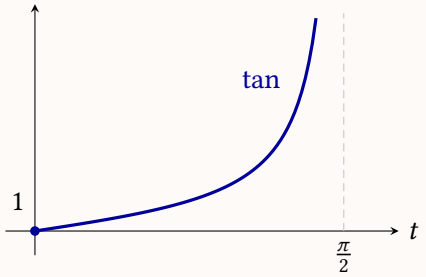



**Exemple 8.41 (La tangente sur $[0, \pi/2[$)**

La fonction tan est continue sur $[0, \pi/2[$ et tend vers $+\infty$ en $\pi/2$. Pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$\int_0^x \tan(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = [-\ln(\cos(t))]_0^x = -\ln(\cos(x)).$$

Quand $x \to \pi/2$, $\cos(x) \to 0^+$ et $-\ln(\cos(x)) \to +\infty$ : l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Contrairement à $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en 1, la tangente explose trop vite en $\pi/2$ pour que l'aire reste finie.




**Exemple 8.42 (Nature de $\int_0^1 t^\alpha \ln(t)\,\mathrm{d}t$)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^\alpha \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. Discutons la nature de l'intégrale selon $\alpha$.

*Cas* $\alpha = -1$. Une primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est $t \mapsto \frac{\ln(t)^2}{2}$, donc pour $x \in ]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$

L'intégrale diverge.

*Cas* $\alpha \neq -1$. Pour $x \in ]0, 1]$, une intégration par parties sur le segment $[x, 1]$ donne

$$\int_x^1 t^\alpha \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^\alpha}{\alpha+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^{\alpha+1}\ln(x)}{\alpha+1} - \frac{1 - x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}.$$

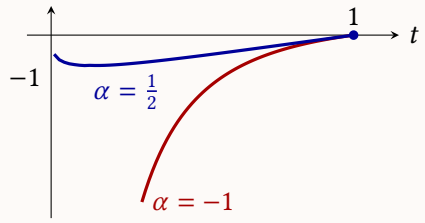
Si $\alpha > -1$, l'exposant $\alpha + 1$ est positif : $x^{\alpha+1} \to 0$ et, par croissances comparées, $x^{\alpha+1}\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$. L'intégrale converge et vaut $-\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

Si $\alpha < -1$, on regroupe les termes en $x^{\alpha+1}$ :

$$\int_x^1 t^\alpha \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(\alpha+1)^2} + x^{\alpha+1}\left(\frac{1}{(\alpha+1)^2} - \frac{\ln(x)}{\alpha+1}\right).$$

Quand $x \to 0$, $x^{\alpha+1} \to +\infty$ car $\alpha + 1 < 0$, et $-\frac{\ln(x)}{\alpha+1} \to -\infty$ car $-\ln(x) \to +\infty$ et $\alpha + 1 < 0$. La parenthèse tend vers $-\infty$, le produit aussi : l'intégrale diverge.

En résumé, $\int_0^1 t^\alpha \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.




## 3. Critères

**Remarque (À quoi servent ces critères)**

Comme pour les séries, on calcule rarement une intégrale généralisée pour savoir si elle converge : on se ramène aux exemples de référence en comparant la fonction à l'une des fonctions de référence. Les deux résultats de cette sous-section sont les plus simples des critères de comparaison. Ils seront pourtant peu utilisés tels quels : ils servent de fondation à ceux de la quatrième section, sur l'intégrabilité, qui sont ceux qu'on emploie en pratique.

**Proposition 8.43 (Fonctions positives)**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs positives. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est majorée sur $[a, b[$. Dans le cas contraire, $F(x) \to +\infty$ quand $x \to b$.

**Démonstration**

La fonction $F$ est croissante sur $[a, b[$ : pour $a \leqslant x \leqslant y < b$, la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale donnent

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

D'après le théorème de la limite monotone, $F$ admet une limite en $b$, finie si $F$ est majorée, égale à $+\infty$ sinon. L'intégrale converge donc exactement quand $F$ est majorée. □

**Remarque (Diverger, pour une fonction positive, c'est tendre vers l'infini)**

L'exemple de cos sur $[0, +\infty[$ montrait une intégrale qui diverge sans que $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$ tende vers l'infini. Ce n'est plus possible pour une fonction positive : l'aire sous la courbe croît avec $x$, et soit elle reste bornée, soit elle tend vers $+\infty$. C'est l'analogue des séries à termes positifs, dont les sommes partielles convergent ou tendent vers $+\infty$.

**Exemple 8.44 (Une intégrale qu'on ne sait pas calculer)**

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et elle n'a pas de primitive qui s'exprime avec les fonctions usuelles : on ne peut pas calculer $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On peut en revanche la majorer. Pour $t \geqslant 1$, on a $t^2 \geqslant t$, donc $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ ; pour $t \in [0,1]$, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1$. Pour $x \geqslant 1$, par la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale sur un segment,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 + \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 2.$$

Pour $x \in [0,1]$, la même majoration donne $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$. La fonction $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est donc majorée par 2, et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Sa valeur, qui vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ne s'obtient pas par ce raisonnement.

**Remarque**

La proposition s'adapte à toutes les situations voisines.

- Si $f$ est à valeurs négatives sur $[a, b[$, on l'applique à $-f$ : l'intégrale converge si et seulement si $F$ est minorée, et sinon $F(x) \longrightarrow -\infty$.
- Si $f$ est positive sur $]a, b]$, la fonction $G : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est décroissante, et l'intégrale converge en $a$ si et seulement si $G$ est majorée.
- Il suffit que $f$ soit positive *au voisinage de b*, c'est-à-dire sur un intervalle $[c, b[$ avec $c \in [a, b[$. En effet, la nature de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est celle de $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$, à laquelle la proposition s'applique.

**Exemple 8.45 (Une fonction négative sur $]0,1]$)**

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$ et à valeurs négatives, car $\ln(t) \leqslant 0$ et $1 + t > 0$. Pour $t \in ]0,1]$, on a $1 + t \geqslant 1$, d'où $\frac{\ln(t)}{1+t} \geqslant \ln(t)$ puisque $\ln(t) \leqslant 0$. Pour $x \in ]0,1]$, par croissance de l'intégrale,

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1 - x\ln(x) + x \geqslant -1,$$

car $-x\ln(x) \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$. La fonction $G : x \mapsto \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $]0,1]$ : quand $x$ diminue, on ajoute l'intégrale d'une fonction négative. Elle est minorée par $-1$, donc elle admet une limite finie en 0 : l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

**Théorème 8.46 (Critère de majoration)**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f, g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que

$$0 \leqslant f \leqslant g \quad \text{sur } [a, b[.$$

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et

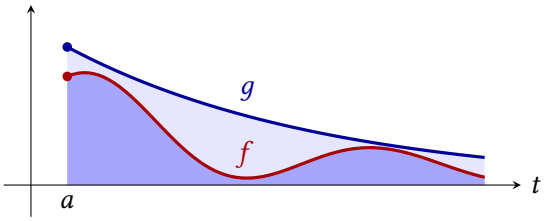
$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration**

Pour $x \in [a, b[$, la croissance de l'intégrale sur le segment $[a, x]$ donne

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $g$ est positive, donc $x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante, et sa limite en $b$, qui existe par hypothèse, la majore : $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée par $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$, et comme $f$ est positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge d'après la proposition précédente. L'encadrement s'obtient en faisant tendre $x$ vers $b$ dans celui de $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □




**Exemple 8.47 (Une majoration par une intégrale de Riemann)**

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)^2}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et, pour $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\sin(t)^2}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$), donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. On n'a pas calculé de primitive, et on ne connaît pas la valeur de l'intégrale.

**Exemple 8.48 (Une majoration en une borne finie)**

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$ et, pour $t \in ]0, 1]$, comme $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), donc $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge en 0, d'après le théorème transposé à un intervalle $]a, b]$.

**Exemple 8.49 (Une majoration au voisinage de la borne seulement)**

La fonction $t \mapsto te^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Pour $t \geqslant 0$, on a $t \leqslant e^{t/2}$ : la fonction $t \mapsto e^{t/2} - t$ a pour dérivée $\frac{1}{2}e^{t/2} - 1$, négative puis positive, et son minimum, atteint en $t = 2\ln 2$, vaut $2 - 2\ln 2 > 0$. Donc, pour $t \geqslant 0$,

$$0 \leqslant te^{-t} \leqslant e^{t/2}e^{-t} = e^{-t/2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge ($a = \frac{1}{2} > 0$), donc $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. On aurait pu se contenter d'une majoration sur $[1, +\infty[$ : seule la borne $+\infty$ pose problème, et la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de la fonction à son voisinage.

**Remarque (La contraposée : divergence par minoration)**

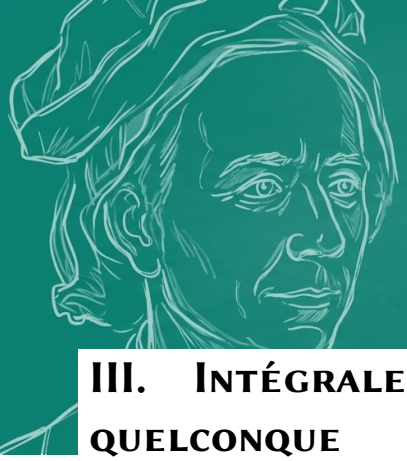
Le théorème s'énonce aussi par sa contraposée. Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge : une fonction plus grande qu'une fonction positive d'intégrale divergente a elle aussi une intégrale divergente. Le théorème ne dit rien dans les deux autres cas : si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, ou si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on ne peut rien conclure sur l'autre intégrale.

**Exemple 8.50 (Une divergence par minoration)**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t)}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Pour $t \geqslant 1$, l'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ donne

$$\frac{1}{\ln(1+t)} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}$ diverge : la fonction est positive et plus grande qu'une fonction d'intégrale divergente.



# 8 Intégrales généralisées

## III. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

La section précédente ne traitait qu'une borne à la fois : l'intervalle était fermé d'un côté, et seule l'autre extrémité posait question. On passe maintenant aux intervalles ouverts aux deux extrémités, finies ou non. Le principe est de couper l'intervalle en un point intermédiaire et d'examiner chaque borne séparément, avec les outils de la section précédente.

### 1. Généralités

**Définition 8.51 (Intégrale généralisée sur $]a,b[$)**

Soient $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ et $c \in ]a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si les deux intégrales généralisées

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(généralisée en } a\text{)} \qquad \text{et} \qquad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(généralisée en } b\text{)}$$

convergent toutes les deux. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale *diverge*.

La première intégrale est celle d'une fonction continue par morceaux sur $]a,c]$, la seconde celle d'une fonction continue par morceaux sur $[c,b[$ : ce sont les objets de la section précédente. La définition dépend en apparence du point $c$ choisi ; la proposition suivante montre qu'il n'en est rien.

**Proposition 8.52 (Indépendance du point de coupure)**

Avec les notations de la définition, la nature de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et, en cas de convergence, sa valeur ne dépendent pas du choix de $c \in ]a,b[$.

**Démonstration**

Soient $c$ et $c'$ dans $]a,b[$, avec $c < c'$. Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur le segment $[c,c']$, de sorte que l'intégrale $\int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale ordinaire.
D'après la proposition sur la relation de Chasles et la nature, appliquée sur $[c,b[$, les intégrales $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. De même, appliquée sur $]a,c']$, les intégrales $\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. La condition « les deux intégrales convergent » est donc la même pour $c$ et pour $c'$ : la nature ne dépend pas du point de coupure.
En cas de convergence, la même proposition donne les égalités

$$\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les deux valeurs coïncident. □

**Remarque (Convergence en $a$ et en $b$)**

On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge en a* si $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et qu'elle *converge en b* si $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; d'après la proposition, ces deux propriétés ne dépendent pas de $c$. L'intégrale converge si et seulement si elle converge en $a$ et en $b$. Il suffit donc d'une divergence à l'une des deux bornes pour que l'intégrale diverge, même si tout se passe bien à l'autre.

**Remarque (Les intervalles fermés d'un côté)**

Si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, on peut aussi la voir comme une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$. Les deux points de vue donnent la même chose : pour $c \in ]a, b[$, l'intégrale $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale sur un segment, et la fonction $x \mapsto \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$, continue sur $[a, c]$, tend vers cette intégrale quand $x \to a$. La convergence en $a$ est automatique, et seule la borne $b$ reste à étudier. En pratique, on ne se pose la question de la convergence qu'aux bornes qui ne sont pas dans l'intervalle.

**Exemple 8.53 (Une exponentielle sur $\mathbb{R}$)**

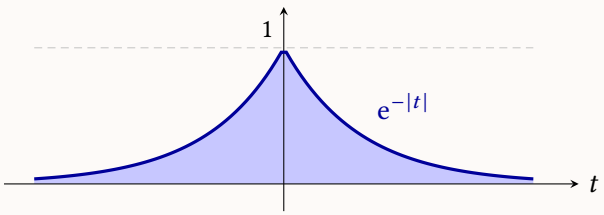
La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On coupe en $c = 0$.

- En $+\infty$ : pour $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-|t|} = \mathrm{e}^{-t}$, et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1.
- En $-\infty$ : pour $t \leqslant 0$, $\mathrm{e}^{-|t|} = \mathrm{e}^{t}$, et pour $x \leqslant 0$,

$$\int_x^0 \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{t}\right]_x^0 = 1 - \mathrm{e}^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1.$$

  L'intégrale $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge donc et vaut 1 + 1 = 2.



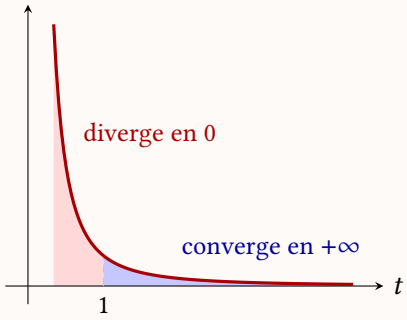

**Exemple 8.54 (Une intégrale de Riemann sur $]0, +\infty[$)**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On coupe en $c = 1$.

- En $+\infty$ : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, car $\alpha = 2 > 1$.

— En 0 : $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann divergente, car $\alpha = 2 \geqslant 1$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge en $+\infty$ mais diverge en 0 : elle diverge. Plus généralement, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge pour tout $\alpha$, car la convergence en $+\infty$ demande $\alpha > 1$ et la convergence en 0 demande $\alpha < 1$.



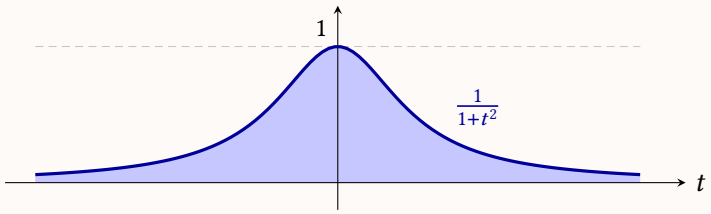

**Exemple 8.55 (Une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$)**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de primitive arctan. On coupe en $c = 0$.

— En $+\infty$ : pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

— En $-\infty$ : pour $x \leqslant 0$, $\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut $\pi$.




**Exemple 8.56 (Deux bornes finies)**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$ et tend vers $+\infty$ aux deux bornes. La fonction $t \mapsto \arcsin(2t-1)$ est dérivable sur $]0,1[$, de dérivée

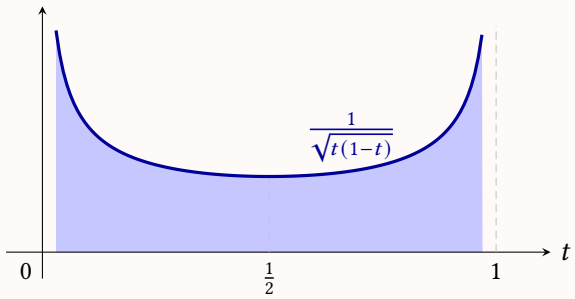
$$\frac{2}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4t-4t^2}} = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

On coupe en $c = \frac{1}{2}$, où $\arcsin(2c-1) = 0$.

— En 1 : pour $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, $\int_{1/2}^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \arcsin(2x-1) \xrightarrow[x\to1]{} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

— En 0 : pour $x \in ]0, \frac{1}{2}]$, $\int_x^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = -\arcsin(2x-1) \xrightarrow[x\to0]{} -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ converge et vaut $\pi$.




**Remarque (Deux limites indépendantes)**

La définition demande la convergence en $a$ *et* en $b$, obtenue par deux passages à la limite séparés : $x \to a$ dans $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $y \to b$ dans $\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t$, les deux variables $x$ et $y$ étant indépendantes. En particulier, pour une intégrale sur $\mathbb{R}$, on ne définit pas $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ comme la limite de $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$ : cette limite peut exister alors que l'intégrale diverge, et sa valeur dépend de la façon dont les deux bornes sont liées. L'exemple suivant le montre.

**Exemple 8.57 (Prendre les deux limites en même temps)**

Imaginons qu'on définisse $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ comme la limite de $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$, en faisant tendre les deux bornes vers l'infini en même temps. Les problèmes s'accumulent.

*Premier problème.* Pour $x > 0$,

$$\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^{x} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 0,$$

et cette quantité tend vers 0 : l'aire positive sur $[0, x]$ et l'aire négative sur $[-x, 0]$ se compensent exactement. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ « convergerait » donc, de valeur 0, alors que $\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \to +\infty$ : elle diverge en $+\infty$ au sens de la section précédente, et de même en $-\infty$.

*Deuxième problème.* Le résultat dépend du centre de la fenêtre. Pour $x > 0$,

$$\int_{-x+1}^{x+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} = 2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

et une fenêtre centrée en $-1$ donnerait $-\infty$. Rien ne privilégie le centre 0 : pour $t \mapsto t - 1$, le centre naturel est 1, et

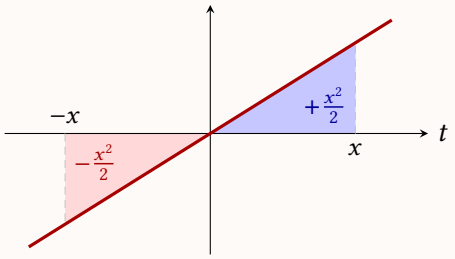
$$\int_{1-x}^{1+x} (t-1)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{alors que} \qquad \int_{-x}^{x} (t-1)\,\mathrm{d}t = -2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty.$$

Si l'on admet les fenêtres centrées en un point quelconque, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)\,\mathrm{d}t$ « convergent » toutes les deux, de valeur 0.

*Troisième problème : la linéarité est perdue.* La différence des deux fonctions est la constante 1, et pour tout centre $c$,

$$\int_{c-x}^{c+x} 1\,\mathrm{d}t = 2x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Deux intégrales « convergentes » dont la différence diverge, quelle que soit la fenêtre : aucune des propriétés qui suivent ne survivrait à une telle définition. C'est pourquoi on impose deux limites indépendantes.




**Proposition 8.58 (Linéarité)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, dont les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, et soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration**

Soit $c\in]a,b[$. Pour $x\in[c,b[$, la linéarité de l'intégrale sur le segment $[c,x]$ donne

$$\int_c^x (\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, les deux intégrales du membre de droite ont une limite finie quand $x\to b$, donc le membre de gauche aussi, et sa limite est $\lambda\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$. Le même raisonnement en $a$, avec $\int_x^c$ pour $x\in]a,c]$, donne la convergence en $a$ et la valeur $\lambda\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t$. On ajoute les deux. □

**Remarque (Deux intégrales convergentes sur trois)**

L'égalité

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

fait intervenir trois intégrales. Dès que deux d'entre elles convergent, la troisième converge et l'égalité est vraie : c'est la proposition si ce sont celles de $f$ et de $g$ ; si ce sont celles de $f+g$ et de $f$, on applique la proposition à $g=(f+g)-f$, et de même avec $g$. On peut donc tourner l'égalité dans tous les sens, isoler le terme qu'on veut, *à condition* d'avoir établi la convergence d'au moins deux des trois intégrales. Avant d'écrire une telle égalité, on dit lesquelles.

**Remarque (A contrario)**

Si l'une des trois intégrales diverge, au moins une autre diverge aussi : sinon, deux convergeraient, et la troisième avec elles. En particulier, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ diverge. En revanche, si les deux

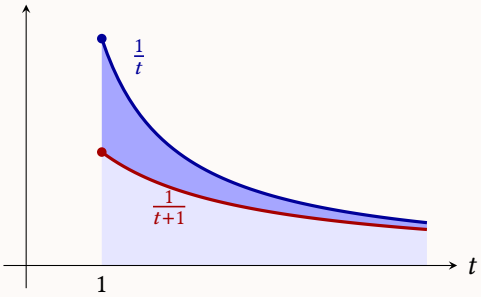
intégrales de $f$ et de $g$ divergent, on ne peut rien dire de celle de $f+g$ : l'exemple suivant montre qu'elle peut converger.

**Exemple 8.59 (Une différence de deux intégrales divergentes)**

Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ divergent : la première est l'intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$, et pour la seconde, $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(x+1) - \ln 2 \longrightarrow +\infty$. Pourtant, pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln(t) - \ln(t+1)\right]_1^x = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln 2.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge et vaut $\ln 2$. Sur la figure, l'aire sous chacune des deux courbes est infinie, mais l'aire comprise entre elles est finie. Écrire cette intégrale comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ n'aurait aucun sens : une seule des trois intégrales converge.




**Proposition 8.60 (Relation de Chasles)**

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ et $c \in ]a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors les intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration**

C'est la définition, écrite avec le point de coupure $c$ : la proposition d'indépendance du point de coupure garantit qu'elle vaut pour tout $c \in ]a,b[$, et pas seulement pour celui qu'on avait fixé au départ. □

**Remarque (Chasles et la nature)**

La réciproque est vraie aussi, c'est encore la définition : si les deux morceaux convergent, l'intégrale converge. On retrouve le lien entre Chasles et la nature vu sur un intervalle semi-ouvert : la formule n'est écrite que lorsque ses trois termes existent, et l'existence de l'un des membres entraîne celle de l'autre. En appliquant la relation deux fois, avec $c < d$ dans $]a,b[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t + \int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

où le terme du milieu est une intégrale sur un segment. Modifier $f$ sur $[c,d]$, en

gardant la continuité par morceaux, ne change donc ni la convergence en $a$, ni celle en $b$ : la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de $f$ au voisinage de chacune des deux bornes.

**Proposition 8.61 (Positivité et croissance)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$, à valeurs réelles, dont les intégrales convergent.

1. Si $f \geqslant 0$ sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. Si $f \leqslant g$ sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Démonstration**

Soit $c \in ]a,b[$.

1. Pour $x \in [c,b[$, la positivité de l'intégrale sur le segment $[c,x]$ donne $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Une limite de quantités positives est positive, donc $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. De même $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, et la somme est positive.
2. La fonction $g-f$ est positive, et son intégrale converge par linéarité. D'après le premier point et la linéarité,

$$0 \leqslant \int_a^b (g(t)-f(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

**Remarque (Intégrale nulle d'une fonction continue positive)**

Soit $f$ continue et positive sur $]a,b[$, d'intégrale convergente et nulle. Alors $f$ est nulle sur $]a,b[$. En effet, soit $[c,d] \subset ]a,b[$ un segment. Par la relation de Chasles et la positivité,

$$0 \leqslant \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t + \int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction $f$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[c,d]$ avec $c<d$ : elle est nulle sur $[c,d]$. Tout point de $]a,b[$ appartient à un tel segment, donc $f$ est nulle.

**Proposition 8.62 (Fonctions à valeurs complexes)**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, et alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

**Démonstration**

Soit $c \in ]a,b[$.

1. Pour $x \in [c,b[$, par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes sur un segment,
$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_c^x \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Une fonction à valeurs complexes a une limite finie en $b$ si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire en ont une, et la limite se lit alors partie par partie. Or la partie réelle du membre de gauche est $\int_c^x \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t$, et sa partie imaginaire est $\int_c^x \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t$. On obtient l'équivalence et l'égalité en $b$, puis de même en $a$, et on ajoute.
2. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, les intégrales de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ convergent d'après le premier point. Comme $\operatorname{Re}\overline{f} = \operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im}\overline{f} = -\operatorname{Im} f$, le premier point appliqué à $\overline{f}$ donne la convergence de $\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ et
$$\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

□

**Exemple 8.63 (Une exponentielle complexe)**

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$. Pour $x \geqslant 0$,
$$\int_0^x \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{z}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-zx}}{z}, \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{e}^{-zx}| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(z)\,x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$ converge donc et vaut $\frac{1}{z}$. Avec $z = 1-\mathrm{i}$, on a $\mathrm{e}^{-zt} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$, donc, en identifiant parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$,
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
Ces deux intégrales réelles convergent d'après la proposition, sans qu'on ait eu à les étudier séparément.

## 2. Techniques de calculs

Les deux outils de calcul de première année, l'intégration par parties et le changement de variable, s'étendent aux intégrales généralisées. Dans les deux cas, le résultat porte d'abord sur la nature des intégrales, et ensuite seulement sur leur valeur.

**Théorème 8.64 (Intégration par parties)**

Soient $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$, $g$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que le produit $fg$ admet une limite finie en $a$ et une limite finie en $b$, et on note
$$[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t).$$
1. Les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. En cas de convergence,
$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration**

Soit $c \in ]a,b[$. Pour $x \in [c,b[$, les fonctions $f$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[c,x]$, et l'intégration par parties de première année donne

$$\int_c^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(c)g(c) - \int_c^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to b$, le terme $f(x)g(x)$ a une limite finie par hypothèse, et $f(c)g(c)$ est une constante. Le membre de gauche a donc une limite finie si et seulement si $\int_c^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ en a une : les intégrales de $fg'$ et de $f'g$ sont de même nature en $b$. En cas de convergence, le passage à la limite donne

$$\int_c^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le même raisonnement sur $]a,c]$, avec $\int_x^c$ pour $x \in ]a,c]$, donne la même nature en $a$ et

$$\int_a^c f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(c)g(c) - \lim_{t\to a} f(t)g(t) - \int_a^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les deux intégrales sont donc de même nature sur $]a,b[$, et en cas de convergence, la somme des deux égalités est la formule annoncée : les termes $f(c)g(c)$ se compensent. □

**Remarque (Le crochet désigne une différence de limites)**

Sur un segment, $[f(t)g(t)]_a^b$ est la différence des valeurs de $fg$ en $b$ et en $a$. Ici, $fg$ n'est pas forcément définie aux bornes, et le crochet désigne la différence des limites. C'est l'hypothèse du théorème : ces deux limites existent et sont finies. Sans elle, le théorème ne s'applique pas. En particulier, l'hypothèse ne porte pas sur $f$ et $g$ séparément : le produit peut avoir une limite finie alors qu'un des deux facteurs tend vers l'infini, comme $t\ln(t)$ en 0.

**Remarque (Fonctions de classe $C^1$ par morceaux)**

Une fonction $f$ est *de classe $C^1$ par morceaux* sur un segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ telle que, pour chaque $k$, la restriction de $f$ à $]x_k, x_{k+1}[$ est de classe $C^1$ et se prolonge en une fonction de classe $C^1$ sur $[x_k, x_{k+1}]$ : $f$ et $f'$ ont des limites finies à droite et à gauche en chaque $x_k$. Elle est de classe $C^1$ par morceaux sur un intervalle quelconque si elle l'est sur tout segment inclus dans cet intervalle. Une telle fonction est continue par morceaux, et sa dérivée, définie en dehors des points $x_k$, l'est aussi : l'intégrale $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ garde un sens.
Le théorème reste vrai si $f$ et $g$ sont *continues* et de classe $C^1$ par morceaux sur $]a,b[$ : sur un segment, on intègre par parties sur chaque morceau, et les termes $f(x_k)g(x_k)$ se compensent d'un morceau au suivant grâce à la continuité. La continuité est indispensable : si $f$ saute en un point, le terme de bord correspondant ne se compense plus, et la formule est fausse.

**Méthode 8.65 (Rédiger une intégration par parties)**

Pour étudier $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ par parties :

1. **Poser les fonctions.** « Posons $u : t \mapsto \ldots$ et $v : t \mapsto \ldots$, qui sont de classe $C^1$ sur $]a,b[$. Pour tout $t \in ]a,b[$, $u'(t) = \ldots$ et $v'(t) = \ldots$ »
2. **Vérifier les limites du produit.** « On a $u(x)v(x) \to \ldots$ quand $x \to a$ et

$u(x)v(x) \to \dots$ quand $x \to b$. » Les deux limites doivent être finies.

3. **Conclure sur la nature.** « Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature. »
4. **Établir la convergence de l'une des deux**, celle qu'on sait traiter : « De plus, $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge, car … »
5. **Écrire la formule.** « Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \dots \text{ »}$$

On n'écrit la formule qu'au dernier point, une fois la convergence acquise.

**Exemple 8.66 (Une première intégration par parties)**

Étudions $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

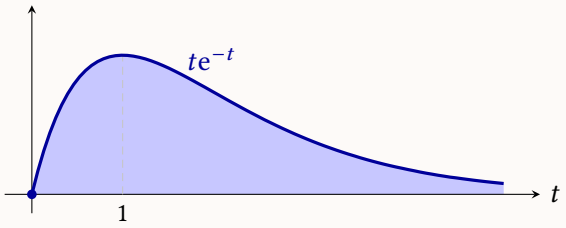
1. **Poser les fonctions.** Posons $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, qui sont de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
2. **Vérifier les limites du produit.** On a $u(0)v(0) = 0$, et $u(x)v(x) = -x\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées.
3. **Conclure sur la nature.** Donc, par intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

ont même nature.

4. **Établir la convergence de l'une des deux.** De plus, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1.
5. **Écrire la formule.** Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + 1 = 1.$$




**Exemple 8.67 (Une relation de récurrence)**

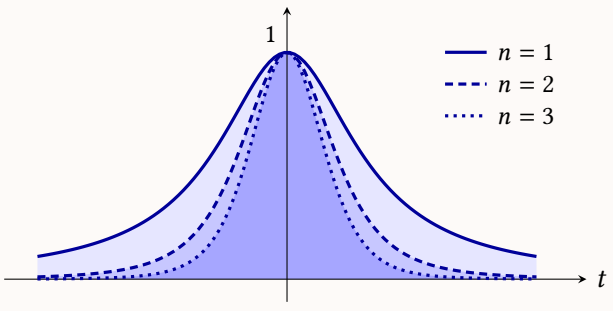
Pour $n \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge, donc par critère de majoration, à chaque borne, l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ converge. Cherchons une relation entre $I_n$ et $I_{n+1}$ en intégrant par parties.

1. **Poser les fonctions.** Posons $u : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ et $v : t \mapsto t$, qui sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$u'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = 1.$$
2. **Vérifier les limites du produit.** On a $u(x)v(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \to 0$ quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$, car $n \geqslant 1$.
3. **Conclure sur la nature.** Donc, par intégration par parties, les intégrales
$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = I_n \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$
ont même nature.
4. **Établir la convergence de l'une des deux.** De plus, $I_n$ converge.
5. **Écrire la formule.** Donc les deux intégrales convergent et
$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Il reste à exploiter la formule. Comme
$$\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$$
et que les intégrales de ces deux fonctions convergent, la linéarité donne
$$I_n = 2n\,(I_n - I_{n+1})\,, \qquad \text{soit} \qquad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\,I_n.$$
Avec $I_1 = \pi$, on obtient $I_2 = \frac{\pi}{2}$ et $I_3 = \frac{3\pi}{8}$. Par exemple, comme
$$\frac{3t^2+t^4}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{2}{(1+t^2)^3},$$
on en déduit, toujours par linéarité, que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2+t^4}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.




**Exemple 8.68 (Une intégrale avec un logarithme)**

Étudions $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. **Poser les fonctions.** Posons $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t+1}$, qui sont de classe

$C^1$ sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 1$,

$$u'(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \frac{1}{(t+1)^2}.$$

2. **Vérifier les limites du produit.** On a $u(1)v(1) = 0$, et $u(x)v(x) = -\frac{\ln(x)}{x+1} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées.
3. **Conclure sur la nature.** Donc, par intégration par parties, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$$

ont même nature.
4. **Établir la convergence de l'une des deux.** De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge et vaut $\ln 2$, d'après l'exemple de la page 32.
5. **Écrire la formule.** Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(t)}{t+1}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = 0 + \ln 2 = \ln 2.$$

**Remarque (Si le produit n'a pas de limite)**

Lorsque $fg$ n'a pas de limite finie en l'une des bornes, le théorème ne dit rien, et la méthode s'arrête à son deuxième point. On peut alors intégrer par parties sur un segment $[c, x]$, où tout est licite, puis faire tendre $x$ vers la borne dans l'expression obtenue, prise dans son ensemble : il arrive que le terme de bord et l'intégrale divergent séparément mais que leur somme converge.

**Exemple 8.69 (Quand le produit n'a pas de limite)**

Étudions $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$, généralisée en 0.

1. **Poser les fonctions.** Posons $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{1+t}$, qui sont de classe $C^1$ sur $]0, 1]$. Pour tout $t \in ]0, 1]$, $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.
2. **Vérifier les limites du produit.** On a $u(x)v(x) = -\frac{\ln(x)}{1+x} \to +\infty$ quand $x \to 0$. La limite n'est pas finie.

*Le théorème ne s'applique pas, et la méthode s'arrête là.*

On revient sur un segment. Pour $x \in ]0, 1]$, l'intégration par parties sur $[x, 1]$ donne

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \frac{\ln(x)}{1+x} + \left[\ln(t) - \ln(1+t)\right]_x^1.$$

Le crochet vaut $-\ln 2 - \ln(x) + \ln(1+x)$. Le terme de bord $\frac{\ln(x)}{1+x}$ et le crochet tendent tous deux vers l'infini, mais leur somme se simplifie :

$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \ln(x)\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + \ln(1+x) - \ln 2 = -\frac{x\ln(x)}{1+x} + \ln(1+x) - \ln 2 \xrightarrow[x\to 0]{} -\ln 2.$$

L'intégrale converge et vaut $-\ln 2$.

On aurait aussi pu reprendre la méthode avec une autre primitive, $v : t \mapsto 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$, pour laquelle $u(x)v(x) = \frac{x\ln(x)}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$ : le deuxième point passe, et le théorème s'applique directement.

**Théorème 8.70 (Changement de variable)**

Soient $a, b, \alpha, \beta$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, $f$ une fonction continue sur $]a, b[$ et $\varphi : ]\alpha, \beta[ \to ]a, b[$ une bijection strictement monotone de classe $C^1$.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
2. En cas de convergence, si $\varphi$ est strictement croissante,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u,$$

et si $\varphi$ est strictement décroissante,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

**Démonstration**

Traitons le cas où $\varphi$ est strictement croissante. Comme $\varphi$ est une bijection croissante de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, le théorème de la limite monotone donne $\varphi(u) \to a$ quand $u \to \alpha$ et $\varphi(u) \to b$ quand $u \to \beta$ ; de même, la bijection réciproque $\varphi^{-1}$ est croissante, et $\varphi^{-1}(t) \to \beta$ quand $t \to b$.
Soient $\gamma \in ]\alpha, \beta[$ et $c = \varphi(\gamma)$. La fonction $f \circ \varphi$ est continue, donc $u \mapsto f(\varphi(u))\varphi'(u)$ est continue sur $]\alpha, \beta[$. Pour $y \in [\gamma, \beta[$, le changement de variable de première année sur le segment $[\gamma, y]$ donne

$$\int_\gamma^y f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = G(\varphi(y)), \qquad \text{où} \quad G : x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $G$ a une limite finie $\ell$ en $b$, alors, comme $\varphi(y) \to b$ quand $y \to \beta$, on a $G(\varphi(y)) \to \ell$ : l'intégrale en $u$ converge en $\beta$, avec la même valeur. Réciproquement, si $y \mapsto G(\varphi(y))$ a une limite finie $\ell$ en $\beta$, alors pour $x \in [c, b[$, $G(x) = G(\varphi(\varphi^{-1}(x)))$ avec $\varphi^{-1}(x) \to \beta$ quand $x \to b$, donc $G(x) \to \ell$ : l'intégrale en $t$ converge en $b$. Les deux intégrales sont donc de même nature en $b$ et en $\beta$, avec la même valeur, et le même raisonnement vaut en $a$ et en $\alpha$.
Si $\varphi$ est strictement décroissante, $\varphi(u) \to b$ quand $u \to \alpha$ et $\varphi(u) \to a$ quand $u \to \beta$. Le même calcul donne, pour $y \in [\gamma, \beta[$,

$$\int_\gamma^y f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varphi(y)}^c f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et la borne $\beta$ correspond cette fois à la borne $a$, avec un signe moins ; de même $\alpha$ correspond à $b$. On conclut de la même façon. □

**Remarque (Orientation et bornes)**

Le signe du second point se retient de deux façons.

— *Avec les bornes.* Quand $t$ parcourt $]a, b[$ de $a$ vers $b$, $u = \varphi^{-1}(t)$ parcourt $]\alpha, \beta[$ de $\varphi^{-1}(a)$ vers $\varphi^{-1}(b)$, ces valeurs étant entendues comme des limites. Dans le cas décroissant, $\varphi^{-1}(a) = \beta$ et $\varphi^{-1}(b) = \alpha$, et avec la convention $\int_\beta^\alpha = -\int_\alpha^\beta$,

les deux cas s'écrivent d'une seule façon :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

C'est la règle de première année : les bornes suivent le changement de variable.

— *Avec une valeur absolue.* Comme $\varphi$ est strictement monotone, $\varphi'$ est de signe constant, positif dans le cas croissant et négatif dans le cas décroissant. Dans les deux cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\ |\varphi'(u)|\,\mathrm{d}u,$$

avec $\alpha < \beta$ dans l'ordre naturel.

**Remarque (Intervalles fermés d'un côté)**

Le théorème est énoncé sur des intervalles ouverts. Si une borne est dans l'intervalle, par exemple $f$ continue sur $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, la convergence en $a$ est automatique, et $\varphi$ envoie une borne fermée sur une borne fermée : on applique le théorème sur les intervalles ouverts, et le résultat vaut pour les intégrales sur $[a, b[$ et sur l'intervalle correspondant. En pratique, on ne s'en préoccupe pas.

**Méthode 8.71 (Rédiger un changement de variable)**

Pour étudier $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \varphi(t)$ :

1. **Poser le changement de variable.** « Posons $\varphi : t \mapsto \ldots$, qui est de classe $C^1$ et strictement monotone sur $]a, b[$, donc bijective de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$. » On précise l'intervalle image, en regardant les limites de $\varphi$ aux bornes.
2. **Exprimer les deux variables.** « Pour tout $t \in ]a, b[$ et tout $u \in ]\alpha, \beta[$, $u = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(u) = \ldots$, et alors $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$ »
3. **Conclure sur la nature.** « Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta \ldots \mathrm{d}u$ ont même nature. »
4. **Établir la convergence de l'une des deux** : « De plus, $\int_\alpha^\beta \ldots \mathrm{d}u$ converge, car … »
5. **Écrire l'égalité.** « Donc les deux intégrales convergent et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \ldots \mathrm{d}u = \ldots$ » Les bornes suivent le changement de variable ; si $\varphi$ est décroissante, elles arrivent dans l'ordre inverse, et on les remet dans l'ordre en changeant le signe.

Le changement de variable peut aussi être donné dans l'autre sens, $t = \varphi(u)$ : la rédaction est la même, avec $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

**Exemple 8.72 (Un changement de variable exponentiel)**

Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$.

1. **Poser le changement de variable.** Posons $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
2. **Exprimer les deux variables.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u > 0$, $u = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t =$

$\ln(u)$, et alors $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, avec $\mathrm{e}^{2t} = u^2$.

3. **Conclure sur la nature.** Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ ont même nature.
4. **Établir la convergence de l'une des deux.** De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.
5. **Écrire l'égalité.** Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

**Exemple 8.73 (Un changement de variable décroissant)**

Étudions $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. **Poser le changement de variable.** Posons $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, donc bijective de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$.
2. **Exprimer les deux variables.** Pour tout $t \geqslant 1$ et tout $u \in ]0, 1]$, $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$, et alors $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, avec $\mathrm{e}^{-1/t} = \mathrm{e}^{-u}$.
3. **Conclure sur la nature.** Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature.
4. **Établir la convergence de l'une des deux.** De plus, $\int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : elle converge.
5. **Écrire l'égalité.** Donc les deux intégrales convergent et, les bornes 1 et $+\infty$ devenant 1 et 0,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 (-\mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

**Exemple 8.74 (Un changement de variable trigonométrique)**

Étudions $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, généralisée en $-1$ et en 1.

1. **Poser le changement de variable.** Posons $\varphi : t \mapsto \cos(t)$, qui est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $]0, \pi[$, donc bijective de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$.
2. **Exprimer les deux variables.** Pour tout $t \in ]0, \pi[$ et tout $x \in ]-1, 1[$, $x = \cos(t) \Leftrightarrow t = \arccos(x)$, et alors $\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$, avec $x^2 = \cos(t)^2$ et, comme $\sin(t) > 0$ pour tout $t \in ]0, \pi[$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos(t)^2} = \sin(t)$.
3. **Conclure sur la nature.** Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^\pi \cos(t)^2\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
4. **Établir la convergence de l'une des deux.** De plus, $\int_0^\pi \cos(t)^2\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : elle converge.
5. **Écrire l'égalité.** Donc les deux intégrales convergent et, les bornes $-1$ et 1 devenant $\pi$ et 0,

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_\pi^0 \left(-\cos(t)^2\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

**Proposition 8.75 (Fonctions paires et impaires)**

Soient $a \in ]0, +\infty]$ et $f$ une fonction continue par morceaux sur $]-a, a[$, paire ou impaire.

1. L'intégrale $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. En cas de convergence, si $f$ est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ ; si $f$ est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**Démonstration**

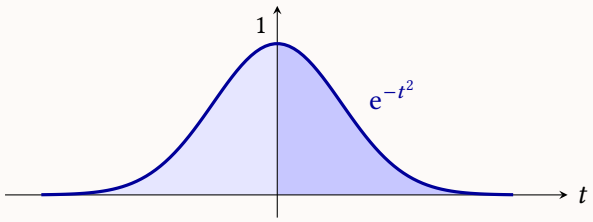
Coupons en 0 : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Posons $\varphi : u \mapsto -u$, qui est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $]0, a[$, donc bijective de $]0, a[$ sur $]-a, 0[$, avec $\varphi'(u) = -1$ pour tout $u \in ]0, a[$. Par changement de variable, les intégrales $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$ ont même nature et, en cas de convergence,

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(-u)\,(-1)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u.$$

Si $f$ est paire, $f(-u) = f(u)$ ; si $f$ est impaire, $f(-u) = -f(u)$. Dans les deux cas, $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature, ce qui donne le premier point, et en cas de convergence $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \pm\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$. On ajoute $\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour obtenir le second point. □

**Exemple 8.76 (Une gaussienne sur $\mathbb{R}$)**

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$, et on a vu page 24 que $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la proposition, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ : les deux aires de la figure sont égales.

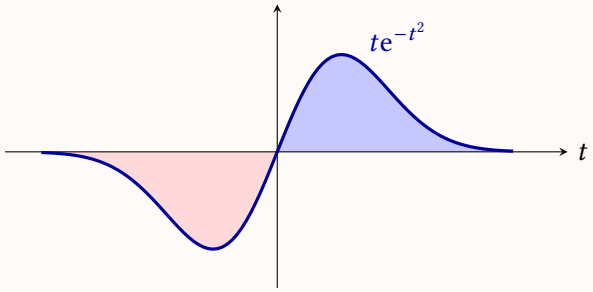



**Exemple 8.77 (Une fonction impaire d'intégrale nulle)**

La fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_{0}^{x} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{0}^{x} = \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc $\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la proposition, $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0 : les deux aires de la figure se compensent, et cette fois la convergence est acquise avant d'invoquer l'imparité.

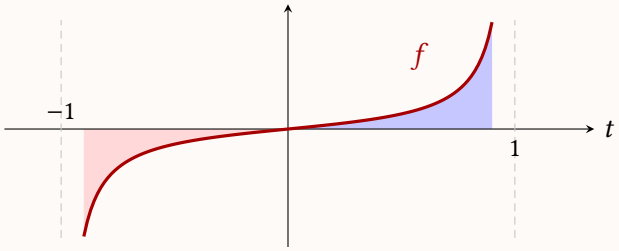


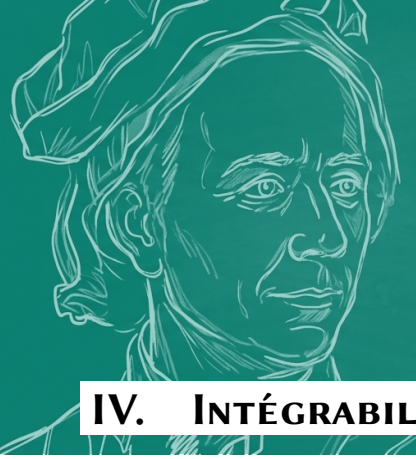

**Exemple 8.78 (Une fonction impaire dont l'intégrale diverge)**

La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$ est continue et impaire sur $]-1,1[$. Pour $x \in [0,1[$,

$$\int_0^x \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty,$$

donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et d'après la proposition, $\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Pourtant, par imparité, $\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in [0,1[$ : c'est encore le phénomène de l'exemple de la page 30. Le second point de la proposition ne s'applique qu'après avoir vérifié la convergence, et l'imparité ne la donne pas.





# 8 Intégrales généralisées

## IV. Intégrabilité

Les critères de la deuxième section ne portent que sur les fonctions positives. Pour une fonction de signe variable, ou à valeurs complexes, on étudie plutôt la fonction $|f|$, qui est positive et à laquelle ces critères s'appliquent. Cette section précise ce que l'on en déduit pour $f$ elle-même, puis introduit la notion d'intégrabilité, sur laquelle portent les critères de comparaison et, plus loin, les théorèmes d'interversion.

### 1. Convergence absolue

**Définition 8.79 (Convergence absolue)**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument* si l'intégrale

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

converge.

La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur $I$ : sur chaque morceau, elle est la composée de la fonction continue $f$ par la fonction continue $|\cdot|$, et elle a des limites finies aux points de subdivision. La définition a donc un sens, et les critères de la deuxième section, qui demandent une fonction positive, s'appliquent à $|f|$.

**Exemple 8.80 (Une fonction positive)**

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc $|f| = f$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, calculée dans la section précédente : elle converge, et vaut $\pi$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge donc absolument.

**Remarque (Fonctions positives)**

Si $f$ est positive sur $I$, alors $|f| = f$, et la convergence absolue de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est exactement sa convergence : les deux notions coïncident. La convergence absolue n'apporte quelque chose que pour les fonctions de signe variable, ou à valeurs complexes.

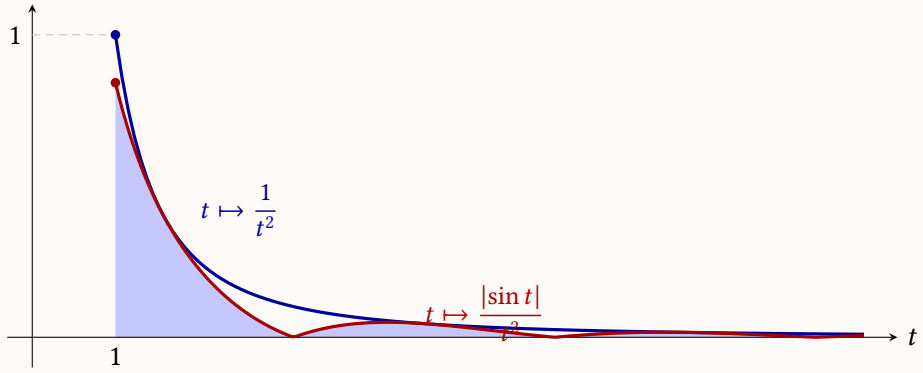
**Exemple 8.81 (Une fonction de signe variable)**

La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et change de signe une infinité de

fois. Pour tout $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant |f(t)| = \frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$), donc, par critère de majoration, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.




**Théorème 8.82 (La convergence absolue implique la convergence)**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors elle converge, et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Démonstration**

*Cas réel.* On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on pose, pour tout $t \in I$,

$$f^+(t) = \frac{|f(t)| + f(t)}{2} \quad \text{et} \quad f^-(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2}.$$

Les fonctions $f^+$ et $f^-$ sont continues par morceaux sur $I$, comme combinaisons linéaires de $f$ et de $|f|$, et pour tout $t \in I$,

$$0 \leqslant f^+(t) \leqslant |f(t)| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f^-(t) \leqslant |f(t)|.$$

L'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge par hypothèse. Le critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de $I$ qui ne lui appartient pas, montre que $\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Comme $f = f^+ - f^-$, la linéarité donne la convergence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
*Cas complexe.* On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Les fonctions $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont continues par morceaux sur $I$, à valeurs réelles, et pour tout $t \in I$,

$$|\mathrm{Re}\, f(t)| \leqslant |f(t)| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}\, f(t)| \leqslant |f(t)|.$$

Par critère de majoration, les intégrales de $|\mathrm{Re}\, f|$ et de $|\mathrm{Im}\, f|$ convergent : les intégrales de $\mathrm{Re}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$ convergent absolument, donc convergent d'après le cas réel. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors d'après la proposition sur les fonctions à valeurs complexes.
*Inégalité.* Soient $x < y$ dans $I$. L'inégalité triangulaire sur le segment $[x, y]$ et la positivité de $|f|$ donnent

$$\left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to a$ et $y \to b$, le membre de gauche tend vers $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|$, par définition de l'intégrale généralisée et continuité de la valeur absolue. L'inégalité passe à la limite. □

**Exemple 8.83 (Retour à la fonction de signe variable)**

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument d'après l'exemple précédent ; elle converge donc, et

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1.$$

On n'a pas calculé l'intégrale, et on ne connaît pas sa valeur.

**Exemple 8.84 (Une intégrale semi-convergente)**

Étudions l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
**Convergence.** On procède par intégration par parties.
**Poser les fonctions.** Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos t$, de classe $C^1$ sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 1$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v'(t) = \sin t$.
**Vérifier les limites du produit.** Pour tout $t \geqslant 1$, $|u(t)v(t)| = \frac{|\cos t|}{t} \leqslant \frac{1}{t}$, donc $u(t)v(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. En 1, la borne est dans l'intervalle et $u(1)v(1) = -\cos 1$.
**Conclure sur la nature.** Par intégration par parties, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
**Établir la convergence de l'une des deux.** Pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge. Par critère de majoration, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.
**Écrire la formule.** Les deux intégrales convergent, et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

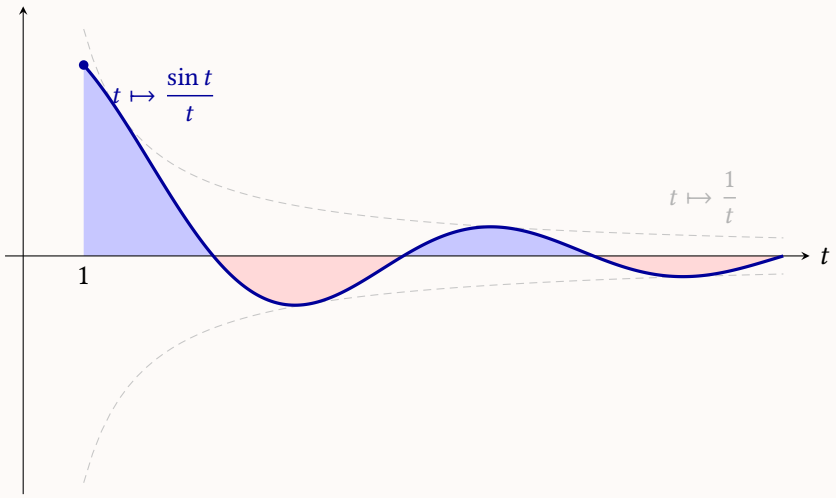
**Divergence de l'intégrale de la valeur absolue.** Pour tout $t \geqslant 1$, comme $0 \leqslant |\sin t| \leqslant 1$, on a $|\sin t| \geqslant \sin(t)^2$, donc

$$\frac{|\sin t|}{t} \geqslant \frac{\sin(t)^2}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \geqslant 0.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge : la même intégration par parties, avec $u : t \mapsto \frac{1}{2t}$ et $v : t \mapsto \frac{\sin(2t)}{2}$, la ramène à $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t$, qui converge absolument par comparaison à $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge (intégrale de Riemann, $\alpha = 1$). Si $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$ convergeait, la somme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$$

de deux intégrales convergentes convergerait : elle diverge donc. La fonction $t \mapsto \frac{|\sin t|}{t}$ est positive et plus grande que $t \mapsto \frac{\sin(t)^2}{t}$, dont l'intégrale diverge : par minoration, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
**Conclusion.** L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, mais ne converge pas absolument. On dit qu'elle est *semi-convergente*.




**Remarque (La réciproque est fausse)**

L'exemple précédent montre qu'une intégrale convergente ne converge pas nécessairement absolument. Les deux notions sont donc distinctes, et c'est la convergence absolue qui intervient dans les énoncés de cette section et des suivantes.

## 2. Intégrabilité d'une fonction

**Définition 8.85 (Fonction intégrable)**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $f$ est *intégrable sur* $I$ si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

**Remarque (Une propriété de la fonction)**

La convergence absolue est une propriété de *l'intégrale* : l'intégrabilité est la propriété correspondante de la *fonction*. Les deux formulations disent la même chose, mais on ne les emploie pas dans les mêmes phrases : on dit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, et que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. L'essentiel des théorèmes du programme, les critères de comparaison comme les théorèmes d'interversion, portent sur l'intégrabilité d'une fonction, et c'est elle qu'on doit savoir établir.

**Exemple 8.86 (Sur un segment)**

Si $I = [a, b]$ est un segment, toute fonction $f$ continue par morceaux sur $I$ est intégrable sur $I$ : la fonction $|f|$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, et son intégrale est une intégrale ordinaire, qui n'est pas généralisée.

**Exemple 8.87 (Les fonctions de Riemann)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, donc son intégrabilité sur un intervalle est la convergence de son intégrale sur cet intervalle.

Les intégrales de Riemann donnent : la fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, et intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$. Elle n'est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour aucune valeur de $\alpha$.

**Exemple 8.88 (Retour aux deux exemples)**

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ : son intégrale converge absolument. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, bien que son intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

**Exemple 8.89 (Une exponentielle complexe)**

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-zt}$ est continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs complexes, et pour tout $t \geqslant 0$,

$$|f(t)| = \left|\mathrm{e}^{-zt}\right| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(z)\,t}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(z)\,t}\,\mathrm{d}t$ converge, car $\operatorname{Re} z > 0$. La fonction $f$ est donc intégrable sur $[0, +\infty[$, ce qui redonne la convergence de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$, calculée dans la section précédente.

**Remarque (La notation $\int_I f$)**

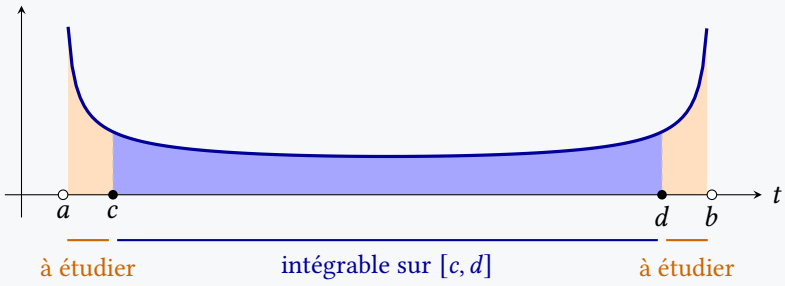
Si $f$ est intégrable sur $I$, on note

$$\int_I f \quad \text{ou} \quad \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Remarque (Intégrabilité au voisinage des bornes)**

Si $f$ est continue par morceaux sur $I$, alors $f$ est intégrable sur tout segment de $I$ : pour $[c, d] \subset I$, la fonction $|f|$ est continue par morceaux sur le segment $[c, d]$, et son intégrale est une intégrale ordinaire. Par relation de Chasles, l'intégrabilité sur $I$ revient donc à l'intégrabilité sur des voisinages des bords de $I$.




Précisément, soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. On dit que $f$ est *intégrable en $b$*, ou intégrable au voisinage de $b$, si $f$ est intégrable sur $[a, b[$. Pour $c \in [a, b[$, la fonction $f$ est intégrable en $b$ si et seulement si elle est intégrable sur $[c, b[$. De même, si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f$ est continue par

morceaux sur $]a,b]$, on dit que $f$ est intégrable en $a$ si $f$ est intégrable sur $]a,b]$. Enfin, si $f$ est continue par morceaux sur $]a,b[$, elle est intégrable sur $]a,b[$ si et seulement si elle est intégrable en $a$ et en $b$.

**Définition 8.90 (L'espace $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$)**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur $I$ telles que l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 8.91 (Structure de $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$)**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, et l'application $f \mapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$.

**Démonstration**

La fonction nulle est continue par morceaux sur $I$, et l'intégrale de sa valeur absolue converge : elle appartient à $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$, qui n'est donc pas vide.
Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + g$ est continue par morceaux sur $I$, comme combinaison linéaire de fonctions continues par morceaux. Pour tout $t \in I$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ donne

$$0 \leqslant |\lambda f(t) + g(t)| \leqslant |\lambda|\,|f(t)| + |g(t)|\,.$$

Les intégrales de $|f|$ et de $|g|$ convergent par hypothèse, donc celle de $|\lambda|\,|f| + |g|$ converge par linéarité. Par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de $I$ qui ne lui appartient pas, l'intégrale de $|\lambda f + g|$ converge : la fonction $\lambda f + g$ est intégrable sur $I$. Ainsi $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
Enfin, pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$, l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge d'après le théorème de la sous-section précédente, et la linéarité de l'intégrale généralisée montre que $f \mapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est linéaire sur $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$. □

**Remarque (Presque une norme)**

L'application $\|\cdot\|_1$ est naturellement définie sur $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ : c'est la raison d'être de cet espace. Pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$, l'intégrale de $|f|$ converge, et elle est positive : on a bien $\|\cdot\|_1 : \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$. Cette application vérifie deux des trois axiomes d'une norme.

- *Homogénéité.* Pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $|\lambda f(t)| = |\lambda|\,|f(t)|$ pour tout $t \in I$, et la linéarité de l'intégrale donne

$$\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda| \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|\,\|f\|_1\,.$$

- *Inégalité triangulaire.* Pour $f, g \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ et tout $t \in I$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ donne $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$ ; par croissance et linéarité de l'intégrale,

$$\|f + g\|_1 \leqslant \int_I (|f(t)| + |g(t)|)\,\mathrm{d}t = \|f\|_1 + \|g\|_1\,.$$

L'axiome de séparation, lui, n'est *pas* vérifié : une fonction nulle sur $I$ sauf en un point, où elle vaut 1, est continue par morceaux, intégrable, de norme $\|\cdot\|_1$ nulle, et n'est pas la fonction nulle. L'application $\|\cdot\|_1$ n'est donc pas une norme sur $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$. On en a une version amoindrie, pour les fonctions *continues* : c'est l'objet de la proposition qui suit.

**Proposition 8.92 (Intégrale nulle d'une fonction continue positive)**

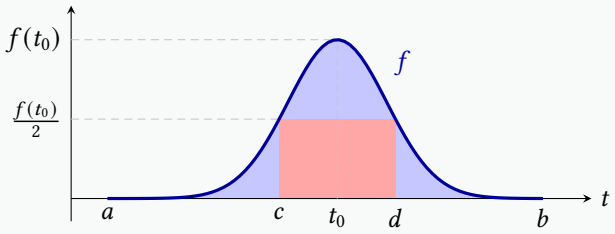
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f$ une fonction continue, positive et intégrable sur $I$. Si

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

alors $f$ est la fonction nulle sur $I$.

**Démonstration**

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) > 0$. Par continuité de $f$ en $t_0$, appliquée avec $\varepsilon = \frac{f(t_0)}{2}$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in I$ vérifiant $|t - t_0| \leqslant \eta$, on ait $|f(t) - f(t_0)| \leqslant \frac{f(t_0)}{2}$, donc $f(t) \geqslant \frac{f(t_0)}{2}$.




Comme $I$ n'est pas réduit à un point, $I \cap [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ contient un segment $[c,d]$ avec $c < d$, sur lequel $f \geqslant \frac{f(t_0)}{2}$. Notons $a$ et $b$ les extrémités de $I$. La fonction $f$ étant intégrable et positive sur $I$, la relation de Chasles donne

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t + \int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t,$$

les deux intégrales écartées étant positives, ou nulles si $c = a$ ou $d = b$. Par croissance de l'intégrale sur le segment $[c,d]$,

$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^d \frac{f(t_0)}{2}\,\mathrm{d}t = (d-c)\frac{f(t_0)}{2} > 0,$$

ce qui contredit $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $f$ est nulle sur $I$. □

**Remarque (Les fonctions continues intégrables)**

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est l'intersection de $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ et de l'espace des fonctions continues sur $I$ : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$. Sur ce sous-espace, $\|\cdot\|_1$ est séparée : si $f$ est continue sur $I$ et $\|f\|_1 = 0$, la proposition précédente, appliquée à la fonction continue, positive et intégrable $|f|$, donne $|f| = 0$, donc $f = 0$. Les deux autres axiomes étant acquis, $\|\cdot\|_1$ est une norme sur l'espace des fonctions continues intégrables sur $I$, qui est ainsi un espace vectoriel normé. C'est la norme $\|\cdot\|_1$ du chapitre sur les normes, où

l'intervalle était un segment, étendue aux intervalles quelconques.

**Exemple 8.93 (Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$)**

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
*Existence.* Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R = PQ$. La fonction $t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t/2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées : elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$, par un réel $M \geqslant 0$. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \left|R(t)\mathrm{e}^{-t}\right| = \left|R(t)\mathrm{e}^{-t/2}\right| \mathrm{e}^{-t/2} \leqslant M\mathrm{e}^{-t/2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc, par critère de majoration, la fonction continue $t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et $(P \mid Q)$ est bien défini.
*Bilinéarité et symétrie.* Soient $P, Q, S \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto P(t)S(t)\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto Q(t)S(t)\mathrm{e}^{-t}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$, et $(\lambda P + Q)S = \lambda PS + QS$. La linéarité de l'intégrale sur $\mathrm{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ donne $(\lambda P + Q \mid S) = \lambda(P \mid S) + (Q \mid S)$. Comme $PQ = QP$, on a $(P \mid Q) = (Q \mid P)$, et la linéarité à droite s'en déduit.
*Positivité.* Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $t \geqslant 0$, $P(t)^2\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$, donc $(P \mid P) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
*Caractère défini.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P \mid P) = 0$. La fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$, intervalle non réduit à un point, et son intégrale est nulle : d'après la proposition précédente, elle est nulle sur $[0, +\infty[$. Comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, on a $P(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Le polynôme $P$ a une infinité de racines, donc $P = 0$.

## 3. Critères de comparaison

Les intégrales de référence de la deuxième section portent sur des fonctions de signe constant. Pour elles, l'intégrabilité et la convergence de l'intégrale sont une seule et même chose, et la proposition de la page 20 se relit ainsi.

**Proposition 8.94 (Fonctions de référence)**

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, et intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.
3. La fonction ln est intégrable en 0.

Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sont positives, et ln est négative sur $]0, 1]$ : dans chaque cas, l'intégrale de la valeur absolue est, au signe près, l'intégrale de la fonction, et les deux énoncés disent la même chose.

**Théorème 8.95 (Théorème de comparaison)**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f, g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- **Domination.** Si $f(t) = \mathrm{O}(g(t))$ quand $t \to b$ et si $g$ est intégrable en $b$, alors $f$ est intégrable en $b$.
- **Équivalence.** Si $f(t) \sim g(t)$ quand $t \to b$, alors $f$ est intégrable en $b$ si et seulement si $g$ est intégrable en $b$.

Les mêmes énoncés valent en $a$ pour deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$.

**Démonstration**

*Domination.* Par définition de la domination, il existe $c \in [a, b[$ et $M \geqslant 0$ tels que, pour tout $t \in [c, b[$,

$$0 \leqslant |f(t)| \leqslant M\,|g(t)|\,.$$

La fonction $g$ est intégrable en $b$, donc $\int_c^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, et par linéarité $\int_c^b M\,|g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge aussi. Les fonctions $|f|$ et $M\,|g|$ sont continues par morceaux et positives sur $[c, b[$ : par critère de majoration, $\int_c^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $f$ est intégrable sur $[c, b[$, c'est-à-dire intégrable en $b$.
*Équivalence.* Par définition de l'équivalence, il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur un intervalle $[c, b[$, de limite nulle en $b$, telle que $f = (1 + \varepsilon)g$ sur $[c, b[$. Quitte à augmenter $c$, on peut supposer $|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}$ sur $[c, b[$. Alors, pour $t \in [c, b[$,

$$|f(t)| = |1 + \varepsilon(t)|\;|g(t)| \leqslant \frac{3}{2}\,|g(t)| \quad \text{et} \quad |g(t)| = \frac{|f(t)|}{|1 + \varepsilon(t)|} \leqslant 2\,|f(t)|$$

puisque $|1 + \varepsilon(t)| \geqslant 1 - |\varepsilon(t)| \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(f)$ en $b$, et le premier point, appliqué dans les deux sens, donne l'équivalence.
Le cas de l'extrémité $a$ se traite de la même façon, avec des intervalles $]a, c]$. □

**Exemple 8.96 (Domination en $+\infty$)**

Étudions l'intégrabilité de $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \sin t$ sur $[0, +\infty[$. La fonction $f$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\left|\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{-t}}\right| = |\sin t| \leqslant 1,$$

donc $f(t) = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$ quand $t \to +\infty$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $a = 1 > 0$). Par critère de domination, $f$ est intégrable en $+\infty$, donc sur $[0, +\infty[$. En particulier $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t\,\mathrm{d}t$ converge, bien que $f$ change de signe.

**Exemple 8.97 (Domination en 0)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudions l'intégrabilité de $f : x \mapsto x^n \ln x$ sur $]0, 1]$. La fonction $f$ est continue sur $]0, 1]$. Par croissances comparées,

$$\frac{f(x)}{1/\sqrt{x}} = x^{n+\frac{1}{2}} \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

et une fonction qui admet une limite finie en 0 est bornée au voisinage de 0 : ainsi

$f(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ quand $x \to 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0 (fonction de référence, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Par critère de domination, $f$ est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$ : l'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exemple 8.98 (Équivalence en $+\infty$)**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t+\ln t)^\alpha}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$ ? Pour $t \geqslant 1$, $t + \ln t \geqslant 1 > 0$, donc $f$ est bien définie, continue et positive sur $[1,+\infty[$. Comme $\frac{\ln t}{t} \to 0$ quand $t \to +\infty$,

$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}\left(1 + \frac{\ln t}{t}\right)^{-\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}.$$

Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 1$. La fonction $f$ est donc intégrable sur $[1,+\infty[$ exactement pour $\alpha > 1$. Comme $f$ est positive, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+\ln t)^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.

**Exemple 8.99 (Équivalence en 0)**

Étudions l'intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}$ sur $]0,1]$. Pour $t > 0$, $\mathrm{e}^t - 1 > 0$, donc $f$ est bien définie, continue et positive sur $]0,1]$. Comme $\mathrm{e}^t - 1 \underset{t\to0}{\sim} t$,

$$f(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 (fonction de référence, $\alpha = 1$). Par critère d'équivalence, $f$ n'est pas intégrable en 0, donc pas sur $]0,1]$. Comme $f$ est positive, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1}$ diverge.

**Remarque (Le cas de la négligeabilité)**

Si $f(t) = \mathrm{o}(g(t))$ quand $t \to b$ et si $g$ est intégrable en $b$, alors $f$ est intégrable en $b$. En effet, par définition de la négligeabilité, il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur un intervalle $[c,b[$, de limite nulle en $b$, telle que $f = \varepsilon g$ sur $[c,b[$. Une fonction de limite nulle est bornée au voisinage de $b$ : quitte à augmenter $c$, $|\varepsilon| \leqslant 1$ sur $[c,b[$, d'où $|f| \leqslant |g|$ sur $[c,b[$ et $f = \mathrm{O}(g)$ en $b$. On conclut par critère de domination.

**Exemple 8.100 (Un logarithme en $+\infty$)**

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$, et par croissances comparées

$$\frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}} \cdot \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$), $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de négligeabilité.

**Remarque (Intégrabilité, et non convergence)**

Le théorème de comparaison porte sur l'intégrabilité, c'est-à-dire sur la convergence de l'intégrale de $|f|$ : la convergence absolue. Il ne dit rien de la convergence de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ quand celle de $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolue. Reprenons $g : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $[1, +\infty[$ : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, mais pas absolument. La fonction $f = |g|$ vérifie $|f| \leqslant |g|$, donc $f(t) = \mathrm{O}\,(g(t))$ quand $t \to +\infty$. Pourtant $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge. La domination $f = \mathrm{O}(g)$ et la convergence de l'intégrale de $g$ ne donnent donc pas la convergence de l'intégrale de $f$ : il faut l'intégrabilité de $g$.

**Méthode 8.101 (Étudier l'intégrabilité au voisinage d'une borne)**

Soit $f$ continue par morceaux au voisinage d'une borne $b$, c'est-à-dire sur un intervalle $[c, b[$ ou $]b, c]$. Pour savoir si $f$ est intégrable en $b$, dans l'ordre :

1. **Calcul direct.** Si l'on voit une primitive de $|f|$, on calcule $\int_c^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et on étudie sa limite quand $x \to b$.
2. **Équivalent simple.** On cherche un équivalent de $f$ en $b$ aussi simple que possible. Si c'est une fonction de référence, le théorème de comparaison conclut, dans un sens ou dans l'autre.
3. **Comparaison à une fonction de référence.** Sinon, on compare à $\frac{1}{t^2}$ si $b = +\infty$, ou à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ si $b = 0$ : on étudie $t^2 f(t)$ ou $\sqrt{t}\, f(t)$. Si cette quantité est bornée au voisinage de $b$, en particulier si elle tend vers 0, alors $f$ est intégrable en $b$ par critère de domination.
4. **Un autre exposant.** Si cette comparaison échoue, on cherche $\alpha > 1$ si $b = +\infty$, ou $\alpha < 1$ si $b = 0$, tel que $t^\alpha f(t)$ soit borné au voisinage de $b$ : alors $f = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ en $b$, et $f$ est intégrable en $b$.

L'échec de la comparaison aux points 3 et 4 ne prouve rien : une fonction qui n'est pas dominée par $\frac{1}{t^2}$ peut très bien être intégrable. Pour prouver une non-intégrabilité, on utilise l'équivalence, ou une minoration par une fonction positive non intégrable.

**Exemple 8.102 (Application de la méthode)**

Étudions l'intégrabilité de $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ en 0. La fonction $f$ est continue sur $]0, 1]$.

1. **Calcul direct.** On ne voit pas de primitive.
2. **Équivalent simple.** Comme $1 + x \to 1$ quand $x \to 0$,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

   Cette fonction n'est pas une fonction de référence : l'équivalence ramène l'étude à celle de $g : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en 0, sans conclure.
3. **Comparaison à $\frac{1}{\sqrt{x}}$.** On a $\sqrt{x}\, g(x) = \ln x \to -\infty$ quand $x \to 0$ : $g$ n'est pas dominée par $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Cette comparaison ne donne rien.
4. **Un autre exposant.** Prenons $\alpha = \frac{3}{4} < 1$. Par croissances comparées,

$$x^{3/4} g(x) = x^{1/4} \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

donc $g(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$ quand $x \to 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable en 0 car $\frac{3}{4} < 1$. Par critère de domination, $g$ est intégrable en 0.

Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0, donc sur $]0, 1]$.

**Proposition 8.103 (Translation)**

Soient $a < c$ deux réels et $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a, c]$. La fonction $f$ est intégrable en $a$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(a + t)$ est intégrable en 0.

**Démonstration**

La fonction $g : t \mapsto f(a + t)$ est continue par morceaux sur $]0, c - a]$. Pour $x \in ]0, c - a]$, le changement de variable affine $u = a + t$ sur le segment $[x, c - a]$ donne

$$\int_x^{c-a} |g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_x^{c-a} |f(a+t)|\,\mathrm{d}t = \int_{a+x}^{c} |f(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Quand $x \to 0^+$, on a $a + x \to a^+$, et les deux membres ont une limite finie en même temps : $\int_0^{c-a} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^c |f(u)|\,\mathrm{d}u$ converge. □

**Exemple 8.104 (Une fonction translatée)**

Étudions l'intégrabilité de $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{t-1}}$ sur $]1, 2]$. La fonction $f$ est continue sur $]1, 2]$, et la seule borne à étudier est 1. Par translation, $f$ est intégrable en 1 si et seulement si $g : t \mapsto f(1 + t) = \frac{\mathrm{e}^{1+t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0. Or

$$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{t}},$$

et $t \mapsto \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$, et la constante e ne change rien). Par critère d'équivalence, $g$ est intégrable en 0, donc $f$ est intégrable en 1, et sur $]1, 2]$.

**Proposition 8.105 (Retournement)**

Soient $c < b$ deux réels et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[c, b[$. La fonction $f$ est intégrable en $b$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(b - t)$ est intégrable en 0.

**Démonstration**

La fonction $t \mapsto f(b - t)$ est continue par morceaux sur $]0, b - c]$, et pour $x \in ]0, b - c]$, le changement de variable $u = b - t$ donne

$$\int_x^{b-c} |f(b-t)|\,\mathrm{d}t = \int_c^{b-x} |f(u)|\,\mathrm{d}u.$$

On conclut comme pour la translation, en faisant tendre $x$ vers $0^+$. □

**Remarque (Les fonctions de Riemann en un point quelconque)**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Par translation et retournement, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{|t - a|^\alpha}$$

est intégrable en $a$, à droite comme à gauche, si et seulement si $\alpha < 1$. On l'utilise directement comme fonction de référence en $a$ : pour comparer une fonction à $\frac{1}{(t-a)^\alpha}$ au voisinage de $a^+$, ou à $\frac{1}{(a-t)^\alpha}$ au voisinage de $a^-$, il n'est pas nécessaire de revenir à 0 par un changement de variable.

**Méthode 8.106 (Étudier l'intégrabilité sur un intervalle)**

Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ d'extrémités $a < b$, ou la nature de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ :

1. **Régularité.** « La fonction $f$ est continue (par morceaux) sur $I$, donc intégrable sur tout segment de $I$. » On précise l'intervalle $I$, en vérifiant où $f$ est définie et continue.
2. **Bornes problématiques.** « L'intégrale est donc généralisée en … » On nomme les extrémités de $I$ qui ne lui appartiennent pas : une seule, ou les deux.
3. **Étude en chaque borne.** On étudie l'intégrabilité de $f$ en chacune de ces bornes par la méthode précédente.
4. **Conclusion.** Si $f$ est intégrable en chaque borne problématique, $f$ est intégrable sur $I$, et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $f$ n'est pas intégrable en l'une d'elles, $f$ n'est pas intégrable sur $I$.

**Exemple 8.107 (Une seule borne, en $+\infty$)**

Étudions $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. **Régularité.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$.
2. **Bornes problématiques.** L'intégrale est donc généralisée en $+\infty$ seulement.
3. **Étude en $+\infty$.** On a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en $+\infty$.
4. **Conclusion.** La fonction $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et l'intégrale converge.

**Exemple 8.108 (Une seule borne, en 0)**

Étudions $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Régularité.** Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t > 0$, donc $f : t \mapsto \ln(\sin t)$ est définie et continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et intégrable sur tout segment de cet intervalle.
2. **Bornes problématiques.** L'intégrale est donc généralisée en 0 seulement.
3. **Étude en 0.** Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$f(t) = \ln t + \ln \frac{\sin t}{t}.$$
Comme $\frac{\sin t}{t} \to 1$ quand $t \to 0$, le second terme tend vers 0, tandis que $\ln t \to -\infty$ : ainsi $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \ln t$. La fonction ln est intégrable en 0. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.
4. **Conclusion.** La fonction $f$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et l'intégrale converge.

**Exemple 8.109 (Deux bornes)**

Étudions $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. **Régularité.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$.
2. **Bornes problématiques.** L'intégrale est donc généralisée en 0 et en $+\infty$.
3. **Étude en** 0. Comme $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$,
$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}},$$
et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 car $\frac{1}{2} < 1$. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.
4. **Étude en** $+\infty$**.** Pour $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}$, donc $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ car $\frac{3}{2} > 1$. Par critère de domination, $f$ est intégrable en $+\infty$.
5. **Conclusion.** La fonction $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et l'intégrale converge.

**Exemple 8.110 (Deux bornes finies)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a(1-t)^b}$ converge-t-elle ?

1. **Régularité.** Pour $t \in ]0, 1[$, $t > 0$ et $1 - t > 0$, donc $f : t \mapsto \frac{1}{t^a(1-t)^b}$ est définie, continue et positive sur $]0, 1[$, et intégrable sur tout segment de $]0, 1[$.
2. **Bornes problématiques.** L'intégrale est donc généralisée en 0 et en 1.
3. **Étude en** 0. Comme $(1 - t)^b \to 1$ quand $t \to 0$,
$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^a},$$
et $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ est intégrable en 0 si et seulement si $a < 1$. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0 si et seulement si $a < 1$.
4. **Étude en** 1. Comme $t^a \to 1$ quand $t \to 1$,
$$f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(1-t)^b},$$
et $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^b}$ est intégrable en 1 si et seulement si $b < 1$, d'après la remarque sur les fonctions de Riemann en un point quelconque. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 1 si et seulement si $b < 1$.
5. **Conclusion.** La fonction $f$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $a < 1$ et $b < 1$. Comme $f$ est positive, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a(1-t)^b}$ converge si $a < 1$ et $b < 1$, et diverge sinon.

**Remarque (Pour aller plus loin : convergence sans intégrabilité)**

Quand on cherche la *convergence* de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et non l'intégrabilité de $f$, il arrive que $f$ ne soit pas intégrable : les critères de comparaison ne s'appliquent plus. Une

technique à connaître est l'intégration par parties, qui transforme l'intégrale en une intégrale dont la fonction est intégrable, en échangeant une fonction oscillante contre sa primitive bornée et une fonction lentement décroissante contre sa dérivée, qui décroît plus vite.

**Exemple 8.111 (Une intégration par parties pour la convergence)**

Étudions $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt$. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et $|f(t)| = \frac{1}{\sqrt{t}}$ : elle n'est pas intégrable en $+\infty$, car $\frac{1}{2} \leqslant 1$. Posons $u : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $v : t \mapsto \frac{e^{it}}{i} = -ie^{it}$, de classe $C^1$ sur $[1, +\infty[$, avec $u'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$ et $v'(t) = e^{it}$. On a $|u(x)v(x)| = \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ quand $x \to +\infty$ : le produit $uv$ a une limite finie en $+\infty$. Par intégration par parties, les intégrales $\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt$ ont même nature. Or

$$|u'(t)v(t)| = \frac{1}{2t\sqrt{t}} = \frac{1}{2t^{3/2}},$$

et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ : la fonction $u'v$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, et son intégrale converge. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge, et

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt = \left[-i\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{ie^{it}}{2t\sqrt{t}}\,dt = ie^{i} - \frac{i}{2}\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t\sqrt{t}}\,dt.$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ convergent, sans que les fonctions soient intégrables.



# 8 Intégrales généralisées

## En autonomie

## I. Fonctions continues par morceaux

En première année, l'intégrale $\int_a^b f$ a été définie pour une fonction $f$ continue sur un segment $[a, b]$. On l'étend ici à des fonctions qui présentent un nombre fini de sauts : on découpe le segment en morceaux sur lesquels la fonction se comporte comme une fonction continue, et on ajoute les aires.

### Sur un segment

**Définition 8.1 (Fonction continue par morceaux sur un segment), page 2**

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$ s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $I$, c'est-à-dire une famille finie de réels telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, vérifiant : pour chaque indice $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de $f$ à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$.
Une telle subdivision est dite adaptée à $f$.

La définition ne regarde que les restrictions de $f$ aux intervalles ouverts $]x_k, x_{k+1}[$ : sur chacun d'eux, $f$ est continue et admet une limite finie aux deux bornes. On en tire une reformulation, plus commode en pratique.

**Proposition 8.2 (Caractérisation), page 3**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. La fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si elle est continue sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points, en chacun desquels elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite (à droite seulement en $a$, à gauche seulement en $b$).

**Exercice I.1** Correction p. 64

Soit $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}, t \mapsto \lfloor t \rfloor$.

1. Tracer le graphe de $f$.
2. Sur quels intervalles la fonction $f$ est-elle constante ? En déduire les points de $[-1, 3]$ où elle n'est pas continue.
3. En chacun de ces points, déterminer la limite à gauche et, sauf en 3, la limite à droite de $f$.
4. À l'aide de la caractérisation, conclure que $f$ est continue par morceaux sur $[-1, 3]$, et donner une subdivision adaptée.
5. Pour chaque morceau ouvert de cette subdivision, donner le prolongement continu de la restriction de $f$, comme le demande la définition.

**Exercice I.2** Correction p. 64

Soit $f$ la fonction définie sur $[-\pi/2, \pi/2]$ par $f(t) = \tan t$ si $|t| < \pi/2$ et $f(\pm\pi/2) = 0$.

1. Justifier que $f$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
2. Déterminer la limite de $f$ à gauche en $\pi/2$.
3. La fonction $f$ est-elle continue par morceaux sur $[-\pi/2, \pi/2]$ ?
4. La réponse change-t-elle si l'on remplace les valeurs $f(\pm\pi/2)$ par d'autres réels ?

Les fonctions continues par morceaux se combinent comme les fonctions continues.

**Proposition 8.7 (Opérations), page 4**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions $f + g$, $\lambda f$ et $fg$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$.
2. La restriction de $f$ à tout segment $[c, d] \subset [a, b]$ est continue par morceaux sur $[c, d]$.
3. La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

**Exercice I.3** Correction p. 65

Justifier que les fonctions suivantes sont continues par morceaux sur $[0, 2]$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice I.1.

1. $t \mapsto \lfloor t \rfloor$.
2. $t \mapsto 3\lfloor t \rfloor + t^2$.
3. $t \mapsto t\lfloor t \rfloor$.
4. $t \mapsto |\lfloor t \rfloor - 1|$.
5. $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\lfloor t \rfloor$, à valeurs complexes.

### Pour consolider

La liste ne contient ni l'inverse ni la composée : les deux exercices suivants montrent qu'ils ne se comportent pas comme pour les fonctions continues.

**Exercice I.4** Correction p. 65

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$ si $t > 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que $f$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et qu'elle ne s'annule pas.
2. Déterminer la limite à droite en 0 de $1/f$.
3. La fonction $1/f$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$ ?

**Exercice I.5** Correction p. 65

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t \sin(1/t)$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$, et soit $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = 1$ si $u > 0$ et $g(u) = 0$ sinon.

1. Montrer que $f$ est continue sur $[-1, 1]$. On pourra majorer $|f(t)|$.
2. Montrer que $g$ est continue par morceaux sur $[-1, 1]$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de $f$ sur $\left]\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{(2k+2)\pi}, \frac{1}{(2k+1)\pi}\right[$.
4. En déduire que $g \circ f$ n'a pas de limite à droite en 0. Est-elle continue par morceaux sur $[-1, 1]$ ?

### Intégrale sur un segment

**Définition 8.10 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux), page 6**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, soit $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à $f$ et, pour chaque $k$, soit $\tilde{f_k}$ le prolongement continu à $[x_k, x_{k+1}]$ de la restriction de $f$ à $]x_k, x_{k+1}[$. On pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f_k}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note aussi $\int_a^b f$ cette intégrale.

Chaque terme de la somme est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, vue en première année : l'intégrale de $f$ est la somme des aires algébriques sous chacun des morceaux. Elle ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie, et elle coïncide avec l'intégrale de première année quand $f$ est continue.

**Exercice I.6** Correction p. 65

Soit $\theta : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside, définie par $\theta(t) = 0$ si $t < 0$ et $\theta(t) = 1$ si $t \geqslant 0$. Pour $x \in [-1,1]$, on pose $F(x) = \int_{-1}^{x} \theta(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\theta$ est continue par morceaux sur $[-1,1]$.
2. Soit $x \in ]-1,0]$. Donner une subdivision de $[-1,x]$ adaptée à $\theta$ et le prolongement continu correspondant, puis calculer $F(x)$. Que vaut $F(-1)$ ?
3. Soit $x \in ]0,1]$. Justifier que $(-1,0,x)$ est une subdivision de $[-1,x]$ adaptée à $\theta$, et calculer $F(x)$.
4. Tracer le graphe de $F$.

**Exercice I.7** Correction p. 66

1. Calculer $\int_0^3 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t$ si $t \neq 1$ et $f(1) = 2$. Montrer que $f$ est continue par morceaux sur $[0,2]$, puis calculer $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comparer avec $\int_0^2 t\,\mathrm{d}t$.

Les propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment s'étendent aux fonctions continues par morceaux.

**Proposition 8.13 (Propriétés de l'intégrale sur un segment), page 8**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. *Linéarité.* Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,
$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. *Relation de Chasles.* Pour tout $c \in [a,b]$,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. *Positivité et croissance.* On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ ; si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

4. *Inégalité triangulaire.*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice I.8** Correction p. 66

Soit $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t - \lfloor t \rfloor$.

1. Justifier que $f$ est continue par morceaux sur $[0,3]$.
2. À l'aide de la relation de Chasles, calculer $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire $\int_0^3 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$ par linéarité.

**Exercice I.9** Correction p. 66

Justifier l'encadrement $t - 1 \leqslant \lfloor t \rfloor \leqslant t$ pour $t \in [0,3]$, et en déduire, sans calculer $\int_0^3 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t$, que

$$\frac{3}{2} \leqslant \int_0^3 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{9}{2}.$$

L'intégrale d'une fonction continue par morceaux s'approche par des sommes d'aires de rectangles.

**Proposition 8.15 (Sommes de Riemann), page 10**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice I.10** Correction p. 67

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

1. Écrire $u_n$ sous la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour une fonction $f$ définie sur $[0,1]$ que l'on précisera.
2. Justifier que $f$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
3. En déduire la limite de $(u_n)$.
4. De même, déterminer la limite de $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{2k}{n} \right\rfloor$.

### Pour consolider

**Exercice I.11** Correction p. 67

En première année, on a vu que si $f$ est continue et positive sur $[a,b]$ avec $a < b$, et si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est nulle sur $[a,b]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ si $t \neq \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

1. Montrer que $f$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ et calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Quelles hypothèses du théorème rappelé sont vérifiées ? Lesquelles ne le sont pas ? Le théorème s'étend-il aux fonctions continues par morceaux ?

**Exercice I.12** Correction p. 67

On reprend la fonction $F$ de l'exercice I.6.

1. Montrer que $F$ est continue sur $[-1, 1]$.
2. Calculer la dérivée à gauche et la dérivée à droite de $F$ en 0. La fonction $F$ est-elle dérivable en 0 ?
3. Le théorème fondamental de l'analyse affirme que, si $f$ est continue sur $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$. S'applique-t-il à $\theta$ ?

### Sur un intervalle quelconque

**Définition 8.16 (Fonction continue par morceaux sur un intervalle), page 10**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux sur $I$ si sa restriction à tout segment inclus dans $I$ est continue par morceaux.

Sur un segment, cette définition coïncide avec la précédente.

**Exercice I.13** Correction p. 67

1. Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 1/t$, et soit $[c, d]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. Justifier que $c > 0$ et que la restriction de $f$ à $[c, d]$ est continue par morceaux. Conclure.
2. La fonction $f$ est-elle bornée ? Une fonction continue par morceaux sur un segment l'est-elle ?
3. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Justifier que $[a, b]$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers, et que la restriction à $[a, b]$ de la partie entière est continue par morceaux. Conclure.
4. Combien la partie entière a-t-elle de points de discontinuité sur $\mathbb{R}$ ? Et sur un segment ?

Les opérations se comportent comme sur un segment.

**Proposition 8.23 (Opérations sur un intervalle), page 12**

Soient $I$ un intervalle, $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions $f + g$, $\lambda f$ et $fg$ sont continues par morceaux sur $I$.
2. La restriction de $f$ à tout intervalle $J \subset I$ est continue par morceaux sur $J$.
3. La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur $I$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur $I$ si et seulement si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont.

**Exercice I.14** Correction p. 68

Justifier que les fonctions suivantes sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

1. $t \mapsto \lfloor t \rfloor + \frac{1}{t}$.
2. $t \mapsto 2\lfloor t \rfloor - \frac{3}{t}$.
3. $t \mapsto \frac{\lfloor t \rfloor}{t}$.

**Exercice I.15** Correction p. 68

Soit $f : ]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (-1)^{\lfloor 1/t \rfloor}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $f$ sur $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Quels sont les points de discontinuité de $f$ ?

2. Soit $[c, d]$ un segment inclus dans $]0, 1]$. Montrer que $[c, d]$ ne contient qu'un nombre fini de points de discontinuité de $f$. En déduire que $f$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
3. On prolonge $f$ en 0 par $f(0) = 0$. On suppose que le prolongement est continu par morceaux sur $[0, 1]$, et on note $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée. Montrer que $]x_0, x_1[$ contient une infinité de points de discontinuité, et conclure. La valeur choisie en 0 intervient-elle ?

**Exercice I.16** Correction p. 68

Vrai ou faux ? Justifier.

1. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
2. Une fonction continue par morceaux sur un intervalle est bornée.
3. Une fonction continue par morceaux sur un intervalle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité.
4. Si l'on modifie une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ en un nombre fini de points, on obtient une fonction continue par morceaux, de même intégrale.
5. La fonction $t \mapsto \sin(1/t)$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
6. La fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \sin(1/t)$ si $t > 0$ et $f(0) = 0$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.

## Corrigé

**Correction de l'exercice I.1** Énoncé p. 59

1. Le graphe est formé des segments horizontaux d'ordonnée $m$ sur $[m, m + 1[$ pour $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$, et du point $(3, 3)$.
2. La fonction $f$ est constante, égale à $m$, sur chacun des intervalles $[m, m + 1[$, pour $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$, et $f(3) = 3$. Elle est donc continue en tout point de $]m, m + 1[$, ainsi qu'en $-1$, où elle vaut $-1$ sur $[-1, 0[$. Elle n'est pas continue en 0, 1, 2 et 3, où elle vaut $m$ alors qu'elle vaut $m - 1$ juste à gauche.
3. En $m \in \{0, 1, 2\}$, la limite à gauche est $m - 1$ et la limite à droite est $m$ ; en 3, la limite à gauche est 2. Toutes sont finies.
4. La fonction $f$ est continue sur $[-1, 3]$ sauf en quatre points, en chacun desquels elle admet des limites finies à gauche et à droite (à gauche seulement en 3) : d'après la caractérisation, elle est continue par morceaux sur $[-1, 3]$. La subdivision $(-1, 0, 1, 2, 3)$ lui est adaptée.
5. Sur $]m, m + 1[$, avec $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$, la restriction de $f$ est la constante $m$, qui se prolonge en la fonction constante égale à $m$ sur $[m, m + 1]$.

**Correction de l'exercice I.2** Énoncé p. 59

1. Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, la fonction $f$ coïncide avec la tangente, qui y est continue.
2. $\tan t \to +\infty$ quand $t \to \pi/2^-$.
3. Non. D'après la caractérisation, une fonction continue par morceaux sur $[-\pi/2, \pi/2]$ admet une limite finie à gauche en $\pi/2$, ce qui n'est pas le cas de $f$.
4. Non. La limite à gauche en $\pi/2$ ne dépend que des valeurs de $f$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, et reste $+\infty$ quelles que soient les valeurs choisies en $\pm\pi/2$.

**Correction de l'exercice I.3** **Énoncé p. 60**

1. D'après l'exercice I.1, la partie entière est continue par morceaux sur $[-1, 3]$ ; sa restriction au segment $[0, 2] \subset [-1, 3]$ l'est donc sur $[0, 2]$.
2. La fonction $t \mapsto t^2$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[0, 2]$ : la combinaison linéaire $3\lfloor t \rfloor + t^2$ l'est aussi.
3. C'est le produit de $t \mapsto t$, continue, et de la partie entière.
4. La fonction $t \mapsto \lfloor t \rfloor - 1$ est la différence de la partie entière et d'une constante ; sa valeur absolue est continue par morceaux.
5. Sa partie réelle $t \mapsto \cos t$ est continue, et sa partie imaginaire $t \mapsto \sin t + \lfloor t \rfloor$ est continue par morceaux comme somme : la fonction l'est donc.

**Correction de l'exercice I.4** **Énoncé p. 60**

1. La fonction $f$ est continue sur $]0, 1]$, et admet la limite finie 0 à droite en 0 : d'après la caractérisation, elle est continue par morceaux sur $[0, 1]$. Elle vaut $t > 0$ en $t \in ]0, 1]$ et 1 en 0, donc ne s'annule pas.
2. Pour $t > 0$, $1/f(t) = 1/t \to +\infty$ quand $t \to 0^+$.
3. Non : d'après la caractérisation, une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ admet une limite finie à droite en 0.

**Correction de l'exercice I.5** **Énoncé p. 60**

1. La fonction $f$ est continue sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$ comme produit et composée de fonctions continues. En 0, $|f(t)| \leqslant |t|$ pour tout $t$, donc $f(t) \to 0 = f(0)$ quand $t \to 0$ : $f$ est continue en 0.
2. La fonction $g$ est constante sur $[-1, 0]$ et sur $]0, 1]$ : elle est continue sauf en 0, où elle admet 0 pour limite à gauche et 1 pour limite à droite. D'après la caractérisation, elle est continue par morceaux, avec la subdivision $(-1, 0, 1)$.
3. Pour $t$ dans le premier intervalle, $1/t \in ]2k\pi, (2k + 1)\pi[$, donc $\sin(1/t) > 0$ et $f(t) > 0$. Pour $t$ dans le second, $1/t \in ](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$, donc $\sin(1/t) < 0$ et $f(t) < 0$.
4. D'après la question précédente, $g \circ f$ vaut 1 sur le premier intervalle et 0 sur le second. Soit $\varepsilon > 0$ : pour $k$ assez grand, ces deux intervalles sont inclus dans $]0, \varepsilon[$, sur lequel $g \circ f$ prend donc les valeurs 0 et 1. Elle n'a pas de limite à droite en 0. D'après la caractérisation, elle n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$, alors que $f$ et $g$ le sont.

**Correction de l'exercice I.6** **Énoncé p. 61**

1. La fonction $\theta$ est constante sur $[-1, 0[$ et sur $[0, 1]$ : elle est continue sauf en 0, où elle admet les limites finies 0 à gauche et 1 à droite. D'après la caractérisation, elle est continue par morceaux, avec la subdivision $(-1, 0, 1)$.
2. La subdivision $(-1, x)$ convient : sur $]-1, x[$, la fonction $\theta$ est nulle, et son prolongement continu à $[-1, x]$ est la fonction nulle. Donc $F(x) = \int_{-1}^{x} 0 \, \mathrm{d}t = 0$. Enfin $F(-1) = 0$, intégrale sur un segment réduit à un point.
3. Sur $]-1, 0[$, $\theta$ est nulle, prolongée par la fonction nulle sur $[-1, 0]$ ; sur $]0, x[$, elle vaut 1, prolongée par la constante 1 sur $[0, x]$. La subdivision est adaptée,

et

$$F(x) = \int_{-1}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = x.$$

4. On a $F(x) = \max(x, 0)$ : le graphe est le segment horizontal d'ordonnée 0 sur $[-1, 0]$, puis le segment de pente 1 de $(0, 0)$ à $(1, 1)$.

**Correction de l'exercice I.7** **Énoncé p. 61**

1. La subdivision $(0, 1, 2, 3)$ est adaptée : sur $]m, m+1[$, la partie entière vaut $m$, prolongée par la constante $m$ sur $[m, m+1]$. Donc

$$\int_0^3 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t + \int_1^2 1\,\mathrm{d}t + \int_2^3 2\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 2 = 3.$$

2. La fonction $f$ est continue sur $[0, 2]$ sauf en 1, où elle admet la limite 1 à gauche et à droite : elle est continue par morceaux, avec la subdivision $(0, 1, 2)$. Sur chacun des morceaux $]0, 1[$ et $]1, 2[$, elle coïncide avec $t \mapsto t$, qui est son prolongement continu. Donc

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t.$$

La valeur $f(1)$ n'intervient pas.

**Correction de l'exercice I.8** **Énoncé p. 62**

1. La fonction $t \mapsto t$ est continue, donc continue par morceaux, et la partie entière est continue par morceaux sur $[0, 3]$ : leur différence l'est aussi.
2. Pour $m \in \{0, 1, 2\}$, $f(t) = t - m$ sur $]m, m+1[$, de prolongement continu $t \mapsto t - m$ sur $[m, m+1]$. Donc

$$\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m=0}^{2} \int_m^{m+1} (t - m)\,\mathrm{d}t = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

3. Comme $\lfloor t \rfloor = t - f(t)$,

$$\int_0^3 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t = \int_0^3 t\,\mathrm{d}t - \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3.$$

**Correction de l'exercice I.9** **Énoncé p. 62**

Par définition de la partie entière, $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1$, d'où l'encadrement. Les trois fonctions sont continues par morceaux sur $[0, 3]$, et la croissance de l'intégrale donne

$$\int_0^3 (t - 1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^3 \lfloor t \rfloor\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^3 t\,\mathrm{d}t,$$

avec $\int_0^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$ et $\int_0^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.

**Correction de l'exercice I.10** **Énoncé p. 62**

1. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+k/n}$, donc $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = \frac{1}{1+t}$.
2. La fonction $f$ est continue sur $[0, 1]$, donc continue par morceaux.
3. D'après la proposition sur les sommes de Riemann, avec $a = 0$ et $b = 1$,
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$
4. On a $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $g(t) = \lfloor 2t \rfloor$ sur $[0, 1]$. La fonction $g$ vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2}[$, 1 sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et 2 en 1 : elle est continue par morceaux, avec la subdivision $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$. Donc
$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \lfloor 2t \rfloor \, \mathrm{d}t = \int_0^{1/2} 0 \, \mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 1 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

**Correction de l'exercice I.11** **Énoncé p. 62**

1. La fonction $f$ est nulle sur $]0, \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}, 1[$ : la subdivision $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ est adaptée, et les prolongements continus sont nuls. Donc
$$\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{1/2} 0 \, \mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 0 \, \mathrm{d}t = 0.$$
2. La fonction $f$ est positive, son intégrale est nulle et $0 < 1$ ; elle n'est pas continue en $\frac{1}{2}$. Elle n'est pas la fonction nulle : le théorème ne s'étend pas aux fonctions continues par morceaux, l'hypothèse de continuité est nécessaire.

**Correction de l'exercice I.12** **Énoncé p. 63**

1. On a $F(x) = \max(x, 0)$, fonction continue sur $[-1, 1]$.
2. Pour $h < 0$, $\frac{F(h)-F(0)}{h} = 0$ ; pour $h > 0$, $\frac{F(h)-F(0)}{h} = 1$. La dérivée à gauche en 0 vaut 0 et la dérivée à droite vaut 1 : $F$ n'est pas dérivable en 0.
3. Non : $\theta$ n'est pas continue en 0. La fonction $F$ n'est pas une primitive de $\theta$ sur $[-1, 1]$, puisqu'elle n'est pas dérivable en 0.

**Correction de l'exercice I.13** **Énoncé p. 63**

1. On a $c \in ]0, +\infty[$, donc $c > 0$. La fonction $f$ est continue sur $[c, d]$, donc continue par morceaux sur $[c, d]$, avec la subdivision $(c, d)$. Le segment $[c, d]$ étant quelconque, $f$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
2. Non : $f(t) \to +\infty$ quand $t \to 0^+$. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée, puisque chaque prolongement continu est borné sur son segment.
3. Les entiers de $[a, b]$ sont ceux de $[\![\lceil a \rceil, \lfloor b \rfloor]\!]$, en nombre fini. Entre deux entiers consécutifs, la partie entière est constante : comme dans l'exercice I.1, elle est continue sur $[a, b]$ sauf en ces entiers, où elle admet des limites finies à gauche et à droite. Elle est continue par morceaux sur $[a, b]$, donc sur $\mathbb{R}$.
4. Sur $\mathbb{R}$, elle en a une infinité, les entiers ; sur un segment, un nombre fini.

**Correction de l'exercice I.14** **Énoncé p. 63**

D'après l'exercice précédent, $t \mapsto 1/t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et la partie entière l'est sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle $]0, +\infty[ \subset \mathbb{R}$ par restriction.

1. C'est la somme de ces deux fonctions.
2. C'est une combinaison linéaire de ces deux fonctions.
3. C'est leur produit.

**Correction de l'exercice I.15** **Énoncé p. 63**

1. Pour $t \in ]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, on a $1/t \in [n, n+1[$, donc $\lfloor 1/t \rfloor = n$ et $f(t) = (-1)^n$. La fonction $f$ est constante sur chacun de ces intervalles et change de valeur en chaque $\frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$ : ce sont ses points de discontinuité.
2. Si $\frac{1}{n} \in [c, d]$, alors $\frac{1}{n} \geqslant c$, donc $n \leqslant \frac{1}{c}$ : les points de discontinuité dans $[c, d]$ sont en nombre fini. Entre deux d'entre eux, $f$ est constante : elle admet des limites finies à gauche et à droite en chacun d'eux, et d'après la caractérisation sa restriction à $[c, d]$ est continue par morceaux. Le segment étant quelconque, $f$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.
3. On a $x_0 = 0$ et $x_1 > 0$. Pour tout $n > \frac{1}{x_1}$, le point $\frac{1}{n}$ appartient à $]0, x_1[$ et $f$ n'y est pas continue. Or une subdivision adaptée demande que $f$ soit continue sur $]x_0, x_1[$ : il n'en existe pas, et le prolongement n'est pas continu par morceaux sur $[0, 1]$. La valeur en 0 n'intervient pas : l'argument ne porte que sur $]0, x_1[$.

**Correction de l'exercice I.16** **Énoncé p. 64**

1. Vrai : chaque prolongement continu est borné sur son segment, et ils sont en nombre fini.
2. Faux : $t \mapsto 1/t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et n'est pas bornée.
3. Faux : la partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et discontinue en chaque entier.
4. Vrai : on ajoute ces points à une subdivision adaptée ; les restrictions aux morceaux ouverts, donc les prolongements continus et l'intégrale, sont inchangés.
5. Vrai : elle est continue sur $]0, 1]$, donc sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.
6. Faux : $\sin(1/t)$ n'a pas de limite quand $t \to 0^+$ (elle vaut 1 en $\frac{1}{\pi/2+2k\pi}$ et $-1$ en $\frac{1}{3\pi/2+2k\pi}$, qui tendent vers 0), alors que la caractérisation demande une limite finie à droite en 0.

## II. Intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert

Pour une série $\sum u_n$, on forme les sommes partielles, qui sont des sommes finies, et on regarde si elles ont une limite. On procède de même pour intégrer une fonction sur un intervalle qui n'est pas un segment : on intègre sur un segment $[a, x]$, ce que la sous-section précédente permet, puis on fait tendre $x$ vers la borne manquante.

### Généralités

**Définition 8.28 (Intégrale généralisée sur $[a, b[$), page 15**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Pour tout $x \in [a, b[$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, ce qui définit

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* (en $b$) si $F$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $b$. On note alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et aussi $\int_a^b f$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale *diverge* (en $b$).

Ici $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ : soit $b$ est un réel et $x \to b$ signifie $x \to b^-$, soit $b = +\infty$. Le point $b$ n'appartient pas à l'intervalle, et $f$ n'a aucune raison d'y être définie ni d'y admettre une limite.

**Exercice II.1** Correction p. 72

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$.

1. Justifier que $f$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
2. Pour $x \geqslant 0$, calculer $F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et donner sa valeur.

Sur un intervalle $]a, b]$, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f$ continue par morceaux sur $]a, b]$, la construction se transpose en échangeant les rôles des bornes : on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge en $a$ si $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $a$, et on note alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Tout ce qui est dit pour $[a, b[$ vaut pour $]a, b]$, en remplaçant $b$ par $a$.

**Exercice II.2** Correction p. 72

1. Pour $x \in [0, 1[$, calculer $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$. En déduire que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge en 1, et donner sa valeur.
2. Pour $x \in ]0, 1]$, calculer $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. En déduire que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge en 0, et donner sa valeur.
3. Les fonctions intégrées sont-elles bornées ?

**Proposition 8.35 (Relation de Chasles et nature), page 19**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ et $c \in [a, b[$.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature : l'une converge si et seulement si l'autre converge.
2. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La nature de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend donc que du comportement de $f$ au voisinage de $b$ : on peut modifier $f$ sur un segment $[a, c]$, en gardant la continuité par morceaux, sans changer la nature de l'intégrale.

**Exercice II.3** Correction p. 72

1. À l'aide de l'exercice II.1 et de la relation de Chasles, justifier que $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
2. Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2$ si $t \in [0, 1[$ et $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$ si $t \geqslant 1$. Justifier que $f$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, puis que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et calculer sa valeur.

### Pour consolider

**Exercice II.4** Correction p. 73

1. Pour $x \geqslant 0$, calculer $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que sin n'a pas de limite en $+\infty$. On pourra considérer les suites $(2k\pi)_k$ et $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)_k$.
3. Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ ? La fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$ tend-elle vers l'infini ?

**Exercice II.5** Correction p. 73

1. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t}$ tend vers 0 en $+\infty$, et que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.
2. Soit $f$ continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, admettant une limite finie $\ell > 0$ en $+\infty$. Justifier l'existence de $A \geqslant a$ tel que $f \geqslant \frac{\ell}{2}$ sur $[A, +\infty[$, puis minorer $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant A$. En déduire que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
3. En déduire que si $f$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$ et si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\ell = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

### Exemples de référence

Les intégrales qui suivent serviront de points de comparaison : la nature d'une intégrale plus compliquée s'obtiendra souvent en comparant la fonction à l'une d'elles.

**Proposition 8.36 (Intégrales de référence), page 20**

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
4. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Les deuxième et troisième sont les intégrales de Riemann, en $+\infty$ et en 0 : les conditions sont inversées d'un cas à l'autre, et le cas $\alpha = 1$ diverge des deux côtés. Seule la nature de ces intégrales est un résultat de cours ; leur valeur se recalcule quand on en a besoin.

**Exercice II.6** Correction p. 73

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t/2}\,\mathrm{d}t$.
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$.

3. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

**Exercice II.7** Correction p. 73

Justifier la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

1. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
3. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/3}}$.
4. $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$, en utilisant la primitive $t \mapsto t\ln(t) - t$ de ln sur $]0, +\infty[$.

### Pour consolider

**Exercice II.8** Correction p. 74

1. Pour $x \in [0, \pi/2[$, calculer $\int_0^x \tan(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la nature de $\int_0^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Pour $x \in ]0, 1]$, calculer $\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. En déduire la nature de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

### Critères

Comme pour les séries, on calcule rarement une intégrale généralisée pour savoir si elle converge : on se ramène aux exemples de référence en comparant la fonction à l'une des fonctions de référence.

**Proposition 8.43 (Fonctions positives), page 23**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs positives. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est majorée sur $[a, b[$. Dans le cas contraire, $F(x) \to +\infty$ quand $x \to b$.

**Exercice II.9** Correction p. 74

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}$, et $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

1. Justifier que $f$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et que $f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geqslant 0$.
2. Montrer que $F$ est majorée par 1 sur $[0, +\infty[$.
3. Conclure.

Le raisonnement de cet exercice est général : on majore la fonction par une fonction dont l'intégrale converge. Le théorème suivant le formule une fois pour toutes.

**Théorème 8.46 (Critère de majoration), page 24**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que

$$0 \leqslant f \leqslant g \quad \text{sur } [a, b[.$$

Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la définition, le théorème se transpose à un intervalle $]a, b]$.

**Exercice II.10** Correction p. 74

1. Montrer que $0 \leqslant \frac{\sin(t)^2}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ pour $t \geqslant 1$, et en déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $0 \leqslant \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$ pour $t \in ]0, 1]$, et en déduire la nature de $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Ce critère est à connaître, mais on l'applique rarement tel quel : les critères de comparaison de la sous-section IV, qui en découlent, sont ceux qu'on utilise le plus souvent.

## Corrigé

**Correction de l'exercice II.1** Énoncé p. 69

1. La fonction $f$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$ : elle est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
2. $F(x) = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
3. Quand $x \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-x} \to 0$, donc $F(x) \to 1$ : la limite est finie, l'intégrale converge et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

**Correction de l'exercice II.2** Énoncé p. 69

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0, 1[$, et

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x} \xrightarrow[x\to 1]{} 2.$$

   L'intégrale converge en 1 et vaut 2.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$, et

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

   L'intégrale converge en 0 et vaut 2.
3. Non : la première tend vers $+\infty$ en 1, la seconde en 0.

**Correction de l'exercice II.3** Énoncé p. 70

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge ; d'après la proposition, avec $c = 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge aussi, et

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}.$$

2. Sur un segment $[c, d] \subset [0, +\infty[$, la fonction $f$ est continue sauf peut-être en 1, où elle admet les limites finies 1 à gauche et $\mathrm{e}^{-1}$ à droite : elle est continue par morceaux sur $[c, d]$, donc sur $[0, +\infty[$. Sur $[1, +\infty[$, elle coïncide avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, dont l'intégrale converge d'après la question précédente : d'après

la proposition, avec $c = 1$, $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Sur $[0,1]$, la fonction $f$ ne diffère de $t \mapsto t^2$ qu'en 1, ce qui ne change pas son intégrale, et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \mathrm{e}^{-1}.$$

**Correction de l'exercice II.4** **Énoncé p. 70**

1. $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^x = \sin(x)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin(2k\pi) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$. Les deux suites tendent vers $+\infty$ ; si sin avait une limite $\ell$ en $+\infty$, on aurait $\ell = 0$ et $\ell = 1$.
3. L'intégrale diverge. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ ne tend pas vers l'infini : elle reste comprise entre $-1$ et 1.

**Correction de l'exercice II.5** **Énoncé p. 70**

1. On a $\frac{1}{t} \to 0$ quand $t \to +\infty$, et $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ : l'intégrale diverge.
2. Par définition de la limite, avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, il existe $A \geqslant a$ tel que $|f(t) - \ell| \leqslant \frac{\ell}{2}$ pour $t \geqslant A$, d'où $f(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$. Pour $x \geqslant A$, la croissance de l'intégrale sur le segment $[A, x]$ donne

$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

   L'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi, d'après la proposition sur la relation de Chasles et la nature.
3. Si $\ell > 0$, l'intégrale diverge d'après la question précédente ; si $\ell < 0$, on applique la question précédente à $-f$, de limite $-\ell > 0$ : $\int_a^{+\infty} -f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi. Il reste $\ell = 0$. La réciproque est fausse : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ de la première question tend vers 0, et son intégrale diverge.

**Correction de l'exercice II.6** **Énoncé p. 70**

1. La première converge ($a = 3 > 0$) ; la seconde diverge ($\mathrm{e}^{t/2} = \mathrm{e}^{-at}$ avec $a = -\frac{1}{2} < 0$).
2. La première converge ($\alpha = 3 > 1$), la deuxième diverge ($\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$), la troisième converge ($t\sqrt{t} = t^{3/2}$, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).
3. La première converge ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), la deuxième diverge ($\alpha = 2 \geqslant 1$), la troisième diverge ($\alpha = 1$).

**Correction de l'exercice II.7** **Énoncé p. 71**

Les quatre fonctions sont continues sur l'intervalle considéré.

1. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right]_0^x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

2. Pour $x \geqslant 1$,
$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$
3. Pour $x \in ]0,1]$,
$$\int_x^1 t^{-1/3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{2}t^{2/3}\right]_x^1 = \frac{3}{2}\left(1 - x^{2/3}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}.$$
4. Pour $x \in ]0,1]$,
$$\int_x^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x.$$
Par croissances comparées, $x\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$ : l'intégrale converge et vaut $-1$.

**Correction de l'exercice II.8** — **Énoncé p. 71**

1. La tangente est continue sur $[0, \pi/2[$, et
$$\int_0^x \tan(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t = [-\ln(\cos(t))]_0^x = -\ln(\cos(x)).$$
Quand $x \to \pi/2$, $\cos(x) \to 0^+$ et $-\ln(\cos(x)) \to +\infty$ : l'intégrale diverge.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$, de primitive $t \mapsto \frac{\ln(t)^2}{2}$, et
$$\int_x^1 \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$
L'intégrale diverge.

**Correction de l'exercice II.9** — **Énoncé p. 71**

1. La fonction $f$ est un quotient de fonctions continues, de dénominateur $1+t > 0$ ; elle est positive comme quotient de deux réels positifs. Comme $1 + t \geqslant 1$, $f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
2. Pour $x \geqslant 0$, la croissance de l'intégrale sur le segment $[0, x]$ donne
$$F(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1.$$
3. La fonction $f$ est positive et $F$ est majorée sur $[0, +\infty[$ : d'après la proposition, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

**Correction de l'exercice II.10** — **Énoncé p. 72**

1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)^2}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et $0 \leqslant \sin(t)^2 \leqslant 1$ donne l'encadrement. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$) : d'après le critère de majoration, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$. Comme $]0,1] \subset [0, \pi/2]$, on a $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, d'où l'encadrement. L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge

($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) : d'après le critère de majoration sur $]0,1]$, $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

## III. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

La sous-section précédente ne traitait qu'une borne à la fois. On passe aux intervalles ouverts aux deux extrémités, finies ou non : on coupe l'intervalle en un point intermédiaire et on étudie chaque borne séparément, avec les outils de la sous-section précédente.

### Généralités

**Définition 8.51 (Intégrale généralisée sur $]a,b[$), page 27**

Soient $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ et $c \in ]a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si les deux intégrales généralisées

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(généralisée en } a\text{)} \qquad \text{et} \qquad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(généralisée en } b\text{)}$$

convergent toutes les deux. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale *diverge*.

**Proposition 8.52 (Indépendance du point de coupure), page 27**

Avec les notations de la définition, la nature de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et, en cas de convergence, sa valeur ne dépendent pas du choix de $c \in ]a,b[$.

On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge en $a$ si $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et en $b$ si $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : l'intégrale converge si et seulement si elle converge en $a$ et en $b$. Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, la convergence en $a$ est automatique : on n'étudie la convergence qu'aux bornes qui n'appartiennent pas à l'intervalle.

**Exercice III.1** Correction p. 81

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

1. Pour $x \geqslant 0$, calculer $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ; pour $x \leqslant 0$, calculer $\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. En coupant en $c = 0$, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge, et calculer sa valeur.
3. Reprendre le calcul en coupant en $c = 1$, et comparer.

**Proposition 8.58 (Linéarité), page 31**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, dont les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, et soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'égalité $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ fait intervenir trois intégrales : dès que deux d'entre elles convergent, la troisième converge et l'égalité est vraie. Si l'une converge et une autre diverge, la troisième diverge.

**Exercice III.2** Correction p. 81

1. À l'aide des exercices II.1 et III.1, justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(2\mathrm{e}^{-t} - \frac{3}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.
2. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

**Proposition 8.60 (Relation de Chasles), page 32**

Soient $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ et $c \in ]a,b[$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors les intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La réciproque est la définition : si les deux morceaux convergent, l'intégrale converge. La nature de l'intégrale ne dépend donc que du comportement de $f$ au voisinage de chacune des deux bornes.

**Exercice III.3** Correction p. 81

Soit $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ si $t \leqslant 1$ et $f(t) = \frac{1}{t^2}$ si $t > 1$.

1. Justifier que $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur. On pourra utiliser l'exercice II.7.
3. Soit $g : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ si $t \leqslant 1$ et $g(t) = \frac{1}{t}$ si $t > 1$. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Proposition 8.61 (Positivité et croissance), page 33**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a,b[$, à valeurs réelles, dont les intégrales convergent.

1. Si $f \geqslant 0$ sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. Si $f \leqslant g$ sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice III.4** Correction p. 82

On pose $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

1. Montrer que $0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'exercice III.1 et du critère de majoration, appliqué sur $[0,+\infty[$ puis sur $]-\infty,0]$, montrer que $I$ converge.
2. Justifier que $I \geqslant 0$.
3. Montrer que $I \leqslant \pi$.

**Proposition 8.62 (Fonctions à valeurs complexes), page 33**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, et alors
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

**Exercice III.5** Correction p. 82

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$.

1. Pour $x \geqslant 0$, calculer $\int_0^x \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $|\mathrm{e}^{-zx}| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(z)\,x}$ pour $x \geqslant 0$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{z}$.
3. On prend $z = 1 - \mathrm{i}$. Vérifier que $\mathrm{e}^{-zt} = \mathrm{e}^{-t}(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))$, puis en déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Sans nouveau calcul d'intégrale, en déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t$.

### Pour consolider

**Exercice III.6** Correction p. 82

1. Pour $x > 0$, calculer $\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t$, et sa limite quand $x \to +\infty$.
2. Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ ? Celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ ?
3. Pour $x > 0$, calculer $\int_{-x}^{2x} t\,\mathrm{d}t$, et sa limite quand $x \to +\infty$. Pourquoi la définition demande-t-elle deux passages à la limite indépendants, en $a$ et en $b$ ?

**Exercice III.7** Correction p. 83

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ divergent.
2. Pour $x \geqslant 1$, calculer $\int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge, et donner sa valeur.
3. Peut-on écrire $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ ?

### Techniques de calculs

L'intégration par parties et le changement de variable de première année s'étendent aux intégrales généralisées. Dans les deux cas, le résultat porte d'abord sur la nature des intégrales, ensuite sur leur valeur.

**Théorème 8.64 (Intégration par parties), page 34**

Soient $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$, $g$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que le produit $fg$ admet une limite finie en $a$ et une limite finie en $b$, et on note

$$[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t).$$

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet désigne une différence de limites, et l'hypothèse porte sur le produit $fg$, pas sur $f$ et $g$ séparément : le produit peut avoir une limite finie alors qu'un des facteurs tend vers l'infini, comme $t\ln(t)$ en 0.

**Méthode 8.65 (Rédiger une intégration par parties), page 35**

Pour étudier $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ par parties :

1. **Poser les fonctions.** « Posons $u : t \mapsto \dots$ et $v : t \mapsto \dots$, qui sont de classe $C^1$ sur $]a,b[$. Pour tout $t \in ]a,b[$, $u'(t) = \dots$ et $v'(t) = \dots$ »
2. **Vérifier les limites du produit.** « On a $u(x)v(x) \to \dots$ quand $x \to a$ et $u(x)v(x) \to \dots$ quand $x \to b$. » Les deux limites doivent être finies.
3. **Conclure sur la nature.** « Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature. »
4. **Établir la convergence de l'une des deux**, celle qu'on sait traiter : « De plus, $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge, car … »
5. **Écrire la formule.** « Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \dots \text{ »}$$

On n'écrit la formule qu'au dernier point, une fois la convergence acquise.

**Exercice III.8** Correction p. 83

On étudie $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ en suivant la méthode.

1. On pose $u : t \mapsto t$. Proposer une fonction $v$ telle que $v'(t) = e^{-t}$, justifier que $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ et calculer $u'$.
2. Déterminer les limites du produit $uv$ en 0 et en $+\infty$.
3. Qu'en déduit-on sur la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ ?
4. Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.
5. Conclure, et calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice III.9** Correction p. 83

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

1. Montrer que $0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en déduire, comme dans l'exercice III.4, que $I_n$ converge.
2. On pose $u : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ et $v : t \mapsto t$. Calculer $u'$ et $v'$, et déterminer les limites de $uv$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. En déduire par intégration par parties que
$$I_n = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \,\mathrm{d}t,$$
l'intégrale du membre de droite étant convergente.
4. Écrire $\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}$ comme une différence de deux termes de la forme $\frac{1}{(1+t^2)^k}$, et en déduire que $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$.
5. Calculer $I_1$, $I_2$ et $I_3$.

**Théorème 8.70 (Changement de variable), page 39**

Soient $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, $f$ une fonction continue sur $]a,b[$ et $\varphi : ]\alpha,\beta[ \to ]a,b[$ une bijection strictement monotone de classe $C^1$.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
2. En cas de convergence, si $\varphi$ est strictement croissante,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u,$$
et si $\varphi$ est strictement décroissante,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comme en première année, les bornes suivent le changement de variable : si $\varphi$ est décroissante, elles arrivent dans l'ordre inverse, d'où le signe moins. Le théorème s'applique de même quand une borne appartient à l'intervalle.

**Méthode 8.71 (Rédiger un changement de variable), page 40**

Pour étudier $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \varphi(t)$ :

1. **Poser le changement de variable.** « Posons $\varphi : t \mapsto \ldots$, qui est de classe $C^1$ et strictement monotone sur $]a,b[$, donc bijective de $]a,b[$ sur $]\alpha,\beta[$. » On précise l'intervalle image, en regardant les limites de $\varphi$ aux bornes.
2. **Exprimer les deux variables.** « Pour tout $t \in ]a,b[$ et tout $u \in ]\alpha,\beta[$, $u = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(u) = \ldots$, et alors $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$ »
3. **Conclure sur la nature.** « Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta \ldots \mathrm{d}u$ ont même nature. »
4. **Établir la convergence de l'une des deux** : « De plus, $\int_\alpha^\beta \ldots \mathrm{d}u$ converge, car … »
5. **Écrire l'égalité.** « Donc les deux intégrales convergent et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t =$

$\int_\alpha^\beta \dots \mathrm{d}u = \dots$ » Les bornes suivent le changement de variable ; si $\varphi$ est décroissante, elles arrivent dans l'ordre inverse, et on les remet dans l'ordre en changeant le signe.

Le changement de variable peut aussi être donné dans l'autre sens, $t = \varphi(u)$ : la rédaction est la même, avec $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

**Exercice III.10** Correction p. 84

On étudie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$ en suivant la méthode, avec $u = \mathrm{e}^t$.

1. Justifier que $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe $C^1$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, et déterminer l'intervalle image.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $u = \mathrm{e}^t$, exprimer $t$ en fonction de $u$, $\mathrm{d}u$ en fonction de $\mathrm{d}t$, et $\mathrm{e}^{2t}$ en fonction de $u$.
3. En déduire une intégrale en $u$ de même nature.
4. Établir la convergence de cette intégrale à l'aide de l'exercice III.1.
5. Conclure, et donner la valeur de l'intégrale.

**Exercice III.11** Correction p. 84

On étudie $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \frac{1}{t}$.

1. Justifier que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $C^1$ et strictement monotone sur $[1, +\infty[$, et déterminer l'intervalle image.
2. Pour $t \geqslant 1$ et $u = \frac{1}{t}$, exprimer $t$ en fonction de $u$, $\mathrm{d}u$ en fonction de $\mathrm{d}t$, et $\mathrm{e}^{-1/t}$ en fonction de $u$.
3. Écrire l'intégrale en $u$ de même nature, et justifier qu'elle converge.
4. Conclure, en remettant les bornes dans l'ordre, et donner la valeur de l'intégrale.

**Proposition 8.75 (Fonctions paires et impaires), page 42**

Soient $a \in ]0, +\infty]$ et $f$ une fonction continue par morceaux sur $]-a, a[$, paire ou impaire.

1. L'intégrale $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. En cas de convergence, si $f$ est paire, $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ ; si $f$ est impaire, $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**Exercice III.12** Correction p. 84

1. À l'aide de l'exercice II.1, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge, et calculer sa valeur.
2. Pour $x \geqslant 0$, calculer $\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

### Pour consolider

**Exercice III.13** Correction p. 84

On étudie $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$, généralisée en 0, avec $u : t \mapsto \ln(t)$.

1. On prend $v : t \mapsto -\frac{1}{1+t}$, de dérivée $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$. Déterminer la limite de $uv$ en 0. Le théorème d'intégration par parties s'applique-t-il ?

2. On prend maintenant $v : t \mapsto \frac{t}{1+t}$. Vérifier que $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ pour $t \in [0,1]$, puis déterminer la limite de $uv$ en 0 et sa valeur en 1.
3. Conclure sur la nature et la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice III.14** Correction p. 85

Soit $f : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$.

1. Justifier que $f$ est continue et impaire sur $]-1,1[$.
2. Pour $x \in [0,1[$, calculer $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la nature de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, puis celle de $\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Pour $x \in [0,1[$, que vaut $\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ? Peut-on en conclure que $\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ?

## Corrigé

**Correction de l'exercice III.1** Énoncé p. 75

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, de primitive arctan. Pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \arctan(x)$ ; pour $x \leqslant 0$, $\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\arctan(x)$.
2. Quand $x \to +\infty$, $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. Quand $x \to -\infty$, $-\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ : $\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale converge en $-\infty$ et en $+\infty$, donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$
3. Pour $x \geqslant 1$, $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \arctan(x) - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$, et pour $x \leqslant 1$, $\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{3\pi}{4}$. Les deux intégrales convergent, et leur somme vaut $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$ : on retrouve la même nature et la même valeur, comme l'affirme la proposition.

**Correction de l'exercice III.2** Énoncé p. 76

1. Les intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ convergent, de valeurs 1 et $\frac{\pi}{2}$. Par linéarité, l'intégrale converge et
$$\int_0^{+\infty} \left(2\mathrm{e}^{-t} - \frac{3}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2 - \frac{3\pi}{2}.$$
2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$) et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge ($\alpha = 1$). Si $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ convergeait, la linéarité appliquée à $\frac{1}{t} = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t^2}$ donnerait la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ : l'intégrale diverge.

**Correction de l'exercice III.3** Énoncé p. 76

1. La fonction $f$ est continue sur $]0,1]$ et sur $]1,+\infty[$, et $\frac{1}{t^2} \to 1 = f(1)$ quand $t \to 1^+$ : elle est continue en 1.
2. On coupe en 1. Pour $x \in ]0,1]$, $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \to 2$ quand $x \to 0$ : l'intégrale converge en 0. Sur $[1,+\infty[$, $f(t) = \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge et vaut 1 : l'intégrale converge en $+\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2 + 1 = 3$.

3. La fonction $g$ est continue sur $]0,+\infty[$, pour la même raison que $f$. Sur $[1,+\infty[$, $g(t)=\frac{1}{t}$, et $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge ($\alpha=1$). Si $\int_0^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t$ convergeait, la relation de Chasles donnerait la convergence de $\int_1^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t$ : l'intégrale diverge.

## Correction de l'exercice III.4

Énoncé p. 76

1. Pour $t\in\mathbb{R}$, $1+t^2\geqslant 1$, donc $(1+t^2)^2\geqslant 1+t^2>0$, d'où l'encadrement. Les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$. Les intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ convergent : d'après le critère de majoration, appliqué à chaque borne, l'intégrale $I$ converge en $+\infty$ et en $-\infty$. Elle converge.
2. La fonction intégrée est positive et son intégrale converge : par positivité, $I\geqslant 0$.
3. Les deux intégrales convergent : par croissance, $I\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\pi$.

## Correction de l'exercice III.5

Énoncé p. 77

1. La fonction $t\mapsto-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{z}$ a pour dérivée $t\mapsto\mathrm{e}^{-zt}$, donc
$$\int_0^x\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{z}\right]_0^x=\frac{1-\mathrm{e}^{-zx}}{z}.$$
2. En écrivant $z=p+\mathrm{i}q$ avec $p$ et $q$ réels, $\mathrm{e}^{-zx}=\mathrm{e}^{-px}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}$ et $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\right|=1$, donc $|\mathrm{e}^{-zx}|=\mathrm{e}^{-px}$. Comme $p=\operatorname{Re}z>0$, $\mathrm{e}^{-px}\to 0$ quand $x\to+\infty$, donc $\mathrm{e}^{-zx}\to 0$ et $\int_0^x\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t\to\frac{1}{z}$.
3. On a $\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})t}=\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=\mathrm{e}^{-t}\left(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t)\right)$. Comme $\operatorname{Re}z=1>0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{1-\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$. D'après la proposition, les intégrales de sa partie réelle et de sa partie imaginaire convergent, et
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\qquad\text{et}\qquad\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$
4. Pour $t$ réel, $\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})t}=\overline{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})t}}$. D'après le second point de la proposition, l'intégrale converge et
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t=\frac{\overline{1+\mathrm{i}}}{2}=\frac{1-\mathrm{i}}{2}.$$

## Correction de l'exercice III.6

Énoncé p. 77

1. $\int_{-x}^x t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^x=0$, de limite 0.
2. Pour $x\geqslant 0$, $\int_0^x t\,\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\to+\infty$ : $\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{d}t$ diverge. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}t\,\mathrm{d}t$ diverge en $+\infty$, donc diverge.
3. $\int_{-x}^{2x}t\,\mathrm{d}t=\frac{4x^2}{2}-\frac{x^2}{2}=\frac{3x^2}{2}\to+\infty$. Selon la façon dont on lie les deux bornes, la limite vaut 0 ou $+\infty$ : une limite prise sur les deux bornes à la fois ne définit pas une valeur, alors que deux limites indépendantes ne dépendent d'aucun choix.

**Correction de l'exercice III.7** **Énoncé p. 77**

1. Pour $x \geqslant 1$, $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x)$ et $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(x+1) - \ln 2$, qui tendent vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
2. Pour $x \geqslant 1$,
$$\int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^x = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln 2.$$
Comme $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{t(t+1)}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$ converge et vaut $\ln 2$.
3. Non : les deux intégrales du membre de droite divergent. Une seule des trois intégrales converge, et la linéarité ne s'applique pas.

**Correction de l'exercice III.8** **Énoncé p. 78**

1. Posons $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, qui sont de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
2. On a $u(0)v(0) = 0$, et $u(x)v(x) = -x\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées.
3. Les deux limites sont finies : par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
4. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 (exercice II.1).
5. Donc les deux intégrales convergent et
$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + 1 = 1.$$

**Correction de l'exercice III.9** **Énoncé p. 78**

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, $1 + t^2 \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, donc $(1+t^2)^n \geqslant 1 + t^2 > 0$, d'où l'encadrement. Les fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, et les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ convergent : par critère de majoration, à chaque borne, $I_n$ converge.
2. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$u'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = 1.$$
On a $u(x)v(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \to 0$ quand $x \to -\infty$ et quand $x \to +\infty$, car $n \geqslant 1$.
3. Les deux limites sont finies : par intégration par parties, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = I_n$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. Comme $I_n$ converge, les deux convergent et
$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$
4. On a
$$\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}},$$
et les intégrales de ces deux fonctions, $I_n$ et $I_{n+1}$, convergent d'après la première question. Par linéarité, $I_n = 2n\,(I_n - I_{n+1})$, soit $2nI_{n+1} = (2n-1)I_n$.
5. D'après l'exercice III.1, $I_1 = \pi$. Puis $I_2 = \frac{1}{2}I_1 = \frac{\pi}{2}$ et $I_3 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{8}$.

**Correction de l'exercice III.10** **Énoncé p. 80**

1. Posons $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ : elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u > 0$, $u = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln(u)$, et alors $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, avec $\mathrm{e}^{2t} = u^2$.
3. Par changement de variable, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ ont même nature.
4. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.
5. Donc les deux intégrales convergent, et $\varphi$ étant croissante,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

**Correction de l'exercice III.11** **Énoncé p. 80**

1. Posons $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, de valeur 1 en 1 et de limite 0 en $+\infty$ : elle est bijective de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$.
2. Pour tout $t \geqslant 1$ et tout $u \in ]0, 1]$, $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$, et alors $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, avec $\mathrm{e}^{-1/t} = \mathrm{e}^{-u}$.
3. Par changement de variable, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. La seconde est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : elle converge.
4. Donc les deux intégrales convergent et, les bornes 1 et $+\infty$ devenant 1 et 0,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 (-\mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

**Correction de l'exercice III.12** **Énoncé p. 80**

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$, et vaut $\mathrm{e}^{-t}$ sur $[0, +\infty[$ : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. D'après la proposition, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 2.
2. La fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la proposition, $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

**Correction de l'exercice III.13** **Énoncé p. 80**

1. On a $u(x)v(x) = -\frac{\ln(x)}{1+x} \to +\infty$ quand $x \to 0$. La limite n'est pas finie : le théorème ne s'applique pas avec ce choix de $v$.
2. On a $v(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$, donc $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $]0, 1]$, $u(1)v(1) = 0$, et $u(x)v(x) = \frac{x\ln(x)}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$, par croissances comparées.
3. Par intégration par parties, les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t =$

$\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ ont même nature. La seconde est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : elle converge et vaut $\ln 2$. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,dt = \left[\frac{t\ln(t)}{1+t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 0 - \ln 2 = -\ln 2.$$

**Correction de l'exercice III.14** **Énoncé p. 81**

1. Pour $t \in ]-1,1[$, $1-t^2 > 0$ : $f$ est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et $f(-t) = \frac{-t}{1-t^2} = -f(t)$.
2. Pour $x \in [0,1[$,

$$\int_0^x \frac{t}{1-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty.$$

   L'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ diverge, donc, d'après la proposition, $\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ diverge.
3. Par imparité, $\int_{-x}^x f(t)\,dt = 0$, intégrale sur un segment. On ne peut pas conclure : l'intégrale $\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ diverge, et le second point de la proposition ne s'applique qu'en cas de convergence.

## IV. Intégrabilité

Les critères de la sous-section II ne portent que sur les fonctions positives. Pour une fonction de signe variable, ou à valeurs complexes, on étudie la fonction positive $|f|$, à laquelle ils s'appliquent, et on en déduit des résultats sur $f$ elle-même.

### Convergence absolue

**Définition 8.79 (Convergence absolue), page 44**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge absolument* si l'intégrale

$$\int_a^b |f(t)|\,dt$$

converge.

La fonction $|f|$ est continue par morceaux et positive sur $I$ : les critères de la sous-section II s'y appliquent. Si $f$ est positive, alors $|f| = f$, et la convergence absolue de $\int_a^b f(t)\,dt$ est sa convergence.

**Exercice IV.1** Correction p. 91

1. À l'aide de l'exercice III.1, montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge absolument.
2. Soit $f : [1,+\infty[ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$. Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. La fonction $f$ est-elle de signe constant ?
3. Majorer $|f(t)|$ pour $t \geqslant 1$, et en déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ converge absolument.

**Théorème 8.82 (La convergence absolue implique la convergence), page 45**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors elle converge, et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice IV.2** Correction p. 91

1. À l'aide des exercices IV.1 et II.7, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et que
$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 1.$$
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t$ converge, et que sa valeur absolue est inférieure ou égale à 1.

La réciproque du théorème est fausse : une intégrale peut converger sans converger absolument. Dans la suite, c'est la convergence absolue qui intervient.

### Intégrabilité d'une fonction

**Définition 8.85 (Fonction intégrable), page 47**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a$ et $b$, avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $f$ est *intégrable sur $I$* si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

La convergence absolue est une propriété de l'intégrale, l'intégrabilité la propriété correspondante de la fonction : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Si $f$ est intégrable sur $I$, on note $\int_I f$ ou $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Sur un segment, toute fonction continue par morceaux est intégrable.

Soit $f$ continue par morceaux sur $[a, b[$. On dit que $f$ est *intégrable en $b$* si elle est intégrable sur $[a, b[$, ce qui revient à dire qu'elle est intégrable sur $[c, b[$ pour un $c \in [a, b[$. On définit de même l'intégrabilité en $a$ d'une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$. Une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$ est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si elle est intégrable en $a$ et en $b$.

**Exercice IV.3** Correction p. 92

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est-elle intégrable en $+\infty$ ? en 0 ? sur $]0, +\infty[$ ?
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$. Montrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{-zt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
3. À l'aide de l'exercice II.7, montrer que ln est intégrable en 0.

**Définition 8.90 (L'espace $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{K})$), page 49**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur $I$

telles que l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

**Théorème 8.91 (Structure de $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$), page 49**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, et l'application $f \mapsto \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$.

**Exercice IV.4** Correction p. 92

1. Justifier que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ appartiennent à $\mathrm{L}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$. En déduire que $t \mapsto 2\mathrm{e}^{-t} - \frac{3}{1+t^2}$ y appartient aussi, et calculer son intégrale sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} + \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$, et calculer son intégrale.

### Pour consolider

**Exercice IV.5** Correction p. 92

1. Montrer que $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, et que $f^2$ ne l'est pas. Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?
2. Soient $I$ un intervalle, $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $g$ une fonction continue par morceaux et bornée sur $I$. Montrer que $fg$ est intégrable sur $I$.

**Proposition 8.92 (Intégrale nulle d'une fonction continue positive), page 50**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f$ une fonction continue, positive et intégrable sur $I$. Si

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

alors $f$ est la fonction nulle sur $I$.

**Exercice IV.6** Correction p. 93

1. Soit $f$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que $0 \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour tout $t \geqslant 0$, et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Justifier que $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, puis que $f$ est nulle.
2. Soient $I$ un intervalle non réduit à un point et $f$ une fonction continue sur $I$, à valeurs réelles, telle que $f^2$ soit intégrable sur $I$ et $\int_I f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f$ est nulle sur $I$.

**Exercice IV.7** Correction p. 93

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. On montre que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t/2}$ tend vers 0 en $+\infty$, puis qu'elle est bornée sur $[0,+\infty[$.
2. En déduire que $t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et que $(P \mid Q)$ est bien défini.
3. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est bilinéaire et symétrique.

4. Montrer que $(P \mid P) \geqslant 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, et que $(P \mid P) = 0$ implique $P = 0$.

### Pour consolider

**Exercice IV.8** Correction p. 93

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto te^{-t^2}$. Montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction $f$ est-elle nulle ? Quelle hypothèse de la proposition n'est pas vérifiée ?
2. Soit $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 1$ et $g(t) = 0$ pour $t > 0$. Montrer que $g$ est positive, intégrable et d'intégrale nulle. Quelle hypothèse de la proposition n'est pas vérifiée ?

### Critères de comparaison

Les fonctions des intégrales de référence de la sous-section II sont de signe constant : pour elles, intégrabilité et convergence de l'intégrale sont une même chose, et la proposition page 20 se relit ainsi.

**Proposition 8.94 (Fonctions de référence), page 51**

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, et intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.
3. La fonction ln est intégrable en 0.

**Exercice IV.9** Correction p. 93

Les fonctions suivantes sont-elles intégrables ?

1. $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/3}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$, sur $[0, +\infty[$.
2. $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$, en $+\infty$ puis en 0.
3. $t \mapsto \frac{1}{t^{2/3}}$, en $+\infty$ puis en 0.
4. $t \mapsto 3 \ln t$, en 0.

**Théorème 8.95 (Théorème de comparaison), page 52**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- **Domination.** Si $f(t) = \mathrm{O}(g(t))$ quand $t \to b$ et si $g$ est intégrable en $b$, alors $f$ est intégrable en $b$.
- **Équivalence.** Si $f(t) \sim g(t)$ quand $t \to b$, alors $f$ est intégrable en $b$ si et seulement si $g$ est intégrable en $b$.

Les mêmes énoncés valent en $a$ pour deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$.

Le premier point s'applique en particulier si $f(t) = \mathrm{o}(g(t))$ quand $t \to b$ : une fonction négligeable devant $g$ est dominée par $g$. On parle alors de critère de négligeabilité. Ce sont ces critères, domination, négligeabilité et équivalence, qu'on utilise le plus souvent pour étudier une intégrale généralisée.

**Exercice IV.10** Correction p. 94

1. Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \sin t$. Majorer $\left|\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{-t}}\right|$ pour $t \geqslant 0$, et en déduire que $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $\frac{\ln t}{t^2} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ quand $t \to +\infty$, et en déduire que $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

**Exercice IV.11** Correction p. 94

1. Justifier que $f : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}$ est continue et positive sur $]0, 1]$, et donner un équivalent de $f$ en 0. La fonction $f$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$ ? Quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t - 1}$ ?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifier que $f : t \mapsto \frac{1}{(t + \ln t)^\alpha}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et montrer que $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$ quand $t \to +\infty$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t + \ln t)^\alpha}$ converge-t-elle ?

## Pour consolider

**Exercice IV.12** Correction p. 94

Montrer que $\frac{1}{t^2}$ et $\frac{1}{t}$ sont toutes deux des $\mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ quand $t \to +\infty$. Sont-elles intégrables en $+\infty$ ? Que dire de $f$ si $f = \mathrm{O}(g)$ en $b$ et si $g$ n'est pas intégrable en $b$ ?

**Méthode 8.101 (Étudier l'intégrabilité au voisinage d'une borne), page 54**

Soit $f$ continue par morceaux au voisinage d'une borne $b$, c'est-à-dire sur un intervalle $[c, b[$ ou $]b, c]$. Pour savoir si $f$ est intégrable en $b$, dans l'ordre :

1. **Calcul direct.** Si l'on voit une primitive de $|f|$, on calcule $\int_c^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et on étudie sa limite quand $x \to b$.
2. **Équivalent simple.** On cherche un équivalent de $f$ en $b$ aussi simple que possible. Si c'est une fonction de référence, le théorème de comparaison conclut, dans un sens ou dans l'autre.
3. **Comparaison à une fonction de référence.** Sinon, on compare à $\frac{1}{t^2}$ si $b = +\infty$, ou à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ si $b = 0$ : on étudie $t^2 f(t)$ ou $\sqrt{t}\, f(t)$. Si cette quantité est bornée au voisinage de $b$, en particulier si elle tend vers 0, alors $f$ est intégrable en $b$ par critère de domination.
4. **Un autre exposant.** Si cette comparaison échoue, on cherche $\alpha > 1$ si $b = +\infty$, ou $\alpha < 1$ si $b = 0$, tel que $t^\alpha f(t)$ soit borné au voisinage de $b$ : alors $f = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ en $b$, et $f$ est intégrable en $b$.

L'échec de la comparaison aux points 3 et 4 ne prouve rien : une fonction qui n'est pas dominée par $\frac{1}{t^2}$ peut très bien être intégrable. Pour prouver une non-intégrabilité, on utilise l'équivalence, ou une minoration par une fonction positive non intégrable.

**Exercice IV.13** Correction p. 94

On étudie l'intégrabilité en 0 de $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1+x)}$, continue sur $]0, 1]$, en suivant la méthode. On ne cherche pas de primitive.

1. Donner un équivalent simple de $f$ en 0. Est-ce une fonction de référence ?
2. On pose $g : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Étudier la limite de $\sqrt{x}\, g(x)$ quand $x \to 0$. La comparaison à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ permet-elle de conclure ?

3. Étudier la limite de $x^{3/4}g(x)$ quand $x \to 0$, et en déduire que $g$ est intégrable en 0.
4. Conclure pour $f$.

**Exercice IV.14** Correction p. 94

En suivant la méthode, étudier l'intégrabilité en $+\infty$ des fonctions suivantes, continues sur l'intervalle indiqué. L'étape de la méthode qui conclut est indiquée entre parenthèses.

1. $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$ (calcul direct).
2. $t \mapsto \frac{t+1}{t^2+1}$ sur $[0, +\infty[$ (équivalent simple).
3. $t \mapsto t^2 e^{-\sqrt{t}}$ sur $[0, +\infty[$ (comparaison à $\frac{1}{t^2}$).
4. $t \mapsto \frac{\ln t}{t^{3/2}}$ sur $[1, +\infty[$ (un autre exposant).

Pour une borne finie autre que 0, on se ramène en 0.

**Proposition 8.103 (Translation), page 55**

Soient $a < c$ deux réels et $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a, c]$. La fonction $f$ est intégrable en $a$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(a + t)$ est intégrable en 0.

**Proposition 8.105 (Retournement), page 55**

Soient $c < b$ deux réels et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[c, b[$. La fonction $f$ est intégrable en $b$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(b - t)$ est intégrable en 0.

En particulier, pour $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en $a$, à droite comme à gauche, si et seulement si $\alpha < 1$ : on l'utilise directement comme fonction de référence en $a$.

**Exercice IV.15** Correction p. 95

1. À l'aide de la translation, montrer que $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{t-1}}$ est intégrable sur $]1, 2]$.
2. À l'aide du retournement, montrer que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$.
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-1)^2}$ est-elle intégrable sur $]1, 2]$ ? La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{3-t}}$ est-elle intégrable sur $[2, 3[$ ?

**Méthode 8.106 (Étudier l'intégrabilité sur un intervalle), page 56**

Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ d'extrémités $a < b$, ou la nature de $\int_a^b f(t)\,dt$ :

1. **Régularité.** « La fonction $f$ est continue (par morceaux) sur $I$, donc intégrable sur tout segment de $I$. » On précise l'intervalle $I$, en vérifiant où $f$ est définie et continue.
2. **Bornes problématiques.** « L'intégrale est donc généralisée en … » On nomme les extrémités de $I$ qui ne lui appartiennent pas : une seule, ou les deux.
3. **Étude en chaque borne.** On étudie l'intégrabilité de $f$ en chacune de ces bornes par la méthode précédente.
4. **Conclusion.** Si $f$ est intégrable en chaque borne problématique, $f$ est intégrable sur $I$, et $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Si $f$ n'est pas intégrable en l'une d'elles, $f$ n'est pas intégrable sur $I$.

**Exercice IV.16** Correction p. 95

On étudie $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en suivant la méthode.

1. Sur quel intervalle la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$ est-elle continue ? En quelles bornes l'intégrale est-elle généralisée ?
2. Donner un équivalent de $f$ en 0, et conclure sur l'intégrabilité de $f$ en 0.
3. Majorer $|f(t)|$ pour $t \geqslant 1$, et conclure sur l'intégrabilité de $f$ en $+\infty$.
4. Conclure.

**Exercice IV.17** Correction p. 95

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche pour quelles valeurs de $a$ et $b$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a(1-t)^b}$ converge.

1. Justifier que $f : t \mapsto \frac{1}{t^a(1-t)^b}$ est continue et positive sur $]0,1[$. En quelles bornes l'intégrale est-elle généralisée ?
2. Donner un équivalent de $f$ en 0, et en déduire une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de $f$ en 0.
3. Faire de même en 1.
4. Conclure.

## Pour consolider

**Exercice IV.18** Correction p. 96

1. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ sur $[1,+\infty[$. Déterminer la limite de $t^2 f(t)$ quand $t \to +\infty$. La fonction $f$ est-elle intégrable en $+\infty$ ?
2. Soit $f : t \mapsto \frac{2+\sin t}{t}$ sur $[1,+\infty[$. Montrer que $f(t) \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0$ pour $t \geqslant 1$, et en déduire que $f$ n'est pas intégrable en $+\infty$.

## Corrigé

**Correction de l'exercice IV.1** Énoncé p. 85

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc égale à sa valeur absolue. D'après l'exercice III.1, son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge (et vaut $\pi$) : l'intégrale converge absolument.
2. On a $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2} > 0$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4}{9\pi^2} < 0$ : la fonction $f$ change de signe.
3. La fonction $f$ est continue sur $[1,+\infty[$, et pour $t \geqslant 1$,
$$0 \leqslant |f(t)| = \frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$) : d'après le critère de majoration, $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

**Correction de l'exercice IV.2** Énoncé p. 86

1. D'après l'exercice IV.1, l'intégrale converge absolument : d'après le théorème, elle converge. L'inégalité du théorème, puis celle du critère de majoration

appliqué à $0 \leqslant \frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$, donnent

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1.$$

2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\cos(3t)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \left|\mathrm{e}^{-t}\cos(3t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 (exercice II.1) : d'après le critère de majoration, l'intégrale converge absolument, donc converge, et

$$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(3t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-t}\cos(3t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

## Correction de l'exercice IV.3

Énoncé p. 86

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ : son intégrabilité sur un intervalle est la convergence de son intégrale. D'après les intégrales de Riemann, elle est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, en 0 si et seulement si $\alpha < 1$, et sur $]0,+\infty[$, ce qui demande les deux, pour aucune valeur de $\alpha$.
2. La fonction est continue sur $[0,+\infty[$, et $\left|\mathrm{e}^{-zt}\right| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(z)\,t}$ pour $t \geqslant 0$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\operatorname{Re}(z)\,t}\,\mathrm{d}t$ converge, car $\operatorname{Re} z > 0$ : la fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$.
3. La fonction ln est continue et négative sur $]0,1]$, donc $|\ln| = -\ln$. D'après l'exercice II.7, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge ; par linéarité, $\int_0^1 |\ln(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. La fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, c'est-à-dire en 0.

## Correction de l'exercice IV.4

Énoncé p. 87

1. Les deux fonctions sont continues et positives sur $[0,+\infty[$, et leurs intégrales convergent, de valeurs 1 (exercice II.1) et $\frac{\pi}{2}$ (exercice III.1) : elles sont intégrables. Comme $\mathrm{L}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, la combinaison linéaire y appartient, et par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{[0,+\infty[} \left(2\mathrm{e}^{-t} - \frac{3}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2 - \frac{3\pi}{2}.$$

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,1]$, et $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \to 2$ quand $x \to 0$ : elle est intégrable, d'intégrale 2. La fonction ln est intégrable sur $]0,1]$ d'après l'exercice précédent, d'intégrale $-1$ (exercice II.7). La somme est intégrable, et son intégrale vaut $2 - 1 = 1$.

## Correction de l'exercice IV.5

Énoncé p. 87

1. La fonction $f$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après l'exercice précédent. La fonction $f^2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive, et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge ($\alpha = 1$) : elle n'est pas intégrable. Le produit de deux fonctions intégrables n'est donc pas nécessairement intégrable.
2. La fonction $fg$ est continue par morceaux sur $I$. Soit $M$ un majorant de $|g|$ sur $I$ : pour $t \in I$, $0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant M\,|f(t)|$. L'intégrale de $|f|$ converge, donc celle de $M\,|f|$ par linéarité ; par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de $I$ qui ne lui appartient pas, l'intégrale de $|fg|$ converge.

**Correction de l'exercice IV.6** **Énoncé p. 87**

1. On a $0 \leqslant |f| = f \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge : par critère de majoration, $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Elle est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$, intervalle non réduit à un point, d'intégrale nulle : d'après la proposition, elle est nulle.
2. La fonction $f^2$ est continue, positive et intégrable sur $I$, d'intégrale nulle : d'après la proposition, $f^2$ est nulle sur $I$, donc $f$ aussi.

**Correction de l'exercice IV.7** **Énoncé p. 87**

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, $t^k \mathrm{e}^{-t/2} \to 0$ quand $t \to +\infty$, par croissances comparées ; par combinaison linéaire, $R(t)\mathrm{e}^{-t/2} \to 0$. Il existe donc $A \geqslant 0$ tel que $\left|R(t)\mathrm{e}^{-t/2}\right| \leqslant 1$ pour $t \geqslant A$, et la fonction, continue sur le segment $[0, A]$, y est bornée : elle est bornée sur $[0, +\infty[$, par un réel $M \geqslant 0$.
2. La fonction $t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et pour $t \geqslant 0$,
$$0 \leqslant \left|R(t)\mathrm{e}^{-t}\right| = \left|R(t)\mathrm{e}^{-t/2}\right| \mathrm{e}^{-t/2} \leqslant M\mathrm{e}^{-t/2}.$$
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge : par critère de majoration, la fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$. Avec $R = PQ$, l'intégrale $(P \mid Q)$ converge.
3. Soient $P, Q, S \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto P(t)S(t)\mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto Q(t)S(t)\mathrm{e}^{-t}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$, et la linéarité de l'intégrale sur $\mathrm{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ donne $(\lambda P + Q \mid S) = \lambda(P \mid S) + (Q \mid S)$. Comme $PQ = QP$, $(P \mid Q) = (Q \mid P)$, et la linéarité à droite s'en déduit.
4. Pour $t \geqslant 0$, $P(t)^2\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$, donc $(P \mid P) \geqslant 0$ par positivité. Si $(P \mid P) = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$, d'intégrale nulle : d'après la proposition, elle est nulle. Comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, $P(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ : le polynôme $P$ a une infinité de racines, donc $P = 0$.

**Correction de l'exercice IV.8** **Énoncé p. 88**

1. La fonction $|f| : t \mapsto |t|\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$, et pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \to \frac{1}{2}$ : l'intégrale de $|f|$ converge, et $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $f$ est impaire, son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle. La fonction $f$ n'est pas nulle : elle n'est pas positive.
2. La fonction $g$ est positive, et pour $x > 0$, $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, la valeur en 0 n'intervenant pas : $g$ est intégrable, d'intégrale nulle. Elle n'est pas nulle : elle n'est pas continue en 0.

**Correction de l'exercice IV.9** **Énoncé p. 88**

1. La première l'est ($a = \frac{1}{3} > 0$), la seconde non ($a = -2 \leqslant 0$).
2. Intégrable en $+\infty$ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$), pas en 0 ($\alpha \geqslant 1$).
3. Pas intégrable en $+\infty$ ($\alpha = \frac{2}{3} \leqslant 1$), intégrable en 0 ($\alpha < 1$).
4. Oui : ln est intégrable en 0, donc 3 ln aussi, $\mathrm{L}^1(]0, 1], \mathbb{R})$ étant un espace vectoriel.

**Correction de l'exercice IV.10** **Énoncé p. 88**

1. La fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$, et $\left|\frac{f(t)}{e^{-t}}\right| = |\sin t| \leqslant 1$ : donc $f(t) = O\left(e^{-t}\right)$ quand $t \to +\infty$. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ $(a = 1 > 0)$ : par critère de domination, $f$ est intégrable en $+\infty$, donc sur $[0,+\infty[$.
2. La fonction est continue sur $[1,+\infty[$, et par croissances comparées
$$\frac{\ln t/t^2}{1/t^{3/2}} = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ $(\alpha = \frac{3}{2} > 1)$ : par critère de négligeabilité, $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc sur $[1,+\infty[$.

**Correction de l'exercice IV.11** **Énoncé p. 89**

1. Pour $t > 0$, $e^t - 1 > 0$ : $f$ est continue et positive sur $]0,1]$. Comme $e^t - 1 \underset{t\to0}{\sim} t$, $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t}$, et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 $(\alpha = 1)$. Par critère d'équivalence, $f$ n'est pas intégrable en 0, ni sur $]0,1]$. Comme $f$ est positive, l'intégrale diverge.
2. Pour $t \geqslant 1$, $t + \ln t \geqslant 1 > 0$ : $f$ est bien définie, continue et positive. Comme $\frac{\ln t}{t} \to 0$,
$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}\left(1 + \frac{\ln t}{t}\right)^{-\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}.$$
Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. Comme $f$ est positive, l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.

**Correction de l'exercice IV.12** **Énoncé p. 89**

Pour $t \geqslant 1$, $\frac{1/t^2}{1/t} = \frac{1}{t} \leqslant 1$ et $\frac{1/t}{1/t} = 1$ : les deux fonctions sont dominées par $\frac{1}{t}$. La première est intégrable en $+\infty$ $(\alpha = 2)$, la seconde non $(\alpha = 1)$ : si $g$ n'est pas intégrable, la domination ne permet pas de conclure.

**Correction de l'exercice IV.13** **Énoncé p. 89**

1. Comme $1 + x \to 1$ quand $x \to 0$, $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, qui n'est pas une fonction de référence.
2. On a $\sqrt{x}\, g(x) = \ln x \to -\infty$ quand $x \to 0$ : $g$ n'est pas dominée par $\frac{1}{\sqrt{x}}$, et cette comparaison ne donne rien.
3. Par croissances comparées, $x^{3/4} g(x) = x^{1/4} \ln x \to 0$ quand $x \to 0$ : une fonction de limite finie est bornée au voisinage de 0, donc $g(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$ quand $x \to 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{3/4}}$ est intégrable en 0 $(\alpha = \frac{3}{4} < 1)$ : par critère de domination, $g$ est intégrable en 0.
4. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$.

**Correction de l'exercice IV.14** **Énoncé p. 90**

1. La fonction est positive sur $[2,+\infty[$, de primitive $t \mapsto \ln(\ln t)$, et $\int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ : elle n'est pas intégrable en $+\infty$.

2. On a $\frac{t+1}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable en $+\infty$ ($\alpha = 1$) : par critère d'équivalence, la fonction n'est pas intégrable en $+\infty$.
3. On a $t^2 \cdot t^2 e^{-\sqrt{t}} = t^4 e^{-\sqrt{t}} = u^8 e^{-u}$ avec $u = \sqrt{t} \to +\infty$ : par croissances comparées, cette quantité tend vers 0. La fonction est donc un $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ : par critère de domination, elle est intégrable en $+\infty$.
4. On a $t^2 \cdot \frac{\ln t}{t^{3/2}} = \sqrt{t} \ln t \to +\infty$ : la comparaison à $\frac{1}{t^2}$ échoue. Avec $\alpha = \frac{5}{4} > 1$, $t^{5/4} \cdot \frac{\ln t}{t^{3/2}} = \frac{\ln t}{t^{1/4}} \to 0$ par croissances comparées : la fonction est un $O\left(\frac{1}{t^{5/4}}\right)$ en $+\infty$, et par critère de domination, elle est intégrable en $+\infty$.

## Correction de l'exercice IV.15

Énoncé p. 90

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{t-1}}$ est continue sur $]1, 2]$. Par translation, $f$ est intégrable en 1 si et seulement si $g : t \mapsto f(1+t) = \frac{e^{1+t}}{\sqrt{t}}$ l'est en 0. Or $g(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{e}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) : par critère d'équivalence, $g$ est intégrable en 0, donc $f$ en 1, et sur $]1, 2]$.
2. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$. Par retournement, $f$ est intégrable en 1 si et seulement si $g : t \mapsto f(1-t)$ l'est en 0. Pour $t \in ]0, 1]$, $1 - (1-t)^2 = t(2-t)$, donc
$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}},$$
intégrable en 0 : par critère d'équivalence, $g$ est intégrable en 0, donc $f$ en 1, et sur $[0, 1[$.
3. Non pour la première : elle est continue sur $]1, 2]$, de la forme $\frac{1}{|t-1|^2}$, et $2 \geqslant 1$. Oui pour la seconde : elle est continue sur $[2, 3[$, de la forme $\frac{1}{|t-3|^{1/2}}$, et $\frac{1}{2} < 1$.

## Correction de l'exercice IV.16

Énoncé p. 91

1. La fonction $f$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.
2. Comme $\sin t \underset{t\to0}{\sim} t$, $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{t}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) : par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.
3. Pour $t \geqslant 1$, $|f(t)| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}$, donc $f(t) = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) : par critère de domination, $f$ est intégrable en $+\infty$.
4. La fonction $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, et l'intégrale converge.

## Correction de l'exercice IV.17

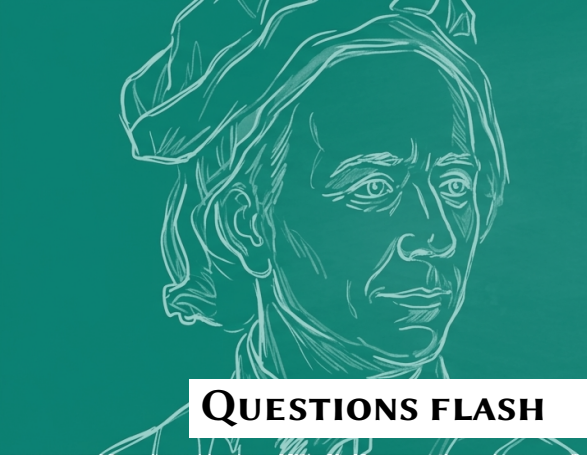
Énoncé p. 91

1. Pour $t \in ]0, 1[$, $t > 0$ et $1 - t > 0$ : $f$ est définie, continue et positive sur $]0, 1[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en 1.
2. Comme $(1-t)^b \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^a}$, intégrable en 0 si et seulement si $a < 1$ : par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0 si et seulement si $a < 1$.

3. Comme $t^a \to 1$ quand $t \to 1$, $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(1-t)^b} = \frac{1}{|t-1|^b}$, intégrable en 1 si et seulement si $b < 1$ : par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 1 si et seulement si $b < 1$.
4. La fonction $f$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $a < 1$ et $b < 1$. Comme $f$ est positive, l'intégrale converge si $a < 1$ et $b < 1$, et diverge sinon.

**Correction de l'exercice IV.18** **Énoncé p. 91**

1. On a $t^2 f(t) = \sqrt{t} \to +\infty$ : la comparaison à $\frac{1}{t^2}$ échoue. Pourtant $f$ est intégrable en $+\infty$ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) : l'échec de la comparaison ne prouve pas la non-intégrabilité.
2. Pour $t \geqslant 1$, $2 + \sin t \geqslant 1$, d'où la minoration. La fonction $f$ est continue et positive, donc $|f| = f$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge ($\alpha = 1$) : par la contraposée du critère de majoration, $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et $f$ n'est pas intégrable en $+\infty$.



# 8

# Intégrales généralisées

## Questions flash

### Questions de cours

**Question flash 8.1** ch08/q01

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Définir « $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ ». Qu'appelle-t-on une subdivision adaptée à $f$ ?

**Correction**

On dit que $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$, c'est-à-dire une famille finie de réels telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, vérifiant : pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de $f$ à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$. Une telle subdivision est dite adaptée à $f$.

ATTENDUS
- ☐ Existence d'une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- ☐ Sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$, la restriction de $f$ est prolongeable en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$
- ☐ Une telle subdivision est dite adaptée à $f$

**Question flash 8.2** ch08/q02

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Définir « $f$ est continue par morceaux sur $I$ ».

**Correction**

On dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$ si sa restriction à tout segment $[c,d]$ inclus dans $I$ est continue par morceaux sur $[c,d]$.

ATTENDUS
- ☐ La condition porte sur tout segment $[c,d]$ inclus dans $I$
- ☐ Sur chacun de ces segments, la restriction de $f$ est continue par morceaux

**Question flash 8.3** ch08/q03

La fonction partie entière est-elle continue par morceaux sur $[0,3]$ ? sur $\mathbb{R}$ ? La fonction $t \mapsto \tan t$, prolongée par 0 en $\frac{\pi}{2}$, est-elle continue par morceaux sur $[0,\pi]$ ?

**Correction**

La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0,3]$ : la subdivision $(0,1,2,3)$ lui est adaptée, puisqu'elle est constante sur chacun des intervalles ouverts $]0,1[$, $]1,2[$, $]2,3[$. Elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ : un segment $[c,d]$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers, et la partie entière est constante entre deux entiers consécutifs.
La tangente prolongée n'est pas continue par morceaux sur $[0,\pi]$ : sur $]0,\pi/2[$,

$\tan t \to +\infty$ quand $t \to \pi/2$, donc la restriction de la fonction à cet intervalle n'a pas de limite finie en $\pi/2$ et n'est pas prolongeable par continuité. La valeur donnée en $\pi/2$ n'y change rien : la définition ne regarde que les restrictions aux morceaux ouverts.

ATTENDUS
- ☐ Partie entière continue par morceaux sur $[0,3]$ : subdivision $(0,1,2,3)$, fonction constante sur chaque morceau ouvert
- ☐ Continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ : tout segment ne contient qu'un nombre fini d'entiers
- ☐ Tangente prolongée non continue par morceaux : pas de limite finie en $\pi/2$

**Question flash 8.4** ch08/q04

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Définir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Correction**

Soit $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à $f$ et, pour chaque $k$, soit $\tilde{f}_k$ le prolongement continu à $[x_k,x_{k+1}]$ de la restriction de $f$ à $]x_k,x_{k+1}[$. On pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\,\mathrm{d}t,$$

chaque terme étant l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. La valeur obtenue ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

ATTENDUS
- ☐ Subdivision adaptée et prolongements continus $\tilde{f}_k$ à $[x_k,x_{k+1}]$
- ☐ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\,\mathrm{d}t$
- ☐ La valeur ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie

**Question flash 8.5** ch08/q05

Énoncer les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment : linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance, inégalité triangulaire.

**Correction**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. **Linéarité.** Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. **Relation de Chasles.** Pour tout $c \in [a,b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. **Positivité et croissance.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ ; si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
4. **Inégalité triangulaire.** $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

ATTENDUS
- ☐ Linéarité : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
- ☐ Relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pour $c \in [a,b]$

- ☐ Positivité et croissance (fonctions réelles) : $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0, f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$
- ☐ Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

**Question flash 8.6** ch08/q06

Énoncer le théorème des sommes de Riemann pour une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$.

**Correction**

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

ATTENDUS
- ☐ Hypothèse : $f$ continue par morceaux sur le segment $[a, b]$
- ☐ Somme de Riemann $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$
- ☐ Limite $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $n \to +\infty$

**Question flash 8.7** ch08/q07

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Définir « l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ».

**Correction**

Pour tout $x \in [a, b[$, la fonction $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, ce qui définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $F$ admet une limite finie quand $x \to b$. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

ATTENDUS
- ☐ $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $[a, b[$ (intégrale sur un segment)
- ☐ Convergence : $F$ admet une limite finie quand $x \to b$
- ☐ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

**Question flash 8.8** ch08/q08

Soient $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $f$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$. Définir « l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ». Cette définition dépend-elle du point de coupure choisi ?

**Correction**

Soit $c \in ]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si les deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ (généralisée en $a$) et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (généralisée en $b$) convergent toutes les

deux. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, l'intégrale diverge. La nature de l'intégrale et, en cas de convergence, sa valeur ne dépendent pas du choix de $c$.

ATTENDUS
- ☐ Point de coupure $c \in ]a, b[$, et deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$
- ☐ Convergence : les deux intégrales convergent (toutes les deux)
- ☐ Valeur : la somme ; nature et valeur indépendantes de $c$

**Question flash 8.9** ch08/q09

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et celle de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha$.

**Correction**

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Dans les deux cas, le cas $\alpha = 1$ est celui du logarithme, et l'intégrale diverge.

ATTENDUS
- ☐ $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- ☐ $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

**Question flash 8.10** ch08/q10

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ selon la valeur de $a$. Quelle est la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ ?

**Correction**

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

ATTENDUS
- ☐ $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$
- ☐ $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge

**Question flash 8.11** ch08/q11

Soit $f$ une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Que se passe-t-il sinon ?

**Correction**

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $F$ est majorée sur $[a, b[$. Dans le cas contraire, $F(x) \to +\infty$ quand $x \to b$.

ATTENDUS
- ☐ Convergence si et seulement si $F$ est majorée sur $[a, b[$
- ☐ Sinon, $F(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \longrightarrow b$

**Question flash 8.12** ch08/q12

Énoncer, avec son hypothèse-clé, le critère de majoration pour les intégrales généralisées.

**Correction**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$, $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$. Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse-clé est la positivité : l'inégalité $0 \leqslant f$ fait partie de l'hypothèse $0 \leqslant f \leqslant g$. Par contraposée, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

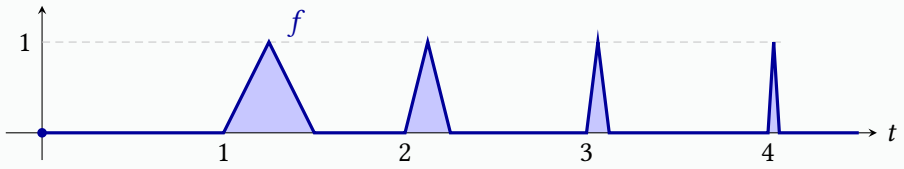
ATTENDUS
- ☐ Hypothèse-clé : $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$ (positivité de $f$)
- ☐ Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge
- ☐ $0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

**Question flash 8.13** ch08/q13

Donner l'allure d'une fonction $f$ continue sur $[0, +\infty[$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$ mais dont l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Expliquer succinctement.

**Correction**

Une fonction continue, nulle en dehors d'intervalles $[n, n + 2^{-n}]$ de plus en plus courts, et dont le graphe sur chacun d'eux est un triangle de hauteur 1 :




À cause des pics, $f$ prend la valeur 1 au voisinage de chaque entier et ne tend pas vers 0, mais l'aire du $n$-ième pic est $2^{-n-1}$, terme général d'une série convergente, donc $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ reste majorée et l'intégrale converge.

ATTENDUS
- ☐ Graphe : des pics de hauteur fixe, de plus en plus étroits, séparés par des zones où $f$ est nulle
- ☐ La hauteur des pics empêche $f$ de tendre vers 0
- ☐ La somme des aires des pics est une série convergente, donc l'intégrale converge

**Question flash 8.14** ch08/q14

Soit $f$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$ qui tend vers 0 en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? Justifier.

**Correction**

Non. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, mais pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \ :$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ diverge.

ATTENDUS
- ☐ Non
- ☐ Le contre-exemple proposé tend bien vers 0 en $+\infty$
- ☐ Le contre-exemple proposé a une intégrale divergente, avec justification

**Question flash 8.15** ch08/q15

Énoncer la positivité et la croissance de l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$. Expliciter toutes les hypothèses.

**Correction**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$, à valeurs réelles, dont les intégrales convergent.

1. Si $f \geqslant 0$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. Si $f \leqslant g$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

ATTENDUS
- ☐ Hypothèse : fonctions à valeurs réelles
- ☐ Hypothèse : les intégrales convergent
- ☐ Positivité : $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$
- ☐ Croissance : $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

**Question flash 8.16** ch08/q16

Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées sur $]a, b[$, avec toutes ses hypothèses.

**Correction**

Soient $a$ et $b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f$, $g$ deux fonctions de classe $C^1$ sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que le produit $fg$ admet une limite finie en $a$ et une limite finie en $b$, et on note $[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t)$.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

ATTENDUS
- ☐ Hypothèse : $f$, $g$ de classe $C^1$ sur $]a, b[$
- ☐ Hypothèse : $fg$ admet une limite finie en $a$ et en $b$
- ☐ Les intégrales $\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ sont de même nature
- ☐ En cas de convergence, $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$

**Question flash 8.17** ch08/q17

Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

**Correction**

Soient $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, $f$ une fonction continue sur $]a,b[$ et $\varphi : ]\alpha,\beta[ \to ]a,b[$ une bijection strictement monotone de classe $C^1$.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
2. En cas de convergence, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ si $\varphi$ est strictement croissante, et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ si $\varphi$ est strictement décroissante.

ATTENDUS
- ☐ Hypothèse : $f$ continue sur $]a,b[$
- ☐ Hypothèse : $\varphi$ bijection strictement monotone de classe $C^1$ de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$
- ☐ Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature
- ☐ En cas de convergence, égalité des deux intégrales si $\varphi$ est croissante
- ☐ Si $\varphi$ est décroissante : un signe $-$ devant l'intégrale en $u$, ou les bornes dans l'ordre inverse

**Question flash 8.18** ch08/q18

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur $]-a,a[$, paire ou impaire. Que dire de la nature et de la valeur de $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ ?

**Correction**

L'intégrale $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En cas de convergence, si $f$ est paire, $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ ; si $f$ est impaire, $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

ATTENDUS
- ☐ $\int_{-a}^a f$ converge si et seulement si $\int_0^a f$ converge
- ☐ En cas de convergence, $f$ paire : $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$
- ☐ En cas de convergence, $f$ impaire : $\int_{-a}^a f = 0$

**Question flash 8.19** ch08/q19

Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$ d'extrémités $a < b$. Définir « $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument » et « $f$ est intégrable sur $I$ ». Quel lien y a-t-il entre convergence absolue et convergence ? La réciproque est-elle vraie ?

**Correction**

On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. On dit que $f$ est intégrable sur $I$ si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors elle converge, et

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

La réciproque est fausse : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (par intégration par parties) mais ne converge pas absolument.

ATTENDUS
- ☐ Convergence absolue : $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge
- ☐ $f$ intégrable sur $I$ : son intégrale converge absolument
- ☐ Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence
- ☐ $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- ☐ Réciproque fausse, avec un contre-exemple valide

**Question flash 8.20** ch08/q20

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Définir $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $\|f\|_1$ pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$. Quelle est la structure de $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ ?

**Correction**

$\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur $I$ et intégrables sur $I$, c'est-à-dire telles que l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$, on pose $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$. L'ensemble $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

ATTENDUS
- ☐ $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ : fonctions continues par morceaux et intégrables sur $I$
- ☐ $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$
- ☐ Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$

**Question flash 8.21** ch08/q21

Énoncer la proposition sur l'intégrale nulle d'une fonction continue positive, avec toutes ses hypothèses.

**Correction**

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f$ une fonction continue, positive et intégrable sur $I$. Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $f$ est la fonction nulle sur $I$.

ATTENDUS
- ☐ Hypothèse : $I$ intervalle non réduit à un point
- ☐ Hypothèse : $f$ continue sur $I$
- ☐ Hypothèse : $f$ positive sur $I$
- ☐ Hypothèse : $f$ intégrable sur $I$
- ☐ Hypothèse : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- ☐ Conclusion : $f = 0$ sur $I$

**Question flash 8.22** ch08/q22

Énoncer le théorème de comparaison pour l'intégrabilité en une borne $b$.

**Correction**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $f, g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- **Domination.** Si $f(t) = \mathrm{O}(g(t))$ quand $t \to b$ et si $g$ est intégrable en $b$, alors $f$ est intégrable en $b$.
- **Équivalence.** Si $f(t) \sim g(t)$ quand $t \to b$, alors $f$ est intégrable en $b$ si et seulement si $g$ est intégrable en $b$.

ATTENDUS
- ☐ Domination : $f = O(g)$ en $b$ et $g$ intégrable en $b \Rightarrow f$ intégrable en $b$
- ☐ Équivalence : $f \sim g$ en $b \Rightarrow f$ et $g$ ont la même intégrabilité en $b$
- ☐ Conclusion et hypothèses exprimées correctement via l'intégrabilité. Pas d'hypothèse de positivité

**Question flash 8.23** ch08/q23

Donner les fonctions de référence pour l'intégrabilité en $+\infty$ et en 0, avec les conditions sur les paramètres.

**Correction**

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, et intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
3. La fonction ln est intégrable sur $]0, 1]$.

ATTENDUS
- ☐ $t \mapsto e^{-at}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$
- ☐ $t \mapsto 1/t^\alpha$ intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ (« intégrable en $+\infty$ » accepté)
- ☐ $t \mapsto 1/t^\alpha$ intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ (« intégrable en 0 » accepté)
- ☐ ln intégrable sur $]0, 1]$ (« intégrable en 0 » accepté)

## Exercices

**Exercice flash 8.1** ch08/x01

Calculer $\int_0^3 \lfloor t \rfloor \, dt$.

**Correction**

La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0, 3]$, la subdivision $(0, 1, 2, 3)$ lui étant adaptée : elle vaut 0 sur $[0, 1[$, 1 sur $[1, 2[$ et 2 sur $[2, 3[$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^3 \lfloor t \rfloor \, dt &= \int_0^1 \lfloor t \rfloor \, dt + \int_1^2 \lfloor t \rfloor \, dt + \int_2^3 \lfloor t \rfloor \, dt \\ &= \int_0^1 0 \, dt + \int_1^2 1 \, dt + \int_2^3 2 \, dt = 0 + 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

ATTENDUS
- ☐ Découpage $\int_0^3 = \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3$, où $\lfloor t \rfloor$ vaut 0, 1, 2
- ☐ Valeur 3

**Exercice flash 8.2** ch08/x02

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = \frac{1}{t}$ pour $t \in ]0, 1]$. La fonction $f$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$ ? sur $]0, 1]$ ?

**Correction**

**Sur $[0, 1]$.** Si $f$ était continue par morceaux sur $[0, 1]$, le premier morceau d'une subdivision adaptée serait de la forme $]0, a_1[$ et $f$ y serait prolongeable par continuité en 0 : elle aurait une limite finie en 0. Or $f(t) = \frac{1}{t} \to +\infty$ quand $t \to 0$. Donc $f$ n'est

pas continue par morceaux sur $[0,1]$.
**Sur** $]0,1]$**.** La fonction $f$ est continue sur $]0,1]$, donc sur tout segment inclus dans $]0,1]$ : elle est continue par morceaux sur $]0,1]$.

ATTENDUS
- ☐ Sur $[0,1]$ : non, car $f$ n'a pas de limite finie en 0
- ☐ Sur $]0,1]$ : oui, car $f$ est continue sur cet intervalle

**Exercice flash 8.3** ch08/x03

Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ quand $n \to +\infty$.

**Correction**

Pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Cette somme diffère de la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ du terme $\frac{g(1)-g(0)}{n}$, qui tend vers 0. Comme $g$ est continue sur $[0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

ATTENDUS
- ☐ Écriture $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
- ☐ $g$ est continue sur $[0,1]$ : somme de Riemann
- ☐ Limite $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

**Exercice flash 8.4** ch08/x04

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et calculer sa valeur. En déduire la nature et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

**Correction**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^x = \arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. La fonction est paire, donc $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge aussi, avec la même valeur, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

ATTENDUS
- ☐ Primitive arctan, de limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$
- ☐ $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$
- ☐ Fonction paire : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\pi$

**Exercice flash 8.5** ch08/x05

Déterminer, en calculant $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ pour $x \in ]0,1]$, la nature de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et celle de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

**Correction**

Les deux fonctions sont continues sur $]0,1]$. Pour $x \in ]0,1]$,

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2 \qquad \text{et} \qquad \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_x^1 = -\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (et vaut 2) ; l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

ATTENDUS
- ☐ $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x}$
- ☐ Limite 2 quand $x \to 0$ : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge
- ☐ $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$
- ☐ Limite $+\infty$ quand $x \to 0$ : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge

**Exercice flash 8.6** ch08/x06

Montrer qu'il n'existe aucun réel $\alpha$ tel que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge.

**Correction**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ ; on coupe en 1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ convergent toutes deux. Or l'intégrale de Riemann en $+\infty$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et celle en 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Aucun réel $\alpha$ ne vérifie les deux conditions : l'intégrale diverge pour tout $\alpha$.

ATTENDUS
- ☐ Découpage en un point $c > 0$, par exemple $c = 1$
- ☐ Convergence en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$
- ☐ Convergence en 0 si et seulement si $\alpha < 1$
- ☐ Les deux conditions sont incompatibles : divergence pour tout $\alpha$

**Exercice flash 8.7** ch08/x07

Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

**Correction**

Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x.$$

Cette quantité vaut 0 en $x = 2n\pi$ et 2 en $x = (2n+1)\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ : elle n'a pas de limite quand $x \to +\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

ATTENDUS
- ☐ $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$
- ☐ $1 - \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$, avec justification (deux suites de valeurs distinctes)

**Exercice flash 8.8** ch08/x08

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

**Correction**

La fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et, pour $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$). Par critère de majoration, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

ATTENDUS
- ☐ Fonction continue sur $[1, +\infty[$
- ☐ Encadrement $0 \leqslant \frac{\sin^2 t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ pour $t \geqslant 1$
- ☐ $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$)
- ☐ Conclusion par critère de majoration

**Exercice flash 8.9** ch08/x09

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par croissances comparées,

$$t^2 f(t) = t^2 \mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \qquad \text{donc} \qquad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ ($\alpha = 2 > 1$). Par critère de négligeabilité, $f$ est intégrable en $+\infty$, donc sur $[0, +\infty[$ : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

ATTENDUS
- ☐ Fonction continue sur $[0, +\infty[$
- ☐ Négligeabilité en $+\infty$ devant une fonction de référence, par exemple $f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées
- ☐ La fonction de référence utilisée est intégrable en $+\infty$, avec justification
- ☐ Par critère de négligeabilité, $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale converge

**Exercice flash 8.10** ch08/x10

Montrer que $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

**Correction**

Posons $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, qui sont de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$. On a $u(0)v(0) = 0$, et $u(x)v(x) = -x\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. De plus, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0 + 1 = 1.$$

ATTENDUS
- ☐ Fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ posées, avec leurs dérivées

- ☐ Hypothèse : $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$
- ☐ Limites du produit : $u(0)v(0) = 0$ et $u(x)v(x) = -xe^{-x} \to 0$ en $+\infty$ par croissances comparées
- ☐ Même nature que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$
- ☐ $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (intégrale de référence)
- ☐ Formule écrite après la convergence : l'intégrale vaut 1

**Exercice flash 8.11** ch08/x11

Montrer que $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

**Correction**

Posons $u : t \mapsto \ln t$ et $v : t \mapsto t$, qui sont de classe $C^1$ sur $]0, 1]$. Pour tout $t \in ]0, 1]$, $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$. On a $u(1)v(1) = 0$, et $u(x)v(x) = x \ln x \to 0$ quand $x \to 0$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ et $\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt$ ont même nature. De plus, $\int_0^1 1\,dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ : elle converge et vaut 1. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt = [t \ln t]_0^1 - \int_0^1 1\,dt = 0 - 1 = -1.$$

ATTENDUS
- ☐ Fonctions $u : t \mapsto \ln t$ et $v : t \mapsto t$ posées, avec leurs dérivées
- ☐ Hypothèse : $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $]0, 1]$
- ☐ Limites du produit : $u(1)v(1) = 0$ et $u(x)v(x) = x \ln x \to 0$ en 0 par croissances comparées
- ☐ Même nature que $\int_0^1 1\,dt$
- ☐ $\int_0^1 1\,dt$ converge (fonction continue sur un segment)
- ☐ Formule écrite après la convergence : l'intégrale vaut $-1$

**Exercice flash 8.12** ch08/x12

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ converge.

**Correction**

Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \sin t$, qui sont de classe $C^1$ sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 1$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v'(t) = \cos t$. On a $u(1)v(1) = \sin 1$, et $u(x)v(x) = \frac{\sin x}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, car $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ ont même nature.
De plus, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et pour $t \geqslant 1$, $\left|\frac{\sin t}{t^2} \cdot t^2\right| = |\sin t| \leqslant 1$, donc $\frac{\sin t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = 2 > 1$). Par critère de domination, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ converge.
Donc les deux intégrales convergent : en particulier, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ converge.

ATTENDUS
- ☐ Fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \sin t$ posées, avec leurs dérivées
- ☐ Hypothèse : $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $[1, +\infty[$
- ☐ Limites du produit : $u(1)v(1) = \sin 1$ et $u(x)v(x) = \frac{\sin x}{x} \to 0$ en $+\infty$
- ☐ Même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$

- ☐ $\frac{\sin t}{t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, car $|\sin t| \leqslant 1$
- ☐ $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ ; par critère de domination, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge
- ☐ Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

**Exercice flash 8.13** ch08/x13

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

**Correction**

Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $u \geqslant 0$, $t = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{t}$, et alors $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$, avec $\mathrm{e}^{-\sqrt{t}} = \mathrm{e}^{-u}$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature.
De plus, $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ converge : posons $g : u \mapsto 2u$ et $h : u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}$, qui sont de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$, avec $g'(u) = 2$ et $h'(u) = \mathrm{e}^{-u}$. On a $g(0)h(0) = 0$, et $g(x)h(x) = -2x\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ et $\int_0^{+\infty} g'(u)h(u)\,\mathrm{d}u = -2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature, et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1. Donc elles convergent et

$$\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [-2u\mathrm{e}^{-u}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 0 + 2 = 2.$$

Donc les deux intégrales convergent et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2$.

ATTENDUS
- ☐ Changement de variable posé : $\varphi : u \mapsto u^2$, de classe $C^1$ et strictement croissante, bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$
- ☐ Variables exprimées : $t = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{t}$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$
- ☐ Même nature que $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$
- ☐ Intégration par parties pour $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ : fonctions de classe $C^1$ posées, limites finies du produit aux deux bornes
- ☐ Même nature que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$, intégrale de référence convergente ; valeur 2
- ☐ Égalité écrite après la convergence : l'intégrale vaut 2

**Exercice flash 8.14** ch08/x14

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ; on coupe en 0. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. La fonction $f$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi et vaut $-\frac{1}{2}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

ATTENDUS
- ☐ Primitive $t \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$ : $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge
- ☐ Convergence en $-\infty$, par imparité ou par calcul direct

- ☐ Valeur 0 par imparité, une fois la convergence établie ; « impaire donc nulle » sans convergence n'est pas accepté

**Exercice flash 8.15** ch08/x15

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, et que sa valeur absolue est majorée par $\frac{\pi}{2}$.

**Correction**

La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, pour $t \geqslant 0$, une valeur absolue étant positive,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$ ($\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$). Par critère de majoration, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, et

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\cos t|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

ATTENDUS

- ☐ Encadrement $0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$, la positivité de la valeur absolue étant écrite
- ☐ $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$
- ☐ Convergence absolue par critère de majoration
- ☐ $\left|\int_0^{+\infty} f\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f| \leqslant \frac{\pi}{2}$

**Exercice flash 8.16** ch08/x16

La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$ ?

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

En 0 : comme $\mathrm{e}^{-t} \longrightarrow 1$ quand $t \longrightarrow 0$, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (fonction de référence, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.

En $+\infty$ : pour $t \geqslant 1$, $\left|\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{-t}}\right| = \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant 1$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $a = 1 > 0$). Par critère de domination, $f$ est intégrable en $+\infty$.

La fonction $f$ est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0,+\infty[$.

ATTENDUS

- ☐ $f$ continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$
- ☐ Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- ☐ En 0 : $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$
- ☐ $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable en 0 car $\frac{1}{2} < 1$ ; conclusion par critère d'équivalence
- ☐ En $+\infty$ : $f(t) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$, par $\frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant 1$ pour $t \geqslant 1$
- ☐ $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable en $+\infty$ ; conclusion par critère de domination
- ☐ Conclusion : $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

**Exercice flash 8.17** ch08/x17

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$ ?

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[1, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$.
En $+\infty$ : par croissances comparées, $t^{3/2} f(t) = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$). Par critère de négligeabilité, $f$ est intégrable en $+\infty$.
La fonction $f$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

ATTENDUS
- $f$ continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[1, +\infty[$
- Intégrale généralisée en $+\infty$
- Croissances comparées : $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ en $+\infty$ pour un exposant $\beta \in ]1, 2[$, par exemple $\beta = \frac{3}{2}$
- $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ intégrable en $+\infty$ car $\beta > 1$ ; conclusion par critère de négligeabilité
- Conclusion : $f$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

**Exercice flash 8.18** ch08/x18

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$ ?

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.
En 0 : comme $1 + t^2 \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \ln t$. La fonction ln est intégrable en 0 (fonction de référence). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.
En $+\infty$ : par croissances comparées, $t^{3/2} f(t) = \frac{t^{3/2} \ln t}{1+t^2} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$). Par critère de négligeabilité, $f$ est intégrable en $+\infty$.
La fonction $f$ est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0, +\infty[$.

ATTENDUS
- $f$ continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$
- Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- En 0 : $f(t) \sim \ln t$
- ln intégrable en 0 ; conclusion par critère d'équivalence
- En $+\infty$ : $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ pour un exposant $\beta \in ]1, 2[$, par croissances comparées
- $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ intégrable en $+\infty$ car $\beta > 1$ ; conclusion par critère de négligeabilité
- Conclusion : $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

**Exercice flash 8.19** ch08/x19

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est-elle intégrable sur $[2, +\infty[$ ?

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[2, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$.

En $+\infty$ : la fonction $f$ est positive sur $[2, +\infty[$, donc $|f| = f$ et $f$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or $t \mapsto \ln(\ln t)$ est une primitive de $f$ sur $[2, +\infty[$ et, pour $x \geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge, donc $f$ n'est pas intégrable en $+\infty$.
La fonction $f$ n'est donc pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

ATTENDUS
- □ $f$ continue sur $[2, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[2, +\infty[$
- □ Intégrale généralisée en $+\infty$
- □ $f$ positive, donc l'intégrabilité en $+\infty$ équivaut à la convergence de $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$
- □ Primitive $t \mapsto \ln(\ln t)$
- □ $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \to +\infty$
- □ Conclusion : $f$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$

**Exercice flash 8.20** ch08/x20

Pour quels réels $\alpha$ la fonction $t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$ ?

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.
En $+\infty$ : par croissances comparées, $t^2 f(t) = t^{\alpha+2}\mathrm{e}^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = 2 > 1$). Par critère de négligeabilité, $f$ est intégrable en $+\infty$, et ce pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
En 0 : comme $\mathrm{e}^{-t} \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t\to0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{-\alpha}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $-\alpha < 1$ (fonction de référence). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha > -1$.
La fonction $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si elle l'est en 0 et en $+\infty$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > -1$.

ATTENDUS
- □ $f$ continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$
- □ Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- □ En $+\infty$ : $f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées
- □ $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ ; par critère de négligeabilité, $f$ intégrable en $+\infty$ pour tout $\alpha$
- □ En 0 : $f(t) \sim t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$
- □ Intégrable en 0 si et seulement si $-\alpha < 1$, par critère d'équivalence et fonction de référence
- □ Conclusion : $f$ est intégrable si et seulement si $\alpha > -1$

**Exercice flash 8.21** ch08/x21

Pour quels réels $\alpha$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$ ?

**Correction**

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

En 0 : comme $1+t \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ (fonction de référence). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.
En $+\infty$ : comme $1+t \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha + 1 > 1$ (fonction de référence). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
La fonction $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si elle l'est en 0 et en $+\infty$, c'est-à-dire si et seulement si $0 < \alpha < 1$.

ATTENDUS
- ☐ $f$ continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$
- ☐ Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- ☐ En 0 : $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$, intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$, par critère d'équivalence
- ☐ En $+\infty$ : $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$, par critère d'équivalence
- ☐ Conclusion : $f$ est intégrable si et seulement si $0 < \alpha < 1$

**Exercice flash 8.22** ch08/x22

Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f$ est nulle. Donner une fonction continue par morceaux, positive, non nulle sur $[0,1]$, d'intégrale nulle.

**Correction**

**Nullité de $f$.** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $f(t_0) > 0$. Par continuité de $f$ en $t_0$, il existe un segment $[c,d] \subset [0,1]$ avec $c < d$, contenant $t_0$, sur lequel $f \geqslant \frac{f(t_0)}{2}$. Comme $f$ est positive sur $[0,1]$, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (d-c)\frac{f(t_0)}{2} > 0,$$

ce qui contredit $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc $f$ est nulle sur $[0,1]$.
**Contre-exemple sans continuité.** La fonction $g$ nulle sur $]0,1]$ et valant 1 en 0 est continue par morceaux (la subdivision $(0,1)$ est adaptée), positive et non nulle. Son intégrale est celle de son prolongement continu sur $[0,1]$, la fonction nulle : $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

ATTENDUS
- ☐ Raisonnement par l'absurde : un point $t_0$ où $f(t_0) > 0$
- ☐ Par continuité, $f \geqslant \frac{f(t_0)}{2}$ sur un segment $[c,d]$ avec $c < d$
- ☐ Par positivité et croissance de l'intégrale, $\int_0^1 f \geqslant \int_c^d f \geqslant (d-c)\frac{f(t_0)}{2} > 0$, contradiction
- ☐ Un contre-exemple valide, avec justification de la nullité de son intégrale

**Exercice flash 8.23** ch08/x23

Soit $f$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$, intégrable sur $[0,+\infty[$, admettant une limite $\ell$ en $+\infty$. Montrer que $\ell = 0$.

**Correction**

Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell \neq 0$. Quitte à remplacer $f$ par $-f$, qui est aussi continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, on peut supposer $\ell > 0$. Par définition de la limite, il existe $A \geqslant 0$ tel que $f(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$ pour tout $t \geqslant A$. Par croissance de l'intégrale,

pour $x \geqslant A$,

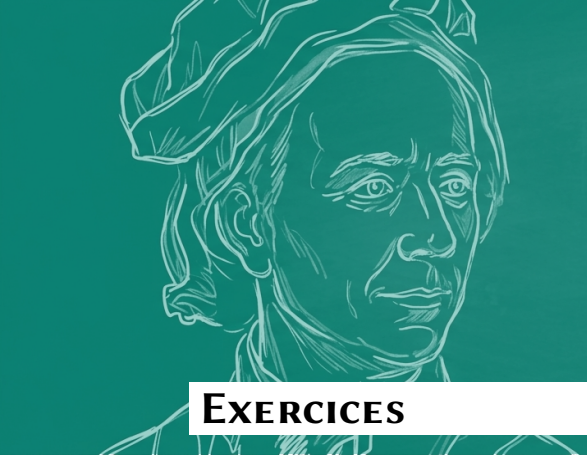
$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi. Or $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc cette intégrale converge : contradiction. Ainsi $\ell = 0$.

---

ATTENDUS

- ☐ Raisonnement par l'absurde : $\ell \neq 0$, ramené à $\ell > 0$ quitte à changer $f$ en $-f$
- ☐ Il existe $A$ tel que $f \geqslant \frac{\ell}{2}$ sur $[A,+\infty[$, par définition de la limite
- ☐ Minoration $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}(x-A) \to +\infty$
- ☐ Contradiction avec la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, qui découle de l'intégrabilité



# 8 Intégrales généralisées

## Exercices

### Intégrales généralisées

**Exercice 8.1** ○ Correction p. 132

Dire si les fonctions suivantes sont continues par morceaux sur l'intervalle indiqué.

1. $f : t \mapsto \lfloor t^2 \rfloor$ sur $[0, 2]$.
2. $f : t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ sur $]0, 1]$, puis la fonction $g$ définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ si $t > 0$ et $g(0) = 0$.
3. $f : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $[0, 1[$, puis la fonction $g$ définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = \frac{1}{1-t}$ si $t < 1$ et $g(1) = 0$.
4. $f : t \mapsto t\lfloor 1/t \rfloor$ sur $]0, 1]$, puis la fonction $g$ définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = t\lfloor 1/t \rfloor$ si $t > 0$ et $g(0) = 1$.

**Exercice 8.2** ○ Correction p. 132

1. Calculer $\displaystyle\int_0^3 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t$.
2. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = -1$ si $t < 0$, $f(0) = 5$ et $f(t) = t$ si $t > 0$. Justifier que $f$ est continue par morceaux sur $[-1, 1]$ et calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t) \, \mathrm{d}t$.
3. Déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{3k}{n} \right\rfloor$ quand $n \to +\infty$.

**Exercice 8.3** ○ Correction p. 133

Par un calcul direct, déterminer la nature des intégrales suivantes et, en cas de convergence, leur valeur.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{2t} \, \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) \, \mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln(t)^2}$
6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln(t)}$

**Exercice 8.4** ○ Correction p. 134

1. Sans calcul, donner la nature des intégrales suivantes.

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/3} \, \mathrm{d}t$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t/3} \, \mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$
(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$
(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}}$
(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}}$

2. Par majoration ou minoration, déterminer la nature des intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + t^2}$
(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t}$
(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t^3}$

**Exercice 8.5** ∘ Correction p. 134

Déterminer la nature des intégrales suivantes et, en cas de convergence, leur valeur.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

**Exercice 8.6** ∘ Correction p. 135

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer. En déduire la nature et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 8.7** ∘ Correction p. 135

Après avoir précisé les bornes en lesquelles elles sont généralisées, étudier la nature des intégrales suivantes et les calculer à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$ (*poser* $u = \mathrm{e}^t$).
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ (*poser* $u = \frac{1}{t}$).

**Exercice 8.8** ∘ Correction p. 136

Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle indiqué, et en déduire une majoration de la valeur absolue de leur intégrale.

1. $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : t \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$.
3. $h : t \mapsto \dfrac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$.

**Exercice 8.9** ○ Correction p. 136

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ sur $]0,+\infty[$.
2. $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ sur $]0,+\infty[$.
3. $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ sur $]0,+\infty[$.
4. $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ sur $]0,1]$.
5. $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur $]0,+\infty[$.

**Exercice 8.10** ○ Correction p. 137

1. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle indiqué ?
   (a) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-t}}$ sur $[0,2[$.
   (b) $t \mapsto \ln(t-1)$ sur $]1,2]$.
   (c) $t \mapsto \dfrac{1}{(t-1)^2}$ sur $]1,2]$.
2. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$ est intégrable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$, et calculer
$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}}.$$

**Exercice 8.11** ○ Correction p. 138

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |P(t)|\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 8.12** • Correction p. 138

Préciser la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{t})\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{sh}(t)-\sin(t)}{t^{7/2}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(z+t)(1+\sqrt{t})}$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-)$

**Exercice 8.13** • Correction p. 146

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur de $\alpha$, la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)}$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

**Exercice 8.14** • Correction p. 146

Justifier la convergence des intégrales suivantes et les calculer.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}$

**Exercice 8.15** • Correction p. 147

Montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer (*on pourra poser* $u = \sqrt{t}$).

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

**Exercice 8.16** • Correction p. 148

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$, $g$ deux fonctions continues sur $I$, à valeurs réelles.

1. On suppose $f$ intégrable sur $I$ et $g$ bornée sur $I$. Montrer que $fg$ est intégrable sur $I$.
2. On suppose $f^2$ et $g^2$ intégrables sur $I$. Montrer que $fg$ est intégrable sur $I$.
3. Donner un exemple de fonctions $f$ et $g$ intégrables sur $]0,1]$ telles que $fg$ ne le soit pas.

**Exercice 8.17** • Correction p. 148

1. Soit $f$ une fonction continue et intégrable sur $[a,+\infty[$, à valeurs réelles. Pour $x \geqslant a$, on pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que $R$ est définie sur $[a,+\infty[$, que $R(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, et que $R$ est de classe $C^1$ sur $[a,+\infty[$, de dérivée $-f$.
2. Soit $x > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} \qquad (\textit{on pourra remarquer que } \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \tfrac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2} \textit{ pour } t \geqslant x).$$
3. Montrer que $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

**Exercice 8.18** • Correction p. 149

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent et les calculer.

**Exercice 8.19** • Correction p. 150

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cette intégrale converge,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (*on admet que* $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

**Exercice 8.20** • Correction p. 151

Soit $f$ une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, et $M$ un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $F$ est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leqslant \dfrac{M}{x}$. En déduire la limite de $F$ en $+\infty$.
2. On suppose $f \geqslant 0$. Montrer que $F$ est décroissante.
3. Calculer $F$ lorsque $f$ est la fonction constante égale à 1, puis lorsque $f = \cos$.

**Exercice 8.21** •• Correction p. 151

Étudier, suivant les valeurs de $\alpha \geq 0$, l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{x^2+1} \, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$$

**Exercice 8.22** •• Correction p. 153

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a$ et $b$ pour que l'intégrale suivante existe :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} \, \mathrm{d}t$$

**Exercice 8.23** • Correction p. 154

Existence et calcul de :

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$
   (*poser* $u = \frac{1}{t}$)
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \ln\big(\sin(t)\big) \, \mathrm{d}t$
   (*poser* $u = \cos(t)$)
4. $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$
   (*poser* $t = \sin(u)$)
5. $M = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t$
   (*indication :* $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$)

**Exercice 8.24** •• Correction p. 158

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

2. Montrer que pour $-1 < \alpha < 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

**Exercice 8.25** ●● Correction p. 159

Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (*on pourra intégrer par parties*) mais pas absolument (*on pourra utiliser que* $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$ *puis une identité trigonométrique pour se ramener à une intégrale semblable à* $I$).

**Exercice 8.26** ○ Correction p. 161

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 8.27** ● Correction p. 162

On définit la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $I_n$ pour $n \geq 1$. Calculer $I_1$.
2. Trouver un lien entre $I_{n+1}$ et $I_n$.
3. En déduire la valeur de $I_n$.

**Exercice 8.28** ● Correction p. 164

Étudier la suite $(I_n)$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$ (*on pourra chercher une relation entre* $I_{n+1}$ *et* $I_n$).

**Exercice 8.29** ●● Correction p. 165

Soit $f \in C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que $f$ est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

**Exercice 8.30** ●● Correction p. 166

Déterminer $a$ pour que l'intégrale suivante existe :

$$\int_1^{+\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2+2x+2} - \frac{a}{x}\right)\mathrm{d}x$$

**Exercice 8.31** ●● Correction p. 167

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$. *Indication : on intègre par parties en dérivant* ln, *puis dans l'intégrale qui reste, on pose* $u = \sqrt{1-t}$.

**Exercice 8.32** ●●● Correction p. 169

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2, $E$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. Notons $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ sa base canonique : pour $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k$ est la fonction polynôme $t \mapsto t^k$.

1. (a) Démontrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 P_k(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) En déduire que si $f \in E$, l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ est bien définie.
On pose $g = L(f)$.

(c) Calculer $L(P_0), L(P_1), L(P_2)$.

(d) Démontrer que, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(P_{k+1}) = P_{k+1} - (k+1)L(P_k)$, et en déduire que

$$L(P_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j.$$

2. (a) Vérifier que si $f$ appartient à $E$ alors $L(f)$ appartient à $E$ et en déduire que l'application $L$ est un endomorphisme de $E$. Donner la matrice $M$ de l'endomorphisme $L$ dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.

(b) À l'aide de la question 1d, démontrer que $M$ est inversible et préciser $M^{-1}$.

**Exercice 8.33** ●●● Correction p. 173

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de $f$.
2. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
3. Donner un équivalent de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}$.

**Exercice 8.34** ●● Correction p. 175

*CCP 2009, Officiel de la Taupe, exercice 2.*

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 8.35** ● Correction p. 176

*CCP PC 2019, exercice 2 (RMS 130, exercice 1353).*

Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

**Exercice 8.36** ● Correction p. 177

*CCP PC 2019, exercice 2 (RMS 130, exercice 1355).*

Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. Calculer $I$.

**Exercice 8.37** ●●● Correction p. 179

*CCP PC 2018, BEOS 4575.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer par intégration par parties que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.
2. Montrer que les intégrales $u_n$ et $v_n$ convergent.
3. (a) Montrer que

$$v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(b) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{2\pi}$.

4. On définit la fonction $f$ par $f : x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
5. Donner un équivalent de $u_n$.

**Exercice 8.38** ●●● Correction p. 183

*CCP PC 2018, ODLT 193.*

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. Pour $P \in E$, on note $I(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. $I(1)$ est-elle convergente ? Quelle est sa valeur ?
2. Pour $0 \leq k \leq 5$, $I(X^k)$ est-elle absolument convergente ? $I(P)$ converge-t-elle ?
3. Dans cette question, on admet qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $P \in E$,
$$I(P) = a\,P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\,P(0) + c\,P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
   (a) Calculer $I(X)$ et en déduire une relation entre $a$, $b$ et $c$.
   (b) On donne $I(X^2) = \dfrac{\pi}{2}$ ; donner les valeurs de $a$, $b$ et $c$.
4. Donner une relation entre $I(X^{k+1})$ et $I(X^{k-1})$, puis montrer le résultat admis à la question précédente.

**Exercice 8.39** ●● Correction p. 185

Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Y est-elle intégrable ? (*on pourra appliquer le critère des séries alternées*).

**Exercice 8.40** ●● Correction p. 187

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels.

1. Déterminer, selon les valeurs de $\alpha$ et $\beta$, la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,|\ln t|^\beta}$ (on pourra poser $u = 1/t$).

**Exercice 8.41** ●● Correction p. 188

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0 + 1$,
$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
3. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

**Exercice 8.42** ●● Correction p. 189

Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$, $g$ deux fonctions continues sur $I$, à valeurs réelles, telles que $f^2$ et $g^2$ soient intégrables sur $I$.

1. Montrer que $fg$ est intégrable sur $I$ et que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $(f+\lambda g)^2$ est intégrable sur $I$.
2. En étudiant le signe de $\displaystyle\int_I (f+\lambda g)^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left(\int_I fg\right)^2 \leqslant \int_I f^2 \int_I g^2.$$
3. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, telle que $f^2$ et $f'^2$ soient intégrables sur $[0,+\infty[$. Montrer que $ff'$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, que $f^2$ admet une limite finie en $+\infty$, puis que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.

**Exercice 8.43** ●●● Correction p. 190

1. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, telle que $f$ et $f'$ soient intégrables sur $[0,+\infty[$. Montrer que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.
2. Soit $f$ une fonction continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles. On suppose $f$ uniformément continue sur $[0,+\infty[$ : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \geqslant 0$ vérifiant $|x-y| \leqslant \delta$, on ait $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   (a) Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé à $\varepsilon/2$ par l'uniforme continuité. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \geqslant \varepsilon$,
   $$\int_x^{x+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varepsilon\delta}{2}.$$
   (b) En déduire que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction continue, intégrable sur $[0,+\infty[$ et non bornée.

**Exercice 8.44** ●● Correction p. 191

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < b$.

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Pour $0 < \varepsilon < X$, exprimer $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ et de $\displaystyle\int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. Encadrer $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ et en déduire que $I = \ln\dfrac{b}{a}$.

**Exercice 8.45** ●● Correction p. 192

1. Soit $f$ une fonction continue sur $]0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, dont on justifiera la convergence, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ pour $a > 0$.

**Exercice 8.46** ●● Correction p. 193

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $I$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $2I$.
3. En calculant $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t$ de deux façons, déterminer $I$.

**Exercice 8.47** ●●● Correction p. 194

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge (on pourra poser $u = t^2$, puis intégrer par parties).
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ (on pourra utiliser l'inégalité $|\sin u| \geqslant \sin^2 u$).
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,\mathrm{d}t$ converge, et que la fonction $t \mapsto t\sin(t^4)$ n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.



# 8 Intégrales généralisées

## ★ Pour aller plus loin

**Exercice 8.48** ●●● Correction p. 195

*La série d'Euler.*
Le cours utilise l'intégration par parties pour décider de la nature d'une intégrale. On l'emploie ici pour obtenir un développement asymptotique à tout ordre, en $+\infty$, de la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

La **partie I** établit ce développement, la **partie II** le retrouve par une autre méthode, et la **partie III** montre que la série obtenue en poussant le développement indéfiniment diverge pour tout $x$, ce qui n'empêche pas de s'en servir pour calculer $f(x)$.
Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,k!}{x^{k+1}}.$$

### Partie I — Le développement asymptotique

1. Justifier que $f$ est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $R_n(x)$ est bien défini et vérifie
$$0 < R_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}}.$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,
$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)R_{n+1}(x).$$
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}S_n(x) + (-1)^{n+1}(n+1)!\,R_{n+1}(x).$$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x}S_n(x)$ et $\mathrm{e}^{-x}S_{n+1}(x)$, et que
$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x}S_n(x)| \leqslant \frac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}}.$$
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,k!}{x^{k+1}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\right).$$

### Partie II — Une seconde méthode

5. Soit $x > 0$. Montrer, par le changement de variable $t = x + u$, que
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $u \geqslant 0$,
$$\frac{1}{x+u} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{x^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1} u^{n+1}}{x^{n+1}(x+u)}.$$
7. En déduire, à l'aide de l'exercice 8.26, une nouvelle démonstration de la question 4.

**Partie III — Une série divergente qui calcule**

8. Soit $x > 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k\, k!}{x^{k+1}}$ diverge.
9. On fixe $x > 0$ et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$, de sorte que
$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x} b_n.$$
Étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour quel entier $n$ la majoration est-elle la meilleure ?
10. On prend $x = 10$. Montrer que $f(10) \geqslant \dfrac{9}{100}\mathrm{e}^{-10}$, puis que, pour $n = 8$,
$$\frac{\left|f(10) - \mathrm{e}^{-10} S_8(10)\right|}{f(10)} \leqslant 10^{-3}.$$
Ainsi la série divergente $\sum (-1)^k k!/10^{k+1}$, arrêtée au bon rang, donne $f(10)$ à moins d'un millième près.

**Exercice 8.49** ● ● ● Correction p. 198

*L'intégrale de Dirichlet.*

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (exercice 8.25). On calcule ici sa valeur avec les seuls outils de ce chapitre ; elle s'obtient aussi, par une autre méthode, au chapitre sur les intégrales à paramètres. La **partie I** calcule l'intégrale sur $[0, \pi/2]$ d'une fonction trigonométrique, le *noyau de Dirichlet* ; la **partie II** établit qu'une intégrale contre $\sin(\lambda t)$ tend vers 0 quand $\lambda$ tend vers $+\infty$ ; la **partie III** conclut.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour $t \in ]0, \pi/2]$,
$$D_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}.$$

**Partie I — Le noyau de Dirichlet**

1. Montrer que, pour tout $t \in ]0, \pi/2]$,
$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$$
(*on pourra calculer* $2\sin(t)\cos(2kt)$).
2. En déduire que $D_n$ se prolonge par continuité en 0 et que
$$\int_0^{\pi/2} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

**Partie II — Un lemme de Riemann-Lebesgue**

3. Soit $g$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0, \pi/2]$, à valeurs réelles. Montrer, par une intégration par parties, que
$$\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$
4. Soit $g$ la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par
$$g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$
   (a) Montrer que $g$ se prolonge par continuité en 0, en posant $g(0) = 0$.
   (b) Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe $C^1$ sur $[0, \pi/2]$ (*on pourra utiliser le théorème de la limite de la dérivée et un développement limité de* $\sin^2 t - t^2\cos t$ *en* 0).
5. En déduire que
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

**Partie III — Conclusion et applications**

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
7. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
8. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
9. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$ (*on pourra intégrer par parties*). En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 8.50** • • • Correction p. 201

*Intégration des relations de comparaison.*
Le théorème de comparaison du cours décide de l'intégrabilité d'une fonction, mais ne dit rien de la valeur des intégrales. On montre ici que les relations de comparaison en $+\infty$, négligeabilité, domination et équivalence, passent aux intégrales : entre les intégrales partielles $\int_a^x$ quand l'intégrale de référence diverge (**partie I**), entre les restes $\int_x^{+\infty}$ quand elle converge (**partie II**). La **partie III** en tire des équivalents d'intégrales qu'on ne sait pas calculer. Ces résultats ne sont pas au programme de PC : dans une copie, ils doivent être redémontrés.
Dans tout l'exercice, $a \in \mathbb{R}$, $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles, et $g$ est à valeurs strictement positives.

**Partie I — Le cas divergent**

Dans cette partie, on suppose que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \geqslant a$ tel que, pour tout $x \geqslant A$,
$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
En déduire que $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
3. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$. Montrer que $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
4. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$. Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et que
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
5. Montrer sur l'exemple $f(t) = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^3}$, $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$ que la conclusion de la question 4 est fausse lorsque $\int_a^{+\infty} g$ converge.
6. On pose, sur $[0, +\infty[$, $g(t) = \sin t$ et $f(t) = (1 + \mathrm{e}^{-t})\sin t$. Vérifier que $f(t) - g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$ et que $\int_0^{+\infty} g$ diverge, puis que
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{n'est pas négligeable devant} \quad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$
quand $x \to +\infty$ : la positivité de $g$ est indispensable.

**Partie II — Le cas convergent**

Dans cette partie, on suppose $g$ intégrable sur $[a, +\infty[$.

7. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$. Montrer que $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et que
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
8. Énoncer et démontrer les résultats analogues lorsque $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$ et lorsque $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$.

**Partie III — Applications**

9. Soit $h : t \mapsto \dfrac{t}{\ln t}$ sur $[2, +\infty[$. Montrer que $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln t}$, puis que
$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$
10. Montrer de même que $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.
11. Soit $k : t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}$ sur $[1, +\infty[$. Calculer $k'$ et en déduire que
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

12. En appliquant le même procédé à $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right).$$

**Exercice 8.51** ★ Correction p. 204

*L'inégalité de Hardy.*
Soit $f$ une fonction continue sur $]0,+\infty[$ dont le carré est intégrable. Sa moyenne sur $]0,x]$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est-elle encore de carré intégrable ? L'inégalité de Hardy répond oui :

$$\int_0^{+\infty} F(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

La **partie I** donne un sens à $F$, la **partie II** démontre l'inégalité et montre qu'elle est stricte, la **partie III** montre que la constante 4 ne peut pas être améliorée.
Dans tout l'exercice, $f$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles, telle que $f^2$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz de l'exercice 8.42.

**Partie I — La fonction moyenne**

1. Montrer que $f$ est intégrable sur $]0,1]$. En déduire que $F$ est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$,
$$xF'(x) = f(x) - F(x).$$
3. Montrer que, pour tout $x>0$,
$$xF(x)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t,$$
et en déduire que $xF(x)^2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

**Partie II — L'inégalité**

On note $B = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

4. Soient $0<\varepsilon<X$. Montrer, par une intégration par parties, que
$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2 - XF(X)^2.$$
5. En déduire que
$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{B} + \varepsilon F(\varepsilon)^2.$$

6. Montrer que, pour tous $0 < \varepsilon < X$,

$$\sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{B} + \sqrt{B + \varepsilon F(\varepsilon)^2}.$$

En déduire que $F^2$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

7. On suppose dans cette question que $f$ n'est pas la fonction nulle et que

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $\left(\int_0^{+\infty} Ff\right)^2 = \int_0^{+\infty} F^2 \int_0^{+\infty} f^2$.

(b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F = \lambda f$, puis que $\lambda = 2$.

(c) Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $F$ et conclure à une contradiction. Ainsi l'inégalité de Hardy est stricte dès que $f$ n'est pas nulle.

**Partie III — La constante est optimale**

Soit $A > 1$. On définit $f_A$ sur $]0,+\infty[$ par

$$f_A(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant A, \\ \dfrac{A+1-t}{\sqrt{A}} & \text{si } A \leqslant t \leqslant A+1, \\ 0 & \text{si } t \geqslant A+1, \end{cases}$$

et l'on note $F_A$ la fonction moyenne associée.

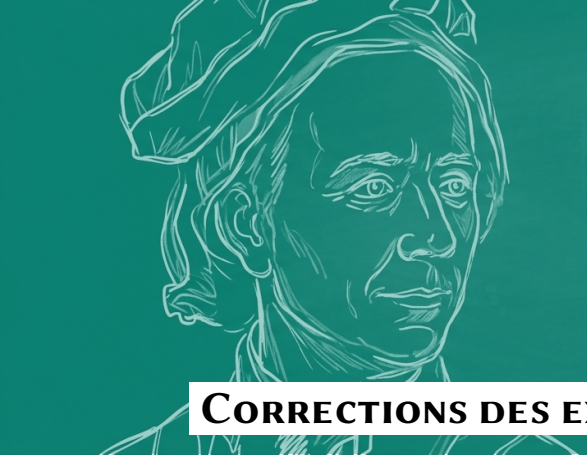
8. Vérifier que $f_A$ est continue sur $]0,+\infty[$, que $f_A^2$ y est intégrable et que

$$\int_0^{+\infty} f_A(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \ln A + 1.$$

9. Montrer que, pour tout $x \in [1,A]$, $F_A(x) \geqslant \dfrac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$, puis que

$$\int_0^{+\infty} F_A(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 4\ln A - 16.$$

10. En déduire qu'il n'existe pas de constante $C < 4$ telle que $\int_0^{+\infty} F^2 \leqslant C\int_0^{+\infty} f^2$ pour toute fonction $f$ continue sur $]0,+\infty[$ de carré intégrable.



# 8

# Intégrales généralisées

## Corrections des exercices

### Correction de l'exercice 8.1 — Énoncé p. 116

1. Pour $t \in [0,2]$, on a $t^2 \in [0,4]$, et pour $k \in [\![0,3]\!]$, $\lfloor t^2 \rfloor = k$ si et seulement si $\sqrt{k} \leqslant t < \sqrt{k+1}$. La fonction $f$ est donc constante sur chacun des intervalles $[0,1[$, $[1,\sqrt{2}[$, $[\sqrt{2},\sqrt{3}[$ et $[\sqrt{3},2[$, et $f(2) = 4$. Elle est continue sur $[0,2]$ sauf en 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et 2, où elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite : elle est continue par morceaux sur $[0,2]$, et la subdivision $(0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2)$ lui est adaptée.
2. La fonction $f$ est continue sur $]0,1]$, donc continue par morceaux sur cet intervalle : sa restriction à tout segment inclus dans $]0,1]$ est continue.

   La fonction $g$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$. Si elle l'était, il existerait une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[0,1]$ adaptée à $g$, et $g$ admettrait une limite finie en 0 à droite, limite de sa restriction à $]0,x_1[$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0$ et $g\left(\frac{1}{\pi/2+2n\pi}\right) = 1$, et ces deux suites de points tendent vers 0 : $g$ n'a pas de limite en 0. La valeur $g(0)$ n'intervient pas.
3. La fonction $f$ est continue sur $[0,1[$, donc continue par morceaux sur cet intervalle.

   La fonction $g$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ : sur le dernier morceau $]x_{n-1},1[$ d'une subdivision adaptée, elle coïnciderait avec $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, qui tend vers $+\infty$ en 1, et n'aurait pas de limite finie à gauche en 1.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in ]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$, on a $\lfloor 1/t \rfloor = n$, donc $f(t) = nt$. Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $]0,1]$. Les points $\frac{1}{n}$ qui appartiennent à $[c,d]$ vérifient $n \leqslant \frac{1}{c}$ : ils sont en nombre fini, et entre deux d'entre eux $f$ coïncide avec une fonction $t \mapsto nt$, continue et de limites finies aux bornes. La restriction de $f$ à $[c,d]$ est continue par morceaux, donc $f$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.

   En $\frac{1}{n}$ avec $n \geqslant 2$, $f$ vaut 1 et admet pour limite à droite $\frac{n-1}{n}$ : elle est discontinue en chacun de ces points, qui s'accumulent en 0. La fonction $g$ n'est donc pas continue par morceaux sur $[0,1]$ : le premier morceau $]0,x_1[$ d'une subdivision adaptée contiendrait tous les $\frac{1}{n}$ avec $n > \frac{1}{x_1}$, et $g$ y serait continue. Pourtant $g$ est continue en 0 : pour $t \in ]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$, on a $g(t) = nt \in ]\frac{n}{n+1},1]$, donc $g(t) \to 1 = g(0)$ quand $t \to 0$.

### Correction de l'exercice 8.2 — Énoncé p. 116

1. Pour $k \in [\![0,2]\!]$, la fonction partie entière vaut $k$ sur $[k,k+1[$ : la subdivision $(0,1,2,3)$ est adaptée, et sur chaque morceau le prolongement continu est la constante $k$. Donc
$$\int_0^3 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t + \int_1^2 1 \,\mathrm{d}t + \int_2^3 2 \,\mathrm{d}t = 3.$$
2. Sur $]-1,0[$, $f$ est constante égale à $-1$ ; sur $]0,1[$, elle coïncide avec $t \mapsto t$. Ces

deux restrictions sont continues et admettent des limites finies aux bornes ($-1$ en $0^-$, $0$ en $0^+$) : $f$ est continue par morceaux sur $[-1,1]$, avec la subdivision $(-1,0,1)$. La valeur $f(0)=5$ n'intervient pas, et

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(-1)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t\,\mathrm{d}t = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Soit $g : t \mapsto \lfloor 3t \rfloor$ sur $[0,1]$. Elle vaut 0 sur $[0,\frac{1}{3}[$, 1 sur $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$, 2 sur $[\frac{2}{3},1[$ et $g(1)=3$ : elle est continue par morceaux sur $[0,1]$. La somme de l'énoncé est $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$, une somme de Riemann de $g$ sur $[0,1]$. D'après la proposition sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor \frac{3k}{n}\right\rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \lfloor 3t\rfloor\,\mathrm{d}t = 0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1.$$

**Correction de l'exercice 8.3** **Énoncé p. 116**

1. La fonction $t\mapsto\frac{1}{(1+t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour $x\geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1-\frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

L'intégrale converge et vaut 1.

2. La fonction $t\mapsto\frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, et pour $x\in[0,1[$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

3. La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{2t}$ est continue sur $]-\infty,0]$, et pour $x\leqslant 0$,

$$\int_x^0 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_x^0 = \frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$.

4. La fonction sin est continue sur $[0,+\infty[$, et pour $x\geqslant 0$, $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1-\cos(x)$. Cette quantité n'a pas de limite en $+\infty$ : elle vaut 0 en $x=2n\pi$ et 2 en $x=(2n+1)\pi$. L'intégrale diverge.

5. Pour $t\geqslant 2$, $\ln(t)\geqslant\ln 2>0$ : la fonction $t\mapsto\frac{1}{t\ln(t)^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$, et $t\mapsto-\frac{1}{\ln(t)}$ en est une primitive. Pour $x\geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} = \frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\ln 2}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\ln 2}$.

6. De même, $t\mapsto\frac{1}{t\ln(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$, de primitive $t\mapsto\ln(\ln(t))$, et pour $x\geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln(\ln(x))-\ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

**Correction de l'exercice 8.4** **Énoncé p. 116**

1. Ce sont des intégrales de référence.
   (a) Converge : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ avec $a = \frac{1}{3} > 0$.
   (b) Diverge : $a = -\frac{1}{3} < 0$.
   (c) Converge : intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.
   (d) Diverge : intégrale de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{3}{2} \geqslant 1$.
   (e) Converge : intégrale de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.
   (f) Diverge : intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{1}{3} \leqslant 1$.
2. Dans chaque cas, la fonction est continue et positive sur l'intervalle d'intégration.
   (a) Pour $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^t + t^2 \geqslant \mathrm{e}^t > 0$, donc $0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^t+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (référence, $a = 1 > 0$) : par critère de majoration, l'intégrale converge.
   (b) Pour $t \geqslant 1$, $1 \leqslant 2 + \sin(t) \leqslant 3$, donc $0 \leqslant \frac{2+\sin(t)}{t^2} \leqslant \frac{3}{t^2}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann, $\alpha = 2 > 1$, et linéarité) : par critère de majoration, l'intégrale converge.
   (c) Pour $t \geqslant 1$, $\frac{2+\sin(t)}{t} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge (intégrale de Riemann, $\alpha = 1$) : par minoration, l'intégrale diverge.
   (d) Pour $t \in ]0, 1]$, $\sqrt{t} + t \geqslant \sqrt{t} > 0$, donc $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}+t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) : par critère de majoration, l'intégrale converge.
   (e) Pour $t \in ]0, 1]$, $t^2 + t^3 = t^2(1 + t) \leqslant 2t^2$, donc $\frac{1}{t^2+t^3} \geqslant \frac{1}{2t^2} \geqslant 0$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2}$ diverge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = 2 \geqslant 1$) : par minoration, l'intégrale diverge.

**Correction de l'exercice 8.5** **Énoncé p. 117**

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ : l'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$. La fonction $t \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{t}\right)$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée $2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{1+t} = f(t)$. On coupe en $c = 1$, où $2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.
   — En $+\infty$ : pour $x \geqslant 1$, $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
   — En 0 : pour $x \in ]0, 1]$, $\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) \xrightarrow[x\to0]{} \frac{\pi}{2}$.
   L'intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On coupe en 1 : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), mais $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ diverge (intégrale de Riemann en $+\infty$, $\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$). L'intégrale diverge : il suffit d'une divergence à l'une des deux bornes.
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et paire sur $]-1, 1[$. Pour $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x) \xrightarrow[x\to1]{} \frac{\pi}{2}$ : l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. D'après la proposition sur les fonctions paires, l'intégrale converge et vaut $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.
4. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et impaire sur $]-1, 1[$. Pour $x \in [0, 1[$,
$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2} \xrightarrow[x\to1]{} 1,$$

donc $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la proposition sur les fonctions impaires, l'intégrale converge et vaut 0.

5. La fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge, et d'après la proposition, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge. Pourtant $\int_{-x}^{x} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \geqslant 0$ : la convergence demande deux limites indépendantes, l'une en $-\infty$ et l'autre en $+\infty$.

## Correction de l'exercice 8.6 Énoncé p. 117

Posons $z = -1 + \mathrm{i}\omega$, qui est non nul. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$ est continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs complexes, et pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{zt}}{z}\right]_0^x = \frac{\mathrm{e}^{zx}-1}{z}, \qquad \text{avec} \qquad |\mathrm{e}^{zx}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)\,x} = \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

L'intégrale converge donc et vaut

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{z} = \frac{1}{1-\mathrm{i}\omega} = \frac{1+\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2}.$$

Pour $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{zt} = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right)$ : la partie réelle de $f$ est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t)$ et sa partie imaginaire est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(\omega t)$. D'après la proposition sur les fonctions à valeurs complexes, leurs intégrales convergent et sont les parties réelle et imaginaire de l'intégrale de $f$ :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\omega^2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

## Correction de l'exercice 8.7 Énoncé p. 117

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ : l'intégrale est généralisée en $-\infty$ et en $+\infty$. Posons $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u > 0$, $u = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln(u)$, et alors $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, soit $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, avec $\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} = u + \frac{1}{u} = \frac{u^2+1}{u}$. Donc, par changement de variable, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

ont même nature. De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$, car $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Pour $t > 1$, $t^2 - 1 > 0$ : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$, et l'intégrale est généralisée en 1 et en $+\infty$. Posons $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, donc bijective de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$.

Pour tout $t > 1$ et tout $u \in ]0,1[$, $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$, et alors $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, soit $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, avec, puisque $u > 0$,

$$t\sqrt{t^2-1} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1} = \frac{1}{u}\cdot\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}.$$

Ainsi $\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ et $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$ ont même nature. De plus, $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$, car $\arcsin(x) \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to 1$. Donc les deux intégrales convergent et, les bornes 1 et $+\infty$ devenant 1 et 0,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_1^0\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

## Correction de l'exercice 8.8

Énoncé p. 117

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\pi$. Par critère de majoration, en $-\infty$ et en $+\infty$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge : $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Son intégrale converge donc, et
$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$$
2. La fonction $g$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ : un segment $[c,d] \subset [1,+\infty[$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers, et entre deux entiers consécutifs $g$ coïncide avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ ou avec $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$, continues et de limites finies aux bornes. Pour tout $t \geqslant 1$, $|g(t)| = \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann, $\alpha = 2 > 1$), de valeur 1 : $g$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, et
$$\left|\int_1^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1.$$
3. La fonction $h$ est continue sur $]0,1]$, et pour tout $t \in ]0,1]$, $0 \leqslant |h(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$. L'intégrale $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) et vaut 2. Par critère de majoration, $h$ est intégrable sur $]0,1]$, et
$$\left|\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2.$$

## Correction de l'exercice 8.9

Énoncé p. 118

1. Pour $t > 0$, $t^2 + \sqrt{t} > 0$ : la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $t^2 = \mathrm{o}\left(\sqrt{t}\right)$, donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.
   - En $+\infty$ : $\sqrt{t} = \mathrm{o}\left(t^2\right)$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ ($\alpha = 2 > 1$). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en $+\infty$.

La fonction $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $e^{-t} \to 1$, donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable en 0. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.
   - En $+\infty$ : pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-t}$, donc $f(t) = O\left(e^{-t}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ ($a = 1 > 0$). Par critère de domination, $f$ est intégrable en $+\infty$.

   La fonction $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. La fonction $f : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $1 - \cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, donc $f(t) \to \frac{1}{2}$. La fonction $f$ se prolonge par continuité en 0 : son intégrale sur $]0,1]$ n'est pas généralisée en 0, et $f$ est intégrable en 0.
   - En $+\infty$ : pour $t > 0$, $0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{2}{t^2}$, donc $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par critère de domination, $f$ est intégrable en $+\infty$.

   La fonction $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$, et la seule borne à étudier est 0. Comme $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 ($\alpha = 1$). Par critère d'équivalence, $f$ n'est pas intégrable en 0, donc pas sur $]0,1]$.
5. La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $e^{-t} \to 1$, donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, et ln est intégrable en 0 (fonction de référence). Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0.
   - En $+\infty$ : par croissances comparées, $t^2 f(t) = t^2 \ln(t) e^{-t} \to 0$, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par critère de négligeabilité, $f$ est intégrable en $+\infty$.

   La fonction $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

**Correction de l'exercice 8.10** **Énoncé p. 118**

1. (a) La fonction est continue sur $[0,2[$, et la seule borne à étudier est 2. C'est la fonction $t \mapsto \frac{1}{(2-t)^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ : d'après la remarque sur les fonctions de Riemann en un point quelconque, elle est intégrable en 2, donc sur $[0,2[$.

   (b) La fonction est continue sur $]1,2]$, et la seule borne à étudier est 1. Notons-la $f$. Par translation, elle est intégrable en 1 si et seulement si $t \mapsto f(1+t) = \ln(t)$ est intégrable en 0, ce qui est le cas (fonction de référence). Elle est donc intégrable sur $]1,2]$.

   (c) La fonction est continue sur $]1,2]$. C'est la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-1)^\alpha}$ avec $\alpha = 2 \geqslant 1$ : elle n'est pas intégrable en 1, donc pas sur $]1,2]$.
2. Sur $]0,1[$, la fonction est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) et continue sur $]0,1]$ : elle est intégrable sur $]0,1[$, et pour $x \in ]0,1]$, $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \to 2$

quand $x \to 0$, d'où $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}} = 2$.

Sur $]-1,0[$, la fonction est $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{-t}}$, continue sur $[-1,0[$, et la borne à étudier est 0. Par retournement, $f$ est intégrable en 0 si et seulement si $t \mapsto f(0-t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0, ce qui est le cas. Pour $x \in [-1,0[$,

$$\int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t}} = \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{x} = 2 - 2\sqrt{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

La somme demandée vaut $2 + 2 = 4$.

## Correction de l'exercice 8.11

Énoncé p. 118

*Existence.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et par croissances comparées, $t^2 P(t)\mathrm{e}^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$ : ainsi $P(t)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par critère de négligeabilité, $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ : l'intégrale $N(P)$ converge, et elle est positive par positivité de l'intégrale. L'application $N$ est donc bien définie, de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$.
*Homogénéité.* Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \geqslant 0$, $|\lambda P(t)|\,\mathrm{e}^{-t} = |\lambda|\,|P(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$, et par linéarité de l'intégrale, $N(\lambda P) = |\lambda|\,N(P)$.
*Inégalité triangulaire.* Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $t \geqslant 0$, $|P(t)+Q(t)|\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant |P(t)|\,\mathrm{e}^{-t} + |Q(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$. Les trois intégrales convergent, et par croissance puis linéarité de l'intégrale, $N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.
*Séparation.* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N(P) = 0$. La fonction $t \mapsto |P(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$, intervalle non réduit à un point, et son intégrale est nulle : d'après la proposition sur l'intégrale nulle d'une fonction continue positive, elle est nulle sur $[0,+\infty[$. Comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, on a $P(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ : le polynôme $P$ a une infinité de racines, donc $P = 0$.
L'application $N$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

## Correction de l'exercice 8.12

Énoncé p. 118

**1)** La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a

$$\sqrt{t} f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}\ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

par croissance comparée (car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

On a

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t\to +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$$

par croissance comparée (car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t\to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

**Rédaction 1 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

**Rédaction 2 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0,+\infty[$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

**Remarque**

En 0, on peut aussi dire : $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t)$ et ln est intégrable sur $]0,1]$, donc par critère d'équivalence, $f$ aussi.

**2)** La fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$$

est continue sur $]0,1[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1[$.
On a

$$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}.$$

La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{1-t}$$

est continue sur $[0,1[$, la fonction

$$t \mapsto g(1-t) = \frac{1}{t}$$

n'est pas intégrable en 0 (Riemann), donc la fonction $g$ n'est pas intégrable en 1 (proposition de retournement). Comme la fonction $g$ est positive sur $[0,1[$, on en déduit que l'intégrale de $g$ diverge en 1.
Enfin, toujours car $g$ est positive, on en déduit que l'intégrale de $f$ diverge en 1 par critère d'équivalence. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

**Remarque**

Cette dernière intégrale converge en 0, mais cela n'a pas d'intérêt.

**3)** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(t)| \leq |t|$. Donc si $t \in ]0,1[$,

$$|\sin(t)| \leq |t| < \sqrt{t},$$

inégalité stricte qui reste vraie en 1 (c'est-à-dire $|\sin(1)| < \sqrt{1}$), donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{t})\ln(t)}{\sqrt{t} - \sin(t)}$$

est définie et continue sur $]0,1]$ (composée, produit puis quotient de fonctions qui le sont, avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur $]0,1]$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
On a

$$\sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t = \underset{t\to 0^+}{o}(\sqrt{t}), \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{t} - \sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}.$$

Puis, $\mathrm{sh}(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u$, et comme $\sqrt{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, par composition, on a l'équivalent

$$\mathrm{sh}(\sqrt{t}) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}.$$

Donc

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t).$$

**Rédaction 1 :** la fonction

$$g : t \mapsto \ln(t)$$

est intégrable sur $]0,1]$.
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable sur $]0,1]$. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
**Rédaction 2 :** la fonction

$$g : t \mapsto \ln(t)$$

est intégrable en 0.
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
**4)** Pour tout $t \in ]1,+\infty[$, on a $t > 1$ donc $t^2 > t$, puis

$$t^2 - t > 0.$$

Et $(1+t)^2 \geq 4 > 0$ si $t \in [1,+\infty[$. Donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2}$$

est continue sur $]1,+\infty[$ par composition puis quotient de fonctions qui le sont (avec le dénominateur qui ne s'annule pas), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$.
On a

$$f(t) = \frac{\ln(t) + \ln(t-1)}{(1+t)^2} \underset{t\to 1^+}{\sim} \frac{1}{4}\ln(t-1)$$

(car $\ln(t) \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(t-1) \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\ln(t)$ est négligeable devant $\ln(t-1)$ en $1^+$).
On a

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t^2-t)}{\sqrt{t}} = \frac{\ln(t^2)+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

**Rédaction 1 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[2,+\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$), la fonction

$$t \mapsto \ln(t-1)$$

est intégrable sur $]1,2]$ car la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$.
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable sur $]1,2]$, et par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable sur $[2,+\infty[$. Donc la fonction $f$ est intégrable sur $]1,+\infty[$, donc l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
**Rédaction 2 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$), la fonction

$$t \mapsto \ln(t-1)$$

est intégrable en $1^+$ car la fonction ln est intégrable en $0^+$.
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable en $1^+$, et par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable en $+\infty$. Donc la fonction $f$ est intégrable sur $]1,+\infty[$, donc l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
**5)** La fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est continue et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction

$$f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$$

est continue (et positive) sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par composition avec la racine carrée, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
Si $t = \frac{\pi}{2} - h$,

$$\tan(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)} = \frac{\cos(h)}{\sin(h)} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}.$$

Donc

$$f(t) \underset{t\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-t}}.$$

La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - t}}$$

est intégrable en $\frac{\pi}{2}$, car la fonction

$$t \mapsto g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

l'est en $0^+$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).
Donc par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en $\frac{\pi}{2}$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
**Autre méthode :** la fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction

$$f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$$

est continue (et positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par composition avec la racine carrée, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Faisons le changement de variable $u = \tan(t)$. La fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc induit une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur

$$\left]\lim_{t\to 0^+} \tan(t), \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(t)\right[ = ]0, +\infty[,$$

on peut donc bien faire ce changement de variable.
De plus, on a « $\mathrm{d}u = \left(1 + \tan^2(t)\right)\mathrm{d}t$ », soit « $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ ». Le théorème de changement de variable donne alors que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

(et a même valeur si convergence).
**Rédaction 1 :** la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$, en particulier sur $[0, 1]$.

De plus,

$$\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ converge absolument, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ converge absolument aussi.

**Rédaction 2 :** la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$.
De plus,

$$\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est intégrable en $+\infty$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ converge absolument, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ converge absolument aussi.

**6)** La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t) - \sin(t)}{t^{7/2}}$$

est continue sur $]0, 1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.
Un DL donne

$$f(t) = \frac{t + \frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to0}{O}(t^5) - t + \frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to0}{O}(t^5)}{t^{\frac{7}{2}}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{t}}.$$

**Rédaction 1 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{3\sqrt{t}} = \frac{1}{3t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ aussi. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

**Rédaction 2 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{3\sqrt{t}} = \frac{1}{3t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ aussi. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
**7)** La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t}$$

est continue sur $[1, +\infty[$ (par composition puis quotient, avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) \geq -1$ donc par croissance de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{\sin(t)} \geq \mathrm{e}^{-1},$$

puis pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(t) \geq \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t} \geq 0.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}$$

est continue **positive** sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann).
Donc par critère de comparaison, l'intégrale considérée diverge.
**8)** La fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

est continue sur $[0, 1[$ car $t \mapsto 1 - t^2$ est continue et strictement positive sur $[0, 1[$ (on peut alors composer avec $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, 1[$.
On a

$$f(t) \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$

(car $1 - t^2 = (1-t)(1+t)$).
La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

est intégrable en $1^-$ car la fonction

$$t \mapsto g(1-t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable en $0^+$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable en $1^-$. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

**Remarque**

Ici, on connaît une primitive. La fonction arcsin est une primitive de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

sur $]-1,1[$, donc pour tout $x \in ]-1,1[$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin(t)]_0^x = \arcsin(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

car on sait que la fonction arcsin, bien que seulement dérivable sur $]-1,1[$, est continue sur $[-1,1]$. Donc on retrouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge, et on a en plus

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

**9)** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t^2 + 4t + 1 = (t+1)^2 + 2t \geq 0,$$

donc on peut composer par la fonction racine carrée, puis par composition puis soustraction, la fonction

$$f : t \mapsto t + 2 - \sqrt{t^2+4t+1}$$

est continue sur $[0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$.
En utilisant la quantité conjuguée, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t + 2 - \sqrt{t^2+4t+1} = \frac{3}{t+2+\sqrt{t^2+4t+1}} = \frac{3}{t\left(1+\frac{2}{t}+\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2t}.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{3}{2t}$$

est continue positive sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{2t}\,\mathrm{d}t$ diverge (Riemann).
Donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \left(t + 2 - \sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$$

diverge, ce qui entraîne que l'intégrale considérée diverge.
**10)** Soit

$$f : t \mapsto \frac{1}{(z+t)(1+\sqrt{t})},$$

la fonction $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ car $(z+t)(1+\sqrt{t})$ ne s'annule que pour $t = -z \notin \mathbb{R}_+$ (car $z \notin \mathbb{R}_-$). Donc la fonction $f$ est intégrable sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$, en particulier sur $[0,1]$.
On a

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

**Rédaction 1 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
**Rédaction 2 :** la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable en $+\infty$.
Donc la fonction $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

**Correction de l'exercice 8.13** **Énoncé p. 118**

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ : la nature de l'intégrale est celle de l'intégrabilité de $f$ en 0 et en $+\infty$.
   En 0, $1 + t \to 1$, donc $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ (Riemann en 0).
   En $+\infty$, $1 + t \sim t$, donc $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Par critère d'équivalence, $f$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha + 1 > 1$, soit $\alpha > 0$ (Riemann en $+\infty$).
   L'intégrale converge si et seulement si $0 < \alpha < 1$.
2. La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.
   *Cas* $\alpha > 1$. Choisissons $\beta$ tel que $1 < \beta < \alpha$, par exemple $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$. Par croissances comparées,

   $$t^\beta g(t) = \frac{\ln(t)}{t^{\alpha-\beta}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

   car $\alpha - \beta > 0$. Donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ en $+\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\beta > 1$) : par critère de négligeabilité, $g$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, et l'intégrale converge.
   *Cas* $\alpha \leqslant 1$. Pour $t \geqslant e$, on a $\ln(t) \geqslant 1$, donc $g(t) \geqslant \frac{1}{t^\alpha} \geqslant 0$. Or $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge (Riemann, $\alpha \leqslant 1$) : par minoration, $\int_e^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge, donc l'intégrale diverge.
   L'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. La fonction $h : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
   En 0, $\arctan(t) \sim t$, donc $h(t) \sim t^{1-\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$. Par critère d'équivalence, $h$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, soit $\alpha < 2$.
   En $+\infty$, $\arctan(t) \to \frac{\pi}{2}$, donc $h(t) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^\alpha}$. Par critère d'équivalence, $h$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
   L'intégrale converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

**Correction de l'exercice 8.14** **Énoncé p. 119**

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $2 > 1$), $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par critère d'équivalence, et l'intégrale converge.

Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}.$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+2}$ divergent toutes deux, on ne sépare donc pas l'intégrale en deux : pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1) - \ln(t+2)]_0^x = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \ln(2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2),$$

car $\frac{x+1}{x+2} \to 1$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = \ln(2)$.

2. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t(t^2+1)}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et $g(t) \sim \frac{1}{t^3}$ en $+\infty$ : par critère d'équivalence, $g$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $3 > 1$), et l'intégrale converge.

   Pour tout $t \geqslant 1$,

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1},$$

   et pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_1^x = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\ln(2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln(2),$$

   car $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} \to 1$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+1)} = \frac{1}{2}\ln(2)$.

3. Pour tout réel $t$, $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1 \geqslant 1$ : la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t^2+2t+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et l'intégrale est généralisée en $-\infty$ et en $+\infty$. Une primitive de $h$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \arctan(t+1)$. Coupons en 0. Pour $y \geqslant 0$,

$$\int_0^y h(t)\,\mathrm{d}t = \arctan(y+1) - \arctan(1) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

   et pour $x \leqslant 0$,

$$\int_x^0 h(t)\,\mathrm{d}t = \arctan(1) - \arctan(x+1) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

   Les deux intégrales convergent, donc l'intégrale converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

**Correction de l'exercice 8.15** **Énoncé p. 119**

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Pour $t = u^2$ avec $u > 0$, on a $\sqrt{t} = u$ et $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$. Donc, par changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

   ont même nature, et même valeur en cas de convergence.

   Étudions la seconde par parties. Posons $a : u \mapsto 2u$ et $b : u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}$, qui sont de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$, avec $a'(u) = 2$ et $b'(u) = \mathrm{e}^{-u}$. On a

$a(u)b(u) = -2ue^{-u} \to 0$ quand $u \to 0$, et aussi quand $u \to +\infty$ par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} 2ue^{-u}\,du$ et $\int_0^{+\infty} a'(u)b(u)\,du = -\int_0^{+\infty} 2e^{-u}\,du$ ont même nature. De plus, $\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^{+\infty} 2ue^{-u}\,du = [-2ue^{-u}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-u}\,du = 0 + 2 = 2.$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut 2.

2. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1[$. Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $]0,1[$, donc bijective de $]0,1[$ sur $]0,1[$. Pour $t = u^2$ avec $u \in ]0,1[$, on a $\sqrt{t} = u$, $\ln(t) = 2\ln(u)$ et $dt = 2u\,du$, donc $\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2\ln(u)}{u} \cdot 2u\,du = 4\ln(u)\,du$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ et $\int_0^1 4\ln(u)\,du$ ont même nature. De plus, $\int_0^1 \ln(u)\,du$ est une intégrale de référence convergente, et pour $x \in ]0,1[$,

$$\int_x^1 \ln(u)\,du = [u\ln(u) - u]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

par croissances comparées. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt = 4\int_0^1 \ln(u)\,du = -4.$$

**Correction de l'exercice 8.16** **Énoncé p. 119**

1. La fonction $fg$ est continue sur $I$ comme produit de fonctions continues. Soit $M$ un majorant de $|g|$ sur $I$. Pour tout $t \in I$,

$$0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant M\,|f(t)|\,.$$

La fonction $f$ est intégrable sur $I$, donc $M|f|$ aussi par linéarité. Par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de $I$ qui ne lui appartient pas, $|fg|$ est intégrable sur $I$ : la fonction $fg$ est intégrable sur $I$.

2. La fonction $fg$ est continue sur $I$. Pour tout $t \in I$, on a $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$, soit

$$0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(f(t)^2 + g(t)^2\right).$$

Les fonctions $f^2$ et $g^2$ sont intégrables sur $I$, donc $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ aussi par linéarité. Par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de $I$ qui ne lui appartient pas, $fg$ est intégrable sur $I$.

3. Prenons $f = g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$. Cette fonction est continue, positive et intégrable sur $]0,1]$ (Riemann en 0, $\frac{1}{2} < 1$), mais $fg : t \mapsto \frac{1}{t}$ ne l'est pas (Riemann en 0, $1 \geqslant 1$).

**Correction de l'exercice 8.17** **Énoncé p. 119**

1. Soit $x \geqslant a$. La fonction $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, donc $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, et par la relation de Chasles $\int_x^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge aussi : $f$ est

intégrable sur $[x, +\infty[$, et $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

Notons $J = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et, pour $x \geqslant a$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Par la relation de Chasles, $J = F(x) + R(x)$, soit $R(x) = J - F(x)$. Par définition de la convergence de l'intégrale, $F(x) \to J$ quand $x \to +\infty$, donc $R(x) \to 0$.

Enfin, $f$ est continue sur $[a, +\infty[$, donc $F$ est de classe $C^1$ sur $[a, +\infty[$ et $F' = f$ (théorème fondamental de l'analyse). Ainsi $R = J - F$ est de classe $C^1$ sur $[a, +\infty[$ et $R' = -f$.

2. Soit $x > 0$. Pour $t \geqslant x$, on a $\frac{t}{x} \geqslant 1$, donc

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Les deux fonctions sont continues et positives sur $[x, +\infty[$. De plus, pour $y \geqslant x$,

$$\int_x^y \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^y = \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-y^2}}{2x} \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x},$$

donc $\int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$. Par critère de majoration, $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[n, +\infty[$, et pour $y \geqslant n$,

$$\int_n^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(y) - \arctan(n) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \arctan(n).$$

L'intégrale converge et, puisque $\arctan(n) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $n > 0$,

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

car $\arctan(u) \sim u$ quand $u \to 0$.

**Correction de l'exercice 8.18** **Énoncé p. 119**

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at^2}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$. Posons $\varphi : u \mapsto \frac{u}{\sqrt{a}}$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Pour $t = \frac{u}{\sqrt{a}}$, on a $at^2 = u^2$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a}}$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. La seconde converge par hypothèse, donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

La fonction étant paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

2. La fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

3. Les deux fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$.
Posons $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$, avec $u'(t) = 1$ et $v'(t) = te^{-t^2}$. On a $u(0)v(0) = 0$ et $u(x)v(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$ par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ ont même nature. La seconde converge par hypothèse, donc les deux convergent et

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}te^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Posons maintenant $u : t \mapsto t^2$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$, avec $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = te^{-t^2}$. On a $u(0)v(0) = 0$ et $u(x)v(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ ont même nature. La seconde converge d'après la question précédente, donc les deux convergent et

$$\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^2e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

**Correction de l'exercice 8.19** **Énoncé p. 120**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ : l'intégrale converge si et seulement si $f_x$ est intégrable en 0 et en $+\infty$.
En 0, $e^{-t} \to 1$, donc $f_x(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$. Par critère d'équivalence, $f_x$ est intégrable en 0 si et seulement si $1 - x < 1$, soit $x > 0$ (Riemann en 0).
En $+\infty$, par croissances comparées, $t^2f_x(t) = t^{x+1}e^{-t} \to 0$, donc $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $2 > 1$), $f_x$ est intégrable en $+\infty$ par critère de négligeabilité, et ce pour tout $x$.
Donc $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$.

2. Soit $x > 0$. Posons $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$, qui sont de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$, avec $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$. On a $u(t)v(t) = -t^xe^{-t} \to 0$ quand $t \to 0$, car $x > 0$, et quand $t \to +\infty$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t^xe^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ ont même nature. La seconde converge d'après la première question, donc les deux convergent et

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^xe^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

Montrons par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1 = 0!$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\Gamma(n+1) = n!$. Alors, d'après ce qui précède avec $x = n+1 > 0$, $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$. Par récurrence, $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. D'après la première question, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge. Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe $C^1$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Pour $t = u^2$ avec $u > 0$, on a $\sqrt{t} = u$ et $dt = 2u\,du$, donc

$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{e^{-u^2}}{u}\cdot 2u\,du = 2e^{-u^2}\,du$. Donc, par changement de variable,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\,du = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

**Correction de l'exercice 8.20** **Énoncé p. 120**

1. Soit $x > 0$. La fonction $g_x : t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $t \geqslant 0$,
$$0 \leqslant |g_x(t)| \leqslant Me^{-xt}.$$
Comme $x > 0$, $\int_0^{+\infty} Me^{-xt}\,dt$ converge (intégrale de référence) et vaut $\frac{M}{x}$. Par critère de majoration, $g_x$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $F(x)$ est bien définie, et
$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |g_x(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} Me^{-xt}\,dt = \frac{M}{x}.$$
Comme $\frac{M}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, on a $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
2. Soient $0 < x \leqslant y$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $e^{-yt} \leqslant e^{-xt}$, et comme $f(t) \geqslant 0$, $f(t)e^{-yt} \leqslant f(t)e^{-xt}$. Les deux intégrales convergent d'après la première question : par croissance de l'intégrale, $F(y) \leqslant F(x)$. La fonction $F$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Si $f = 1$, pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$.
Si $f = \cos$, soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{(-x+i)t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs complexes, et pour $y \geqslant 0$,
$$\int_0^{y} e^{(-x+i)t}\,dt = \left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^{y} = \frac{e^{(-x+i)y}-1}{-x+i}.$$
Comme $\left|e^{(-x+i)y}\right| = e^{-xy} \to 0$ quand $y \to +\infty$, l'intégrale converge et
$$\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\,dt = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}.$$
Sa partie réelle est $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(t)\,dt$, donc
$$F(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

**Correction de l'exercice 8.21** **Énoncé p. 120**

La fonction
$$f : x \mapsto \frac{|\ln(x)|^\alpha}{x^2+1}$$
est continue sur $]0,+\infty[$ (la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $[0,+\infty[$ si $\alpha \geq 0$) par composition puis quotient de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc la fonction $f$ est intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a
$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} |\ln(x)|^\alpha = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
car $\sqrt{x}\,|\ln(x)|^\alpha \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$).

On a

$$x^{\frac{3}{2}} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. Donc

$$f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

**Rédaction 1 :** la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge, pour tout $\alpha \geq 0$.
**Rédaction 2 :** la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0,+\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge, pour tout $\alpha \geq 0$.
La fonction

$$g : t \mapsto \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha}$$

est continue positive sur $]0,+\infty[$ (positive car $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout réel $t$, donc $\sin(t) \leq |\sin(t)| \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

est continue positive sur $[1,+\infty[$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ (Riemann), soit si et seulement si $\alpha > 2$. Donc la fonction $g$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha > 2$ (et comme $g \geq 0$, cela revient bien à dire

que l'intégrale converge en l'infini si et seulement si $\alpha > 2$).
On a

$$g(t) = \frac{\frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)}{t^\alpha} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{6t^{\alpha-3}}.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$$

est continue positive sur $]0,1]$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha - 3 < 1$ (Riemann), soit si et seulement si $\alpha < 4$. Donc la fonction $g$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha < 4$ (et comme $g \geq 0$, cela revient bien à dire que l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha < 4$).
Conclusion : l'intégrale converge si et seulement si $2 < \alpha < 4$, et alors elle converge absolument.

**Correction de l'exercice 8.22** **Énoncé p. 120**

La fonction

$$f : t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ ($t^b > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$. De plus, la fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'intégrale considérée converge si et seulement si la fonction $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
**Cas 1 :** Si $b > 0$,

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^a,$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{-a}}$ est positive continue sur $]0,1]$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $-a < 1$ (Riemann).
Puis,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{b-a}}$ est positive continue sur $[1,+\infty[$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $b - a > 1$ (Riemann). Donc (par critère d'équivalence), l'intégrale existe si et seulement si

$$b > 1 + a > 0.$$

**Cas 2 :** si $b = 0$, l'intégrale est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}t^a \,\mathrm{d}t$ qui diverge toujours (Riemann).
**Cas 3 :** si $b < 0$,

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{b-a}}$ est positive continue sur $]0,1]$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $b - a < 1$ (Riemann).
Puis,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^a,$$

or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{-a}}$ est positive continue sur $[1,+\infty[$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $-a > 1$ (Riemann). Donc (par critère d'équivalence), l'intégrale existe si et seulement si $b < 1+a < 0$.
**Conclusion :** donc l'intégrale existe si et seulement si $b > 1+a > 0$ ou $b < 1+a < 0$.

**Remarque**

Si $b < 0$, on peut écrire $b = -b'$ avec $b' > 0$, et alors

$$\frac{t^a}{1+t^b} = \frac{t^a}{1+\frac{1}{t^{b'}}} = \frac{t^{a+b'}}{1+t^{b'}},$$

et donc le premier cas donne la convergence si et seulement si $b' > a+b'+1 > 0$, soit $b < b-a-1 < 0$, qui redonne bien $b < 1+a < 0$.

**Correction de l'exercice 8.23** **Énoncé p. 120**

**1)** La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \qquad \text{et} \qquad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

par croissances comparées.
De plus,

- la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$),
- la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$),

donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc sur $]0,+\infty[$, ce qui assure l'absolue convergence de l'intégrale $I$, donc la convergence.
Faisons le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est une bijection $C^1$ strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$, puis (**comme on sait que l'intégrale $I$ converge**) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2}\left(-\mathrm{d}u\right) = -I$$

donc

$$\boxed{I = 0}.$$

**2)** La fonction

$$g : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

est continue sur $]0, +\infty[$ (par composition), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
On a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \ln(t^2+1) - 2\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -2\ln(t),$$

or

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[ \\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$)
- et la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } ]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$,

donc par critère d'équivalence, la fonction $g$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } ]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[ \\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc sur $]0, +\infty[$. En particulier, l'intégrale $J$ converge absolument, donc converge.
Les fonctions

$$u : t \mapsto t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

sont de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -\frac{2}{t(1+t^2)}.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad u(t)v(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -2\ln(t)t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

(donc $uv$ a bien une limite **finie** en $0^+$ et en $+\infty$).
Donc, le théorème d'intégration par parties s'applique : comme l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, on a l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

qui converge aussi, et

$$J = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} -\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\,[\arctan(t)]_0^{+\infty} = \boxed{\pi}.$$

**3)** La fonction

$$f : t \mapsto \sin(t)\ln\big(\sin(t)\big)$$

est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car sur cet intervalle, sin $> 0$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$f(t) = \sin(t) \ln\left(\sqrt{1-\cos^2(t)}\right) = \frac{1}{2}\sin(t)\ln\left(1-\cos^2(t)\right),$$

car sin $> 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (donc $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$).
Faisons le changement de variable $u = \cos(t)$.
La fonction

$$t \mapsto \cos(t)$$

est une bijection $C^1$ strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1[$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$, donc le théorème de changement de variable donne que l'intégrale $K$ **a la même nature que** l'intégrale

$$\int_1^0 -\frac{1}{2}\ln\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\ln(1-u)+\ln(1+u)\right)\mathrm{d}u,$$

et a même valeur si convergence. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\ln(1-u)+\ln(1+u)\right)\mathrm{d}u &= \lim_{\mathrm{e}\to 0^-}\left[-(1-u)\ln(1-u)+(1-u)+(1+u)\ln(1+u)-(1+u)\right]_0^{1-\mathrm{e}} \\ &= \lim_{\mathrm{e}\to 0^-}\Big(-\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})+\mathrm{e}+(2-\mathrm{e})\ln(2-\mathrm{e})-(2-\mathrm{e})\Big) = 2\ln(2)-2\end{aligned}$$

Comme la limite existe et est finie, l'intégrale précédente converge, donc l'intégrale $K$ converge, et

$$\boxed{K = \ln(2)-1}.$$

**4)** La fonction

$$t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$$

est continue sur $[0,1[$ (car pour $t \in [0,1[$, on a $0 \le t < 1$ donc $1-t^2 > 0$, donc on peut composer avec la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0,1[$.
Faisons le changement de variable $t = \sin(u)$ : la fonction

$$u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \mapsto \sin(u)$$

est une bijection de classe $C^1$ strictement croissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1[$. Alors $\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u$ car sur cet intervalle, cos $> 0$. Donc

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Donc le théorème de changement de variable donne que l'intégrale $L$ **a la même nature que** l'intégrale

$$L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)\,\mathrm{d}u,$$

et même valeur si convergence. Or, cette nouvelle intégrale n'est pas généralisée : la fonction

$$u \mapsto \sin^3(u)$$

est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc est intégrable sur ce segment. Donc l'intégrale $L'$ converge, donc l'intégrale $L$ converge aussi, et

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\big(1-\cos^2(u)\big)\,\mathrm{d}u = \left[-\cos(u) + \frac{1}{3}\cos^3(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

**5)** La fonction

$$f : t \mapsto \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.
On a

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^3} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

par croissance comparée, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ et l'intégrale $M$ existe donc (l'intégrale $M$ converge absolument, donc converge).
Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto -\frac{1}{2(1+t^2)} \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \ln(t)$$

sont de classe $C^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto \frac{1}{t},$$

de plus on a

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(t)}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc $uv$ a bien une limite **finie** en $+\infty$). Comme on sait que l'intégrale

$$M = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

converge, et de plus, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{\left[-\frac{\ln(t)}{2(1+t^2)}\right]_1^{+\infty}}_{=0-0} - \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(t)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^{+\infty} \\ &= \lim_{A\to+\infty}\frac{2\ln(A)-\ln(1+A^2)}{4}+\frac{\ln(2)}{4} \\ &= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{4}\ln\left(\frac{A^2}{1+A^2}\right)+\frac{\ln(2)}{4} = \boxed{\frac{\ln(2)}{4}} \end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 8.24** **Énoncé p. 120**

**1)** La fonction $f$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x)| = x^\alpha,$$

et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x$$

est une intégrale de Riemann toujours divergente (quel que soit $\alpha$ : en 0 si $\alpha \leq -1$, en $+\infty$ si $\alpha \geq -1$). Donc la fonction $f$ n'est jamais intégrable sur $]0,+\infty[$.
**2)** L'intégrale demandée n'est pas absolument convergente, mais on va regarder sa convergence.
Pour $\alpha > -1$, la fonction

$$x \mapsto |f(x)| = x^\alpha$$

est intégrable en 0 (Riemann), donc pas de problème en 0 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Puis, les fonctions

$$u : x \mapsto -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto x^\alpha$$

sont de classe $C^1$ sur $[1,+\infty[$, de dérivées

$$u' : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$

Puis, pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$|u(x)v(x)| = x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si $\alpha < 0$. Donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} -\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$$

(*et si convergence, on a une égalité qui les relie, mais on ne s'en sert pas ici*).
Or, la fonction

$$g : x \mapsto -\mathrm{i}\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, la fonction

$$|g| : x \mapsto |\alpha|\, x^{\alpha-1}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1,+\infty[ \\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ si $\alpha < 0$ (Riemann), donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge.
**Conclusion :** l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge si $\alpha < 0$, l'intégrale

$$\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge si $-1 < \alpha$, et donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge si $-1 < \alpha < 0$.

**Correction de l'exercice 8.25** **Énoncé p. 121**

La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, et se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$), donc est intégrable sur tout intervalle du type $]0, A]$ avec $A > 0$. En particulier, l'intégrale

$$\int_0^{1} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge.
Les fonctions

$$u : t \mapsto -\cos(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \frac{1}{t}$$

sont de classe $C^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \sin(t) \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}.$$

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a

$$0 \leq |u(t)v(t)| \leq \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$$

(donc $uv$ a bien une limite **finie** en $+\infty$)
Donc le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(*et si convergence, on a une égalité qui les relie, mais on ne s'en servira pas ici*).
Puis, la fonction

$$g : t \in [1, +\infty[ \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, et la fonction cos étant bornée sur $\mathbb{R}$ (donc au voisinage de $+\infty$), on a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[ \\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc par critère de domination, la fonction $g$ aussi. Donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge, et donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.
**Conclusion :** les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

convergent, donc par la relation de Chasles, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge.

**Remarque**

En choisissant $t \mapsto 1 - \cos(t)$ comme primitive de sin, on peut même faire l'intégration par parties sur $]0, +\infty[$, et obtenir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(t) \in [-1, 1],$$

on a, pour tout $t \in ]0, +\infty[$,

$$|\sin(t)| \geq \sin^2(t), \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} \geq 0.$$

Or, la formule trigonométrique de duplication donne, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geq \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \geq 0.$$

Puis, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} \, \mathrm{d}t$$

converge (comme ci-dessus, par intégration par parties), mais l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

diverge. Donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \, \mathrm{d}t$$

diverge (addition d'une intégrale convergente avec une intégrale divergente). L'inégalité des fonctions (positives) et la divergence de cette intégrale donnent, grâce au critère de comparaison, que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} \, \mathrm{d}t$$

diverge, autrement dit que l'intégrale $I$ ne converge pas absolument.

**Correction de l'exercice 8.26** **Énoncé p. 121**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$. On a

$$f(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

car $t^{n+2}\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (car $n + 2 > 0$). Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc par critère de domination, la fonction $f$ aussi.
Donc l'intégrale $I_n$ converge (absolument) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto t^n \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$$

sont de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto nt^{n-1} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto \mathrm{e}^{-t},$$

et

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc $uv$ a bien une limite **finie** en $+\infty$), donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme on sait que l'intégrale $I_n$ converge, le théorème d'intégration par parties donne :

$$I_n = \underbrace{\left[-t^n\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -nt^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = nI_{n-1}$$

Comme

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1,$$

on en déduit par récurrence directe que

$$\boxed{I_n = n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Correction de l'exercice 8.27** **Énoncé p. 121**

**1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

est continue sur $[0,+\infty[$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$, en particulier sur $[0,1]$.
On a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}},$$

or $n \geq 1$ donc $2n \geq 2 > 1$, donc la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{2n}}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.
Donc la fonction $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, puis l'intégrale $I_n$ existe (et même converge absolument).
Enfin,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

**2)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre par parties : les fonctions

$$u : x \mapsto x \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

sont de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$, de dérivées

$$u' : x \mapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}},$$

on a

$$u(x)v(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $2n - 1 \geq 1 > 0$ (puisque $n \geq 1$). Enfin, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, alors le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}} x\,\mathrm{d}x$$

converge, et

$$I_n = \underbrace{\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}} x\,\mathrm{d}x = 2n \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

Donc

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**3)** On a alors en itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} I_1 = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

(en multipliant numérateur et dénominateur par $2n(2n-2)\dots 2$), donc

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}\pi = \boxed{\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{n}{2n-1}\pi}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ :

**Initialisation :** si $n = 1$,

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{n}{2n-1}\pi = \frac{2!}{4 \times 1^2} \frac{1}{2-1}\pi = \frac{\pi}{2} = I_1.$$

**Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{n}{2n-1}\pi$. Alors

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n = \frac{2n-1}{2n} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{n}{2n-1}\pi = \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\pi$$

alors que

$$\frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}\frac{n+1}{2(n+1)-1}\pi = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\big((n+1)n!\big)^2}\frac{n+1}{2n+1}\pi = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{4(n+1)^2 4^n (n!)^2}\frac{n+1}{2n+1}\pi = \frac{1}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\pi$$

Il y a donc bien égalité :

$$I_{n+1} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}\frac{n+1}{2(n+1)-1}\pi.$$

D'où l'hérédité.
**Conclusion :** on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{n}{2n-1}\pi$.

**Correction de l'exercice 8.28** **Énoncé p. 121**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f : t \mapsto \ln^n(t)$$

est continue sur $]0,1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(t) = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

car

$$\sqrt{t}\ln^n(t) = t^{\frac{1}{2}}\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (car $\dfrac{1}{2} > 0$). Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ (Riemann, $\dfrac{1}{2} < 1$), donc la fonction $f$ aussi par critère de domination.
Donc l'intégrale $I_n$ est absolument convergente (donc convergente) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$u : t \mapsto t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \ln^{n+1}(t)$$

sont de classe $C^1$ sur $]0,1]$, de dérivée

$$u' : t \mapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto (n+1)\frac{\ln^n(t)}{t},$$

on a

$$u(t)v(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc $uv$ a bien une limite **finie** en $0^+$), donc par le théorème d'intégration par parties, comme on sait que l'intégrale

$$I_{n+1} = \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (n+1)t\frac{\ln^n(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge, et que :

$$I_{n+1} = \underbrace{\left[t\ln^{n+1}(t)\right]_0^1}_{=0-0} - \int_0^1 (n+1)\ln^n(t)\,\mathrm{d}t = -(n+1)I_n$$

Comme $I_0 = 1$, on a par récurrence directe

$$\boxed{I_n = (-1)^n n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Remarque**

Le changement de variable $u = -\ln(t)$ donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = (-1)^n n!$$

d'après l'un des exercices précédents.

**Correction de l'exercice 8.29** **Énoncé p. 121**

**1)** La fonction $f$ est continue sur $[0,1]$, donc par quotient, la fonction

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue sur $]0,1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
Puis, $f(0) = 0$ et la fonction $f$ est dérivable en 0, donc

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f'(0),$$

donc la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$$

est bornée au voisinage de 0 (puisqu'elle a une limite en 0), et donc

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).

Donc, par critère de domination, la fonction $g$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$. En particulier, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

est (absolument) convergente.
**2)** La fonction $f$ est continue sur $[0,1]$, donc par quotient, la fonction

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t^2}$$

est continue sur $]0,1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, on peut dire

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} tf'(0),$$

et donc

$$\frac{f(t)}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{f'(0)}{t},$$

or la fonction

$$t \mapsto \frac{f'(0)}{t}$$

est continue **de signe constant** sur $]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(0)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (Riemann, **et car** $f'(0) \neq 0$), donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est divergente.

**Correction de l'exercice 8.30** **Énoncé p. 121**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0,$$

donc par composition, la fonction

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction

$$f : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{a}{x}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.
En utilisant la quantité conjuguée : pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ (on veut $x \geq 0$ pour que $\sqrt{x^2} = x$, et $x \neq 0$ pour pouvoir diviser par $x$),

$$x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{-1}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{-1}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}.$$

On utilise alors le développement limité :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{O}(u^2),$$

donc en posant $u = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}$, on a $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent,

$$x+1-\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{-1}{x}\frac{1}{2+\frac{2}{x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{-1}{2x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Or, on a le DL

$$\frac{1}{1+u}=1-u+\underset{u\to0}{O}(u^2),$$

donc en posant $u=\frac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a $u\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc

$$x+1-\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{-1}{2x}\left(1-\frac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=-\frac{1}{2x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent,

$$f(x)=\frac{-2a-1}{2x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Si $-2a-1\neq0$, alors

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-2a-1}{2x},$$

or la fonction

$$x\mapsto\frac{-2a-1}{2x}$$

est de signe constant et continue sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{-2a-1}{2x}\,\mathrm{d}x$ diverge (Riemann, **et car** $-2a-1\neq0$), donc, par critère d'équivalence, l'intégrale considérée diverge.
Si $-2a-1=0$, alors

$$f(x)=\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or la fonction

$$x\mapsto\frac{1}{x^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.
Donc l'intégrale existe si et seulement si

$$\boxed{a=-\frac{1}{2}}.$$

**Correction de l'exercice 8.31** **Énoncé p. 121**

La fonction

$$f:t\mapsto\frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$$

est continue sur $]0,1[$ par composition et quotient de fonctions qui le sont (car $1-t>0$ pour $t\in]0,1[$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1[$.
On a

$$f(t)\underset{t\to0^+}{\sim}\ln(t),$$

or la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$.

On a

$$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0,$$

donc la fonction $f$ se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1) = 0$), donc la fonction $f$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \\ \text{en } 1 \end{array} \right\}$.

Donc la fonction $f$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \\ \text{en } 1 \end{array} \right\}$, donc sur $]0, 1[$.

L'intégrale considérée converge donc absolument, en particulier elle converge.

On intègre alors par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto \ln(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto -2\sqrt{1-t}$$

sont $C^1$ sur $]0, 1[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}},$$

de plus

$$\lim_{t\to 1^-} u(t)v(t) = 0$$

existe et est finie, mais la fonction $uv$ n'a pas de limite finie en 0. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration par parties sur $]0, 1[$, mais on peut l'appliquer sur $[\mathrm{e}, 1[$, pour tout $\mathrm{e} \in ]0, 1[$.

Comme on sait que la fonction $f$ est intégrable sur $]0, 1[$ (donc sur $[\mathrm{e}, 1[$), on a alors :

$$\int_{\mathrm{e}}^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \left[-2\sqrt{1-t}\ln(t)\right]_{\mathrm{e}}^1 - \int_{\mathrm{e}}^1 -2\sqrt{1-t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) + 2\int_{\mathrm{e}}^1 \sqrt{1-t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Posons alors $u = \sqrt{1-t}$ dans l'intégrale qui reste : la fonction

$$t \mapsto \sqrt{1-t}$$

est une bijection de classe $C^1$ strictement décroissante de $[\mathrm{e}, 1[$ sur $]0, \sqrt{1-\mathrm{e}}]$, et « $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ », donc « $\mathrm{d}t = -2u\,\mathrm{d}u$ ». Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{e}}^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t &= 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) + 2\int_{\sqrt{1-\mathrm{e}}}^0 -u^2\frac{1}{1-u^2}2\,\mathrm{d}u \\
&= 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) + 4\int_0^{\sqrt{1-\mathrm{e}}} \left(-1 + \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}\right)\mathrm{d}u \\
&= 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) - 4\sqrt{1-\mathrm{e}} - 2\ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}}\right) + 2\ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant la quantité conjuguée, on a

$$\ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}}}\right) = \ln(\mathrm{e}) - \ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}}\right),$$

par conséquent

$$\int_{\mathrm{e}}^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \underbrace{2\left(\sqrt{1-\mathrm{e}}-1\right)}_{\substack{\sim \\ \mathrm{e}\to 0^+}\ -\mathrm{e}} \ln(\mathrm{e}) - 4\sqrt{1-\mathrm{e}} + 4\ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}}\right) \underset{\mathrm{e}\to 0^+}{\longrightarrow} -4+4\ln(2)$$

car $\lim\limits_{\mathrm{e}\to 0^+} \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) = 0$ (par croissance comparée). Donc

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \boxed{-4+4\ln(2)}.$$

**Correction de l'exercice 8.32** **Énoncé p. 121**

**1a)** Soit $k \in \mathbb{N}$.
La fonction

$$f : t \mapsto P_k(t)\mathrm{e}^t = t^k \mathrm{e}^t$$

est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.
On a

$$\frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^{k+2}\mathrm{e}^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Donc

$$f(t) = \underset{t\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]-\infty,-1]\\ \text{en } -\infty\end{array}\right\}$ car la fonction

$$t \mapsto g(-t) = \frac{1}{t^2}$$

l'est $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2>1$).

Donc par critère de domination, la fonction $f$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } ]-\infty,-1]\\ \text{en } -\infty\end{array}\right\}$.
Autrement dit, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} P_k(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

est absolument convergente, donc convergente.
**1b)** Si $f \in E$, alors il existe $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k.$$

Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

converge par linéarité de l'intégrale convergente (d'après la question précédente, chaque intégrale $\int_{-\infty}^{0} P_k(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ est convergente).
Enfin, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

converge (une fonction continue sur un segment, ici $[0, x]$, est intégrable sur ce segment). Par la relation de Chasles, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

est donc convergente, donc la fonction $g$ est bien définie en $x$. C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $g$ est définie sur $\mathbb{R}$.
**1c)** On a

$$L(P_0) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^x = 1,$$

donc

$$\boxed{L(P_0) = P_0}.$$

Les intégrations par parties qui suivent se justifient comme dans la question 1d, qui traite le cas général.
Intégrons par parties :

$$L(P_1) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[t\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^x - \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x - 1,$$

donc

$$\boxed{L(P_1) = P_1 - P_0}.$$

Intégrons par parties :

$$L(P_2) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x t^2\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[t^2\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^x - \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x 2t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x^2 - 2(x-1),$$

donc

$$\boxed{L(P_2) = P_2 - 2P_1 + 2P_0}.$$

**1d)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Intégrons par parties. Les fonctions

$$u : t \mapsto \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto t^{k+1}$$

sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-\infty, x]$. On a

$$u' : t \mapsto \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto (k+1)t^k.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc $uv$ a bien une limite **finie** en $-\infty$). Le théorème d'intégration par parties s'applique alors, et comme l'intégrale

$$L(P_{k+1})(x) = \int_{-\infty}^x u'(t)v(t) \,\mathrm{d}t$$

est une intégrale convergente, on sait que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} (k+1)t^k \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

converge, et :

$$L(P_{k+1}) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\left[t^{k+1}\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}(k+1)t^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x^{k+1} - 0 - (k+1)\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = P_{k+1}(x)$$

Cela est vrai pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, donc

$$L(P_{k+1}) = P_{k+1} - (k+1)L(P_k).$$

La formule proposée se déduit alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
**Initialisation :** si $k = 0$,

$$L(P_0) = P_0 = (-1)^0 0! \sum_{j=0}^{0} \frac{(-1)^j}{j!} P_j$$

(car $0! = 1$ et $(-1)^0 = 1$), d'où l'initialisation.
**Hérédité :** soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons la formule vraie au rang $k$, alors d'après le début de la question,

$$\begin{aligned}
L(P_{k+1}) &= P_{k+1} - (k+1)L(P_k) \\
&= P_{k+1} - (k+1)(-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j \\
&= P_{k+1} + (-1)^{k+1}(k+1)! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)! \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j}{j!} P_j
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.
**Conclusion :** on a bien, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$L(P_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j.$$

**2a)** Montrons que $L$ est linéaire : pour tout $(f, g) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
L(\lambda f + g)(x) &= \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} (\lambda f + g)(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} \big(\lambda f(t)\mathrm{e}^t + g(t)\mathrm{e}^t\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda L(f)(x) + L(g)(x)
\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale convergente (chaque intégrale converge, vu à la question 1b).
L'égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit bien

$$L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g).$$

Donc $L$ est linéaire.
La formule de la question précédente donne directement que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $L(P_k) \in \mathbb{R}[X]$ et que

$$\deg\big(L(P_k)\big) = k,$$

et même $L(P_k)$ est unitaire (son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient de $P_k$, vaut 1). Alors, comme $L$ est linéaire, on en déduit bien que si $f \in E$ alors $L(f)$, qui est combinaison linéaire de $L(P_0)$, …, $L(P_n)$ (car $(P_0, \dots, P_n)$ base de $E$) qui sont tous dans $\mathbb{R}_n[X]$, est aussi dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Donc $L$ va de $E$ dans $E$.
Donc $L$ est un endomorphisme de $E$.
De la question précédente, on a

$$M = \mathrm{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}(L) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^n n! \\ & 1 & (-1)^{i+j}\dfrac{j!}{i!} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$M_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}\dfrac{j!}{i!} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

(en supposant qu'on numérote les lignes et colonnes de $M$ à partir de 0).
La matrice $M$ est donc triangulaire supérieure, et tous ses coefficients diagonaux valent 1.
**2b)** De 1d, on a par linéarité de $L$ :

$$L\big(P_{k+1} + (k+1)P_k\big) = P_{k+1}$$

(pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) et $L(P_0) = P_0$, donc $P_0$, …, $P_n$ sont dans l'image de $L$, donc $L$ est surjective (contient une base de l'espace d'arrivée), donc $L$ est bijective (car surjective, linéaire et les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension **finie**).
Puis, $P_0 = L^{-1}(P_0)$ et

$$L^{-1}(P_{k+1}) = P_{k+1} + (k+1)P_k$$

(pour $k \in [\![0, n-1]\!]$). Donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice de $L^{-1}$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$).

**Correction de l'exercice 8.33** **Énoncé p. 122**

**1)** La fonction

$$g : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$, en particulier sur $[x, 1]$ pour tout $x > 0$.
On a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2 > 1$), donc la fonction $g$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ par critère de domination.
La fonction $g$ est donc intégrable sur $[x, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc sur $[x, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc l'expression $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\mathbb{R}_+^* \subset \mathcal{D}.$$

On a

$$g(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue positive sur $]0, 1]$, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

diverge (intégrale de Riemann), donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

diverge et donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

diverge aussi. Donc la fonction $f$ n'est pas définie en 0.
Si la fonction $f$ était définie en $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

serait convergente, et comme $x < 0 < +\infty$, on devrait avoir l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

convergente aussi, ce qui n'est pas. Donc l'expression $f(x)$ n'existe pas pour $x \in \mathbb{R}_-^*$.
Donc

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*}.$$

**2)** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la relation de Chasles, on peut écrire

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t + f(1).$$

La fonction $g$ est continue sur **l'intervalle** $]0,+\infty[$, donc il existe une primitive $G$ de $g$ sur cet intervalle (théorème fondamental de l'analyse), alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(1).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = -G(x) + G(1) + f(1),$$

et comme la fonction $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $g$, on en déduit que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$f' = -g$$

sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction $g$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $f'$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $f$ aussi.
**3)** Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = -\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1) = \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1) - \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1) - \ln(x).$$

Or, la fonction

$$\phi : t \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 (en posant $\phi(0) = 1$), donc

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \phi(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

(car l'intégrale converge, puisque faussement impropre en 0), par conséquent la fonction

$$x \mapsto \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1)$$

est négligeable devant $\ln(x)$ en $0^+$ (car tend vers une limite finie alors que $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$), donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \frac{1}{t}$$

sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées

$$u' : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -\frac{1}{t^2},$$

de plus

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(donc $uv$ a bien une limite **finie** en $+\infty$), donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et donne (puisque l'on sait que l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente) :

$$f(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} -\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = -0 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, par croissance de l'intégrale, en utilisant que, pour $t \in [x, +\infty[$ on a $t \geq x > 0$, donc $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{x}$, donc

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \leq \frac{\mathrm{e}^{-t}}{xt},$$

puis

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\big(f(x)\big),$$

donc $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\big(f(x)\big)$, soit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}}.$$

**Remarque**

On peut aussi majorer ainsi :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2},$$

donc

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - f(x) \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right),$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

**Correction de l'exercice 8.34** **Énoncé p. 122**

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^n \ln(x)}{1-x^2}$$

est continue sur $]0,1[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1[$.
Puis,

$$f(x) \underset{x\to1}{\sim} \frac{1^n(x-1)}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x} \underset{x\to1}{\sim} -\frac{1}{2},$$

donc la fonction $f$ se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1) = -\dfrac{1}{2}$), donc la fonction $f$ est intégrable en 1.
Si $n \geq 1$,

$$f(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée), et donc la fonction $f$ se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$), donc la fonction $f$ est intégrable en 0. Et dans ce cas, l'intégrale considérée converge.
Si $n = 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} \ln(x),$$

or la fonction ln est intégrable en 0, donc par le critère d'équivalence, $f$ aussi. Donc l'intégrale considérée converge.
Si $n = -1$, alors

$$-f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

et la fonction

$$x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}$$

est continue et positive sur $]0,1]$ (et avec $-f$ continue sur $]0,1]$ après son prolongement en 1), donc le critère d'équivalence donne que l'intégrale

$$\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x$$

est de même nature que l'intégrale

$$I = \int_0^1 -\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $\mathrm{e} \in ]0,1[$,

$$\int_{\mathrm{e}}^1 -\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_{\mathrm{e}}^1 = \frac{1}{2}\ln^2(\mathrm{e}) \underset{\mathrm{e}\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc l'intégrale $I$ est divergente. Donc l'intégrale

$$\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge, donc l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge aussi.
Si $n \leq -2$,

$$\frac{\ln(x)}{x} = \underset{x\to 0^+}{O}\big(f(x)\big),$$

**et la fonction $f$ est de signe constant sur ]0, 1[**, donc si l'intégrale de $f$ convergeait en 0, ce serait le cas de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui est faux d'après le calcul précédent. Donc l'intégrale diverge.

**Correction de l'exercice 8.35** **Énoncé p. 122**

La fonction $t \mapsto 1 - t$ est continue et strictement positive sur $]0,1[$. La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction

$$t \mapsto \ln(1-t)$$

est continue sur $]0,1[$.
Par produit, la fonction

$$t \mapsto \ln(t)\ln(1-t)$$

aussi. Puis, la fonction $t \mapsto t$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,1[$, donc par quotient, la fonction $f$ est continue sur $]0,1[$.
Si $t \to 0$,

$$\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t, \qquad \text{et donc} \qquad f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t).$$

Or la fonction ln est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$, donc par critère d'équivalence, la fonction $f$ aussi.
Puis,

$$\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1, \qquad \text{donc} \qquad f(t) \underset{t\to 1}{\sim} (t-1)\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée), donc la fonction $f$ se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1)=0$). Donc la fonction $f$ est intégrable en 1.
Donc la fonction $f$ est intégrable sur $]0,1[$.

**Correction de l'exercice 8.36** **Énoncé p. 122**

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations usuelles.
On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc la fonction $f$ se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0)=0$), et donc la fonction $f$ est intégrable en 0.
On a

$$x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^3\ln(x)}{x^4} = \frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc

$$f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1,+\infty[ \\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2>1$), donc par critère de domination, la fonction $f$ aussi.
Donc l'intégrale $I$ converge absolument, donc converge.
Pour le calcul de $I$ :
**Méthode 1 :** par intégration par parties. Les fonctions

$$u : x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2(1+x^2)}$$

(on a rajouté $\frac{1}{2}$ à la « primitive naturelle », pour que la limite de $uv$ en 0 soit finie) et

$$v : x \mapsto \ln(x)$$

sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées respectives

$$u'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

De plus,

$$u(x)v(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc la fonction $uv$ a une limite **finie** en 0. On peut donc intégrer par parties sur $]0, A]$ pour tout $A > 0$.

**Remarque**

On ne peut pas appliquer le théorème sur $]0, +\infty[$, car la fonction $uv$ n'a pas de limite finie en $+\infty$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2(1+x^2)}\ln(x)\right]_0^A - \int_0^A \frac{x^2}{2(1+x^2)}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{2(1+A^2)}\ln(A) - \frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^A \\
&= \frac{A^2}{2(1+A^2)}\ln(A) - \frac{1}{4}\ln(1+A^2) \\
&= \frac{A^2}{2(1+A^2)}\ln(A) - \frac{1}{2}\ln(A) - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+A^2}\ln(A) - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

(car $\dfrac{1}{1+A^2}\ln(A) \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(A)}{A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée). Donc

$$\boxed{I = 0}.$$

**Remarque**

Cette méthode donne aussi la convergence de $I$, puisque la limite trouvée est finie.

**Méthode 2 :** appliquons le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. De plus, « $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ ». Comme on sait que l'intégrale $I$ converge, le théorème de changement de variable s'applique et donne

$$I = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-u\ln(u)}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = -I.$$

Donc

$$\boxed{I = 0}.$$

**Remarque**

Pour cette méthode, il était indispensable de montrer avant que l'intégrale $I$ convergeait.

**Correction de l'exercice 8.37** **Énoncé p. 122**

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.
Les fonctions
$$u : x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \cos(x)$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, A]$, de dérivées
$$u' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto -\sin(x).$$
On peut donc intégrer par parties sur ce segment, et on a :
$$\int_\pi^A \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\sin(x)}{x}\right]_\pi^A - \int_\pi^A \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin(A)}{A} - \int_\pi^A \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Or, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$,
$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc
$$\lim_{A\to+\infty} \frac{\sin(A)}{A} = 0$$
par le théorème des gendarmes. Puis, la fonction
$$g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$$
est continue sur $[\pi, +\infty[$, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$,
$$\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2},$$
et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [\pi, +\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc par critère de comparaison, la fonction $g$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [\pi, +\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.
Donc l'intégrale
$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
converge, et
$$\lim_{A\to+\infty} \int_\pi^A \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Par suite,
$$\lim_{A\to+\infty} \int_\pi^A \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{\sin(A)}{A} - \int_\pi^A \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = 0 - \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$
existe et est finie, donc l'intégrale
$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$
converge.

2. Pour $n = 0$, les intégrales $u_0$ et $v_0$ sont celles de la fonction nulle : elles convergent et valent 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction
$$f_n : x \mapsto \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}$$
est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et
$$\frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(n\pi x)^2}{\pi x} = n^2\pi x \underset{x\to 0}{\to} 0$$
(limite **finie**), donc la fonction $f_n$ est intégrable en 0, donc sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Donc l'intégrale
$$v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$$
converge (absolument).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction
$$h_n : x \mapsto \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}$$
est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et
$$\frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(n\pi x)^2}{\pi x} = n^2\pi x \underset{x\to 0}{\to} 0$$
(limite **finie**), donc la fonction $h_n$ est intégrable en 0, et
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} = 0$$
(limite **finie**), donc la fonction $h_n$ est intégrable en $\frac{1}{2}$.
Donc la fonction $h_n$ est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Donc l'intégrale
$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x$$
converge.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le changement de variable affine $t = n\pi x$, soit $x = \frac{t}{n\pi}$. La fonction
$$x \mapsto n\pi x$$
est $C^1$ strictement croissant, donc induit une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left]0, \frac{n\pi}{2}\right[$, et « $\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}t$ », de plus l'intégrale $v_n$ converge, donc le théorème de changement de variable donne
$$v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{\frac{t}{n}} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, on a aussi

$$v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

en posant cette fois le changement de variable affine $u = 2t$.

**Remarque**

Pour $n = 0$, les égalités restent vraies de manière directe.

(b) Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= v_1 + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= v_1 + \frac{\ln(n\pi)-\ln(\pi)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= v_1 + \frac{\ln(n)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{2\pi} = +\infty$ et, comme l'intégrale

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

converge, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{+\infty} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \in \mathbb{R},$$

donc

$$v_n = \underbrace{\frac{\ln(n)}{2\pi}}_{\to+\infty} + \underbrace{v_1 - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u}_{\text{limite finie}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2\pi}.$$

4. On a

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \Bigg( \underbrace{\frac{1}{\tan(\pi x)}}_{\to 0} - \frac{1}{\pi x} \Bigg) = -\frac{2}{\pi}.$$

Puis, un DL en 0 donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} &= \frac{1}{\pi x - \frac{(\pi x)^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} - \frac{1}{\pi x} \\ &= \frac{1}{\pi x}\left(\frac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\pi x}\left(\frac{\pi^2 x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= \frac{\pi x}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Par suite, la fonction $f$ est prolongeable par continuité en 0 et $\frac{1}{2}$, en posant

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(n\pi x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$\left|\sin^2(n\pi x) f(x)\right| \leq |f(x)|,$$

et l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

converge (car la fonction $|f|$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et prolongeable par continuité en 0 et en $\frac{1}{2}$), donc, par l'inégalité triangulaire puis par croissance de l'intégrale,

$$|u_n - v_n| = \left|\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(n\pi x) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\sin^2(n\pi x) f(x)\right| \mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

donc la suite numérique $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Comme

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty,$$

et la suite numérique $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a

$$u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n),$$

donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2\pi}.$$

**Correction de l'exercice 8.38** **Énoncé p. 123**

**1)** On a

$$I(1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Or, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est continue sur $]-1,1[$ (car $1-x^2 > 0$ pour tout $x \in ]-1,1[$, et que l'on compose des fonctions usuelles), admet arcsin comme primitive, et arcsin a une limite finie en $1^-$ et $-1^+$ (car arcsin est en fait continue sur $[-1,1]$), donc l'intégrale $I(1)$ converge. De plus, comme $f \geq 0$, on en déduit que la fonction $f$ est intégrable sur $]-1,1[$. Enfin, on a alors

$$I(1) = \lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) - \lim_{x\to -1^+} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}.$$

**2)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors la fonction

$$f_k : x \in ]-1,1[ \mapsto \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} = x^k f(x)$$

est continue sur $]-1,1[$ par produit de fonctions continues, et la fonction $x \mapsto x^k$ a une limite finie si $x \to 1^-$ ou $x \to -1^+$, donc

$$f_k(x) = \underset{x\to 1^-}{O}\big(f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad f_k(x) = \underset{x\to -1^+}{O}\big(f(x)\big).$$

Comme la fonction $f$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } ]-1,1[ \\ \text{en } -1 \text{ et en } 1 \end{array} \right\}$, le critère de domination (appliqué en 1 et en $-1$) donne que la fonction $f_k$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } ]-1,1[ \\ \text{en } -1 \text{ et en } 1 \end{array} \right\}$, donc que l'intégrale $I(X^k)$ converge absolument, donc converge.
Puis, soit $P \in E$, alors il existe $(a_0, \dots, a_5) \in \mathbb{R}^6$ avec

$$P = \sum_{k=0}^{5} a_k X^k.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I(X^k) = \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

converge. Donc par linéarité de l'intégrale convergente, l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{5} a_k \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

converge (et on a aussi

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{5} a_k I(X^k),$$

mais on ne va pas s'en servir ici).

**3a)** La fonction

$$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

est dérivable sur $]-1,1[$, et admet pour dérivée la fonction

$$x \mapsto -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

. Donc

$$I(X) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \boxed{0}$$

On en déduit

$$0 = I(X) = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = c}$$

**3b)** Avec le résultat admis, on a alors

$$\frac{\pi}{2} = I(X^2) = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad a + c = \frac{2\pi}{3}$$

Donc

$$\boxed{a = c = \frac{\pi}{3}}.$$

Enfin, on a $\pi = I(1) = a + b + c$, donc

$$\boxed{b = \frac{\pi}{3}}.$$

**4)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$I(X^{k+1}) = \int_{-1}^{1} x^k \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Intégrons par parties : les fonctions

$$u : x \mapsto -\sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto x^k$$

sont de classe $C^1$ sur $]-1,1[$, la fonction $uv$ a une limite finie (nulle) en 1 et en $-1$, et l'intégrale $I(X^{k+1})$ converge, donc on peut appliquer le théorème d'intégration par parties, et on a :

$$I(X^{k+1}) = \left[-\sqrt{1-x^2}x^k\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\sqrt{1-x^2}kx^{k-1}\,\mathrm{d}x = 0-0+k\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}x^{k-1}\,\mathrm{d}x = kI(X^{k-1}) - kI(X^{k+1}).$$

Donc

$$\boxed{I(X^{k+1}) = \frac{k}{k+1}I(X^{k-1})}.$$

Comme $I(X) = 0$, on en déduit

$$I(X^3) = \frac{2}{3}I(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad I(X^5) = \frac{4}{5}I(X^3) = 0.$$

On en déduit aussi

$$I(X^4) = \frac{3}{4}I(X^2).$$

Notons

$$J(P) = \frac{\pi}{3}\left(P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + P(0) + P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

pour $P \in E$, alors on a

$$I(X^k) = J(X^k)$$

pour $k \in [\![0, 2]\!]$ d'après les calculs faits à la question précédente.
Puis,

$$J(X^3) = \frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 0^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) = 0 = I(X^3)$$

et

$$J(X^5) = \frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + 0^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right) = \frac{\pi}{3}\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right) = 0 = I(X^5).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} J(X^4) &= \frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 0^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\times 0^2 + \frac{3}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{3}{4}\times\frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{3}{4}J(X^2) = \frac{3}{4}I(X^2) = I(X^4) \end{aligned}$$

Pour finir, les applications $I$ et $J$ (définies sur $E$) sont linéaires ($I$ par linéarité de l'intégrale convergente), coïncident sur la base $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ de $E$, donc sont égales.

**Correction de l'exercice 8.39** **Énoncé p. 123**

Pour tout $n \geq 0$, on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{array} \right.$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 |f_n(x_0)| = \frac{1}{x_0^2} \qquad \text{donc} \qquad |f_n(x_0)| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

or la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs.
Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ est absolument convergente, donc convergente.
Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étudions la continuité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, alors pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+a^2}$$

(même pour $n = 0$, car on suppose $a > 0$), donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{n^2+a^2}.$$

De plus, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+a^2}$ est convergente (car $\frac{1}{n^2+a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.
Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique : la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par « caractère local » de la continuité.
**Autre façon :**
On a $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et pas juste $\mathbb{R}_+^*$), et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},$$

puis

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$), par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne alors que la fonction

$$T : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par addition, la fonction

$$S : x \mapsto T(x) + \frac{1}{x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Remarque**

1. Cette façon est intéressante, car on constate que le problème en 0 provient juste de $f_0$, et donc (et c'est ce qu'on fait dans la suite), il peut être intéressant d'étudier $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne peut pas converger normalement sur $\mathbb{R}_+^*$, car la fonction $f_0$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La suite numérique $\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)_{n\geq 1}$ est positive (donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est alternée), décroissante et tend vers 0, donc le critère des séries alternées s'applique. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$|T(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq |f_1(x)| = \frac{1}{x^2+1}.$$

Donc,

— la fonction $T$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,

— pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$|T(x)| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

— et la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue positive sur $\mathbb{R}_+$, et admet arctan comme primitive, et que arctan a une limite finie en $+\infty$).

Donc, par critère de comparaison, la fonction $T$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si la fonction $S$ était intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait par soustraction que la fonction $x \mapsto S(x) - T(x) = \frac{1}{x^2}$ le serait aussi, ce qui est faux (Riemann, $2 > 1$).
Donc la fonction $S$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
**Autre façon :** la fonction $T$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 0. Donc

$$S(x) = T(x) + \frac{1}{x^2} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\substack{\longrightarrow \\ x\to 0}} {}^{+\infty} + T(0) + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

En particulier,

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Mais la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue positive sur $]0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ diverge (Riemann, $2 > 1$), et la fonction $S$ est continue sur $]0,1]$, donc par critère d'équivalence, l'intégrale $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. À plus forte raison, l'intégrale $\int_0^\infty S(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, donc la fonction $S$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Correction de l'exercice 8.40** **Énoncé p. 123**

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$, car $\ln t > 0$ pour $t \geqslant 2$.

**Cas $\alpha > 1$.** Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, de sorte que $1 < \gamma < \alpha$. Pour $t \geqslant 2$,

$$t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées, puisque $\alpha - \gamma > 0$. Donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ en $+\infty$. Comme $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ converge (Riemann en $+\infty$, $\gamma > 1$), la fonction $f$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ par critère de négligeabilité : l'intégrale converge.
**Cas $\alpha < 1$.** Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, de sorte que $\alpha < \gamma < 1$. Pour $t \geqslant 2$,

$$t^\gamma f(t) = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

par croissances comparées, puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il existe donc $A \geqslant 2$ tel que, pour tout $t \geqslant A$, $f(t) \geqslant \frac{1}{t^\gamma}$. Comme $\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ diverge (Riemann en $+\infty$, $\gamma \leqslant 1$), l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge par minoration, donc $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi.
**Cas $\alpha = 1$.** Pour $x \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est la dérivée de ln, donc si $\beta \neq 1$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^x = \frac{(\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta},$$

qui a une limite finie quand $x \to +\infty$ si et seulement si $1 - \beta < 0$, c'est-à-dire $\beta > 1$. Si $\beta = 1$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

et l'intégrale diverge.
**Conclusion.** L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha\,|\ln t|^\beta}$ est continue et positive sur $]0, 1/2[$, car $\ln t < 0$ sur cet intervalle. La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe $C^1$, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur $]0, 1/2[$, avec $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2}$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{1/2} g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

sont de même nature. Or, pour $u \geqslant 2$, $|\ln(1/u)| = \ln u$, donc

$$g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2} = \frac{u^\alpha}{(\ln u)^\beta} \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}.$$

D'après la première question, cette intégrale converge si et seulement si $2-\alpha > 1$, ou $2 - \alpha = 1$ et $\beta > 1$. Donc $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

**Correction de l'exercice 8.41** **Énoncé p. 123**

1. Soit $n \geqslant n_0 + 1$. Pour $t \in [n, n+1]$, on a $t \geqslant n$, donc $f(t) \leqslant f(n)$ par décroissance de $f$ ; par croissance de l'intégrale sur un segment de longueur

1, $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$. De même, pour $t \in [n-1, n]$, $f(t) \geqslant f(n)$, d'où $f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Pour $n \geqslant n_0$, posons $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$, et pour $x \geqslant n_0$, $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $f \geqslant 0$, la suite $(S_n)$ est croissante et la fonction $F$ est croissante : la série converge si et seulement si $(S_n)$ est majorée, et l'intégrale converge si et seulement si $F$ est majorée.
   En sommant les inégalités de la première question pour $k$ allant de $n_0 + 1$ à $n$, on obtient pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, par la relation de Chasles,
   $$F(n+1) - F(n_0+1) \leqslant S_n - f(n_0) \leqslant F(n).$$
   Si l'intégrale converge, $F$ est majorée par sa limite $L$, donc $S_n \leqslant f(n_0) + L$ pour tout $n$ : la série converge.
   Si la série converge, $(S_n)$ est majorée par sa somme $S$. Soit $x \geqslant n_0+1$ et $n = \lfloor x \rfloor$. Comme $F$ est croissante,
   $$F(x) \leqslant F(n+1) \leqslant F(n_0+1) + S_n - f(n_0) \leqslant F(n_0+1) + S,$$
   donc $F$ est majorée : l'intégrale converge.

3. Si $\beta \leqslant 0$, pour $n \geqslant 3$ on a $\ln n \geqslant 1$, donc $(\ln n)^\beta \leqslant 1$ et $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge, donc la série étudiée diverge, par comparaison de séries à termes positifs.
   Si $\beta > 0$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, comme inverse du produit des deux fonctions croissantes et strictement positives $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\ln t)^\beta$. D'après la deuxième question, la série $\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$, qui converge si et seulement si $\beta > 1$ d'après l'exercice précédent.
   La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge donc si et seulement si $\beta > 1$.

**Correction de l'exercice 8.42** **Énoncé p. 124**

1. La fonction $fg$ est continue sur $I$ et, pour tout $t \in I$, $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$ donne
   $$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(f(t)^2 + g(t)^2\right).$$
   La fonction $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ est intégrable sur $I$ comme somme de fonctions intégrables, donc $fg$ est intégrable sur $I$ par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de $I$ qui ne lui appartient pas.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2$ est une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $I$, donc est intégrable sur $I$.

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons
   $$P(\lambda) = \int_I (f + \lambda g)^2 = \int_I f^2 + 2\lambda \int_I fg + \lambda^2 \int_I g^2,$$
   par linéarité, toutes les intégrales convergeant d'après la première question. Comme $(f + \lambda g)^2 \geqslant 0$, on a $P(\lambda) \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par positivité de l'intégrale.
   Si $\int_I g^2 = 0$, la fonction $P$ est affine et positive sur $\mathbb{R}$, donc constante : $\int_I fg = 0$, et l'inégalité demandée s'écrit $0 \leqslant 0$.

Si $\int_I g^2 > 0$, $P$ est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$ : son discriminant est négatif ou nul,

$$4\left(\int_I fg\right)^2 - 4\int_I f^2 \int_I g^2 \leqslant 0,$$

ce qui est l'inégalité demandée.

3. La première question, appliquée à $f$ et $g = f'$ sur $I = [0, +\infty[$, montre que $ff'$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ; en particulier $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
La fonction $f^2$ est de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$, de dérivée $2ff'$, donc pour $x \geqslant 0$,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2\int_0^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)^2 + 2\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi $f^2$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$. Comme $f^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et admet une limite en $+\infty$, cette limite est nulle (cours) : $\ell = 0$. Enfin $|f| = \sqrt{f^2}$ tend vers 0 en $+\infty$, donc $f$ aussi.

**Correction de l'exercice 8.43** **Énoncé p. 124**

1. Comme $f'$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $x \geqslant 0$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc $f$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$. Une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite en $+\infty$ a une limite nulle (cours) : $\ell = 0$.

2. (a) Soit $x \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \geqslant \varepsilon$. Pour $t \in [x, x+\delta]$, on a $|t - x| \leqslant \delta$, donc $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2$ et

$$|f(t)| \geqslant |f(x)| - |f(x) - f(t)| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[x, x+\delta]$, $\int_x^{x+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\delta$.

(b) Raisonnons par l'absurde et supposons que $f$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$ : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $A \geqslant 0$, il existe $x \geqslant A$ vérifiant $|f(x)| \geqslant \varepsilon$. Soit $\delta > 0$ associé à $\varepsilon/2$ par l'uniforme continuité.

On construit par récurrence une suite $(x_n)$ de réels positifs telle que $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ pour tout $n$ et $x_{n+1} \geqslant x_n + \delta$ pour tout $n$ : on choisit $x_0 \geqslant 0$ avec $|f(x_0)| \geqslant \varepsilon$, puis, $x_n$ étant construit, on choisit $x_{n+1} \geqslant x_n + \delta$ avec $|f(x_{n+1})| \geqslant \varepsilon$.

Les segments $[x_n, x_n + \delta]$ sont alors deux à deux d'intérieurs disjoints, et tous contenus dans $[0, x_N + \delta]$ pour $n \leqslant N$. Comme $|f| \geqslant 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{x_N+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{N} \int_{x_n}^{x_n+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant (N+1)\frac{\varepsilon\delta}{2}.$$

Or $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $\int_0^{x_N+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour tout $N$, ce qui contredit l'inégalité précédente quand $N \to +\infty$. Donc $f$ tend vers 0 en $+\infty$.

3. Pour $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{8}$, donc les segments $J_n = \left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$ sont deux à deux disjoints et contenus dans $[1, +\infty[$. Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la fonction nulle en dehors des $J_n$, et dont le graphe sur chaque $J_n$ est un triangle de sommet $(n, n)$ : $f$ est affine sur chaque moitié de $J_n$, nulle aux deux extrémités et vaut $n$ au milieu. Elle est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et non bornée puisque $f(n) = n$ pour tout $n \geqslant 2$.
L'aire du $n$-ième triangle est $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2}$. Soit $x \geqslant 0$ et $N$ un entier tel que $N \geqslant x + 1$ : les segments $J_n$ qui rencontrent $[0, x]$ sont d'indice $n \leqslant N$, donc, comme $f \geqslant 0$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante et majorée, donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et comme $f \geqslant 0$, la fonction $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

**Correction de l'exercice 8.44** **Énoncé p. 124**

1. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt} = (b - a)t + o(t)$, donc $h(t) \to b - a$ quand $t \to 0$ : $h$ se prolonge par continuité en 0, et $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Pour $t \geqslant 1$, comme $a < b$, on a $0 < \mathrm{e}^{-bt} < \mathrm{e}^{-at}$, donc $0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-at}}{t} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence, $a > 0$), donc $h$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par critère de majoration, et $\int_1^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
L'intégrale $I$ converge.
2. Soient $0 < \varepsilon < X$. Sur le segment $[\varepsilon, X]$, par linéarité,

$$\int_\varepsilon^X h(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = at$ dans la première intégrale et $u = bt$ dans la seconde donne

$$\int_\varepsilon^X h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $a\varepsilon < b\varepsilon$ et $aX < bX$, la relation de Chasles donne

$$\int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$
$$\int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

d'où

$$\int_\varepsilon^X h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

3. Pour $u \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$, on a $\mathrm{e}^{-b\varepsilon} \leqslant \mathrm{e}^{-u} \leqslant \mathrm{e}^{-a\varepsilon}$, donc par croissance de l'intégrale, puisque $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln \frac{b}{a}$,

$$\mathrm{e}^{-b\varepsilon} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{e}^{-a\varepsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

De même, $0 \leqslant \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{e}^{-aX} \ln \frac{b}{a}$.
Fixons $\varepsilon > 0$ et faisons tendre $X$ vers $+\infty$ dans l'égalité de la deuxième question : le membre de gauche tend vers $\int_\varepsilon^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ (l'intégrale converge), et $\int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \to 0$. Donc

$$\int_\varepsilon^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Faisons maintenant tendre $\varepsilon$ vers 0 : le membre de gauche tend vers $I$, et le membre de droite est encadré par deux quantités qui tendent vers $\ln \frac{b}{a}$. Donc

$$I = \ln \frac{b}{a}.$$

**Correction de l'exercice 8.45** **Énoncé p. 124**

1. La fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est de classe $C^1$, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, avec $\varphi'(u) = -\dfrac{1}{u^2}$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$ sont de même nature, et comme $\varphi$ est strictement décroissante,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}.$$

2. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$, $0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$, car arctan est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. Par critère de majoration, $g$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ : l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la première question, $J = \int_0^{+\infty} g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, et pour $u > 0$,

$$g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)(1+u^{-\alpha})}\cdot\frac{1}{u^2} = \frac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}.$$

Les deux intégrales convergent, donc par linéarité

$$2J = \int_0^{+\infty} \frac{1+u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2},$$

d'où $J = \dfrac{\pi}{4}$.

3. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $\sqrt{t}\,f(t) \to 0$ par croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (Riemann en 0, $\frac{1}{2} < 1$) : $f$ est intégrable sur $]0, 1]$ par critère de négligeabilité. En $+\infty$, $t^{3/2}f(t) \to 0$ par croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge (Riemann en $+\infty$, $\frac{3}{2} > 1$) : $f$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par critère de négligeabilité. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc.

D'après la première question, et comme pour $u > 0$,

$$f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2} = \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{1}{u^2} = -\frac{\ln u}{1+u^2},$$

on obtient $I = -I$, donc $I = 0$.

Soit $a > 0$. La fonction $\psi : u \mapsto au$ est de classe $C^1$, strictement croissante, et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de changement de variable, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{a^2u^2+a^2}\,a\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u,$$

qui converge comme combinaison linéaire des intégrales convergentes $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ et $I = 0$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}\ln a + 0\right) = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

**Correction de l'exercice 8.46** **Énoncé p. 125**

1. La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0, \pi/2]$, car $\sin t > 0$ sur cet intervalle. L'intégrale $I$ n'est généralisée qu'en 0. Pour $t \in ]0, 1[$, on a $0 < \sin t < 1$ et $0 < t < 1$, donc $-\ln(\sin t) > 0$ et $-\ln t > 0$. De plus

$$-\ln(\sin t) = -\ln t - \ln\frac{\sin t}{t}, \qquad \text{avec} \quad \ln\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty,$$

donc $-\ln(\sin t) \sim -\ln t$ en 0. L'intégrale $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence), donc $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0, 1[$, et par critère d'équivalence, $t \mapsto -\ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0, 1[$. L'intégrale $I$ converge.

La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{\pi}{2} - u$ est de classe $C^1$, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]0, \pi/2[$, avec $\varphi' = -1$. Par le théorème de changement de variable, $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)(-1)\,\mathrm{d}u = -\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, donc la première converge, et comme $\varphi$ est strictement décroissante,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = I.$$

2. La fonction $u \mapsto \ln(\sin u)$ est continue sur $]0, \pi[$, et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes. Par définition, elle converge si et seulement si $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ convergent. La première est $I$. Pour la seconde, la fonction $u \mapsto \pi - u$ est de classe $C^1$, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $]\pi/2, \pi[$ ; comme $\sin(\pi - v) = \sin v$, le théorème de changement de variable montre que $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I$. Donc

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I.$$

3. Pour $t \in ]0, \pi/2[$, on a $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t) > 0$, donc

$$\ln(\sin t \cos t) = \ln(\sin t) + \ln(\cos t) = \ln(\sin 2t) - \ln 2.$$

D'une part, par linéarité, les deux intégrales convergeant,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = 2I.$$

D'autre part, la fonction $u \mapsto \frac{u}{2}$ est de classe $C^1$, strictement croissante, et réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $]0,\pi/2[$ : par le théorème de changement de variable, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\frac{\mathrm{d}u}{2}$, donc converge et vaut $\frac{1}{2}\cdot 2I = I$. Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \ln 2\ \mathrm{d}t = I - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

En comparant, $2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$, donc

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

**Correction de l'exercice 8.47** **Énoncé p. 125**

1. La fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[0,+\infty[$ ; l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et il suffit d'étudier $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.
   La fonction $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $C^1$, strictement croissante, et réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$, avec $\varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Par le théorème de changement de variable, $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
   Posons $a : u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$ et $b : u \mapsto -\cos u$, de classe $C^1$ sur $[1,+\infty[$, avec $b' = \sin$. Le produit $a(u)b(u) = -\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}$ a une limite finie en 1 et tend vers 0 en $+\infty$, comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0. Par le théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} a(u)b'(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} a'(u)b(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Or

   $$a'(u)b(u) = \frac{\cos u}{4u^{3/2}}, \qquad |a'(u)b(u)| \leqslant \frac{1}{4u^{3/2}},$$

   et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$ converge (Riemann en $+\infty$, $\frac{3}{2} > 1$) : par critère de majoration, $a'b$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} a'(u)b(u)\,\mathrm{d}u$ converge. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge, puis $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$, et enfin $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.
2. Par le même changement de variable, appliqué à la fonction continue $t \mapsto \big|\sin(t^2)\big|$, les intégrales $\int_1^{+\infty} \big|\sin(t^2)\big|\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Pour $u \geqslant 1$, comme $|\sin u| \leqslant 1$,

   $$\frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}} \geqslant \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4\sqrt{u}} - \frac{\cos 2u}{4\sqrt{u}}.$$

   L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{4\sqrt{u}}$ diverge (Riemann en $+\infty$, $\frac{1}{2} \leqslant 1$). L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2u}{4\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge : avec $a : u \mapsto \frac{1}{4\sqrt{u}}$ et $b : u \mapsto \frac{\sin 2u}{2}$, de classe $C^1$ sur $[1,+\infty[$, le produit $ab$ a une limite finie en 1 et tend vers 0 en $+\infty$, et $|a'(u)b(u)| \leqslant \frac{1}{16u^{3/2}}$, donc on conclut comme à la première question. Si $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ convergeait, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{4\sqrt{u}}$ convergerait par linéarité, ce qui est faux : elle diverge.

Les fonctions $u \mapsto \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$ : par minoration, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}}\,du$ diverge, donc $\int_1^{+\infty} \left|\sin(t^2)\right| dt$ diverge, et $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

3. La fonction $t \mapsto t\sin(t^4)$ est continue sur $[0, +\infty[$. La fonction $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $C^1$, strictement croissante, et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, avec $\varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Par le théorème de changement de variable, $\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,dt$ est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\,\sin(u^2)\,\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,du,$$

qui converge d'après la première question. Donc $\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,dt$ converge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $t_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{1/4}$. Alors $t_n \sin(t_n^4) = t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ : la fonction $t \mapsto t\sin(t^4)$ n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

## Correction de l'exercice 8.48

Énoncé p. 126

1. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}/t^{n+1}$ est continue et strictement positive sur $[x, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant x$, on a $t^{n+1} \geqslant x^{n+1}$, donc

$$0 < g_n(t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x^{n+1}}.$$

L'intégrale $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge (intégrale de référence), donc, par critère de majoration, $g_n$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ : $R_n(x)$ est bien défini. En intégrant la majoration,

$$R_n(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}}.$$

Enfin, par positivité de $g_n$, $R_n(x) \geqslant \int_x^{x+1} g_n(t)\,dt$, et cette dernière intégrale est strictement positive : c'est l'intégrale sur le segment $[x, x+1]$, avec $x < x+1$, d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. Donc $R_n(x) > 0$.
Le cas $n = 0$ montre que $f(x) = R_0(x)$ est défini pour tout $x > 0$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t^{n+1}}$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, de classe $C^1$ sur $[x, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant x$,

$$u'(t) = -\frac{n+1}{t^{n+2}} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

On a $u(x)v(x) = -\mathrm{e}^{-x}/x^{n+1}$ et $u(t)v(t) = -\mathrm{e}^{-t}/t^{n+1} \to 0$ quand $t \to +\infty$ : le produit $uv$ a des limites finies aux deux bornes. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_x^{+\infty} u(t)v'(t)\,dt = R_n(x)$ et

$$\int_x^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = (n+1)\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,dt = (n+1)R_{n+1}(x)$$

ont même nature. Elles convergent toutes deux d'après la question 1, et

$$R_n(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\right]_x^{+\infty} - (n+1)R_{n+1}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)R_{n+1}(x).$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, multiplions la relation de la question 2, écrite au rang $k$, par $(-1)^k k!$ :

$$(-1)^k k!\, R_k(x) - (-1)^{k+1}(k+1)!\, R_{k+1}(x) = \frac{(-1)^k k!\, \mathrm{e}^{-x}}{x^{k+1}}.$$

En sommant pour $k$ de 0 à $n$, le membre de gauche se télescope :

$$R_0(x) - (-1)^{n+1}(n+1)!\, R_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \mathrm{e}^{-x} S_n(x).$$

Comme $R_0(x) = f(x)$, c'est la relation demandée.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. D'après la question 3, écrite aux rangs $n$ et $n+1$,

$$f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_n(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\, R_{n+1}(x),$$
$$f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_{n+1}(x) = (-1)^{n+2}(n+2)!\, R_{n+2}(x).$$

Comme $R_{n+1}(x) > 0$ et $R_{n+2}(x) > 0$ (question 1), ces deux différences sont non nulles et de signes opposés : $f(x)$ est strictement compris entre $\mathrm{e}^{-x} S_n(x)$ et $\mathrm{e}^{-x} S_{n+1}(x)$. De plus, par la majoration de la question 1,

$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_n(x)| = (n+1)!\, R_{n+1}(x) \leqslant \frac{(n+1)!\, \mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}}.$$

Posons $r_n(x) = \mathrm{e}^x f(x) - S_n(x)$, de sorte que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(S_n(x) + r_n(x))$. L'inégalité précédente donne $x^{n+1}\,|r_n(x)| \leqslant (n+1)!/x$, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$ : $r_n(x) = o(1/x^{n+1})$ quand $x \to +\infty$, ce qui est le développement annoncé.

5. Soit $x > 0$. Posons $\varphi : u \mapsto x + u$, de classe $C^1$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc bijective de $[0, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$. Pour tout $u \geqslant 0$, $t = \varphi(u) = x + u$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}/t$ est continue sur $[x, +\infty[$, donc, par changement de variable, les intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(x+u)}}{x+u}\,\mathrm{d}u$$

ont même nature. La première converge (question 1), donc la seconde aussi, et

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u.$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \geqslant 0$. Comme $-u/x \neq 1$, la somme géométrique donne

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{x^{k+1}} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{u}{x}\right)^k = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - (-u/x)^{n+1}}{1 + u/x} = \frac{1}{x+u} - \frac{(-1)^{n+1} u^{n+1}}{x^{n+1}(x+u)},$$

ce qui est la relation demandée.

7. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Multiplions la relation de la question 6 par $\mathrm{e}^{-u}$ : pour tout $u \geqslant 0$,

$$\frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\, u^k \mathrm{e}^{-u} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} \cdot \frac{u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}}{x+u}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^k \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $k!$ (exercice 8.26), et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u$ converge (question 5). Par linéarité, l'intégrale

$$\rho_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u$$

converge aussi, comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes, et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}}\rho_n(x) = S_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}}\rho_n(x).$$

L'intégrande de $\rho_n(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,+\infty[$ : comme à la question 1, $\rho_n(x) > 0$. Pour tout $u \geqslant 0$, $\dfrac{1}{x+u} \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc

$$0 < \rho_n(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{(n+1)!}{x}.$$

En reportant dans la question 5,

$$f(x) - \mathrm{e}^{-x}S_n(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{\mathrm{e}^{-x}\rho_n(x)}{x^{n+1}}.$$

Cette différence est du signe de $(-1)^{n+1}$, et celle au rang $n+1$ du signe opposé : $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x}S_n(x)$ et $\mathrm{e}^{-x}S_{n+1}(x)$. De plus,

$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x}S_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{-x}\rho_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}},$$

et l'on conclut comme à la question 4.

8. Soit $x > 0$. Posons $a_k = k!/x^{k+1} > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1}/a_k = (k+1)/x$, qui est supérieur ou égal à 1 dès que $k \geqslant x-1$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 \geqslant x-1$ : la suite $(a_k)_{k\geqslant k_0}$ est croissante, donc $a_k \geqslant a_{k_0} > 0$ pour tout $k \geqslant k_0$. Le terme général $(-1)^k a_k$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$ et

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2)!}{x^{n+3}} \cdot \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{n+2}{x}.$$

Ainsi $b_{n+1} < b_n$ si et seulement si $n < x-2$, et $b_{n+1} > b_n$ si et seulement si $n > x-2$.

   — Si $x < 2$, la suite $(b_n)$ est strictement croissante : la meilleure majoration est celle de $n = 0$.
   — Si $x \geqslant 2$, posons $p = \lfloor x \rfloor - 1 \in \mathbb{N}$. Pour $n \leqslant p-1$, on a $n \leqslant x-2$, donc $b_{n+1} \leqslant b_n$ ; pour $n \geqslant p$, on a $n > x-2$, donc $b_{n+1} > b_n$. La suite $(b_n)$ est donc décroissante jusqu'au rang $p$, puis strictement croissante, et son minimum est $b_p$ : la meilleure majoration est celle de $n = p = \lfloor x \rfloor - 1$ (si $x$ est entier, $b_{p-1} = b_p$ et le rang $p-1$ convient aussi).

   Autrement dit, la majoration $\mathrm{e}^{-x}b_n$ est la valeur absolue $\mathrm{e}^{-x}a_{n+1}$ du premier terme omis, et elle est la meilleure lorsque ce terme est le plus petit de la série.

10. Prenons $x = 10$. D'après la question 4 avec $n = 0$, $f(10)$ est compris entre

$$\mathrm{e}^{-10}S_0(10) = \frac{\mathrm{e}^{-10}}{10} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-10}S_1(10) = \mathrm{e}^{-10}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{100}\right) = \frac{9}{100}\mathrm{e}^{-10},$$

donc $f(10) \geqslant \frac{9}{100}\mathrm{e}^{-10}$. D'après la question 9, la meilleure majoration est obtenue pour $n = 8$ (ou $n = 9$, qui donne la même), et $b_8 = 9!/10^{10} = 362\,880/10^{10} \leqslant 4 \cdot 10^{-5}$. Donc

$$\frac{\left|f(10) - \mathrm{e}^{-10}S_8(10)\right|}{f(10)} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-10}b_8}{\frac{9}{100}\mathrm{e}^{-10}} = \frac{100}{9}\,b_8 \leqslant \frac{4 \cdot 10^{-3}}{9} \leqslant 10^{-3}.$$

Numériquement, $S_8(10) = 0{,}091\,581\,92$, donc $\mathrm{e}^{10}f(10) = 0{,}0916$ à $10^{-4}$ près.

**Correction de l'exercice 8.49** **Énoncé p. 127**

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in ]0, \pi/2]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la formule $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos(a)\sin(b)$, appliquée avec $a = 2kt$ et $b = t$, donne

$$2\sin(t)\cos(2kt) = \sin\big((2k+1)t\big) - \sin\big((2k-1)t\big).$$

En sommant pour $k$ de 1 à $n$, la somme se télescope :

$$2\sin(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt) = \sin\big((2n+1)t\big) - \sin(t),$$

donc $\sin(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)\right) = \sin\big((2n+1)t\big)$. Comme $\sin t \neq 0$ sur $]0, \pi/2]$, on peut diviser par $\sin t$, ce qui donne la relation demandée.

2. La fonction $t \mapsto 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ et coïncide avec $D_n$ sur $]0, \pi/2]$ : $D_n$ se prolonge par continuité en 0, en posant $D_n(0) = 2n+1$. Par linéarité, puisque, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\int_0^{\pi/2}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin(k\pi)}{2k} = 0,$$

on obtient

$$\int_0^{\pi/2}D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

3. Soit $\lambda > 0$. Les fonctions $g$ et $t \mapsto -\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0, \pi/2]$, donc, par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2}g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{g(t)\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2}g'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $|\cos| \leqslant 1$, l'inégalité triangulaire donne

$$\left|\int_0^{\pi/2}g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|g(\pi/2)| + |g(0)| + \int_0^{\pi/2}|g'(t)|\,\mathrm{d}t\right),$$

où l'intégrale de $|g'|$ est celle d'une fonction continue sur un segment. Le majorant tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$, donc, par encadrement, $\int_0^{\pi/2}g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \to 0$.

4. (a) Pour $t \in ]0, \pi/2]$,
$$g(t) = \frac{t - \sin t}{t \sin t}.$$
Quand $t \to 0$, le développement limité $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$ donne $t - \sin t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{6}$ et $t \sin t \underset{t\to 0}{\sim} t^2$, donc $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{6}$, et $g(t) \to 0$. La fonction $g$ se prolonge donc par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

   (b) La fonction $g$ est de classe $C^1$ sur $]0, \pi/2]$, comme différence des inverses de deux fonctions de classe $C^1$ qui ne s'annulent pas, et, pour tout $t \in ]0, \pi/2]$,
$$g'(t) = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2} = \frac{\sin^2 t - t^2 \cos t}{t^2 \sin^2 t}.$$
Quand $t \to 0$, de $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^4)$ et $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, on tire
$$\sin^2 t = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4) \qquad \text{et} \qquad t^2 \cos t = t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4),$$
donc $\sin^2 t - t^2 \cos t = \dfrac{t^4}{6} + o(t^4) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^4}{6}$. Comme $t^2 \sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} t^4$, on obtient $g'(t) \to \dfrac{1}{6}$ quand $t \to 0$.
Ainsi $g$ est continue sur $[0, \pi/2]$, de classe $C^1$ sur $]0, \pi/2]$, et $g'$ admet une limite finie en 0 : d'après le théorème de la limite de la dérivée, $g$ est de classe $C^1$ sur $[0, \pi/2]$, avec $g'(0) = \dfrac{1}{6}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in ]0, \pi/2]$, $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{\sin t} - g(t)$, donc
$$\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} = D_n(t) - g(t) \sin\big((2n+1)t\big).$$
Les deux fonctions du membre de droite sont continues sur $[0, \pi/2]$ (questions 2 et 4), donc le membre de gauche se prolonge par continuité en 0, et, par linéarité et d'après la question 2,
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} g(t) \sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t.$$
La fonction $g$ est de classe $C^1$ sur $[0, \pi/2]$ (question 4) et $2n + 1 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ : d'après la question 3, la dernière intégrale tend vers 0, d'où la limite annoncée.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $t \mapsto \sin\big((2n+1)t\big)/t$ et $u \mapsto \sin(u)/u$, prolongées par continuité en 0 (par $2n + 1$ et par 1), sont continues sur les segments $[0, \pi/2]$ et $[0, (2n+1)\pi/2]$. Le changement de variable affine $u = (2n+1)t$, pour lequel $t = u/(2n+1)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/(2n+1)$, et donc
$$\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin u}{u/(2n+1)} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2n+1} = \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u,$$
donne l'égalité demandée.

7. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (exercice 8.25) : par définition, $\int_0^X \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \to I$ quand $X \to +\infty$. Comme $X_n = (2n+1)\pi/2 \to +\infty$, on a donc
$$\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.$$
D'après les questions 5 et 6, cette suite tend aussi vers $\frac{\pi}{2}$. Par unicité de la limite,
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}.$$

8. Supposons d'abord $a > 0$. Posons $\varphi : t \mapsto at$, de classe $C^1$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Pour tout $t > 0$, $u = at$ équivaut à $t = u/a$, et $\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t$, de sorte que
$$\frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin u}{u/a}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
La fonction $t \mapsto \sin(at)/t$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. La seconde converge et vaut $\pi/2$ (question 7), donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
Si $a < 0$, alors $\sin(at) = -\sin(|a|\,t)$ pour tout $t$, et le cas précédent appliqué à $|a| > 0$ montre que l'intégrale converge et vaut $-\pi/2$. En résumé, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } a > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

9. La fonction $h : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $h(t) \to 1$ quand $t \to 0$ : $h$ se prolonge par continuité en 0, donc est intégrable sur $]0,1]$. Pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$, et $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) : par critère de majoration, $h$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc.
Posons $u : t \mapsto \sin^2 t$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$, de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$. Pour tout $t > 0$, $u'(t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$. On a $u(t)v(t) = -\sin^2(t)/t \underset{t\to 0}{\sim} -t \to 0$ quand $t \to 0$, et $|u(t)v(t)| \leqslant 1/t \to 0$ quand $t \to +\infty$ : le produit $uv$ a des limites finies aux deux bornes. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ et
$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
ont même nature. La première converge, donc les deux convergent, et, d'après la question 8 avec $a = 2$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour la seconde intégrale, posons $u : t \mapsto 1 - \cos t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$, de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$, avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t > 0$. On a $u(t)v(t) = -(1 - \cos t)/t \underset{t\to 0}{\sim} -t/2 \to 0$ quand $t \to 0$, et $|u(t)v(t)| \leqslant 2/t \to 0$ quand $t \to +\infty$. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. La seconde converge (question 7), donc la première aussi, et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

**Correction de l'exercice 8.50** **Énoncé p. 128**

Pour $x \geqslant a$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big)$ signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon\, g(t)$ pour tout $t \geqslant A$, et que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\big(g(t)\big)$ signifie qu'il existe $M \geqslant 0$ et $A \geqslant a$ tels que $|f(t)| \leqslant Mg(t)$ pour tout $t \geqslant A$.

1. Comme $g$ est positive, la fonction $G$ est croissante sur $[a, +\infty[$ : pour $a \leqslant x \leqslant y$, $G(y) - G(x) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. D'après le théorème de la limite monotone, $G$ admet en $+\infty$ une limite, finie ou égale à $+\infty$. Si cette limite était finie, l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergerait, par définition. Elle diverge, donc $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon\, g(t)$ pour tout $t \geqslant A$. Pour $x \geqslant A$, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire donnent
$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \int_A^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Notons $C = \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right|$, qui ne dépend pas de $x$. Comme $g$ est positive, $\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant G(x)$, donc $|F(x)| \leqslant C + \varepsilon\, G(x)$ pour tout $x \geqslant A$. D'après la question 1, $G(x) \to +\infty$ : il existe $A' \geqslant A$ tel que $G(x) \geqslant C/\varepsilon$ pour tout $x \geqslant A'$, et alors
$$|F(x)| \leqslant \varepsilon\, G(x) + \varepsilon\, G(x) = 2\varepsilon\, G(x).$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $F(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\big(G(x)\big)$.
3. Il existe $M \geqslant 0$ et $A \geqslant a$ tels que $|f(t)| \leqslant Mg(t)$ pour tout $t \geqslant A$. Le même calcul qu'à la question 2 donne, pour $x \geqslant A$,
$$|F(x)| \leqslant C + M\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C + M\,G(x) \qquad \text{avec} \qquad C = \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$
Comme $G(x) \to +\infty$, il existe $A' \geqslant A$ tel que $G(x) \geqslant C$ pour tout $x \geqslant A'$, et alors $|F(x)| \leqslant (M+1)\,G(x)$ : donc $F(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\big(G(x)\big)$.
4. L'hypothèse $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$ signifie que $f(t) - g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big)$. La fonction $f - g$ est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, donc la question 2 s'applique à $f - g$ et $g$ :
$$F(x) - G(x) = \int_a^x \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\big(G(x)\big),$$

c'est-à-dire $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} G(x)$. Comme $G(x) \to +\infty$ (question 1), on en déduit $F(x) \to +\infty$ : $F$ n'a pas de limite finie en $+\infty$, donc $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

5. Sur $[1, +\infty[$, $g$ est continue et strictement positive, $f(t) = g(t)\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, et $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann). Pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et le quotient des intégrales partielles tend vers $\dfrac{3}{2} \neq 1$ : les deux conclusions de la question 4 sont fausses.

6. Pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) - g(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t$, donc $|f(t) - g(t)| = \mathrm{e}^{-t}\,|g(t)|$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{e}^{-t} \to 0$, il existe $A \geqslant 0$ tel que $\mathrm{e}^{-t} \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$, et alors $|f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon\,|g(t)|$ : ainsi $f(t) - g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big)$.

   Pour $x \geqslant 0$, $G(x) = \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$, qui vaut 0 en $x = 2k\pi$ et 2 en $x = (2k+1)\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ : $G$ n'a pas de limite en $+\infty$, donc $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Enfin, la fonction $t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}(\sin t + \cos t)}{2}$ est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin t$ sur $\mathbb{R}$, donc, pour $x \geqslant 0$,

$$F(x) - G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

   Si l'on avait $F(x) - G(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\big(G(x)\big)$, il existerait $A \geqslant 0$ tel que $|F(x) - G(x)| \leqslant |G(x)|$ pour tout $x \geqslant A$, donc $F(x) - G(x) = 0$ en tout point $x = 2k\pi \geqslant A$, alors que $F(2k\pi) - G(2k\pi) \to \dfrac{1}{2}$ quand $k \to +\infty$. C'est absurde : la conclusion de la question 2 ne vaut plus quand $g$ change de signe.

7. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $A \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant g(t)$ pour tout $t \geqslant A$. La fonction $g$ est intégrable sur $[A, +\infty[$, donc, par critère de majoration, $f$ l'est aussi ; elle est intégrable sur le segment $[a, A]$ car continue par morceaux, donc intégrable sur $[a, +\infty[$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_\varepsilon \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon\, g(t)$ pour tout $t \geqslant A_\varepsilon$. Pour $x \geqslant A_\varepsilon$, les intégrales $\int_x^{+\infty} f$, $\int_x^{+\infty} |f|$ et $\int_x^{+\infty} g$ convergent, et

$$\left|\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Donc $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

8. *Domination.* Si $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\big(g(t)\big)$, alors $f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

   En effet, il existe $M \geqslant 0$ et $A \geqslant a$ tels que $|f(t)| \leqslant Mg(t)$ pour tout $t \geqslant A$ : l'intégrabilité de $f$ s'obtient comme à la question 7, par critère de majoration, et, pour $x \geqslant A$,

$$\left|\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Équivalence.* Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ et

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En effet, $f-g = \underset{t\to+\infty}{o}(g)$ est continue par morceaux, donc, d'après la question 7, $f-g$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, et $f = g + (f-g)$ l'est aussi. De plus, pour $x \geqslant a$,

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

ce qui est l'équivalence annoncée.

9. La fonction $h$ est de classe $C^1$ sur $[2,+\infty[$ et, pour $t \geqslant 2$,

$$h'(t) = \frac{\ln t - 1}{(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{\ln t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln t},$$

car $\dfrac{1}{\ln t} \to 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue et strictement positive sur $[2,+\infty[$, et, pour $t \geqslant 2$, $\ln t \leqslant t$ donc $\dfrac{1}{\ln t} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$ ; comme $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge (Riemann), $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ diverge par minoration. La question 4, appliquée à $h'$ et $t \mapsto 1/\ln t$, donne

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_2^x h'(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(2) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x},$$

le dernier équivalent venant de $\dfrac{x}{\ln x} \to +\infty$ (croissances comparées).

10. Posons $h : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ sur $[1,+\infty[$, de classe $C^1$, avec

$$h'(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t} - \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^t}{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ est continue et strictement positive sur $[1,+\infty[$, et $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$ pour $t \geqslant 1$, donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge par minoration. La question 4 donne

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x) - h(1) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{x},$$

car $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$.

11. La fonction $k$ est de classe $C^1$ sur $[1,+\infty[$ et, pour $t \geqslant 1$,

$$k'(t) = -\frac{-2t\mathrm{e}^{-t^2}\cdot 2t - 2\mathrm{e}^{-t^2}}{4t^2} = \mathrm{e}^{-t^2} + \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} = \mathrm{e}^{-t^2}\left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et strictement positive sur $[1,+\infty[$, et $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geqslant 1$, donc elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de majoration. La question 8 (équivalence) donne

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} k'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} k(X) - k(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x},$$

puisque $k(X) \to 0$ quand $X \to +\infty$.

12. D'après la question 11, $k'$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} = k'(t) - \mathrm{e}^{-t^2}$ aussi, et, pour $x \geqslant 1$,

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} k'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $m : t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^3}$ sur $[1,+\infty[$, de classe $C^1$, avec

$$m'(t) = -\frac{-2t\mathrm{e}^{-t^2}\cdot 2t^3 - 6t^2\mathrm{e}^{-t^2}}{4t^6} = \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} + \frac{3\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^4} = \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\left(1+\frac{3}{2t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}/t^2$ est continue, strictement positive et intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, d'après la question 8 et comme $m(X) \to 0$ quand $X \to +\infty$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} m'(t)\,\mathrm{d}t = -m(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x^3}.$$

Autrement dit, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right)$, et en reportant,

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right).$$

## Correction de l'exercice 8.51

Énoncé p. 130

1. Pour tout $t > 0$, $0 \leqslant 2\,|f(t)| \leqslant 1 + f(t)^2$, puisque $(1-|f(t)|)^2 \geqslant 0$. La fonction constante 1 est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1]$, et $f^2$ l'est par hypothèse, donc $|f|$ est intégrable sur $]0,1]$ par critère de majoration : $f$ est intégrable sur $]0,1]$.

   Soit $x > 0$. La fonction $f$ est intégrable sur $]0,1]$ et continue sur le segment d'extrémités 1 et $x$, donc intégrable sur $]0,x]$ : l'intégrale $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $F(x)$ est bien défini.

2. Pour $x > 0$, notons $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Par la relation de Chasles,

$$\Phi(x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   et $x \mapsto \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction continue $f$ qui s'annule en 1 : $\Phi$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\Phi' = f$. Donc $F : x \mapsto \Phi(x)/x$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$, comme quotient de fonctions de classe $C^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, et, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{x\Phi'(x) - \Phi(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} - \frac{F(x)}{x}, \qquad \text{soit} \qquad xF'(x) = f(x) - F(x).$$

3. Soit $x > 0$. Les fonctions $f$ et 1 sont continues sur $]0,x]$ et leurs carrés y sont intégrables, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice 8.42) donne

$$\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t \int_0^x \mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Le membre de gauche vaut $x^2F(x)^2$ ; en divisant par $x > 0$, on obtient $xF(x)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Comme $f^2$ est intégrable sur $]0,1]$, on a, par définition, $\int_x^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ quand $x \to 0^+$, donc

$$\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_x^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Puisque $0 \leqslant xF(x)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$, on conclut par encadrement que $xF(x)^2 \to 0$ quand $x \to 0^+$.

4. Les fonctions $t \mapsto F(t)^2$ et $t \mapsto t$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[\varepsilon, X]$ (question 2), donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t &= \left[tF(t)^2\right]_\varepsilon^X - \int_\varepsilon^X t\cdot 2F(t)F'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= XF(X)^2 - \varepsilon F(\varepsilon)^2 - 2\int_\varepsilon^X F(t)\,tF'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'après la question 2, $tF'(t) = f(t) - F(t)$ pour tout $t > 0$, donc

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t = XF(X)^2 - \varepsilon F(\varepsilon)^2 - 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t,$$

et il reste à isoler $\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t$ :

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2 - XF(X)^2.$$

5. Comme $XF(X)^2 \geqslant 0$, la question 4 donne

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2.$$

Les fonctions $F$ et $f$ sont continues sur le segment $[\varepsilon, X]$, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'y applique :

$$\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_\varepsilon^X f(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{B},$$

la dernière majoration venant de la positivité de $f^2$, qui donne $\int_\varepsilon^X f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant B$. D'où l'inégalité demandée.

6. Notons $S = \sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \geqslant 0$ et $c = \varepsilon F(\varepsilon)^2 \geqslant 0$. La question 5 s'écrit $S^2 - 2\sqrt{B}\,S \leqslant c$, soit $(S - \sqrt{B})^2 \leqslant B + c$. Donc $S - \sqrt{B} \leqslant \sqrt{B + c}$, ce qui est l'inégalité demandée :

$$\sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{B} + \sqrt{B + \varepsilon F(\varepsilon)^2}.$$

*Intégrabilité de $F^2$.* D'après la question 3, il existe $\varepsilon_0 \in\, ]0,1[$ tel que $\varepsilon F(\varepsilon)^2 \leqslant B$ pour tout $\varepsilon \in\, ]0, \varepsilon_0]$. Pour un tel $\varepsilon$ et tout $X > \varepsilon$, l'inégalité précédente donne

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\sqrt{B} + \sqrt{2B}\right)^2 = (1+\sqrt{2})^2 B =: K.$$

La fonction $F^2$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Pour $\varepsilon \in ]0,\varepsilon_0]$, $\int_\varepsilon^1 F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant K$, et $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^1 F(t)^2\,\mathrm{d}t$ est décroissante : elle admet une limite finie en $0^+$, donc $\int_0^1 F(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $X > 1$, $\int_1^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon_0}^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant K$, et $X \mapsto \int_1^X F(t)^2\,\mathrm{d}t$ est croissante : elle admet une limite finie en $+\infty$, donc $\int_1^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge. La fonction $F^2$, positive, est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

*L'inégalité.* Soit $X > 0$. Dans l'inégalité du début de la question, faisons tendre $\varepsilon$ vers $0^+$ : par intégrabilité de $F^2$, $\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \to \int_0^X F(t)^2\,\mathrm{d}t$, et $\varepsilon F(\varepsilon)^2 \to 0$ (question 3). Par continuité de la racine carrée,

$$\sqrt{\int_0^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant 2\sqrt{B}, \qquad \text{soit} \qquad \int_0^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4B.$$

En faisant tendre $X$ vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

7. (a) Les fonctions $F$ et $f$ sont continues sur $]0,+\infty[$, de carrés intégrables (question 6), donc $Ff$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (exercice 8.42). Fixons $\varepsilon > 0$. La question 4 s'écrit, pour $X > \varepsilon$,

$$XF(X)^2 = 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2 - \int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t,$$

et le membre de droite a une limite finie quand $X \to +\infty$ : $XF(X)^2$ admet une limite finie $L \geqslant 0$ en $+\infty$. Si $L > 0$, alors $F(X)^2 \underset{X\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{X}$, et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}X}{X}$ diverge (Riemann), donc $F^2$ ne serait pas intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère d'équivalence : c'est exclu. Ainsi $XF(X)^2 \to 0$ quand $X \to +\infty$.
Faisons tendre $X$ vers $+\infty$ puis $\varepsilon$ vers $0^+$ dans la relation de la question 4, en utilisant la question 3 et l'intégrabilité de $Ff$ et de $F^2$ :

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} F(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse $\int_0^{+\infty} F^2 = 4B$ donne alors $\int_0^{+\infty} Ff = 2B$, donc

$$\left(\int_0^{+\infty} Ff\right)^2 = 4B^2 = \int_0^{+\infty} F^2 \int_0^{+\infty} f^2.$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $(F-\lambda f)^2$ est continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ (exercice 8.42), et, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \big(F(t)-\lambda f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} F^2 - 2\lambda\int_0^{+\infty} Ff + \lambda^2\int_0^{+\infty} f^2 \\ &= 4B - 4\lambda B + \lambda^2 B = B(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Pour $\lambda = 2$, cette intégrale est nulle. La fonction $(F-2f)^2$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ ; pour tout segment $[a,b] \subset ]0,+\infty[$ avec $a < b$, $0 \leqslant \int_a^b (F-2f)^2 \leqslant \int_0^{+\infty}(F-2f)^2 = 0$, donc $F-2f$ est nulle sur $[a,b]$. Ainsi $F = 2f$ sur $]0,+\infty[$ : $F = \lambda f$ avec $\lambda = 2$.

(c) D'après la question 2 et $f = F/2$, pour tout $x > 0$,

$$xF'(x) = f(x) - F(x) = -\frac{F(x)}{2}, \qquad \text{soit} \qquad F'(x) + \frac{1}{2x}F(x) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène, sur $]0, +\infty[$ ; comme $x \mapsto \frac{1}{2}\ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x}$, ses solutions sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{C}{\sqrt{x}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = C/\sqrt{x}$, puis $f(x) = \dfrac{C}{2\sqrt{x}}$ et $f(x)^2 = \dfrac{C^2}{4x}$ pour tout $x > 0$. Or $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge (Riemann) : comme $f^2$ est intégrable sur $]0, 1]$, on a nécessairement $C = 0$, donc $f = 0$. C'est contraire à l'hypothèse. Ainsi, pour $f$ non nulle,

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t < 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

8. Sur chacun des intervalles $]0, 1]$, $[1, A]$, $[A, A+1]$ et $[A+1, +\infty[$, $f_A$ est continue, et les expressions se raccordent aux points de jonction : $\sqrt{1} = 1 = 1/\sqrt{1}$ en $t = 1$, $1/\sqrt{A} = (A + 1 - A)/\sqrt{A}$ en $t = A$, et $(A + 1 - (A + 1))/\sqrt{A} = 0$ en $t = A + 1$. Donc $f_A$ est continue sur $]0, +\infty[$.
La fonction $f_A^2$ est continue sur $]0, A + 1]$ et majorée par 1 (car $0 \leqslant f_A \leqslant 1$), donc intégrable sur cet intervalle borné par critère de majoration, et nulle sur $[A + 1, +\infty[$ : elle est intégrable sur $]0, +\infty[$, et, par la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} f_A(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_A^{A+1} \frac{(A+1-t)^2}{A}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \ln A + \frac{1}{3A},$$

la dernière intégrale valant $\dfrac{1}{A}\left[-\dfrac{(A+1-t)^3}{3}\right]_A^{A+1} = \dfrac{1}{3A}$. Comme $A > 1$, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3A} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \leqslant 1$, d'où $\int_0^{+\infty} f_A(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \ln A + 1$.

9. Soit $x \in [1, A]$. Par la relation de Chasles,

$$xF_A(x) = \int_0^x f_A(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} + 2(\sqrt{x} - 1) \geqslant 2(\sqrt{x} - 1),$$

donc $F_A(x) \geqslant \dfrac{2(\sqrt{x}-1)}{x} \geqslant 0$.
La fonction $f_A$ est continue sur $]0, +\infty[$ et $f_A^2$ y est intégrable (question 8), donc, d'après la question 6, $F_A^2$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par positivité de $F_A^2$ et par l'inégalité précédente, élevée au carré entre nombres positifs,

$$\int_0^{+\infty} F_A(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^A F_A(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4\int_1^A \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^{3/2}} + \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\int_1^A \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right]_1^A = \ln A + \frac{4}{\sqrt{A}} - \frac{1}{A} - 3 \geqslant \ln A - 4,$$

puisque $\dfrac{4}{\sqrt{A}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{A} \leqslant 1$. En multipliant par 4, on obtient $\int_0^{+\infty} F_A(t)^2 \, \mathrm{d}t \geqslant 4 \ln A - 16$.

10. Supposons qu'il existe $C < 4$ tel que $\int_0^{+\infty} F^2 \leqslant C \int_0^{+\infty} f^2$ pour toute fonction $f$ continue sur $]0, +\infty[$ de carré intégrable. Si $C < 0$, l'inégalité est fausse pour toute $f$ non nulle, puisque $\int_0^{+\infty} F^2 \geqslant 0 > C \int_0^{+\infty} f^2$ ; donc $C \geqslant 0$. Pour tout $A > 1$, les questions 8 et 9 donnent alors

$$4 \ln A - 16 \leqslant \int_0^{+\infty} F_A(t)^2 \, \mathrm{d}t \leqslant C \int_0^{+\infty} f_A(t)^2 \, \mathrm{d}t \leqslant C(\ln A + 1),$$

soit $(4 - C) \ln A \leqslant 16 + C$. Comme $4 - C > 0$ et $\ln A \to +\infty$ quand $A \to +\infty$, le membre de gauche n'est pas majoré : c'est absurde. Il n'existe donc pas de constante $C < 4$ dans l'inégalité de Hardy.