Séries de fonctions : étude d'une fonction somme – Corrigé

Exercice 1 – étude d'une fonction somme.

1. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + nx \geqslant nx > 0$, donc
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n \cdot nx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}.$$
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum f_n(x)$ converge. La série $\sum f_n$ converge donc simplement sur $]0, +\infty[$.
En $x = 0$, $f_n(0) = \frac{1}{n}$, et la série harmonique diverge : S n'est pas définie en 0.

2. *Convergence normale sur* $[a, +\infty[$. Soient $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$. On a $1 + nx \geqslant nx \geqslant na > 0$, donc
$$|f_n(x)| = \frac{1}{n(1+nx)} \leqslant \frac{1}{n \cdot na} = \frac{1}{a\, n^2}.$$
Ce majorant ne dépend pas de x : la fonction f_n est bornée sur $[a, +\infty[$, sa borne supérieure existe et
$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{a\, n^2}.$$
La série $\sum \frac{1}{a\, n^2}$ converge : c'est $\frac{1}{a}$ fois une série de Riemann convergente. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Continuité. Chaque f_n est continue sur $[a, +\infty[$, et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème de continuité, S est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci vaut pour tout $a > 0$: par caractère local de la continuité, S est continue sur $]0, +\infty[$.

Convergence normale sur $]0, +\infty[$ *?* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$, $1 + nx > 1$, donc $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$. De plus, $f_n(x) \to \frac{1}{n}$ quand $x \to 0^+$. Donc $\|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge : $\sum \|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[}$ diverge, et $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

3. *Dérivées.* Chaque f_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, comme inverse d'une fonction de classe C^1 qui ne s'annule pas, et pour $x > 0$,
$$f_n'(x) = -\frac{n^2}{(n + n^2x)^2} = -\frac{1}{(1+nx)^2}.$$
Convergence normale de $\sum f_n'$ *sur* $[a, +\infty[$. Soient $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$. On a $1 + nx \geqslant na > 0$, donc
$$|f_n'(x)| = \frac{1}{(1+nx)^2} \leqslant \frac{1}{(na)^2} = \frac{1}{a^2 n^2}.$$
Ce majorant ne dépend pas de x : la borne supérieure existe et $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{a^2n^2}$. La série $\sum \frac{1}{a^2n^2}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. Donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.
Classe C^1. On applique le théorème de classe C^1 sur $[a, +\infty[$:
— chaque f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$;
— $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$ (question 1) ;
— $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Donc S est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et $S'=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$. Ceci vaut pour tout $a>0$: par caractère local de la classe C^1, S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x>0,\quad S'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+nx)^2}.$$

Variations. Pour $x>0$, $S'(x)$ est l'opposé de la somme d'une série à termes strictement positifs : $S'(x)<0$. La fonction S est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

4. On applique le théorème de la double limite sur $[1,+\infty[$, dont $+\infty$ est une extrémité :
   — $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$ (question 2 avec $a=1$) ;
   — pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$.
   Donc $S(x)\to\sum_{n=1}^{+\infty}0=0$ quand $x\to+\infty$.
5. *Mise en forme.* Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, on pose $g_n(x)=xf_n(x)$. En divisant le numérateur et le dénominateur par x,
$$g_n(x)=\frac{x}{n+n^2x}=\frac{1}{n^2+n/x}.$$
   Comme $\sum f_n(x)$ converge, $\sum g_n(x)$ converge et $xS(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)$.
   Convergence normale sur $]0,+\infty[$. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$. On a $n^2+n/x\geqslant n^2>0$, donc
$$|g_n(x)|=\frac{1}{n^2+n/x}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$
   Ce majorant ne dépend pas de x : la borne supérieure existe et $\|g_n\|_{\infty,]0,+\infty[}\leqslant\frac{1}{n^2}$. La série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum\|g_n\|_{\infty,]0,+\infty[}$ converge. Donc $\sum g_n$ converge normalement sur $]0,+\infty[$, et donc uniformément sur $]0,+\infty[$.
   Double limite. On applique le théorème de la double limite sur $]0,+\infty[$, dont $+\infty$ est une extrémité :
   — $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$;
   — pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n/x\to 0$, donc $g_n(x)\to\frac{1}{n^2}$ quand $x\to+\infty$.
   Donc
$$xS(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$
   Équivalent. Comme $\frac{\pi^2}{6}\neq 0$, $\dfrac{S(x)}{\pi^2/(6x)}=\dfrac{6}{\pi^2}\,xS(x)\to 1$ quand $x\to+\infty$:
$$S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi^2}{6x}.$$
6. *Pourquoi pas la double limite ?* Quand $x\to 0^+$, $f_n(x)\to\frac{1}{n}$. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur un intervalle $]0,b]$, le théorème de la double limite affirmerait que $\sum\frac{1}{n}$ converge, ce qui est faux. Il n'y a donc de convergence uniforme sur aucun intervalle $]0,b]$, et le théorème ne s'applique pas.
   On fixe $x>0$ et l'on pose, pour $t\geqslant 1$, $\varphi(t)=\dfrac{1}{t(1+tx)}$, de sorte que $\varphi(k)=f_k(x)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
   Décroissance. Les fonctions $t\mapsto\frac{1}{t}$ et $t\mapsto\frac{1}{1+tx}$ sont positives et décroissantes sur $[1,+\infty[$: leur produit φ est positif et décroissant sur $[1,+\infty[$. Il est aussi continu.
   Encadrement. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour $t\in[k,k+1]$, par décroissance de φ,
$$\varphi(k+1)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(k).$$

Intégration. On intègre cet encadrement sur $[k, k+1]$, segment de longueur 1 :

$$\varphi(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(k).$$

Resommage. Soit $N \geqslant 2$. On note $S_N(x) = \sum_{k=1}^N f_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi(k)$. En sommant l'inégalité de droite pour k de 1 à N, par la relation de Chasles,

$$\int_1^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_N(x).$$

En sommant l'inégalité de gauche pour k de 1 à $N-1$,

$$\sum_{k=2}^{N} \varphi(k) \leqslant \int_1^N \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{donc} \qquad S_N(x) \leqslant \varphi(1) + \int_1^N \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calcul de l'intégrale. Pour $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t} - \dfrac{x}{1+tx} = \dfrac{1+tx-tx}{t(1+tx)} = \varphi(t)$. Donc, pour $A \geqslant 1$,

$$\int_1^A \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t - \ln(1+tx)\Big]_1^A = \ln\frac{A}{1+Ax} + \ln(1+x).$$

On a donc, pour tout $N \geqslant 2$, avec $\varphi(1) = \frac{1}{1+x}$,

$$\ln\frac{N+1}{1+(N+1)x} + \ln(1+x) \leqslant S_N(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \ln\frac{N}{1+Nx} + \ln(1+x).$$

Passage à la limite. Quand $N \to +\infty$, $\dfrac{N}{1+Nx} = \dfrac{1}{1/N+x} \to \dfrac{1}{x}$, de même pour $\dfrac{N+1}{1+(N+1)x}$, et $S_N(x) \to S(x)$. Les inégalités larges passent à la limite :

$$-\ln x + \ln(1+x) \leqslant S(x) \leqslant -\ln x + \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}.$$

Conjecture. Quand $x \to 0^+$, $-\ln x \to +\infty$, tandis que $\ln(1+x) \to 0$ et $\frac{1}{1+x} \to 1$. Le terme $-\ln x$ l'emporte dans les deux membres : on conjecture que $S(x) \sim -\ln x$.
Division. Pour $x \in]0,1[$, $-\ln x > 0$. En divisant l'encadrement par $-\ln x$,

$$1 + \frac{\ln(1+x)}{-\ln x} \leqslant \frac{S(x)}{-\ln x} \leqslant 1 + \frac{\ln(1+x)}{-\ln x} + \frac{1}{(1+x)(-\ln x)}.$$

Théorème des gendarmes. Quand $x \to 0^+$, les numérateurs $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$ ont des limites finies et $-\ln x \to +\infty$: les deux membres extrêmes tendent vers 1. D'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{S(x)}{-\ln x} \to 1$.
Conclusion.

$$S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

En particulier, $S(x) \to +\infty$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 2 – ⋆⋆ dans un second temps : la classe C^∞.

1. La fonction f_n est une fonction rationnelle dont le dénominateur $n(1+nx)$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$: elle y est de classe C^∞. On montre la formule par récurrence sur k.
   Pour $k=0$, la formule donne $\frac{n^{-1}}{1+nx} = f_n(x)$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la formule vraie au rang k. La dérivée de $x \mapsto (1+nx)^{-(k+1)}$ est $x \mapsto -(k+1)n(1+nx)^{-(k+2)}$, donc

$$f_n^{(k+1)}(x) = (-1)^k k!\, n^{k-1} \cdot \big(-(k+1)n\big)(1+nx)^{-(k+2)} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!\, n^k}{(1+nx)^{k+2}},$$

   ce qui est la formule au rang $k+1$.

2. (a) Soient $j \in [\![0,k]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$. On a $1+nx \geqslant nx \geqslant na > 0$, donc $(1+nx)^{j+1} \geqslant (na)^{j+1}$, et d'après la question 1,

$$\left|f_n^{(j)}(x)\right| = \frac{j!\,n^{j-1}}{(1+nx)^{j+1}} \leqslant \frac{j!\,n^{j-1}}{n^{j+1}a^{j+1}} = \frac{j!}{a^{j+1}} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x : c'est un majorant de $\left\|f_n^{(j)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[}$.

(b) Soit $j \in [\![0,k]\!]$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge : par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \left\|f_n^{(j)}\right\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. La série $\sum f_n^{(j)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

(c) On applique le théorème de classe C^k sur l'intervalle $I = [a,+\infty[$.
— Chaque f_n est de classe C^k sur I, puisqu'elle est de classe C^∞ (question 1).
— Pour $j \in [\![0,k-1]\!]$, la série $\sum f_n^{(j)}$ converge normalement sur I (question (b)), donc simplement sur I.
— La série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur I (question (b)), donc uniformément sur I.

Donc S est de classe C^k sur $[a,+\infty[$ et, pour tout $x \geqslant a$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{(1+nx)^{k+1}}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question 2, S est de classe C^k sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$: par caractère local de la classe C^k, S est de classe C^k sur $]0,+\infty[$, et la formule de la question 2(c) vaut pour tout $x > 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, S est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
4. La somme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{k-1}}{(1+nx)^{k+1}}$ est strictement positive, comme somme d'une série à termes strictement positifs. Donc $S^{(k)}(x)$ est du signe de $(-1)^k$. Pour $k=1$, $S' < 0$: on retrouve que S est strictement décroissante. Pour $k=2$, $S'' > 0$: la fonction S est convexe.

Exercice 3 – ⋆⋆ dans un second temps : une série alternée.

1. Soit $x > 0$. La suite $\left(\frac{1}{1+nx}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et de limite nulle : d'après le théorème spécial des séries alternées (TSSA), $\sum u_n(x)$ converge. En revanche, $|u_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \sim \frac{1}{nx}$, terme général positif d'une série divergente (la série harmonique, multipliée par $\frac{1}{x}$) : la convergence n'est pas absolue.
2. *Majoration du reste.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$. D'après la question 1, la suite $\left(\frac{1}{1+kx}\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et de limite nulle. Le TSSA donne la majoration du reste

$$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

Comme $x \geqslant a$, on a $1+(n+1)x \geqslant 1+(n+1)a > 0$, donc

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a}.$$

Convergence uniforme. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $T_N = \sum_{n=1}^N u_n$ la somme partielle d'ordre N. Pour tout $x \geqslant a$, $T(x) - T_N(x) = R_N(x)$, donc, d'après ce qui précède,

$$|T_N(x) - T(x)| = |R_N(x)| \leqslant \frac{1}{1+(N+1)a}.$$

— Ce majorant ne dépend pas de x : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction $T_N - T$ est bornée sur $[a,+\infty[$, sa borne supérieure existe et

$$0 \leqslant \|T_N - T\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{1+(N+1)a}.$$

— Comme $a > 0$, $\frac{1}{1+(N+1)a} \to 0$ quand $N \to +\infty$. D'après le théorème des gendarmes, $\|T_N - T\|_{\infty,[a,+\infty[} \to 0$ quand $N \to +\infty$.

La série $\sum u_n$ converge donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

3. *Calcul de la norme.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant a$. On a $1 + nx \geqslant 1 + na > 0$, donc

$$|u_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \leqslant \frac{1}{1+na} = |u_n(a)|.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et il est atteint en $x = a$: la borne supérieure existe et

$$\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{1+na}.$$

Nature de la série $\sum \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$. C'est une série à termes positifs, et

$$\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{1+na} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{na}.$$

La série $\sum \frac{1}{na}$ diverge : c'est $\frac{1}{a}$ fois la série harmonique. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs (par équivalents), $\sum \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ diverge.

Conclusion. La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $[a, +\infty[$. La convergence uniforme de la question 2 est donc obtenue sans convergence normale.

4. Soit $a > 0$. Chaque u_n est continue sur $[a, +\infty[$, et $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ (question 2). D'après le théorème de continuité, T est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci vaut pour tout $a > 0$: par caractère local de la continuité, T est continue sur $]0, +\infty[$.

5. D'après la question 2 avec $a = 1$, $\sum u_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$, dont $+\infty$ est une extrémité. Pour tout n, $u_n(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. D'après le théorème de la double limite, $T(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

6. (a) Pour $x > 0$, $|u_n(x)| = \frac{1}{1+nx} < 1$, et $|u_n(x)| \to 1$ quand $x \to 0^+$: $\sup_{x>0} |u_n(x)| = 1$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$ et $x > 0$, $R_{n-1}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) = u_n(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = u_n(x) + R_n(x)$, d'où $u_n = R_{n-1} - R_n$.

   Si $\sum u_n$ convergeait uniformément sur $]0, +\infty[$, on aurait $\sup_{x>0} |R_n(x)| \to 0$, et, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leqslant |R_{n-1}(x)| + |R_n(x)| \leqslant \sup_{y>0} |R_{n-1}(y)| + \sup_{y>0} |R_n(y)|,$$

   donc $\sup_{x>0} |u_n(x)| \to 0$. Ceci contredit la question (a) : la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

   La fonction T est pourtant continue sur $]0, +\infty[$: par caractère local de la continuité, la convergence uniforme sur chaque $[a, +\infty[$ suffit.