Séries de fonctions : étude d'une fonction somme

Exercice 1 – étude d'une fonction somme.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}$ et, lorsque cela a un sens, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Que se passe-t-il en $x = 0$?
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $]0, +\infty[$?
3. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, exprimer S' et en déduire les variations de S.
4. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
5. Déterminer la limite de $xS(x)$ quand $x \to +\infty$. En déduire un équivalent de S en $+\infty$.
6. ⋆⋆ Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de la double limite en 0 ? Par une comparaison série-intégrale, montrer que $S(x) \sim -\ln x$ quand $x \to 0^+$.

À retenir

Rédiger une convergence normale sur un intervalle J.

1. Pour tout $x \in J$, majorer $|f_n(x)|$ par un réel α_n qui ne dépend pas de x.
2. En déduire que f_n est bornée sur J : sa borne supérieure existe et $\|f_n\|_{\infty,J} \leqslant \alpha_n$.
3. Montrer que $\sum \alpha_n$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty,J}$ converge.
4. Conclure : $\sum f_n$ converge normalement sur J, donc uniformément sur J.

Exercice 2 – ⋆⋆ dans un second temps : la classe C^∞.

On reprend les fonctions f_n et S de l'exercice 1.

1. Justifier que chaque f_n est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Montrer par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,
$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\, k!\, n^{k-1}}{(1+nx)^{k+1}}.$$
On pourra écrire $f_n(x) = \frac{1}{n}(1+nx)^{-1}$.
2. Soient $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. L'objectif de cette question est de montrer que S est de classe C^k sur $[a, +\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\left\| f_n^{(j)} \right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{j!}{a^{j+1}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$
   On pourra commencer par minorer $1 + nx$ par na pour $x \geqslant a$.
   (b) En déduire que, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, la série $\sum f_n^{(j)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
   (c) Montrer que S est de classe C^k sur $[a, +\infty[$, en citant le théorème utilisé et en vérifiant chacune de ses hypothèses. Exprimer $S^{(k)}(x)$ comme la somme d'une série.
3. Conclure que S est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer le signe de $S^{(k)}(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Que retrouve-t-on pour $k = 1$? Quelle propriété de la courbe de S obtient-on pour $k = 2$?

À retenir

Il n'y a pas de théorème pour la classe C^∞ au programme. On montre que S est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis on conclut.

Le théorème de classe C^k sur un intervalle I demande :
— chaque f_n de classe C^k sur I ;
— la convergence *simple* de $\sum f_n^{(j)}$ sur I pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$;
— la convergence *uniforme* de $\sum f_n^{(k)}$ sur I (ou sur tout segment de I).
Il faut citer ces trois hypothèses, sans oublier les dérivées intermédiaires.

Exercice 3 – ⋆⋆ dans un second temps : une série alternée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Soit $x > 0$. Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge. Converge-t-elle absolument ?
   On note $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que, pour tout $x \geqslant a$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}.$$
   En déduire que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
3. Calculer $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$. La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, +\infty[$?
4. Montrer que T est continue sur $]0, +\infty[$.
5. Déterminer la limite de T en $+\infty$. On précisera l'intervalle sur lequel on applique le théorème de la double limite.
6. On étudie la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ tout entier.
   (a) Calculer $\sup_{x>0} |u_n(x)|$.
   (b) Vérifier que $u_n = R_{n-1} - R_n$ pour $n \geqslant 2$. En déduire que, si la série $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $]0, +\infty[$, alors $\sup_{x>0} |u_n(x)|$ tendrait vers 0. Conclure.

À retenir

Pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on regarde presque toujours la convergence normale, comme dans l'exercice 1.

Rare exception : une série alternée qui ne converge pas absolument. Elle ne peut pas converger normalement. On utilise alors le théorème spécial des séries alternées (TSSA) :
— à x fixé, le TSSA donne $|R_N(x)| \leqslant |u_{N+1}(x)|$;
— on majore $|u_{N+1}(x)|$ par un réel indépendant de x qui tend vers 0 ;
— on conclut que $\|S_N - S\|_{\infty,J} \to 0$, où S_N est la somme partielle : c'est la convergence uniforme.