

9

Endomorphismes des espaces euclidiens

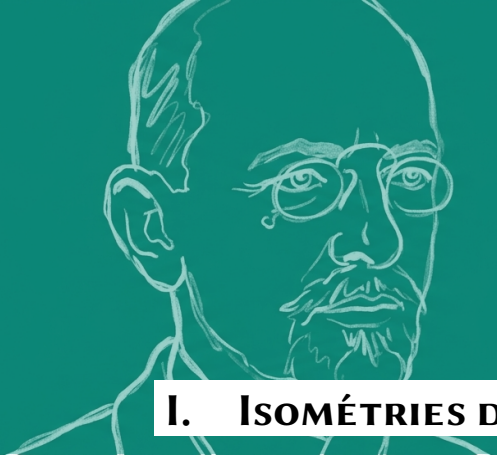
David Hilbert (1862 – 1943)

En première année, un espace vectoriel réel a été muni d'un produit scalaire : c'est un espace préhilbertien réel, euclidien s'il est de dimension finie. On s'est alors intéressé aux vecteurs d'un tel espace : norme, orthogonalité, bases orthonormées, projection orthogonale sur un sous-espace.
Ce chapitre s'intéresse aux endomorphismes d'un espace euclidien. Un endomorphisme peut avoir des propriétés vis-à-vis du produit scalaire : que signifie, pour un endomorphisme, conserver le produit scalaire, et qu'en tire-t-on ? Dispose-t-on de règles de calcul simples, en particulier sur les matrices dans une base orthonormée ?
Le chapitre de réduction suggère une seconde question : les endomorphismes qui se comportent bien vis-à-vis du produit scalaire admettent-ils une écriture simple dans une base bien choisie ? On y répond pour deux familles d'endomorphismes : les isométries vectorielles, qui conservent la norme, et les endomorphismes autoadjoints, dont la matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Programme officiel

Endomorphismes des espaces euclidiens

a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien
b) Matrices orthogonales
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien
d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles



9 Endomorphismes des espaces euclidiens

I. Isométries d'un espace euclidien

1. Définition et propriétés

Dans tout le chapitre, E désigne un espace euclidien, c'est-à-dire un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 1$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$; on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Définition 9.1 (Isométrie vectorielle)

Un endomorphisme u de E est une isométrie vectorielle de E lorsqu'il conserve la norme :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\,.$$

Exemple 9.2

L'identité Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des isométries vectorielles : pour tout $x \in E$, $\|-x\| = \|x\|$.

Exemple 9.3

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $r_\theta : (x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\|r_\theta(x,y)\|^2 &= (x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^2\\ &= (x^2+y^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \|(x,y)\|^2\,,\end{aligned}$$

donc r_θ est une isométrie vectorielle.

Exemple 9.4

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, l'endomorphisme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une isométrie vectorielle : la somme des carrés des coordonnées ne dépend pas de leur ordre.

Remarque (Isométries et isométries vectorielles)

Plus généralement, une isométrie de E est une application $f : E \to E$ qui conserve les distances : pour tous $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Une isométrie vectorielle u est une isométrie, puisque par linéarité $\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| = \|x - y\|$. Une isométrie n'a en revanche aucune raison d'être linéaire : pour $a \in E$ non nul, la translation $x \mapsto x + a$ et la symétrie centrale $x \mapsto 2a - x$ de centre a conservent les distances mais n'envoient pas 0 sur 0 ; dans le plan, il en va de même d'une rotation autour d'un point autre que l'origine.

Proposition 9.5 (Caractérisations des isométries vectorielles)

Soit u un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une isométrie vectorielle : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$;
2. u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E,\ \langle u(x),\, u(y)\rangle = \langle x,\, y\rangle$;
3. l'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E ;
4. il existe une base orthonormée de E dont l'image par u est une base orthonormée de E.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2). Soient $x, y \in E$. L'identité de polarisation $\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$, appliquée aux vecteurs $u(x)$ et $u(y)$, donne, par linéarité de u,

$$\langle u(x),\, u(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \langle x,\, y\rangle .$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\big\langle u(e_i),\, u(e_j)\big\rangle = \big\langle e_i,\, e_j\big\rangle$, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. La famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est donc orthonormée, donc libre, et elle compte $n = \dim E$ vecteurs : c'est une base orthonormée de E.
(3) $\Rightarrow$ (4). L'espace euclidien E possède une base orthonormée.
(4) $\Rightarrow$ (1). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E dont l'image $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée. Soit $x \in E$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $(e_1, \dots, e_n)$. Par linéarité, $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$: les coordonnées de $u(x)$ dans la base orthonormée $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ sont les x_i. L'expression de la norme dans une base orthonormée donne alors

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2 .$$

□

Exemple 9.6 (Reconnaître une isométrie vectorielle)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), soit u l'endomorphisme défini par

$$u(e_1) = \frac{1}{3}(2, 2, -1), \qquad u(e_2) = \frac{1}{3}(-1, 2, 2), \qquad u(e_3) = \frac{1}{3}(2, -1, 2).$$

Ces trois vecteurs sont de norme 1, car $\frac{1}{9}(4+4+1) = 1$, et deux à deux orthogonaux : par exemple $\langle u(e_1),\, u(e_2)\rangle = \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$. L'image de la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) est donc une base orthonormée, et u est une isométrie vectorielle. Le vérifier sur la définition demanderait de développer $\|u(x, y, z)\|^2$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exemple 9.7 (Obtenir une base orthonormée)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, l'endomorphisme $u : (x, y) \mapsto \frac{1}{5}(3x - 4y,\ 4x + 3y)$ est une isométrie vectorielle : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|u(x, y)\|^2 = \frac{1}{25}\left((3x-4y)^2 + (4x+3y)^2\right) = \frac{1}{25}\left(25x^2 + 25y^2\right) = \|(x, y)\|^2 .$$

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$; son image par u,

$$\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}(-1,7),\ \frac{1}{5\sqrt{2}}(7,1)\right),$$

est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, sans autre calcul.

Exemple 9.8 (Valeurs propres d'une isométrie vectorielle)

Soit u une isométrie vectorielle de E et λ une valeur propre de u, de vecteur propre $x \neq 0$. Alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, et $\|x\| \neq 0$, donc $|\lambda| = 1$: les valeurs propres d'une isométrie vectorielle sont dans $\{-1, 1\}$. C'est le cas des symétries, dont les valeurs propres sont 1 et -1.

Remarque (Vocabulaire)

On rencontre aussi, pour les isométries vectorielles d'un espace euclidien, les termes d'*endomorphisme orthogonal* ou d'*automorphisme orthogonal*, en lien avec le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ et les matrices orthogonales vus plus loin. Le programme retient « isométrie vectorielle », qu'on privilégie ici.

Pour donner un sens géométrique à cette définition, examinons une famille d'endomorphismes que l'on connaît bien : les symétries. Rappelons qu'une symétrie de E est un endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$; on a alors $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, et s est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$: pour $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$, $s(x) = a - b$. Quelles symétries sont des isométries vectorielles ?

Proposition 9.9 (Symétries orthogonales)

Soit s une symétrie de E. Alors s est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux. On dit alors que s est une symétrie orthogonale.

Démonstration

Notons $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, de sorte que $E = F \oplus G$.
Supposons que s est une isométrie vectorielle. Soient $a \in F$ et $b \in G$. Comme s conserve le produit scalaire, $\langle a, b\rangle = \langle s(a), s(b)\rangle = \langle a, -b\rangle = -\langle a, b\rangle$, donc $\langle a, b\rangle = 0$: F et G sont orthogonaux.
Réciproquement, supposons F et G orthogonaux. Soit $x \in E$, décomposé en $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$. Alors $s(x) = a - b$ et, a et b étant orthogonaux, le théorème de Pythagore donne

$$\|s(x)\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|x\|^2 .$$

Donc s est une isométrie vectorielle. □

Remarque (Lecture géométrique)

Une symétrie s est déterminée par le sous-espace F par rapport auquel on symétrise et par la direction G parallèlement à laquelle on le fait. Pour une symétrie orthogonale, G est orthogonal à F et $\dim G = \dim E - \dim F$, donc $G = F^\perp$: on symétrise « à angle droit ». La symétrie orthogonale par rapport à F est ainsi entièrement déterminée

par F, et $s = 2p_F - \mathrm{Id}_E$, où p_F est la projection orthogonale sur F.

Définition 9.10 (Réflexion)

On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Remarque

Soit H un hyperplan de E. La droite $H^\perp$ est dirigée par un vecteur non nul a, et la projection orthogonale sur $H^\perp$ est $x \mapsto \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a$. La réflexion s par rapport à H vérifie $s = \mathrm{Id}_E - 2p_{H^\perp}$, d'où

$$\forall x \in E,\ s(x) = x - 2\frac{\langle x,\ a\rangle}{\|a\|^2} a.$$

Une réflexion est donc déterminée par un vecteur normal à son hyperplan.

2. Groupe orthogonal

Plutôt que d'étudier les isométries vectorielles une à une, on regarde l'ensemble qu'elles forment, démarche courante en mathématiques. La question est de savoir comment cet ensemble se comporte vis-à-vis de la composition et du passage à la réciproque.

Définition 9.11 (Groupe orthogonal)

On appelle groupe orthogonal de E, et on note $\mathrm{O}(E)$, l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 9.12 (Structure de $\mathrm{O}(E)$)

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$.
2. Si u et v sont dans $\mathrm{O}(E)$, alors $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$.
3. Tout élément de $\mathrm{O}(E)$ est un automorphisme de E.
4. Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

Démonstration

1. Pour tout $x \in E$, $\|\mathrm{Id}_E(x)\| = \|x\|$.
2. Soient $u, v \in \mathrm{O}(E)$. L'application $u \circ v$ est un endomorphisme de E et, pour tout $x \in E$, $\|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$.
3. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Si $x \in \mathrm{Ker}\, u$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0$: u est injectif. Comme E est de dimension finie, u est un automorphisme de E.
4. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. L'application u^{-1} est un endomorphisme de E et, pour tout $x \in E$, $\left\|u^{-1}(x)\right\| = \left\|u(u^{-1}(x))\right\| = \|x\|$.

□

Remarque (Pourquoi « groupe »)

La composition des applications est associative, Id_E est élément neutre pour la composition, et la proposition montre que $\mathrm{O}(E)$ contient Id_E, est stable par composition et que chacun de ses éléments a une réciproque dans $\mathrm{O}(E)$. Ce sont les propriétés qui définissent un groupe, notion hors programme ; elles justifient le nom de

groupe orthogonal. En revanche, $\mathrm{O}(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$: $\mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E = 2\,\mathrm{Id}_E$ n'est pas une isométrie vectorielle. La structure est celle de la composition, pas de l'addition.

Exemple 9.13 (Les rotations du plan)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, reprenons les isométries vectorielles r_θ. Les formules d'addition donnent, pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$r_\theta(r_{\theta'}(x, y)) = \big(x\cos(\theta+\theta') - y\sin(\theta+\theta'),\ x\sin(\theta+\theta') + y\cos(\theta+\theta')\big),$$

soit $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$. En particulier $r_\theta \circ r_{-\theta} = r_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, donc $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$: la composée et la réciproque restent des rotations.

Exemple 9.14 (Les symétries orthogonales)

Une symétrie orthogonale s vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, donc $s^{-1} = s$. La composée de deux symétries orthogonales est une isométrie vectorielle, mais n'est pas une symétrie en général. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, $s_1 : (x, y) \mapsto (x, -y)$ et $s_2 : (x, y) \mapsto (y, x)$ sont les réflexions par rapport aux droites $\mathrm{Vect}\,((1, 0))$ et $\mathrm{Vect}\,((1, 1))$, et

$$s_2 \circ s_1 : (x, y) \mapsto (-y, x),$$

c'est-à-dire $s_2 \circ s_1 = r_{\pi/2}$. Or $r_{\pi/2} \circ r_{\pi/2} = r_\pi = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$: ce n'est pas une symétrie.

Lemme 9.15 (Sous-espace stable par un automorphisme)

Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, et F un sous-espace de E stable par u. Alors F est stable par u^{-1}.

Démonstration

Comme F est stable par u, la restriction $u|_F : F \to F$ est un endomorphisme de F. Elle est injective, car u l'est. L'espace F étant de dimension finie, $u|_F$ est bijective. Soit $x \in F$: il existe $y \in F$ tel que $u(y) = x$, donc $u^{-1}(x) = y \in F$. □

Proposition 9.16 (Stabilité de l'orthogonal)

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration

Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, comme u est un automorphisme qui conserve le produit scalaire,

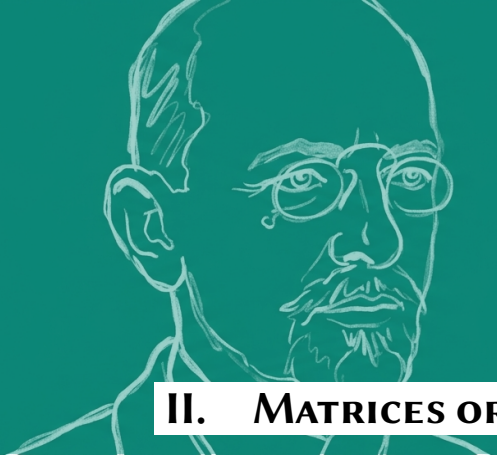
$$\langle u(y),\, x\rangle = \big\langle u(y),\, u(u^{-1}(x))\big\rangle = \big\langle y,\, u^{-1}(x)\big\rangle = 0,$$

car F, stable par l'automorphisme u, est stable par u^{-1} (lemme « Sous-espace stable par un automorphisme »), donc $u^{-1}(x) \in F$. Donc $u(y) \in F^\perp$. □

Exemple 9.17 (Rotation d'axe)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, soit $u : (x, y, z) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta,\ z)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. C'est une isométrie vectorielle, car $\|u(x, y, z)\|^2 = (x^2 + y^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + z^2$. La droite $\mathrm{Vect}(e_3)$ est stable par u, puisque $u(e_3) = e_3$. Son orthogonal, le plan d'équation $z = 0$, est donc stable par u, ce qu'on lit sur l'expression de u.

Cette stabilité servira plus loin à réduire les endomorphismes autoadjoints.



9 Endomorphismes des espaces euclidiens

II. Matrices orthogonales

1. Matrices orthogonales et isométries vectorielles

On a caractérisé les isométries vectorielles par l'image d'une base orthonormée. Pour traduire cela sur la matrice d'un endomorphisme, il faut savoir calculer un produit scalaire avec des matrices. Cela tombe bien : on l'a déjà fait en première année.

Lemme 9.18 (Produit scalaire en coordonnées)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Pour $x, y \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ leurs colonnes de coordonnées, de coefficients $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$. Alors

$$\langle x, y\rangle = X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = X^\top X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Démonstration

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, de sorte que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Par bilinéarité,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle,$$

et $\langle e_i, e_j\rangle$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, puisque la base est orthonormée. Il reste $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, qui est l'unique coefficient de la matrice $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, identifiée à un réel. La seconde formule est le cas $y = x$. □

Autrement dit, le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X, Y) \mapsto X^\top Y$, est le produit scalaire de E lu en coordonnées. Commençons par étudier les matrices pour elles-mêmes.

Définition 9.19 (Matrice orthogonale)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale lorsque

$$A^\top A = I_n.$$

Exemple 9.20 (La matrice identité)

La matrice I_n est orthogonale : $I_n^\top I_n = I_n$.

Exemple 9.21 (Une matrice de rotation)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est orthogonale :

$$R(\theta)^\top R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = I_2.$$

C'est la matrice de la rotation r_θ de la section précédente dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 9.22 (Une matrice de permutation)

La matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui permute les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est orthogonale : chaque colonne contient un seul coefficient non nul, égal à 1, et deux colonnes distinctes n'ont pas ce coefficient à la même ligne, donc $P^\top P = I_3$.

Exemple 9.23 (Retour sur un exemple)

La matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est orthogonale : on trouve $A^\top A = I_3$. C'est la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme u de l'exemple « Reconnaître une isométrie vectorielle » : le calcul est celui, déjà fait, des normes et des produits scalaires des vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$, qui sont les colonnes de A.

Exemple 9.24 (Deux matrices qui ne sont pas orthogonales)

La matrice $2I_n$ n'est pas orthogonale : $(2I_n)^\top(2I_n) = 4I_n$. Ses colonnes sont deux à deux orthogonales, mais pas de norme 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non plus : $A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Les deux derniers exemples suggèrent de lire la condition $A^\top A = I_n$ sur les colonnes de A ; c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 9.25 (Caractérisations des matrices orthogonales)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est orthogonale, c'est-à-dire $A^\top A = I_n$;
2. A est inversible et $A^{-1} = A^\top$;
3. $AA^\top = I_n$;
4. les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel ;
5. les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

Démonstration

Les trois premiers points. Pour deux matrices carrées A et B de même taille, l'égalité $BA = I_n$ suffit à assurer que A est inversible d'inverse B. Si $A^\top A = I_n$, alors A est inversible d'inverse $A^\top$: (1) entraîne (2). Si $A^{-1} = A^\top$, alors $AA^\top = AA^{-1} = I_n$: (2) entraîne (3). Enfin si $AA^\top = I_n$, alors A est inversible d'inverse $A^\top$, donc $A^\top A = A^{-1}A = I_n$: (3) entraîne (1).
(1) équivaut à (4). Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $a_{k,i}$ ses coefficients. Le coefficient d'indice (i, j) de $A^\top A$ est

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = C_i^\top C_j,$$

le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j. L'égalité $A^\top A = I_n$ signifie donc que $C_i^\top C_j$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, c'est-à-dire que la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est orthonormée. Une famille orthonormée de n vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension n, en est une base.
(3) équivaut à (5). De même, en notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A, le coefficient d'indice (i, j) de $AA^\top$ est $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} = L_i L_j^\top$, produit scalaire usuel des lignes L_i et L_j. L'égalité $AA^\top = I_n$ signifie donc que la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est orthonormée ; formée de n vecteurs de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, qui est de dimension n, elle en est une base (même raisonnement que ci-dessus). □

Remarque (Inverse d'une matrice orthogonale)

Le point 2 sert au calcul : l'inverse d'une matrice orthogonale s'obtient sans calcul, c'est sa transposée.

Remarque (Reconnaître une matrice orthogonale)

Le point 4 sert à reconnaître une matrice orthogonale : il suffit de vérifier que ses colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales, comme on l'a fait pour la matrice A de l'exemple « Retour sur un exemple ». L'orthogonalité des colonnes ne suffit pas, comme le montre $2I_n$.

Remarque (Transposée d'une matrice orthogonale)

Les lignes de A sont les colonnes de $A^\top$: le point 5 dit qu'une matrice est orthogonale si et seulement si sa transposée l'est.

Exemple 9.26 (Compléter une matrice orthogonale)

Déterminons les réels a, b, c tels que la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{pmatrix}$$

soit orthogonale. Les deux premières colonnes sont de norme 1, car $\frac{1}{9}(1+4+4) = 1$ et $\frac{1}{9}(4+4+1) = 1$, et orthogonales, car $\frac{1}{9}(2-4+2) = 0$. La matrice A est orthogonale si et seulement si la troisième colonne est de norme 1 et orthogonale aux deux premières, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 9.$$

La seconde équation donne $c = 2b - 2a$, puis la première $a + 2b + 4b - 4a = 0$, soit $a = 2b$ et $c = -2b$. La condition de norme s'écrit alors $9b^2 = 9$, soit $b = \pm 1$. Il y a donc

exactement deux solutions, $(a,b,c) = (2,1,-2)$ et $(a,b,c) = (-2,-1,2)$: les deux vecteurs unitaires de la droite orthogonale au plan engendré par les deux premières colonnes.

Revenons à l'espace euclidien E. Les coordonnées dans une base orthonormée transportent le produit scalaire ; les matrices orthogonales apparaissent d'abord comme matrices de passage.

Proposition 9.27 (Matrices de passage entre bases orthonormées)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une base de E. Alors $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.

Démonstration

Notons $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Les colonnes de P sont $C_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_j)$, et, la base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, le produit scalaire se calcule en coordonnées (lemme « Produit scalaire en coordonnées ») : $\left\langle e'_i, e'_j \right\rangle = C_i^\top C_j$ pour tous i, j. La famille $\mathcal{B}'$ est donc orthonormée si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ des colonnes de P l'est, c'est-à-dire si et seulement si P est orthogonale, puisqu'une matrice carrée est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (proposition précédente). □

Exemple 9.28 (Changement de base orthonormée)

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, les formules de changement de coordonnées s'écrivent

$$X = PX' \qquad \text{et} \qquad X' = P^{-1}X = P^\top X,$$

sans inverse à calculer. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, la base $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right)$ est orthonormée, et

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^\top = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées d'un vecteur (x,y) dans $\mathcal{B}'$ sont donc $\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$, ce qu'on vérifie en calculant les produits scalaires de (x,y) avec les deux vecteurs de $\mathcal{B}'$.

Proposition 9.29 (Matrice d'une isométrie vectorielle)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, u un endomorphisme de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors u est une isométrie vectorielle si et seulement si A est orthogonale.

Démonstration

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Les colonnes de A sont $C_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_j))$, et, la base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, le produit scalaire se calcule en coordonnées (lemme « Produit scalaire en coordonnées ») : $\left\langle u(e_i), u(e_j) \right\rangle = C_i^\top C_j$. La famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est donc orthonormée si et seulement si les colonnes de A forment une famille orthonormée, c'est-à-dire si et seulement si A est orthogonale. Or u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image de la base orthonormée $\mathcal{B}$ est une base orthonormée (caractérisations des isométries vectorielles, section précédente).

On peut aussi raisonner directement sur le produit scalaire. Pour $x, y \in E$ de colonnes X et Y, les colonnes de $u(x)$ et $u(y)$ sont AX et AY, donc

$$\langle u(x),\, u(y)\rangle = (AX)^\top (AY) = X^\top \left(A^\top A\right) Y.$$

Ainsi u conserve le produit scalaire si et seulement si $X^\top \left(A^\top A\right) Y = X^\top Y$ pour toutes colonnes X et Y. Si $A^\top A = I_n$, c'est clair. Réciproquement, en prenant pour X et Y les colonnes E_i et E_j de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient que le coefficient d'indice (i, j) de $A^\top A$ est celui de I_n. □

Remarque (Rôle de la base orthonormée)

L'hypothèse « orthonormée » ne se retire pas. La réflexion $s : (x, y) \mapsto (y, x)$ de $\mathbb{R}^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, qui est orthogonale. Dans la base $((1, 0), (1, 1))$, qui ne l'est pas, on a $s(1, 0) = (0, 1) = -(1, 0) + (1, 1)$ et $s(1, 1) = (1, 1)$, donc

$$\mathrm{Mat}_{((1,0),(1,1))}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas orthogonale.

Remarque (Vocabulaire)

Cette correspondance explique le vocabulaire : une isométrie vectorielle est un automorphisme dont la matrice dans une base orthonormée est orthogonale, d'où le nom d'*automorphisme orthogonal* que l'on rencontre encore. Le programme lui préfère « isométrie vectorielle », qui dit ce que fait l'application plutôt que ce à quoi ressemble sa matrice, et c'est ce terme que nous employons.

Définition 9.30 (Groupe orthogonal matriciel)

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal d'ordre n. On le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou encore $\mathrm{O}(n)$.

Proposition 9.31 (Structure de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$)

1. $I_n \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$;
2. si $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$;
3. si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible et $A^{-1} = A^\top \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

1. $I_n^\top I_n = I_n$.
2. $(AB)^\top (AB) = B^\top A^\top AB = B^\top I_n B = B^\top B = I_n$.
3. Comme $A^\top A = I_n$, la matrice carrée A est inversible d'inverse $A^\top$, et $AA^\top = AA^{-1} = I_n$ (caractérisations des matrices orthogonales). Cette égalité se lit $(A^\top)^\top A^\top = I_n$: la matrice $A^\top$ est orthogonale.

□

Remarque

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une bijection de $\mathrm{O}(E)$ sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ qui transforme la composition en produit et la réciproque en inverse. La proposition ci-dessus est donc la traduction matricielle de la structure de $\mathrm{O}(E)$ vue dans la section précédente. Comme $\mathrm{O}(E)$, l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: il ne contient pas $2I_n$.

2. Orientation

Le déterminant d'une matrice orthogonale ne peut prendre que deux valeurs. Ce fait partage $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en deux et conduit à la notion d'orientation.

Proposition 9.32 (Déterminant d'une matrice orthogonale)

Pour tout $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\det A \in \{-1, 1\}$.

Démonstration

Comme $\det A^\top = \det A$, on a $\det(A^\top A) = \det A^\top \det A = (\det A)^2$. Or $A^\top A = I_n$, de déterminant 1. Donc $(\det A)^2 = 1$. □

Remarque

La réciproque est fausse : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1 et n'est pas orthogonale.

Corollaire 9.33 (Déterminant d'une isométrie vectorielle)

Pour tout $u \in \mathrm{O}(E)$, on a $\det u \in \{-1, 1\}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale, et $\det u = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. □

Définition 9.34 (Groupe spécial orthogonal)

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n. On le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou encore $\mathrm{SO}(n)$.

Proposition 9.35 (Structure de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$)

1. $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;
2. si $A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;
3. si $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} = A^\top \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Les trois matrices I_n, AB et A^{-1} sont dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, puisque $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ contient I_n et est stable par produit et par passage à l'inverse (structure de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$). Il reste à voir que leur déterminant vaut 1 : $\det I_n = 1$, $\det(AB) = \det A \det B = 1$ et $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$. □

Exemple 9.36 (Dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\det R(\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, donc $R(\theta) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 9.37 (Dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$)

La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrice dans la base canonique de la réflexion $(x, y) \mapsto (x, -y)$, est orthogonale de déterminant -1 : elle est dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 9.38 (La matrice $-I_n$)

La matrice $-I_n$ est orthogonale et $\det(-I_n) = (-1)^n$. Elle est donc dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si n est pair.

Remarque (Isométries vectorielles positives)

L'ensemble des isométries vectorielles de E de déterminant 1 est parfois noté $\mathrm{SO}(E)$, et ses éléments appelés isométries vectorielles *positives* ou *directes*. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, u est dans $\mathrm{SO}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Cette notation n'est pas au programme ; dans le plan, les isométries vectorielles de déterminant 1 recevront le nom de rotations.

Exemple 9.39 (Déterminant d'une symétrie orthogonale)

Soit s une symétrie orthogonale, $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, de sorte que $E = F \oplus G$. Dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de s est diagonale, avec $\dim F$ coefficients égaux à 1 puis $\dim G$ coefficients égaux à -1. Donc

$$\det s = (-1)^{\dim \mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)}.$$

Ainsi $\det s = 1$ si et seulement si $\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ est paire. En particulier, une réflexion, pour laquelle cette dimension vaut 1, est de déterminant -1.

Passons à l'orientation. Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel réel sont reliées par la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, inversible : son déterminant est strictement positif ou strictement négatif. C'est ce signe qui définit l'orientation.

Définition 9.40 (Bases de même orientation)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation lorsque

$$\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} > 0,$$

et d'orientation contraire sinon.

Proposition 9.41 (Deux orientations)

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E.

1. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation si et seulement si $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ le sont.

2. On a $\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \det P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$. Par conséquent, deux bases de même orientation qu'une troisième sont de même orientation, et deux bases d'orientation contraire à une troisième sont de même orientation.

Démonstration

1. On a $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}$, donc $\det P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$, de même signe.
2. La formule $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$ est connue de première année ; on prend les déterminants. Le signe d'un produit de deux réels non nuls est positif si et seulement si les deux facteurs sont de même signe, ce qui donne les deux conséquences.

□

Définition 9.42 (Orientation d'un espace)

Orienter l'espace E, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ que l'on décrète **directe** (ou positive). Les bases de même orientation que $\mathcal{B}$ sont alors dites directes, et celles d'orientation contraire indirectes.

D'après la proposition, deux bases directes sont de même orientation, deux bases indirectes aussi, et une base directe et une base indirecte sont d'orientation contraire. Il n'y a donc que deux orientations possibles, et orienter E, c'est en choisir une.

Exemple 9.43 (Orientation usuelle de $\mathbb{R}^n$)

Sauf mention contraire, on oriente $\mathbb{R}^n$ en décrétant directe sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$. Dans $\mathbb{R}^2$, la base (e_2, e_1) est indirecte, car sa matrice de passage depuis la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant -1 ; la base $(e_2, -e_1)$ est directe, car $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Plus généralement, le déterminant étant alterné et linéaire par rapport à chaque colonne, échanger deux vecteurs d'une base ou changer le signe de l'un d'eux renverse son orientation.

Proposition 9.44 (Bases orthonormées de même orientation)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E. Alors $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation si et seulement si $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. En particulier, si E est orienté et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe, les bases orthonormées directes sont exactement les bases $\mathcal{B}'$ telles que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, donc elle est orthogonale (sous-section précédente), et son déterminant vaut 1 ou -1. Il est strictement positif si et seulement s'il vaut 1. □

Exemple 9.45 (Une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$)

La famille $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{3}(2,2,-1), \frac{1}{3}(-1,2,2), \frac{1}{3}(2,-1,2)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$: ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, car ce sont les

colonnes de la matrice orthogonale $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (cf. l'exemple « Retour sur un exemple »). Sa matrice de passage depuis la base canonique est A, et

$$\det A = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\left(2(4+2) + 1(4-1) + 2(4+2)\right) = 1.$$

La base $\mathcal{B}'$ est donc directe. En changeant le signe de son dernier vecteur, on obtient une base orthonormée indirecte.



9 Endomorphismes des espaces euclidiens

III. Cas particulier du plan euclidien

Dans toute cette section, E est un plan euclidien, c'est-à-dire un espace euclidien de dimension 2.

1. Approche matricielle

Dans une base orthonormée, les isométries vectorielles de E ont pour matrices les éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. On commence donc par décrire ces matrices, qui se calculent toutes avec un seul réel.

Proposition 9.46 (Description de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les $R(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ de déterminant -1 sont exactement les $S(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas, θ est unique modulo 2π.

Démonstration

Les matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont orthogonales, car leurs colonnes sont unitaires et orthogonales, et $\det R(\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\det S(\theta) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$.
Réciproquement, soit $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Sa première colonne est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, donc de la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$ avec θ unique modulo 2π. Sa seconde colonne est unitaire et orthogonale à la première, donc colinéaire à $(-\sin\theta, \cos\theta)$, qui est unitaire : elle vaut $(-\sin\theta, \cos\theta)$ ou $(\sin\theta, -\cos\theta)$. Dans le premier cas $A = R(\theta)$, de déterminant 1, et dans le second $A = S(\theta)$, de déterminant -1. □

Proposition 9.47 (Produits dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$)

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta'), \qquad S(\theta)R(\theta') = S(\theta-\theta'),$$
$$R(\theta')S(\theta) = S(\theta+\theta'), \qquad S(\theta)S(\theta') = R(\theta-\theta').$$

En particulier, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif : pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta')R(\theta)$, et $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

Démonstration

Ce sont les formules d'addition. Pour la première,

$$R(\theta)R(\theta') = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} = R(\theta+\theta'),$$

et les trois autres se vérifient de même. La commutativité vient de $\theta+\theta' = \theta'+\theta$, et $R(\theta)R(-\theta) = R(0) = I_2$. □

Remarque (Retour sur les rotations de la section I)

On retrouve la relation $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$ de la section I, puisque $R(\theta)$ est la matrice de r_θ dans la base canonique.

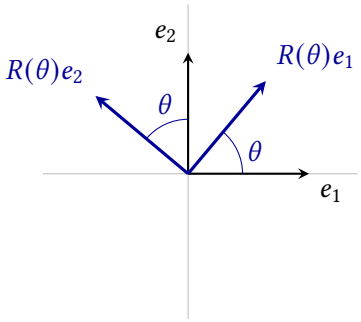
Remarque (Non-commutativité de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$)

Le groupe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif : $S(\theta)R(\theta') = S(\theta-\theta')$ et $R(\theta')S(\theta) = S(\theta+\theta')$ diffèrent dès que $\theta' \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

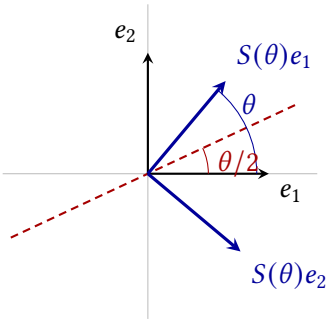
Remarque (Nature de $S(\theta)$)

La matrice $S(\theta)$ est symétrique et $S(\theta)^2 = R(0) = I_2$: c'est la matrice d'une symétrie. On y reviendra.

Voici les images de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par $R(\theta)$ et par $S(\theta)$. La première tourne la base d'un angle θ ; la seconde la renverse par rapport à la droite faisant un angle $\theta/2$ avec e_1.



matrice $R(\theta)$



matrice $S(\theta)$

2. Approche géométrique

Revenons aux endomorphismes. Les isométries vectorielles de E sont de déterminant 1 ou -1 ; commençons par les premières.

Définition 9.48 (Rotation vectorielle)

On appelle rotation vectorielle de E toute isométrie vectorielle de E de déterminant 1.

Proposition 9.49 (Matrice d'une rotation)

Soit u un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors u est une rotation vectorielle si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$.

Démonstration

L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, et son déterminant est celui de sa matrice. Ainsi u est une rotation vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est l'une des matrices $R(\theta)$. □

Le réel θ dépend a priori de la base. Voyons comment.

Proposition 9.50 (Changement de base orthonormée)

Soit u une rotation vectorielle de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E, et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = R(\theta')$.

1. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation, alors $\theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$.
2. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientation contraire, alors $\theta' \equiv -\theta \pmod{2\pi}$.

Démonstration

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Elle est orthogonale, et la formule de changement de base donne $R(\theta') = P^{-1}R(\theta)P$.

1. Si les deux bases sont de même orientation, $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, donc $P = R(\alpha)$ pour un réel α, et $P^{-1} = R(-\alpha)$. Par commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $R(\theta') = R(-\alpha)R(\theta)R(\alpha) = R(\theta)$.
2. Sinon, $P = S(\alpha)$ pour un réel α, et $P^{-1} = S(\alpha)$ puisque $S(\alpha)^2 = I_2$. Les formules de produit donnent $R(\theta') = S(\alpha)R(\theta)S(\alpha) = S(\alpha - \theta)S(\alpha) = R(-\theta)$.

Dans les deux cas, l'unicité de θ modulo 2π dans l'écriture $R(\theta)$ conclut. □

Définition 9.51 (Angle d'une rotation)

Supposons E orienté et soit u une rotation vectorielle de E. Le réel θ, défini modulo 2π, tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$ pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ est appelé une mesure de l'angle de u. On dit que u est la rotation d'angle θ.

Remarque (Cohérence de la définition)

La définition a un sens grâce à la proposition précédente : deux bases orthonormées directes sont de même orientation, donc donnent le même θ modulo 2π. Réciproquement, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme de matrice $R(\theta)$ dans une base orthonormée directe est la rotation d'angle θ.

Remarque (L'angle dépend de l'orientation)

Si l'on change l'orientation de E, la rotation d'angle θ devient la rotation d'angle $-\theta$. L'angle n'est pas une propriété intrinsèque de u.

Remarque (Le cosinus est intrinsèque)

La trace ne dépend ni de la base ni de l'orientation, et $\mathrm{tr}\, u = 2\cos\theta$: le cosinus de l'angle est intrinsèque. Une rotation est ainsi déterminée par un angle non orienté dans $[0, \pi]$, et par le choix d'une orientation.

Exemple 9.52 (Angles 0 et π)

La rotation d'angle 0 est Id_E et la rotation d'angle π est $-\mathrm{Id}_E$, quelle que soit l'orientation.

Proposition 9.53 (Rotation envoyant un vecteur unitaire sur un autre)

Soient x et y deux vecteurs unitaires de E. Il existe une unique rotation vectorielle u de E telle que $u(x) = y$.

Démonstration

Orientons E et complétons x en une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (x, x')$: il suffit de prendre pour x' l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à x, l'autre donnant une base indirecte. Le vecteur y étant unitaire, ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ s'écrivent $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour un réel θ.
Existence. L'endomorphisme u de matrice $R(\theta)$ dans $\mathcal{B}$ est une rotation vectorielle, et sa première colonne dit que $u(x) = \cos\theta\, x + \sin\theta\, x' = y$.
Unicité. Si v est une rotation vectorielle telle que $v(x) = y$, sa matrice dans $\mathcal{B}$ est un $R(\theta')$ dont la première colonne, $(\cos\theta', \sin\theta')$, est celle de y. Donc $\cos\theta' = \cos\theta$ et $\sin\theta' = \sin\theta$, soit $R(\theta') = R(\theta)$ et $v = u$. □

Définition 9.54 (Angle orienté de deux vecteurs)

Supposons E orienté et soient $x, y \in E$ non nuls. On appelle mesure de l'angle orienté (x, y) toute mesure de l'angle de l'unique rotation vectorielle envoyant $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$. Elle est définie modulo 2π.

Proposition 9.55 (Calcul d'un angle orienté)

Supposons E orienté, soient $x, y \in E$ non nuls, θ une mesure de l'angle orienté (x, y) et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Alors

$$\cos\theta = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\det_{\mathcal{B}}(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Démonstration

Posons $x_1 = \frac{x}{\|x\|}$ et complétons-le en une base orthonormée directe (x_1, x'). Par définition, θ est une mesure de l'angle de la rotation u qui envoie x_1 sur $\frac{y}{\|y\|}$; la base (x_1, x') étant orthonormée directe, $\mathrm{Mat}_{(x_1,x')}(u) = R(\theta)$, et la première colonne de cette matrice donne $\frac{y}{\|y\|} = u(x_1) = \cos\theta\, x_1 + \sin\theta\, x'$ (comme dans la preuve précédente). Donc $\langle x,\, y\rangle = \|x\|\,\|y\|\,\langle x_1,\, \cos\theta\, x_1 + \sin\theta\, x'\rangle = \|x\|\,\|y\|\cos\theta$. De même, par bilinéarité et caractère alterné du déterminant,

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \|x\|\,\|y\|\,\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cos\theta\, x_1 + \sin\theta\, x') = \|x\|\,\|y\|\sin\theta\,\det_{\mathcal{B}}(x_1, x'),$$

et $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x')$ est le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à (x_1, x'), deux bases orthonormées directes : il vaut 1. □

Exemple 9.56

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son orientation usuelle, soient $x = (1, 0)$ et $y = (1, 1)$. On a $\langle x,\, y\rangle = 1$, $\|x\|\,\|y\| = \sqrt{2}$ et $\det(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, donc $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. L'angle orienté (y, x) a pour mesure $-\frac{\pi}{4}$: le déterminant change de signe quand on échange les deux vecteurs, pas le produit scalaire.

3. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien

Il reste à identifier les isométries vectorielles de déterminant -1.

Proposition 9.57 (Classification)

Soit u une isométrie vectorielle du plan euclidien E.

1. Si $\det u = 1$, alors u est une rotation vectorielle.
2. Si $\det u = -1$, alors u est une réflexion. Plus précisément, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S(\theta)$ dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, alors u est la réflexion par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\theta}{2}\, e_2\right)$.

Démonstration

Le premier point est la définition. Pour le second, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de déterminant -1, donc vaut $S(\theta)$ pour un réel θ. Comme $S(\theta)^2 = I_2$, on a $u \circ u = \mathrm{Id}_E$: u est une symétrie, et c'est une isométrie vectorielle, donc une symétrie orthogonale. Son déterminant vaut $(-1)^{\dim \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E)}$, comme on le lit dans une base adaptée à $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ (cf. l'exemple « Déterminant d'une symétrie orthogonale »); $\det u = -1$ impose donc que $\dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ soit impaire, soit $\dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = 1$ puisque $\dim E = 2$, et $\dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = 1$: u est une réflexion. Enfin, le vecteur $a = \cos\frac{\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\theta}{2}\, e_2$ vérifie, par les formules d'addition,

$$S(\theta)\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

donc $u(a) = a$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(a)$. □

Remarque

Les isométries vectorielles d'un plan euclidien sont donc les rotations vectorielles et les réflexions, et rien d'autre. Les premières sont de déterminant 1, les secondes de déterminant -1 : le déterminant suffit à les distinguer.

Corollaire 9.58 (Composée de deux réflexions)

La composée de deux réflexions de E est une rotation vectorielle.

Démonstration

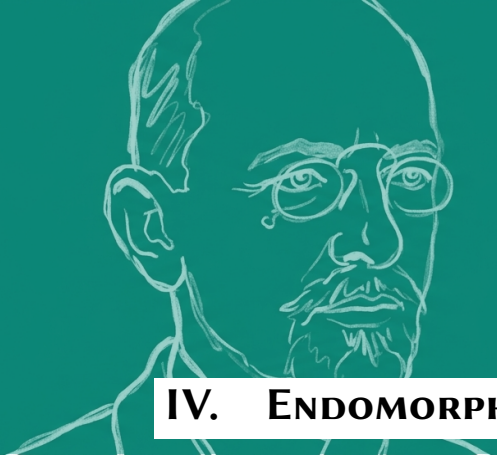
La composée de deux isométries vectorielles en est une, et son déterminant est le produit des déterminants, $(-1) \times (-1) = 1$. □

Exemple 9.59 (Angle de la composée de deux réflexions)

Supposons E orienté et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe. Soient s_1 et s_2 les réflexions de matrices $S(\alpha)$ et $S(\beta)$ dans $\mathcal{B}$, d'axes dirigés par les vecteurs d'angles $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ avec e_1. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_2 \circ s_1) = S(\beta)S(\alpha) = R(\beta - \alpha) :$$

$s_2 \circ s_1$ est la rotation d'angle $\beta - \alpha$, le double de l'angle $\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$ qui mène de l'axe de s_1 à celui de s_2. Dans l'exemple « Les symétries orthogonales » de la section I, $s_1 : (x, y) \mapsto (x, -y)$ et $s_2 : (x, y) \mapsto (y, x)$ ont pour matrices $S(0)$ et $S(\frac{\pi}{2})$, et l'on retrouve $s_2 \circ s_1 = r_{\pi/2}$.



9 Endomorphismes des espaces euclidiens

IV. Endomorphismes autoadjoints

Dans cette section, E est de nouveau un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ quelconque.

1. Généralités

On vient de voir que la transposée caractérise les matrices des isométries vectorielles : ce sont celles qui vérifient $A^\top A = I_n$. Posons la question dans l'autre sens. D'autres familles de matrices connues se définissent à l'aide de la transposée : les matrices symétriques, pour lesquelles $A^\top = A$, et les matrices antisymétriques, pour lesquelles $A^\top = -A$. Quels endomorphismes ont ces matrices dans une base orthonormée ? Y a-t-il une interprétation en termes de produit scalaire ? On étudie dans cette section le cas des matrices symétriques. Celui des matrices antisymétriques est hors programme, mais il se rencontre en exercice aux concours.

Pour une matrice symétrique, le lemme « Produit scalaire en coordonnées » répond tout de suite. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme dont la matrice A dans $\mathcal{B}$ est symétrique. Pour $x, y \in E$ de colonnes X et Y,

$$\langle u(x),\, y\rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = X^\top AY = \langle x,\, u(y)\rangle .$$

L'endomorphisme u passe d'un côté à l'autre du produit scalaire. C'est cette propriété, qui ne fait plus intervenir de base, que l'on prend pour définition.

Définition 9.60 (Endomorphisme autoadjoint)

Un endomorphisme u de E est dit autoadjoint lorsque

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u(y)\rangle .$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Proposition 9.61 (Structure de $\mathcal{S}(E)$)

$\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration

L'endomorphisme nul est autoadjoint, donc $\mathcal{S}(E)$ n'est pas vide. Soient $u, v \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour $x, y \in E$, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle (\lambda u + \mu v)(x),\, y\rangle = \lambda \langle u(x),\, y\rangle + \mu \langle v(x),\, y\rangle = \lambda \langle x,\, u(y)\rangle + \mu \langle x,\, v(y)\rangle = \langle x,\, (\lambda u + \mu v)(y)\rangle .$$

Donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{S}(E)$. □

Exemple 9.62 (Composée de deux endomorphismes autoadjoints)

Soient $u, v \in \mathcal{S}(E)$. Pour $x, y \in E$,

$$\langle (u \circ v)(x),\, y\rangle = \langle v(x),\, u(y)\rangle = \langle x,\, (v \circ u)(y)\rangle\,.$$

Si u et v commutent, le membre de droite vaut $\langle x,\, (u \circ v)(y)\rangle$ et $u \circ v$ est autoadjoint. Réciproquement, si $u \circ v$ est autoadjoint, alors $\langle x,\, (u \circ v)(y)\rangle = \langle x,\, (v \circ u)(y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$, donc $(u \circ v)(y) - (v \circ u)(y)$ est orthogonal à tout vecteur de E et est nul : u et v commutent. Ainsi $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si u et v commutent, et $\mathcal{S}(E)$ n'est pas stable par composition en général.

Exemple 9.63 (Homothéties)

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'homothétie $\lambda \operatorname{Id}_E$ est autoadjointe : $\langle \lambda x,\, y\rangle = \lambda \langle x,\, y\rangle = \langle x,\, \lambda y\rangle$.

Exemple 9.64 (Projecteurs orthogonaux)

Soit F un sous-espace de E et p la projection orthogonale sur F. Pour $x, y \in E$, écrivons $y = p(y) + (y - p(y))$ avec $p(y) \in F$ et $y - p(y) \in F^\perp$. Comme $p(x) \in F$,

$$\langle p(x),\, y\rangle = \langle p(x),\, p(y)\rangle + \langle p(x),\, y - p(y)\rangle = \langle p(x),\, p(y)\rangle\,.$$

Cette expression est symétrique en x et y, donc $\langle p(x),\, y\rangle = \langle p(y),\, x\rangle = \langle x,\, p(y)\rangle$: p est autoadjoint.

Exemple 9.65 (Symétries orthogonales)

Soit s la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F de E, et p_F la projection orthogonale sur F. La symétrie s se fait parallèlement à $F^\perp$: pour $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in F^\perp$, on a $p_F(x) = a$ et $s(x) = a - b = 2a - x$, donc $s = 2p_F - \operatorname{Id}_E$ (cf. la remarque « Lecture géométrique »). Comme p_F et Id_E sont autoadjoints et que $\mathcal{S}(E)$ est un espace vectoriel, s est autoadjoint.

Un projecteur quelconque n'a aucune raison d'être autoadjoint : la relation $p \circ p = p$ ne fait pas intervenir le produit scalaire. Le calcul de l'exemple « Projecteurs orthogonaux » repose sur l'orthogonalité de l'image et du noyau, et il la caractérise en fait.

Proposition 9.66 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux)

Soit p un projecteur de E. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint.

Démonstration

Supposons que p est la projection orthogonale sur un sous-espace F. Pour $x, y \in E$, comme $p(x) \in F$ et $y - p(y) \in F^\perp$, $\langle p(x),\, y\rangle = \langle p(x),\, p(y)\rangle$, expression symétrique en x et y ; donc $\langle p(x),\, y\rangle = \langle x,\, p(y)\rangle$ et p est autoadjoint (exemple « Projecteurs orthogonaux »). Réciproquement, supposons p autoadjoint. Rappelons que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ et que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Soient $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p$, de sorte que $p(y) = y$. Alors

$$\langle x,\, y\rangle = \langle x,\, p(y)\rangle = \langle p(x),\, y\rangle = \langle 0_E,\, y\rangle = 0.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$. Réciproquement, soit $y \in (\operatorname{Im} p)^\perp$. Comme $y - p(y) \in \operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$, le vecteur $p(y) = y - (y - p(y))$ appartient à $(\operatorname{Im} p)^\perp \cap \operatorname{Im} p = \{0_E\}$, donc $y \in \operatorname{Ker} p$. Ainsi

$\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$: p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} p$. □

Remarque (Isométrie vectorielle et autoadjoint)

Que se passe-t-il si u est à la fois une isométrie vectorielle et un endomorphisme autoadjoint ? Pour $x, y \in E$, $\langle u(u(x)),\, y\rangle = \langle u(x),\, u(y)\rangle = \langle x,\, y\rangle$, donc $u(u(x)) - x$ est orthogonal à tout vecteur de E et est nul : $u \circ u = \mathrm{Id}_E$, et u est une symétrie. De plus, pour $a \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $b \in \operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$, $\langle a,\, b\rangle = \langle u(a),\, b\rangle = \langle a,\, u(b)\rangle = -\langle a,\, b\rangle$, donc $\langle a,\, b\rangle = 0$: u est une symétrie orthogonale. Comme les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles autoadjointes, ce sont exactement les endomorphismes qui vérifient les deux propriétés.

Revenons à la question posée en début de section : la symétrie de la matrice dans une base orthonormée caractérise-t-elle les endomorphismes autoadjoints ?

Proposition 9.67 (Matrice d'un endomorphisme autoadjoint)

Soit u un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est autoadjoint ;
2. pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique ;
3. il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit symétrique.

Démonstration

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Pour $x, y \in E$ de colonnes X et Y, les colonnes de $u(x)$ et $u(y)$ sont AX et AY, et le lemme « Produit scalaire en coordonnées » donne

$$\langle u(x),\, y\rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y \qquad \text{et} \qquad \langle x,\, u(y)\rangle = X^\top AY.$$

Si A est symétrique, les deux membres sont égaux et u est autoadjoint : c'est le calcul du début de la section, et il montre que (3) implique (1). Réciproquement, si u est autoadjoint, alors $X^\top A^\top Y = X^\top AY$ pour toutes colonnes X et Y. En prenant pour X et Y les colonnes E_i et E_j de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient l'égalité des coefficients d'indice (i, j) de $A^\top$ et de A : A est symétrique. La base orthonormée $\mathcal{B}$ étant quelconque, (1) implique (2). Enfin (2) implique (3), puisque E possède des bases orthonormées. □

Exemple 9.68 (Retour sur l'isométrie vectorielle de la section I)

L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple « Reconnaître une isométrie vectorielle » a pour matrice dans la base canonique $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, qui n'est pas symétrique : u n'est pas autoadjoint. Une isométrie vectorielle autoadjointe est une symétrie orthogonale (remarque « Isométrie vectorielle et autoadjoint ») : u ne pouvait être autoadjoint qu'en étant une symétrie orthogonale.

Remarque (Rôle de la base orthonormée)

Comme pour les isométries vectorielles, l'hypothèse « orthonormée » ne se retire pas. Dans $\mathbb{R}^2$, soit p la projection sur $\operatorname{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((1, 1))$. Dans

la base $((1,0),(1,1))$, qui n'est pas orthonormée, sa matrice est $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, symétrique. Pourtant p n'est pas un projecteur orthogonal, puisque $(1,0)$ et $(1,1)$ ne sont pas orthogonaux, donc p n'est pas autoadjoint. On le lit dans la base canonique : $p(0,1) = p((1,1)-(1,0)) = -(1,0)$, d'où

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(p) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

qui n'est pas symétrique.

Remarque (Vocabulaire)

Cette correspondance explique le nom d'*endomorphisme symétrique* que l'on rencontre encore : c'est un endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée est symétrique. Le programme lui préfère « endomorphisme autoadjoint », et c'est ce terme que nous employons.

Comme pour les isométries vectorielles, on termine par une propriété de stabilité, qui servira à réduire les endomorphismes autoadjoints.

Proposition 9.69 (Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration

Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, $\langle u(y), x\rangle = \langle y, u(x)\rangle = 0$, car $u(x) \in F$. Donc $u(y) \in F^\perp$. La preuve est plus courte que pour les isométries vectorielles : on n'a pas eu besoin de u^{-1}. □

2. Théorème spectral

Lemme 9.70 (Sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et λ, μ deux valeurs propres distinctes de u. Alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Démonstration

Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

donc $(\lambda-\mu)\langle x, y\rangle = 0$ et, comme $\lambda \neq \mu$, $\langle x, y\rangle = 0$. □

Théorème 9.71 (Théorème spectral)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u est diagonalisable et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u. Autrement dit, les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux et leur somme est E.

Démonstration

Hors-programme. Elle repose sur la stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable et sur l'existence d'une valeur propre réelle pour tout endomorphisme autoadjoint. Elle est rédigée dans un exercice de la section « Pour aller plus loin ». □

Corollaire 9.72 (Forme matricielle du théorème spectral)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\top}.$$

Autrement dit, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, et la matrice de passage peut être choisie orthogonale.

Démonstration

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Munissons $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, pour lequel la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est A, symétrique, donc u est autoadjoint. Le théorème spectral fournit une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de u. Notons $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, qui est diagonale, et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage, qui est orthogonale comme matrice de passage entre deux bases orthonormées (proposition « Matrices de passage entre bases orthonormées »). La formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$, et $P^{-1} = P^{\top}$. □

Exemple 9.73 (Diagonaliser une matrice symétrique en base orthonormée)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Elle est symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée.
On a $A = I_3 + J$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. La matrice J est de rang 1, donc 0 est valeur propre de J avec un sous-espace propre de dimension 2, le plan F d'équation $x + y + z = 0$; et $J(1,1,1) = 3(1,1,1)$. Ainsi A a pour valeurs propres 1, sur le plan F, et 4, sur la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$.
Il reste à choisir une base orthonormée de chaque sous-espace propre. Le vecteur $(1,-1,0)$ est dans F ; un vecteur de F qui lui est orthogonal est $(1,1,-2)$. Après normalisation, on pose

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Les sous-espaces propres F et $\mathrm{Vect}((1,1,1))$ de la matrice symétrique A sont associés aux valeurs propres distinctes 1 et 4, donc orthogonaux (lemme « Sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint »), donc (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, et

$$A = PDP^{\top} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dans un sous-espace propre de dimension 3 ou plus, on orthonormaliserait une base par l'algorithme de Gram-Schmidt.

Remarque (Réciproque)

Une matrice diagonalisable n'est pas symétrique en général : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable, sans être symétrique. Le théorème ne s'étend pas non plus aux matrices symétriques complexes : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est de trace et de déterminant nuls, donc de polynôme caractéristique X^2, et n'est pas diagonalisable puisqu'elle n'est pas nulle. L'hypothèse « réelle » compte.

3. Endomorphismes autoadjoints positifs

Un endomorphisme u de E permet de fabriquer une nouvelle application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ à partir du produit scalaire.

Proposition 9.74 (Forme bilinéaire associée à un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme de E. L'application

$$\varphi_u : E \times E \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \langle x,\ u(y)\rangle$$

est bilinéaire. Elle est symétrique si et seulement si u est autoadjoint.

Démonstration

La linéarité en x est celle du produit scalaire. La linéarité en y vient de celle de u puis de celle du produit scalaire : pour $y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle x,\ u(\lambda y + y')\rangle = \langle x,\ \lambda u(y) + u(y')\rangle = \lambda\langle x,\ u(y)\rangle + \langle x,\ u(y')\rangle$. Enfin, pour $x, y \in E$, $\varphi_u(y, x) = \langle y,\ u(x)\rangle = \langle u(x),\ y\rangle$, donc φ_u est symétrique si et seulement si $\langle x,\ u(y)\rangle = \langle u(x),\ y\rangle$ pour tous $x, y \in E$, c'est-à-dire si et seulement si u est autoadjoint. □

Pour u autoadjoint, φ_u possède donc deux des quatre propriétés d'un produit scalaire. Les deux autres, la positivité et le caractère défini, portent sur $\varphi_u(x, x) = \langle x,\ u(x)\rangle = \langle u(x),\ x\rangle$. Elles donnent leur nom aux endomorphismes qui les satisfont.

Définition 9.75 (Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On dit que u est positif lorsque

$$\forall x \in E,\ \langle u(x),\ x\rangle \geqslant 0,$$

et qu'il est défini positif lorsque de plus

$$\forall x \in E,\ \langle u(x),\ x\rangle = 0 \implies x = 0_E.$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E et $\mathcal{S}^{++}(E)$ celui des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

Remarque (Un nouveau produit scalaire)

Par construction, $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si φ_u est un produit scalaire sur E. Un endomorphisme autoadjoint défini positif fournit ainsi un nouveau produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x,\ u(y)\rangle$ sur E.

Remarque (Une autre formulation)

Un endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$ est défini positif si et seulement si $\langle u(x),\, x\rangle > 0$ pour tout $x \neq 0_E$: les deux conditions de la définition disent exactement que $\langle u(x),\, x\rangle$ est positif et ne s'annule qu'en 0_E.

Exemple 9.76 (Homothéties)

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $\langle \lambda x,\, x\rangle = \lambda \|x\|^2$. Donc $\lambda \operatorname{Id}_E \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si $\lambda \geqslant 0$, et $\lambda \operatorname{Id}_E \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $\lambda > 0$.

Exemple 9.77 (Projecteurs orthogonaux)

Soit p un projecteur orthogonal de E, projection orthogonale sur $F = \operatorname{Im} p$. Un projecteur orthogonal est autoadjoint et, pour $x \in E$, comme $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$, $\langle p(x),\, x\rangle = \langle p(x),\, p(x)\rangle + \langle p(x),\, x - p(x)\rangle = \|p(x)\|^2 \geqslant 0$ (cf. le calcul de l'exemple « Projecteurs orthogonaux » de la sous-section précédente, pour $y = x$) : $p \in \mathcal{S}^+(E)$. De plus $\langle p(x),\, x\rangle = 0$ si et seulement si $p(x) = 0_E$, donc $p \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $\operatorname{Ker} p = \{0_E\}$, c'est-à-dire $p = \operatorname{Id}_E$.

Comme toujours dans ce chapitre, on traduit ces notions sur les matrices.

Définition 9.78 (Matrice symétrique positive, définie positive)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top A X \geqslant 0,$$

et qu'elle est définie positive lorsque de plus

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top A X = 0 \implies X = 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives.

Proposition 9.79 (Lecture matricielle)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{S}(E)$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration

La matrice A est symétrique, car u est autoadjoint et $\mathcal{B}$ est orthonormée (proposition « Matrice d'un endomorphisme autoadjoint »). Pour $x \in E$ de colonne X, la colonne de $u(x)$ est AX, et le lemme « Produit scalaire en coordonnées » donne $\langle u(x),\, x\rangle = \langle x,\, u(x)\rangle = X^\top A X$. Comme $x \mapsto X$ est une bijection de E sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui envoie 0_E sur 0, les conditions sur u et sur A se correspondent. □

Exemple 9.80 (Les matrices $M^\top M$)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La matrice $M^\top M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique, car $(M^\top M)^\top =$

$M^\top (M^\top)^\top = M^\top M$, et pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top \left(M^\top M\right) X = (MX)^\top (MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0,$$

pour la norme usuelle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $M^\top M \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$. Elle est définie positive si et seulement si $MX = 0$ entraîne $X = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Ker} M = \{0\}$. Pour M carrée, c'est dire que M est inversible.

Le théorème spectral permet de lire la positivité sur les valeurs propres.

Proposition 9.81 (Caractérisation spectrale)

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

1. $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$;
2. $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Supposons u positif, et soit λ une valeur propre de u, de vecteur propre $x \neq 0_E$. Alors $\langle u(x),\, x\rangle = \langle \lambda x,\, x\rangle = \lambda \|x\|^2 \geqslant 0$ et $\|x\|^2 > 0$, donc $\lambda \geqslant 0$. Si u est défini positif, $\langle u(x),\, x\rangle \geqslant 0$ et, comme $x \neq 0_E$, $\langle u(x),\, x\rangle \neq 0$, donc $\langle u(x),\, x\rangle > 0$ (remarque « Une autre formulation »), et $\lambda > 0$. Ce sens n'utilise pas le théorème spectral.
Réciproquement, le théorème spectral fournit une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \operatorname{Sp}(u)$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$, et le lemme « Produit scalaire en coordonnées » donne

$$\langle u(x),\, x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Si tous les λ_i sont positifs, cette somme est positive et u est positif. Si tous les λ_i sont strictement positifs et si $\langle u(x),\, x\rangle = 0$, alors chaque $\lambda_i x_i^2$ est nul, donc chaque x_i est nul et $x = 0_E$: u est défini positif. □

Corollaire 9.82 (Caractérisation spectrale des matrices symétriques)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Pour le produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormée et u est autoadjoint, de matrice A. Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$, et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $u \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}^n)$ (proposition « Lecture matricielle »). Par la caractérisation spectrale, cela revient à $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, respectivement $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, et $\operatorname{Sp}(u) = \operatorname{Sp}(A)$. □

Exemple 9.83 (Positivité et signe des coefficients)

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X-2)^2 - 1 = (X-1)(X-3)$: ses valeurs propres 1 et 3 sont strictement positives, donc $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X-1)^2 - 4 = (X+1)(X-3)$: la valeur

propre -1 montre que B n'est pas positive, bien que tous ses coefficients le soient. On le vérifie avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $X^\top BX = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$.