DS 2 – Normes, suites et séries de fonctions

07/11/2026

Durée : 4h

Calculatrices interdites

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Rendre les exercices sur copies séparées et mettre son nom sur **chaque** copie.
5. Rendre les copies les unes dans les autres **dans l'ordre des exercices** et **numéroter** les pages.

Exercice 1 – E3A 2021 (Exercice 4)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E.
Soit $(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $(P \mid Q) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Soit P un polynôme de E, calculer $(P \mid P_0)$.
3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.
   (a) Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   (b) Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(\ |\ )$.
   (c) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.
   (d) Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.
   (e) Déterminer $\sum_{j=0}^{n} L_j$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.
   (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Déterminer $H^\perp$ et en déduire la dimension de H.
5. Soit Q un polynôme de E.
   (a) Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$.
   (b) Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.

Exercice 2 – Centrale 2025 (Maths 2) (Partie C)

Notations

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

où, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, $c_k \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n. C'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

Pour toute fonction bornée f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Partie C

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

I

Dans cette sous-partie on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note T le polynôme $X^n + 1$.

17. Montrer que T admet n racines simples dans $\mathbb{C}$.

On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de T.

18. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\prod_{j\neq k}(z_k - z_j) = T'(z_k)$.

Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. On considère la fonction rationnelle F donnée par $F = \dfrac{X^\ell}{X^n + 1}$.
On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F, il y a existence et unicité de $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{C}$ et de E dans $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

19. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu_k = -\dfrac{z_k^{\ell+1}}{n}$ et que E est soit le polynôme nul, soit le polynôme constant égal à 1.

20. Calculer $F'(1)$ et en déduire que $\ell = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}$.

21. En déduire que :

    (a) pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\quad XP'(X) = \dfrac{n}{2}P(X) + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k\, P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$;

    (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}$.

II

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$.

22. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

23. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1 et si $z \neq 1$, alors $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ est un réel négatif.
24. À l'aide de **21**, en déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leqslant n\,\|P\|$.
25. En déduire que pour tout $q \in \mathcal{T}_n$, $\|q'\|_\infty \leqslant 3n\,\|q\|_\infty$.

Exercice 3 – E3A 2022 (Exercice 2)

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**
   (a) Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
   (b) **Pour les 5/2 :** Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

   Pour les 3/2 : Soit $\varepsilon \in]0, \pi/2[$.
      i. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
      ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$.
      iii. En déduire que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.
   (c) Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. **Calcul de la somme de cette série**
   (a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.
   (b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.
   (c) **Intégration terme à terme ?**
      i. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.
      ii. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
      iii. **Pour les 5/2 :** Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

      Pour les 3/2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$. Soit $a \in]0, \pi/2[$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge normalement sur $\left[a, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^{\pi/2} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}$.
   (d) **Pour les 5/2 :** On pose, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

   En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Pour les 3/2 : Soit $a \in]0, \pi/2[$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \int_0^a \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4 – D'après E3A 2018 (Maths 2)

Solutions de l'équation $\ln x = ax$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'équation

$$\ln(x) = ax \qquad (E_a)$$

d'inconnue $x > 0$. On admet les résultats suivants :

- si $a \leqslant 0$, l'équation (E_a) admet une unique solution ;
- si $a \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions, l'une dans $]1, \mathrm{e}[$, l'autre dans $]\mathrm{e}, +\infty[$;
- si $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, l'unique solution de l'équation (E_a) est e.

Lorsque l'équation (E_a) admet au moins une solution, on note α_a **la plus petite** d'entre elles.

Partie I — Une suite de polynômes

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(X) = \frac{1}{n!}X(X+n)^{n-1}.$$

1. (a) Expliciter les polynômes P_1 et P_2.
   (b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).$$
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$$
(on pourra procéder par récurrence sur n).

Partie II — Une série de fonctions

4. (a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad (x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x n^{n-1}$.
   (b) Rappeler la formule de Stirling puis montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} P_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Dans toute la suite de cette partie, on fixe un réel a de $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ et on note F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n.$$

5. Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{R}$.
6. (a) Rappeler le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries.
   (b) En utilisant la question 3, montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad F_a(x+y) = F_a(x)F_a(y).$$

7. Montrer que F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a'(x) = aF_a(x+1).$$

8. (a) Déduire des questions 6 et 7 que F_a est solution de l'équation différentielle $y' = aF_a(1)\,y$, puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \exp\left(aF_a(1)\,x\right).$$

   (b) En déduire que $F_a(1)$ est solution de (E_a).

Partie III — Expression de α_a

On note G la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ par $G(a) = F_a(1)$.

9. (a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}[$ et monotone sur $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
   (b) Expliciter $G\left(\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]\right)$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ par la fonction G.
   (c) Conclure que

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

10. Soit C un réel tel que $1 \leqslant C \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Montrer que l'équation $y^y = C$, d'inconnue $y > 0$, admet une unique solution y_0 et que

$$y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} \left(\ln(C)\right)^n.$$

DS 2 – NORMES, SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS – CORRECTION

Exercice 1 – E3A 2021 (Exercice 4)

1. L'application $(P,Q) \mapsto (P \mid Q)$ est bien définie de E^2 dans $\mathbb{R}$. Vérifions les quatre propriétés d'un produit scalaire.
   - *Symétrie* : pour tout $(P,Q) \in E^2$, $(P \mid Q) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j) = \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)P(a_j) = (Q \mid P)$.
   - *Linéarité à gauche* : soient $(P,R,Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout j, $(\lambda P + R)(a_j) = \lambda P(a_j) + R(a_j)$, donc
   $$\begin{aligned}(\lambda P + R \mid Q) &= \sum_{j=0}^{n} (\lambda P(a_j) + R(a_j))\, Q(a_j) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j) + \sum_{j=0}^{n} R(a_j)Q(a_j) = \lambda(P \mid Q) + (R \mid Q).\end{aligned}$$
   Par symétrie, l'application est aussi linéaire à droite : elle est bilinéaire.
   - *Positivité* : pour tout $P \in E$, $(P \mid P) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 \geqslant 0$ comme somme de carrés de réels.
   - *Caractère défini* : soit $P \in E$ tel que $(P \mid P) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 = 0$. Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul, donc $P(a_j) = 0$ pour tout $j \in [\![0,n]\!]$. Le polynôme P admet ainsi les $n+1$ racines distinctes $a_0, \dots, a_n$, alors qu'il est de degré au plus n : c'est donc le polynôme nul.

   Donc $\boxed{(\ |\ ) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$
2. Comme $P_0 = 1$, on a $P_0(a_j) = 1$ pour tout j, donc
   $$\boxed{(P \mid P_0) = \sum_{j=0}^{n} P(a_j).}$$
3. Pour tout j, les réels $a_j - a_k$ $(k \neq j)$ sont non nuls puisque les a_k sont distincts deux à deux : L_j est bien défini, et c'est un produit de n polynômes de degré 1, donc $L_j \in E$.
   (a) Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$.
   - Si $i = j$, alors $L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} 1 = 1$.
   - Si $i \neq j$, alors l'indice $k = i$ figure dans le produit, et le facteur correspondant vaut $\frac{a_i - a_i}{a_j - a_i} = 0$: le produit est nul, $L_j(a_i) = 0$.

   Donc $\boxed{L_j(a_i) = 1 \text{ si } i = j \text{ et } L_j(a_i) = 0 \text{ sinon.}}$
   (b) Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Par définition du produit scalaire,
   $$(L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k).$$
   Montrons que chaque terme de cette somme est nul. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

— Si $k \neq i$, la question 3(a), appliquée au couple (k, i), donne $L_i(a_k) = 0$: le terme d'indice k est nul.

— Si $k = i$, alors $k \neq j$ puisque $i \neq j$, et la question 3(a), appliquée au couple (k, j), donne $L_j(a_k) = 0$: le terme d'indice k est nul.

Donc $(L_i \mid L_j) = 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{B} = (L_j)_{j \in [\![0,n]\!]} \text{ est une famille orthogonale.}}$

(c) Pour tout j, $L_j(a_j) = 1$ donc $L_j \neq 0$. La famille $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc elle est libre. Elle compte $n+1$ vecteurs dans E, qui est de dimension $n+1$: c'est une base de E.

De plus, soit $j \in [\![0, n]\!]$. Par définition du produit scalaire,

$$(L_j \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_j(a_k)^2.$$

D'après la question 3(a), appliquée aux couples (k, j), on a $L_j(a_k) = 0$ pour tout $k \neq j$ et $L_j(a_j) = 1$. Dans la somme, tous les termes d'indice $k \neq j$ sont donc nuls, et il reste

$$(L_j \mid L_j) = L_j(a_j)^2 = 1,$$

donc $\|L_j\| = 1$. Donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base orthonormale de } E.}$

(d) Soit $P \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E, les composantes de P dans $\mathscr{B}$ sont les $(P \mid L_j)$:

$$P = \sum_{j=0}^{n} (P \mid L_j)\, L_j.$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Par définition du produit scalaire,

$$(P \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_j(a_k).$$

D'après la question 3(a), appliquée aux couples (k, j), on a $L_j(a_k) = 0$ pour tout $k \neq j$ et $L_j(a_j) = 1$. Dans la somme, tous les termes d'indice $k \neq j$ sont donc nuls, et il reste

$$(P \mid L_j) = P(a_j) L_j(a_j) = P(a_j).$$

Donc les composantes de P dans $\mathscr{B}$ sont $(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$:

$$\boxed{P = \sum_{j=0}^{n} P(a_j) L_j.}$$

(e) Appliquons la question 3(d) au polynôme $P_0 = 1$, qui appartient à E et vérifie $P_0(a_j) = 1$ pour tout j :

$$1 = P_0 = \sum_{j=0}^{n} P_0(a_j) L_j = \sum_{j=0}^{n} L_j.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} L_j = 1.}$$

4. (a) Montrons que H est un sous-espace vectoriel de E :

— par définition, $H \subset E$;

— le polynôme nul s'annule en chaque a_j, donc $\sum_{j=0}^{n} 0 = 0$ et $0 \in H$;

— soient $(P,Q) \in H^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout j, $(\lambda P + \mu Q)(a_j) = \lambda P(a_j) + \mu Q(a_j)$, donc

$$\sum_{j=0}^{n} (\lambda P + \mu Q)(a_j) = \lambda \sum_{j=0}^{n} P(a_j) + \mu \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

et $\lambda P + \mu Q \in H$.

Donc $\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

(b) D'après la question 2, pour tout $P \in E$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = (P \mid P_0)$, donc H est l'ensemble des polynômes de E orthogonaux à P_0, c'est-à-dire $H = \{P_0\}^\perp = (\mathrm{Vect}(P_0))^\perp$.
Comme E est de dimension finie, pour tout sous-espace vectoriel F de E on a $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$. Avec $F = \mathrm{Vect}(P_0)$, qui est de dimension 1 car $P_0 \neq 0$, on obtient

$$\boxed{H^\perp = \left(\mathrm{Vect}(P_0)^\perp\right)^\perp = \mathrm{Vect}(P_0) = \mathbb{R}_0[X],}$$

l'ensemble des polynômes constants, et

$$\dim H = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(P_0) = (n+1) - 1,$$

soit $\boxed{\dim H = n.}$

5. (a) D'après la question 4(b), $H^\perp = \mathrm{Vect}(P_0)$. On a $(P_0 \mid P_0) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} 1^2 = n+1$, donc $\|P_0\| = \sqrt{n+1}$. Posons

$$U = \frac{1}{\sqrt{n+1}} P_0.$$

Alors $\|U\| = 1$ et $\mathrm{Vect}(U) = \mathrm{Vect}(P_0) = H^\perp$: la famille (U) est une base orthonormale de $H^\perp$. Le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$ s'exprime dans cette base orthonormale :

$$p_{H^\perp}(Q) = (Q \mid U)\, U = \frac{1}{\sqrt{n+1}} (Q \mid P_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} P_0 = \frac{(Q \mid P_0)}{n+1} P_0.$$

Or, d'après la question 2, $\displaystyle(Q \mid P_0) = \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)$. Donc

$$\boxed{p_{H^\perp}(Q) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} Q(a_j),}$$

le polynôme constant égal à la moyenne des valeurs $Q(a_0), \ldots, Q(a_n)$.

(b) Comme $E = H \oplus H^\perp$, on a $Q = p_H(Q) + p_{H^\perp}(Q)$, où $p_H(Q)$ désigne le projeté orthogonal de Q sur H. La distance de Q à H est, par le théorème de la projection orthogonale,

$$d(Q,H) = \|Q - p_H(Q)\| = \|p_{H^\perp}(Q)\|.$$

D'après la question 5(a), en notant $\displaystyle S = \sum_{j=0}^{n} Q(a_j)$, on a $p_{H^\perp}(Q) = \frac{S}{n+1} P_0$, donc

$$\|p_{H^\perp}(Q)\| = \frac{|S|}{n+1} \|P_0\| = \frac{|S|}{n+1} \sqrt{n+1} = \frac{|S|}{\sqrt{n+1}}.$$

Donc

$$\boxed{d(Q,H) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{j=0}^{n} Q(a_j) \right|.}$$

Exercice 2 – Centrale 2025 (Maths 2) (Partie C)

Partie C

I

17. Le polynôme $T = X^n + 1$ est de degré $n \geqslant 1$, donc, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il est scindé sur $\mathbb{C}$: il admet n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité. Soit z une racine de T. Comme $T(0) = 1 \neq 0$, $z \neq 0$, donc $T'(z) = nz^{n-1} \neq 0$: z n'est pas racine de T', donc z est une racine simple de T. Toutes les racines de T étant simples, $\boxed{T \text{ admet } n \text{ racines simples dans } \mathbb{C}.}$

18. Le polynôme T est unitaire, scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples $z_1, \dots, z_n$, donc $T = \prod_{j=1}^{n}(X - z_j)$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Posons $Q_k = \prod_{j \neq k}(X - z_j)$, de sorte que $T = (X - z_k)\, Q_k$. En dérivant ce produit,

$$T' = Q_k + (X - z_k)\, Q_k', \quad \text{donc} \quad T'(z_k) = Q_k(z_k) + 0 = \prod_{j \neq k}(z_k - z_j).$$

Ainsi $\boxed{\prod_{j \neq k}(z_k - z_j) = T'(z_k).}$

19. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Avec les notations de la question 18, $X^n + 1 = (X - z_k)\, Q_k$, donc, en multipliant la décomposition de F par $X - z_k$,

$$\frac{X^\ell}{Q_k} = (X - z_k)\, F = \mu_k + (X - z_k)\left(\sum_{j \neq k} \frac{\mu_j}{X - z_j} + E\right).$$

Les racines de T étant simples, $Q_k(z_k) \neq 0$ et, pour $j \neq k$, $z_k - z_j \neq 0$: on peut évaluer cette égalité en z_k, ce qui donne, avec la question 18,

$$\mu_k = \frac{z_k^\ell}{Q_k(z_k)} = \frac{z_k^\ell}{T'(z_k)} = \frac{z_k^\ell}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^{\ell+1}}{nz_k^n} = -\frac{z_k^{\ell+1}}{n},$$

car $z_k \neq 0$ et $z_k^n = -1$. Ainsi $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mu_k = -\frac{z_k^{\ell+1}}{n}.}$

En multipliant la décomposition de F par $T = (X - z_k)\, Q_k$ pour chaque k :

$$X^\ell = E\, T + R, \quad \text{où} \quad R = \sum_{k=1}^{n} \mu_k Q_k.$$

Chaque Q_k est de degré $n - 1$, donc $\deg R \leqslant n - 1 < \deg T$: E est le quotient de la division euclidienne de X^ℓ par T. Or, si $\ell < n$, $X^\ell = 0 \cdot T + X^\ell$ avec $\deg X^\ell < n$, et si $\ell = n$, $X^n = 1 \cdot T + (-1)$. Par unicité du quotient, $\boxed{E = 0 \text{ si } \ell < n \text{ et } E = 1 \text{ si } \ell = n.}$

20. Pour $x > 0$, posons $F(x) = \dfrac{x^\ell}{x^n + 1}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, et, la dérivée de $x \mapsto x^\ell$ étant $x \mapsto \ell x^{\ell-1}$ (fonction nulle si $\ell = 0$),

$$F'(x) = \frac{\ell x^{\ell-1}(x^n + 1) - nx^{n-1}x^\ell}{(x^n + 1)^2}, \quad \text{donc} \quad \boxed{F'(1) = \frac{2\ell - n}{4}.}$$

D'autre part, d'après la question 19, E est constant et, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{x - z_k} + E, \quad \text{donc} \quad F'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{(x - z_k)^2},$$

chaque fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-z_k}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{(x-z_k)^2}$. En $x=1$, avec $(1-z_k)^2=(z_k-1)^2$ et la valeur de μ_k,

$$\frac{2\ell-n}{4} = F'(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}.$$

En multipliant par 2 et en isolant ℓ : $\boxed{\ell = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}.}$

21. (a) L'entier $\ell \in [\![0,n]\!]$ étant quelconque dans les questions 19 et 20, l'égalité de la question 20 est valable pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$. Soit $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell \in \mathbb{C}_n[X]$. Pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, en multipliant l'égalité de la question 20 par $a_\ell X^\ell$,

$$\ell a_\ell X^\ell = \frac{n}{2}\, a_\ell X^\ell + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2}\, a_\ell z_k^\ell X^\ell = \frac{n}{2}\, a_\ell X^\ell + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2}\, a_\ell (z_k X)^\ell.$$

En sommant ces égalités pour ℓ allant de 0 à n, et comme $XP'(X) = \sum_{\ell=0}^{n} \ell a_\ell X^\ell$ et $P(z_kX) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell (z_kX)^\ell$,

$$\boxed{XP'(X) = \frac{n}{2}\, P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k\, P(z_kX)}{(z_k-1)^2}.}$$

(b) L'égalité de la question 20 pour $\ell = 0$ s'écrit $0 = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k}{(z_k-1)^2}$, d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{4}.}$$

II

22. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module 1, $|P(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k|\ |z|^k = \sum_{k=0}^{d} |a_k|$. L'ensemble $\{|P(z)|\,,\ |z|=1\}$ est donc une partie de $\mathbb{R}_+$, non vide (elle contient $|P(1)|$) et majorée : $\|P\|$ est un réel positif bien défini. Vérifions les trois propriétés d'une norme.

Séparation. Si $\|P\| = 0$, alors $P(z) = 0$ pour tout z de module 1 : P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

Homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout z de module 1, $|(\lambda P)(z)| = |\lambda|\ |P(z)| \leqslant |\lambda|\ \|P\|$, donc $\|\lambda P\| \leqslant |\lambda|\ \|P\|$. Si $\lambda = 0$, les deux membres sont nuls. Si $\lambda \neq 0$, l'inégalité précédente appliquée au scalaire λ^{-1} et au polynôme λP donne $\|P\| \leqslant |\lambda|^{-1}\ \|\lambda P\|$, soit $|\lambda|\ \|P\| \leqslant \|\lambda P\|$. Ainsi $\|\lambda P\| = |\lambda|\ \|P\|$.

Inégalité triangulaire. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Pour tout z de module 1, $|(P+Q)(z)| \leqslant |P(z)| + |Q(z)| \leqslant \|P\| + \|Q\|$, donc, par définition de la borne supérieure, $\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$.

Ainsi $\boxed{\|.\| \text{ est une norme sur } \mathbb{C}[X].}$

23. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Comme $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$, donc

$$\frac{(z-1)^2}{z} = z - 2 + \frac{1}{z} = z + \overline{z} - 2 = 2\,(\mathrm{Re}(z) - 1)\,.$$

Or $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z| = 1$, avec égalité si et seulement si $z = 1$ (si $\mathrm{Re}(z) = 1$, alors $\mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2 - \mathrm{Re}(z)^2 = 0$ et $z = 1$). Comme $z \neq 1$, $\mathrm{Re}(z) - 1 < 0$, et

$$\boxed{\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{2\,(\mathrm{Re}(z)-1)} \text{ est un réel strictement négatif.}}$$

24. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $|z_k| = 1$ (question 19) et $z_k \neq 1$ car $T(1) = 2 \neq 0$. La question 23 permet donc de poser $\rho_k = -\dfrac{z_k}{(z_k-1)^2} > 0$, et la question 21b donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \rho_k = \frac{n^2}{4}$.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1. En évaluant en z l'égalité polynomiale de la question 21a,

$$zP'(z) = \frac{n}{2}\,P(z) - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \rho_k\,P(z_k z).$$

Pour tout k, $|z_k z| = 1$, donc $|P(z_k z)| \leqslant \|P\|$; de même $|P(z)| \leqslant \|P\|$. Comme $|z| = 1$ et $\rho_k > 0$, l'inégalité triangulaire donne

$$\left|P'(z)\right| = \left|zP'(z)\right| \leqslant \frac{n}{2}\,\|P\| + \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k\right)\|P\| = \frac{n}{2}\,\|P\| + \frac{2}{n}\cdot\frac{n^2}{4}\,\|P\| = n\,\|P\|\,.$$

Ce majorant ne dépend pas de z : par définition de la borne supérieure, $\boxed{\|P'\| \leqslant n\,\|P\|.}$

25. L'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant quelconque, le résultat de la question 24 est valable pour tout entier naturel non nul, en particulier pour $2n$. Soit $q \in \mathcal{T}_n$, $q(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. Posons

$$P = \sum_{k=-n}^{n} c_k X^{k+n} = \sum_{j=0}^{2n} c_{j-n} X^j \in \mathbb{C}_{2n}[X].$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+n)t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} q(t)$, soit $q(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. La fonction q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et q et q' sont bornées car, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|q(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k|$ et $|q'(t)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} |k|\ |c_k|$.

Comme $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\right| = 1$ et que $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des complexes de module 1,

$$\|q\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right| = \sup_{|z|=1} |P(z)| = \|P\|\,.$$

Notons $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{2n} b_j X^j$. La fonction $t \mapsto P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2n} b_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$t \mapsto \sum_{j=0}^{2n} \mathrm{i}j\,b_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \sum_{j=1}^{2n} j\,b_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)t} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} P'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

Par dérivation du produit $q(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$q'(t) = -\mathrm{i}n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} P'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}),$$

donc, par inégalité triangulaire, puis avec la question 24 appliquée à $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$,

$$\left|q'(t)\right| \leqslant n\left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right| + \left|P'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right| \leqslant n\,\|P\| + \left\|P'\right\| \leqslant n\,\|P\| + 2n\,\|P\| = 3n\,\|q\|_\infty\,.$$

Ce majorant ne dépend pas de t, donc $\boxed{\|q'\|_\infty \leqslant 3n\,\|q\|_\infty.}$

Exercice 3 – E3A 2022 (Exercice 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$, de sorte que $u_n = (-1)^n W_n$. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos(t) \geqslant 0$, donc $\cos^n(t) \geqslant 0$ et, par positivité de l'intégrale $(0 < \pi/2)$, $W_n \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = W_n$.

1. **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, donc $\cos^{n+1}(t) = \cos(t)\cos^n(t) \leqslant \cos^n(t)$. Par croissance de l'intégrale sur $[0, \pi/2]$ $(0 < \pi/2)$, $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$.
   Donc $\boxed{\text{la suite } (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

   (b) **Pour les 5/2 :** Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n : t \mapsto \cos^n(t)$, sur $[0, \pi/2]$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, \pi/2]$.
   — Convergence simple : $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour $t \in]0, \pi/2]$ fixé, $0 \leqslant \cos(t) < 1$, donc $f_n(t) = \cos^n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La suite (f_n) converge donc simplement sur $[0, \pi/2]$ vers la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = 0$ pour $t \in]0, \pi/2]$, qui est continue par morceaux sur $[0, \pi/2]$.
   — Domination : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \pi/2]$, $|f_n(t)| = \cos^n(t) \leqslant 1$, et la fonction constante 1 est continue, positive et intégrable sur le segment $[0, \pi/2]$, indépendante de n.

   Par le théorème de convergence dominée,

   $$|u_n| = W_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

   la fonction f étant nulle sur $]0, \pi/2]$ (la valeur en un point ne change pas l'intégrale). Donc $\boxed{|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

   Pour les 3/2 :

   i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : t \mapsto \cos^n(t)$, continue sur le segment $[\varepsilon, \pi/2]$. La fonction cos est décroissante et positive sur $[0, \pi/2]$, donc, pour tout $t \in [\varepsilon, \pi/2]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant \cos(\varepsilon)$, et

   $$\sup_{t\in[\varepsilon,\pi/2]} |f_n(t)| \leqslant \cos^n(\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   car $0 \leqslant \cos(\varepsilon) < 1$. La suite (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[\varepsilon, \pi/2]$. Par le théorème d'interversion de la limite et de l'intégrale sur un segment, pour une suite de fonctions continues qui converge uniformément,

   $$\boxed{\int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\varepsilon^{\pi/2} 0\,\mathrm{d}t = 0.}$$

   ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^n(t) \leqslant 1$. Par positivité et croissance de l'intégrale $(0 < \varepsilon)$,

   $$\boxed{0 \leqslant \int_0^\varepsilon \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\varepsilon 1\,\mathrm{d}t = \varepsilon.}$$

   iii. Soit $\eta > 0$. Posons $\varepsilon = \min\left(\dfrac{\eta}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, qui appartient à $]0, \pi/2[$. D'après la question 1(b)i, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\eta}{2}$. Pour tout $n \geqslant N$, par la relation de Chasles et la question 1(b)ii,

   $$0 \leqslant W_n = \int_0^\varepsilon \cos^n(t)\,\mathrm{d}t + \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon + \frac{\eta}{2} \leqslant \eta.$$

Donc $\boxed{|u_n| = W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n W_n$ avec $W_n = |u_n| \geqslant 0$: la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est alternée. D'après la question 1a, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et d'après la question 1b, elle tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$

Sans ce critère : notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 1a,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = W_{2n+2} - W_{2n+1} \leqslant 0, \qquad S_{2n+3} - S_{2n+1} = W_{2n+2} - W_{2n+3} \geqslant 0,$$

et, d'après la question 1b, $S_{2n+1} - S_{2n} = -W_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Les suites (S_{2n}), décroissante, et (S_{2n+1}), croissante, sont donc adjacentes : elles convergent vers une même limite ℓ. Les suites extraites des rangs pairs et des rangs impairs de (S_n) convergeant toutes deux vers ℓ, la suite (S_n) converge vers ℓ, et $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$

2. **Calcul de la somme de cette série**

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. La formule de duplication $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, appliquée avec $a = \dfrac{t}{2}$, donne $\cos(t) = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) - 1$, d'où :

$$\boxed{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\cos(t)}{2}.}$$

(b) Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos(t) \geqslant 0$, donc $1 + \cos(t) \geqslant 1 > 0$: la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(t)}$ est définie et continue sur le segment $[0, \pi/2]$, et I est bien définie.

D'après la question 2a, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $1 + \cos(t) = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$, avec $\dfrac{t}{2} \in [0, \pi/4]$, donc $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) > 0$. Ainsi :

$$\frac{1}{1+\cos(t)} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

La fonction $t \mapsto \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ (car $\dfrac{t}{2} \in [0, \pi/4] \subset]-\pi/2, \pi/2[$), de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$. Donc :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \left[\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1.$$

Donc $\boxed{I = 1.}$

(c) **Intégration terme à terme ?**

i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit $\cos^{n+2}(t) = \cos(t) \times \cos^{n+1}(t)$ et on intègre par parties. Les fonctions $v : t \mapsto \sin(t)$ et $w : t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, avec

$v'(t) = \cos(t)$ et $w'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)$. Donc :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{w(t)} \mathrm{d}t \\ &= \Big[\underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{w(t)}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \underbrace{(-(n+1)\sin(t)\cos^n(t))}_{w'(t)} \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2} \big(1-\cos^2(t)\big)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}), \end{aligned}$$

le crochet étant nul car $\sin(0) = 0$ et $\cos(\pi/2) = 0$ (avec $n+1 \geqslant 1$). D'où $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n|\,.}$$

ii. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}$ ». Comme la relation de la question précédente relie $|u_{n+2}|$ à $|u_n|$, montrons par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$.

Initialisation : $|u_0| = W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \geqslant 1$, et $|u_1| = W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} = 1 \geqslant \dfrac{1}{2}$. Donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$. Montrons $\mathcal{P}_{n+2}$. D'après la question 2(c)i et $\mathcal{P}_n$,

$$|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n| \geqslant \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} \geqslant \frac{1}{n+3},$$

ce qui est $\mathcal{P}_{n+2}$.

Conclusion : par récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n| \geqslant \dfrac{1}{n+1}.}$

iii. **Pour les 5/2 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} v_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $v_n : t \mapsto (-1)^n \cos^n(t)$, et la somme cherchée est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} v_n(t)\,\mathrm{d}t$. Un théorème d'intégration terme à terme permettrait de l'écrire $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$. Examinons les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.

Le théorème demande que la série $\sum v_n$ converge simplement sur l'intervalle d'intégration, que ses termes et sa somme soient continus par morceaux, et que la série numérique $\sum \displaystyle\int |v_n|$ converge. Sur $[0, \pi/2]$, la convergence simple est déjà en défaut en $t = 0$. On peut remplacer l'intervalle par $]0, \pi/2]$, ce qui ne change aucune des intégrales : pour $t \in]0, \pi/2]$, $\sum v_n(t)$ est une série géométrique de raison $-\cos(t) \in]-1, 0]$, donc elle converge. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} |v_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = |u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$$

d'après la question 2(c)ii. La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ diverge, donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{\pi/2} |v_n(t)|\,\mathrm{d}t$ diverge : l'hypothèse de ce théorème n'est pas vérifiée.

Donc le théorème d'intégration terme à terme ne permet pas de calculer cette somme.
Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment pour une série de fonctions continues convergeant uniformément ne s'applique pas non plus : la série $\sum v_n$ ne converge même pas simplement en $t = 0$, puisque $v_n(0) = (-1)^n$ ne tend pas vers 0.

Pour les 3/2 : La fonction cos est décroissante sur $[0, \pi/2]$, donc, pour tout $t \in [a, \pi/2]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant \cos(a)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n(t)| = \cos^n(t) \leqslant \cos^n(a)$. Ainsi $\sup_{t\in[a,\pi/2]} |v_n(t)| \leqslant \cos^n(a)$, et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \cos^n(a)$ converge car $0 \leqslant \cos(a) < 1$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge normalement sur $[a, \pi/2]$.

Elle converge donc uniformément sur le segment $[a, \pi/2]$. Pour tout $t \in [a, \pi/2]$, $\sum v_n(t)$ est une série géométrique de raison $-\cos(t)$, avec $|-\cos(t)| < 1$, de somme $\dfrac{1}{1+\cos(t)}$.
Les fonctions v_n étant continues sur $[a, \pi/2]$, le théorème d'intégration terme à terme sur un segment donne

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^{\pi/2} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}.}$$

(d) **Pour les 5/2 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $V_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-\cos(t))^k$ est une somme géométrique de raison $-\cos(t)$. Pour $t \in]0, \pi/2]$, $-\cos(t) \neq 1$, donc :

$$V_n(t) = \frac{1 - (-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}.$$

Par linéarité de l'intégrale (somme finie), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} V_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi/2} (-1)^k \cos^k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

En $t = 0$, $V_n(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair : la suite $(V_n(0))$ n'a pas de limite. On applique donc le théorème de convergence dominée sur $]0, \pi/2]$, intervalle sur lequel les intégrales de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$ sont les mêmes que sur $[0, \pi/2]$ (la valeur en un point ne change pas l'intégrale). Appliquons-le à la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0, \pi/2]$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est continue sur $]0, \pi/2]$ (somme finie de fonctions continues).
— Convergence simple : pour $t \in]0, \pi/2]$ fixé, $|-\cos(t)| = \cos(t)$ et $0 \leqslant \cos(t) < 1$, donc $(-\cos(t))^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $V_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+\cos(t)}$. La suite (V_n) converge donc simplement sur $]0, \pi/2]$ vers $V : t \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(t)}$, continue sur $]0, \pi/2]$ (question 2b).
— Domination : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0, \pi/2]$, comme $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$,

$$|V_n(t)| = \frac{\left|1 - (-\cos(t))^{n+1}\right|}{1+\cos(t)} \leqslant \frac{1+\cos^{n+1}(t)}{1+\cos(t)} \leqslant \frac{2}{1+\cos(t)} \leqslant 2,$$

et la fonction constante 2 est continue, positive et intégrable sur l'intervalle borné $]0, \pi/2]$, indépendante de n.

Par le théorème de convergence dominée, V est intégrable sur $]0, \pi/2]$ et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\pi/2} V_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = I = 1$$

d'après la question 2b. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, convergente d'après la question 1c, tend donc vers 1 :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1.}$$

Pour les 3/2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $w_n = \displaystyle\int_0^a \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $t \in [0,a]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)$; par positivité et croissance de l'intégrale $(0 < a)$, $0 \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$. De plus, par positivité de la fonction intégrée sur $[a, \pi/2]$, $0 \leqslant w_n \leqslant W_n$, et $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après la question 1b, donc $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n w_n$ converge, et sa somme $R(a)$ est comprise entre ses sommes partielles de rangs 0 et 1 :

$$0 \leqslant w_0 - w_1 \leqslant R(a) \leqslant w_0 = a.$$

Donc $\boxed{\text{la série converge et } 0 \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^a \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a.}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la relation de Chasles, $u_n = (-1)^n w_n + \displaystyle\int_a^{\pi/2} v_n(t)\,\mathrm{d}t$. Les deux séries $\sum(-1)^n w_n$ et $\sum \displaystyle\int_a^{\pi/2} v_n(t)\,\mathrm{d}t$ convergent (ci-dessus et question 2(c)iii), donc, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = R(a) + \int_a^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)},$$

d'où, avec l'encadrement de $R(a)$,

$$\int_a^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant a + \int_a^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(t)}$ est continue sur $[0,\pi/2]$, donc $a \mapsto \displaystyle\int_a^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)}$ est continue sur $[0,\pi/2]$ et tend vers $I = 1$ quand a tend vers 0 (question 2b). En faisant tendre a vers 0 dans l'encadrement, dont le terme central ne dépend pas de a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1.}$$

Exercice 4 – D'après E3A 2018 (Maths 2)

Solutions de l'équation $\ln x = ax$

Partie I — Une suite de polynômes

1. (a) Pour $n = 1$, $(X+1)^0 = 1$, donc $P_1 = \dfrac{1}{1!}X = X$. Pour $n = 2$, $P_2 = \dfrac{1}{2!}X(X+2)^1$. Donc :

$$\boxed{P_1 = X \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{1}{2}X(X+2) = \frac{1}{2}X^2 + X.}$$

(b) On a $P_0(0) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(0) = \dfrac{1}{n!} \cdot 0 \cdot n^{n-1} = 0$. Donc :

$$\boxed{P_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(0) = 0.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour $n = 1$: $P_1 = X$, donc $P_1'(x) = 1$, et $P_0(x+1) = 1$. L'égalité est vérifiée.
Soit $n \geqslant 2$. Alors $n - 1 \geqslant 1$ et, par dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{1}{n!}\left((x+n)^{n-1} + (n-1)x(x+n)^{n-2}\right) \\ &= \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}\left(x + n + (n-1)x\right) \\ &= \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2} \cdot n(x+1) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+n)^{n-2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $n - 1 \in \mathbb{N}^*$, donc par définition de P_{n-1} :

$$P_{n-1}(x+1) = \frac{1}{(n-1)!}(x+1)\left(x + 1 + (n-1)\right)^{n-2} = \frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+n)^{n-2}.$$

Les deux expressions coïncident. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = P_{n-1}(x+1).}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $H(n)$ la propriété : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$. On procède par récurrence sur n.
Initialisation. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $P_0(x+y) = 1 = P_0(x)P_0(y)$, donc $H(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $H(n)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P_{n+1}(x+y) - \sum_{k=0}^{n+1} P_k(x)P_{n+1-k}(y).$$

La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Le terme d'indice $k = 0$ de la somme, $P_0(x)P_{n+1}(y) = P_{n+1}(y)$, ne dépend pas de x. Pour $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 2 (appliquée aux entiers $n+1$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$, tous dans $\mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= P_{n+1}'(x+y) - \sum_{k=1}^{n+1} P_k'(x)P_{n+1-k}(y) \\ &= P_n(x+y+1) - \sum_{k=1}^{n+1} P_{k-1}(x+1)P_{n+1-k}(y) \\ &= P_n\left((x+1)+y\right) - \sum_{j=0}^{n} P_j(x+1)P_{n-j}(y), \end{aligned}$$

en posant $j = k - 1$. D'après $H(n)$ appliquée au couple $(x+1, y)$, $f'(x) = 0$. Ainsi $f' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc f est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $f(0)$. D'après la question 1b, $P_0(0) = 1$ et $P_k(0) = 0$ pour $k \geqslant 1$, donc :

$$f(0) = P_{n+1}(y) - P_0(0)P_{n+1}(y) = 0.$$

Donc $f = 0$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} P_k(x)P_{n+1-k}(y)$. Ceci valant pour tout $y \in \mathbb{R}$, $H(n+1)$ est vraie.
Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y).}$$

Partie II — Une série de fonctions

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n > |x|$, on a $1 + \frac{x}{n} > 0$ et $x + n > 0$, donc :

$$(x+n)^{n-1} = n^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = n^{n-1}\exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Comme $\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+u) = u + O(u^2)$ quand $u \to 0$:

$$(n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = (n-1)\left(\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = x - \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Par continuité de l'exponentielle, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$, avec $\mathrm{e}^x \neq 0$, donc :

$$\boxed{(x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x n^{n-1}.}$$

(b) La formule de Stirling s'écrit :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Si $a = 0$, tous les termes de la série sont nuls à partir du rang 1 et la série converge absolument ; on a bien $|a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. Supposons $a \neq 0$. Pour $n \geqslant 1$, $|P_n(x)a^n| = \dfrac{|x|\,|x+n|^{n-1}\,|a|^n}{n!}$, et pour $n > |x|$, $|x+n|^{n-1} = (x+n)^{n-1}$. Par la question 4a et la formule de Stirling, par produit et quotient d'équivalents :

$$|P_n(x)a^n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|\,\mathrm{e}^x n^{n-1}\,|a|^n}{\sqrt{2\pi n}\,n^n\mathrm{e}^{-n}} = \frac{|x|\,\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(\mathrm{e}\,|a|)^n}{n^{3/2}}.$$

Les deux suites sont positives et $\frac{|x|\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi}} > 0$ car $x \neq 0$. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum P_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si la série $\sum \frac{(\mathrm{e}|a|)^n}{n^{3/2}}$ converge.

— Si $|a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$, alors $0 \leqslant \frac{(\mathrm{e}|a|)^n}{n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$ pour $n \geqslant 1$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge ($\frac{3}{2} > 1$) : par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série converge.

— Si $|a| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, alors $\mathrm{e}\,|a| > 1$ et, par croissances comparées, $\frac{(\mathrm{e}|a|)^n}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: la série diverge grossièrement.

Donc, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{\sum P_n(x)a^n \text{ converge absolument si et seulement si } |a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.}$

5. On applique le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions convergeant normalement sur tout segment.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto P_n(x)a^n$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$.

— Soit $A > 0$. Pour $x \in [-A, A]$ et $n \geqslant 1$, on a $|x| \leqslant A$ et $|x+n| \leqslant A+n$, donc :

$$|P_n(x)a^n| = \frac{|x|\,|x+n|^{n-1}}{n!}\,|a|^n \leqslant \frac{A(A+n)^{n-1}}{n!}\,|a|^n = P_n(A)\,|a|^n.$$

Comme $A \in \mathbb{R}^*$ et $|a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$, la série $\sum P_n(A)a^n$ converge absolument d'après la question 4b, et $P_n(A) \geqslant 0$: la série $\sum P_n(A)\,|a|^n$ converge. Donc la série $\sum P_n(x)a^n$ converge normalement sur $[-A, A]$.

Tout segment de $\mathbb{R}$ est inclus dans un segment $[-A, A]$ avec $A > 0$: la série converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $\mathbb{R}$, et $\boxed{F_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

6. (a) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries (réelles ou complexes) absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$, défini par $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, est absolument convergent et :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).}$$

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. La série $\sum P_n(x)a^n$ converge absolument : d'après la question 4b si $x \neq 0$ (car $|a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$), et parce que $P_n(0) = 0$ pour $n \geqslant 1$ (question 1b) si $x = 0$. De même pour $\sum P_n(y)a^n$. Par produit de Cauchy (question 6a), puis d'après la question 3 :

$$\begin{aligned} F_a(x)F_a(y) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} P_k(x)a^k P_{n-k}(y)a^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n P_n(x+y) = F_a(x+y). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F_a(x+y) = F_a(x)F_a(y).}$

7. On applique le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, en notant $f_n : x \mapsto P_n(x)a^n$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $f_0' = 0$ et, d'après la question 2, $f_n'(x) = a^n P_{n-1}(x+1)$ pour $n \geqslant 1$.
   - La série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (question 5).
   - Soit $A > 0$. Pour $x \in [-A, A]$ et $n \geqslant 2$, on a $|x+1| \leqslant A+1$ et $|x+1+(n-1)| \leqslant A+1+(n-1)$, donc, comme à la question 5 :

$$\left|f_n'(x)\right| = |a|\,|a|^{n-1}\,|P_{n-1}(x+1)| \leqslant |a|\ P_{n-1}(A+1)\,|a|^{n-1}.$$

   Comme $A+1 \in \mathbb{R}^*$ et $|a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$, la série $\sum P_m(A+1)\,|a|^m$ converge (question 4b, avec $P_m(A+1) \geqslant 0$). Donc $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-A, A]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Donc $F_a = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec le changement d'indice $m = n-1$:

$$F_a'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n P_{n-1}(x+1) = a\sum_{m=0}^{+\infty} a^m P_m(x+1) = aF_a(x+1).$$

Ainsi $\boxed{F_a \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_a'(x) = aF_a(x+1)}$.

8. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La question 6b, appliquée au couple $(x, 1)$, donne $F_a(x+1) = F_a(x)F_a(1)$, donc, d'après la question 7 :

$$F_a'(x) = aF_a(1)\,F_a(x).$$

Ainsi F_a est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire $y' = ky$, où $k = aF_a(1)$ est une constante réelle. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{kx}$, $\lambda \in \mathbb{R}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F_a(x) = \lambda \mathrm{e}^{kx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1b, $F_a(0) = P_0(0) = 1$, donc $\lambda = 1$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \exp\left(aF_a(1)\,x\right).}$$

(b) En $x = 1$, la question 8a donne $F_a(1) = \exp\left(aF_a(1)\right)$. Donc $F_a(1) > 0$ et, en composant par ln, $\ln F_a(1) = aF_a(1)$: $\boxed{F_a(1) \text{ est solution de } (E_a).}$

Partie III — Expression de α_a

9. (a) Pour $a \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, $G(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)a^n$, avec $P_n(1) = \dfrac{(n+1)^{n-1}}{n!} > 0$ pour $n \geqslant 1$. On note $g_n : a \mapsto P_n(1)a^n$ et on applique le théorème de dérivation terme à terme sur $]-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}[$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $g_0' = 0$ et $g_n'(a) = nP_n(1)a^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.
   - La série $\sum g_n$ converge simplement sur $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ (question 4b avec $x = 1$).
   - Soit $b \in]0, \frac{1}{\mathrm{e}}[$. Pour $a \in [-b, b]$ et $n \geqslant 1$, $|g_n'(a)| \leqslant nP_n(1)b^{n-1}$. D'après le calcul de la question 4b avec $x = 1$:

$$nP_n(1)b^{n-1} = \frac{n}{b}P_n(1)b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{b}\cdot\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(\mathrm{e}b)^n}{n^{3/2}} = \frac{\mathrm{e}}{b\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{(\mathrm{e}b)^n}{\sqrt{n}}.$$

Or $0 \leqslant \frac{(eb)^n}{\sqrt{n}} \leqslant (eb)^n$ et la série géométrique $\sum (eb)^n$ converge car $0 < eb < 1$. Par critère de comparaison puis critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum nP_n(1)b^{n-1}$ converge : $\sum g'_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-b, b]$.

Tout segment de $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ est inclus dans un segment $[-b, b]$ avec $b \in]0, \frac{1}{e}[$. Donc :

$$\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[.}$$

Soient $0 \leqslant a < a' \leqslant \frac{1}{e}$. Pour tout $n \geqslant 1$, $P_n(1) \geqslant 0$ et $a^n \leqslant a'^n$, et le terme d'indice 1 vaut $P_1(1)a = a$, donc :

$$G(a') - G(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(1)\left(a'^n - a^n\right) \geqslant a' - a > 0.$$

Donc $\boxed{G \text{ est strictement croissante sur } \left[0, \frac{1}{e}\right].}$

(b) Montrons d'abord que G est continue sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$. Les fonctions g_n sont continues et, pour $a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, $|g_n(a)| \leqslant P_n(1)e^{-n}$, terme général d'une série convergente d'après la question 4b (avec $x = 1$ et $a = \frac{1}{e}$) : la série $\sum g_n$ converge normalement sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, et sa somme G y est continue.

On a $G(0) = P_0(1) = 1$. D'après la question 8b, $G\left(\frac{1}{e}\right) = F_{1/e}(1)$ est solution de $(E_{1/e})$, dont l'unique solution est e (résultat admis) : $G\left(\frac{1}{e}\right) = e$.

La fonction G est continue et croissante sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$, donc $G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) \subset \left[G(0), G\left(\frac{1}{e}\right)\right]$, et, par le théorème des valeurs intermédiaires, G prend toute valeur entre $G(0)$ et $G\left(\frac{1}{e}\right)$. Donc :

$$\boxed{G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = [1, e].}$$

(c) Soit $a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$. D'après la question 8b, $F_a(1)$ est solution de (E_a), donc (E_a) admet des solutions et α_a est bien défini.

— Si $a \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ ou $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution (résultats admis), qui est donc à la fois $F_a(1)$ et α_a.

— Si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$ (résultat admis), et $\alpha_a = \alpha$ puisque $\alpha < e < \beta$. D'après la question 9b, $F_a(1) = G(a) \in [1, e]$, donc $F_a(1) \leqslant e < \beta$, et $F_a(1) \neq \beta$. Comme $F_a(1)$ est solution de (E_a), $F_a(1) = \alpha = \alpha_a$.

Donc :

$$\boxed{\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.}$$

10. Posons $c = \ln(C)$. Comme $1 \leqslant C \leqslant e^{1/e}$ et que ln est croissante, $c \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$, donc $-c \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$.
Soit $y > 0$ et $x = \frac{1}{y} > 0$. Par stricte croissance de ln et de l'exponentielle :

$$y^y = C \iff y \ln y = c \iff -\frac{\ln x}{x} = c \iff \ln x = -cx,$$

c'est-à-dire si et seulement si x est solution de (E_{-c}). Comme $-c \leqslant 0$, l'équation (E_{-c}) admet une unique solution α_{-c} (résultat admis). L'application $y \mapsto \frac{1}{y}$ étant une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, $\boxed{\text{l'équation } y^y = C \text{ admet une unique solution } y_0 > 0,}$ et $y_0 = \frac{1}{\alpha_{-c}}$.

Comme $-c \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, la question 9c donne $\alpha_{-c} = F_{-c}(1)$. La question 6b, appliquée au couple $(1, -1)$, donne $F_{-c}(1)F_{-c}(-1) = F_{-c}(0) = 1$ (question 1b). Donc :

$$y_0 = \frac{1}{F_{-c}(1)} = F_{-c}(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(-1)(-c)^n.$$

Or $P_0(-1) = 1$, $P_1 = X$ (question 1a) donc $P_1(-1) = -1$, et, pour $n \geqslant 2$, $P_n(-1) = -\dfrac{(n-1)^{n-1}}{n!}$.
Ainsi $P_1(-1)(-c) = c$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$P_n(-1)(-c)^n = -\frac{(n-1)^{n-1}}{n!}(-1)^n c^n = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)^{n-1}}{n!}c^n.$$

Avec $c = \ln(C)$:

$$\boxed{y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)^{n-1}}{n!}\left(\ln(C)\right)^n.}$$