

10

Séries entières

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)

Le chapitre sur les suites et séries de fonctions a donné des outils pour étudier la somme d'une série de fonctions : convergence simple, uniforme, normale, puis continuité, intégration et dérivation terme à terme. Ces théorèmes demandent à chaque fois de vérifier des hypothèses de convergence, souvent sur des segments bien choisis.
Les séries entières sont les séries de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, qui prolongent les polynômes. Pour elles, une grande partie de ce travail se fait une fois pour toutes. Pour quelles valeurs de z la série converge-t-elle, et comment calculer le rayon de convergence qui sépare la convergence de la divergence ? La somme est-elle continue, dérivable, et peut-on la dériver ou la primitiver terme à terme ? On renverse ensuite la question : quelles fonctions sont la somme d'une série entière, et de quelle façon ? On obtient les développements des fonctions usuelles, par la formule de Taylor ou par une équation différentielle, puis on passe à la variable complexe pour les séries géométrique et exponentielle. Le chapitre se termine par deux applications : la résolution d'une équation différentielle linéaire et celle d'une relation de récurrence.

Programme officiel

Suites et séries de fonctions

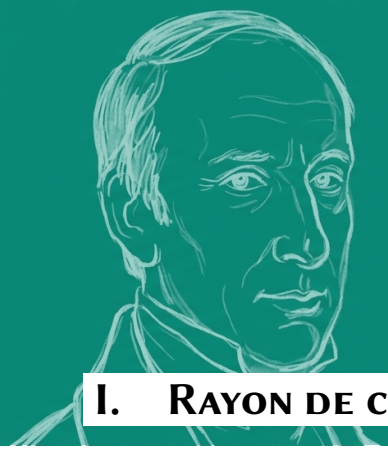
C – Séries entières

a) Rayon de convergence

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe



10 Séries entières

I. Rayon de convergence

1. Généralités

Définition 10.1 (Série entière)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite fixée de nombres complexes. On appelle **série entière de la variable réelle ou complexe z associée à cette suite** la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont les fonctions de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par : $f_n(z) = a_n z^n$.
(a_n) est appelée la suite des coefficients de cette série entière. La série entière elle-même est notée $\sum a_n z^n$.

Remarque

Les notations sont ambiguës. Suivant le contexte, $\sum a_n z^n$ peut désigner la série entière (et donc une série de fonctions) ou bien la série numérique avec z fixé.

Exemple 10.2

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est associée à la suite de coefficients $a_n = \frac{1}{n!}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$, la série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (tous ses termes sont nuls à partir du rang 1). Si $z \neq 0$, ses termes sont non nuls et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

Par la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. La série numérique $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge donc absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$; pour z réel, sa somme est e^z.

Lemme 10.3 (Lemme d'Abel)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $(a_n z_0^n)$ est bornée alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Soit $M \geqslant 0$ tel que $\left|a_n z_0^n\right| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. En particulier $z_0 \neq 0$, et l'on pose $q = \frac{|z|}{|z_0|} \in [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n\right| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leqslant M q^n.$$

La série géométrique $\sum M q^n$ converge car $0 \leqslant q < 1$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n z^n|$ converge : la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. □

Définition 10.4 (Rayon de convergence)

On appelle rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure dans $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Remarque

On note parfois le rayon de convergence $R\left(\sum a_n z^n\right)$.

Remarque

Notons $I = \{r \geqslant 0 \ : \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. L'ensemble I contient 0 (la suite $(a_n 0^n)$ vaut a_0 puis 0), donc sa borne supérieure dans $[0, +\infty]$ existe. De plus, si $r \in I$ et $0 \leqslant r' \leqslant r$, alors $|a_n r'^n| \leqslant |a_n r^n|$ pour tout n, donc $r' \in I$: l'ensemble I est un intervalle d'extrémités 0 et R. Lorsque R est fini, I peut contenir R ou non (voir les deux exemples suivants).

Exemple 10.5

Le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1. En effet, pour $r \in [0, 1]$, la suite (r^n) est bornée par 1, et pour $r > 1$, $r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. L'ensemble des r tels que (r^n) est bornée est exactement $[0, 1]$, de borne supérieure 1, atteinte.

Exemple 10.6

Le rayon de convergence de $\sum nz^n$ est 1. En effet, pour $r \in [0, 1[$, $nr^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc la suite (nr^n) est bornée ; pour $r \geqslant 1$, $nr^n \geqslant n$, donc la suite n'est pas bornée. L'ensemble des r tels que (nr^n) est bornée est $[0, 1[$: la borne supérieure 1 n'est pas atteinte.

Exemple 10.7

De manière générale, $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (quitte à commencer la somme à $n = 1$). En effet, soit $r > 0$. Si $r < 1$, $n^\alpha r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc la suite $(n^\alpha r^n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Si $r > 1$, $n^\alpha r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées, donc la suite n'est pas bornée. L'ensemble des r tels que $(n^\alpha r^n)$ est bornée contient $[0, 1[$ et est contenu dans $[0, 1]$: sa borne supérieure est 1.

Exemple 10.8

Le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$. En effet, pour tout $r \geqslant 0$, la série $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge (premier exemple du chapitre), donc son terme général tend vers 0 et la suite $\left(\frac{r^n}{n!}\right)$ est bornée. L'ensemble considéré est $\mathbb{R}_+$, de borne supérieure $+\infty$.

Exemple 10.9

Le rayon de convergence de $\sum n!z^n$ est 0. En effet, soit $r > 0$. La série $\sum \frac{(1/r)^n}{n!}$ converge (exemple précédent), donc son terme général tend vers 0 : $\frac{1}{n!\, r^n} =$

$\frac{(1/r)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $n!\,r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la suite $(n!\,r^n)$ n'est pas bornée. L'ensemble considéré est $\{0\}$.

Proposition 10.10

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

- Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration

Notons I l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, de sorte que $R = \sup I$. Soit z tel que $|z| < R$. Le réel $|z|$ est strictement inférieur à la borne supérieure de I : ce n'est donc pas un majorant de I, et il existe $r \in I$ tel que $r > |z|$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée et $|z| < r = |r|$: par le lemme d'Abel appliqué avec $z_0 = r$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Soit z tel que $|z| > R$ (ce qui impose $R < +\infty$). Supposons par l'absurde que $a_n z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Une suite convergente est bornée, donc la suite $(a_n z^n)$ est bornée, et comme $|a_n\,|z|^n| = |a_n z^n|$ pour tout n, la suite $(a_n\,|z|^n)$ l'est aussi : $|z| \in I$. Par définition de la borne supérieure, $|z| \leqslant R$, ce qui contredit $|z| > R$. Ainsi $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0 : la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. □

Remarque

Si $|z| = R$, on ne peut pas *a priori* conclure : suivant la série entière et suivant le point z du cercle, la série numérique $\sum a_n z^n$ peut converger absolument, converger sans converger absolument, ou diverger.

Exemple 10.11

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 (cas $\alpha = -1$ des séries $\sum n^\alpha z^n$).

- Pour $z = -1$, la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par critère spécial des séries alternées, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ étant décroissante et de limite nulle. Elle ne converge pas absolument, puisque $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et que la série harmonique diverge.
- Pour $z = 1$, la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique, qui diverge.

Exemple 10.12

La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1. En tout point du cercle $|z| = 1$, la série numérique $\sum z^n$ diverge grossièrement, puisque $|z^n| = 1$.

Exemple 10.13

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence 1 (cas $\alpha = -2$ des séries $\sum n^\alpha z^n$). En tout point du cercle $|z| = 1$, la série numérique $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument, puisque $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

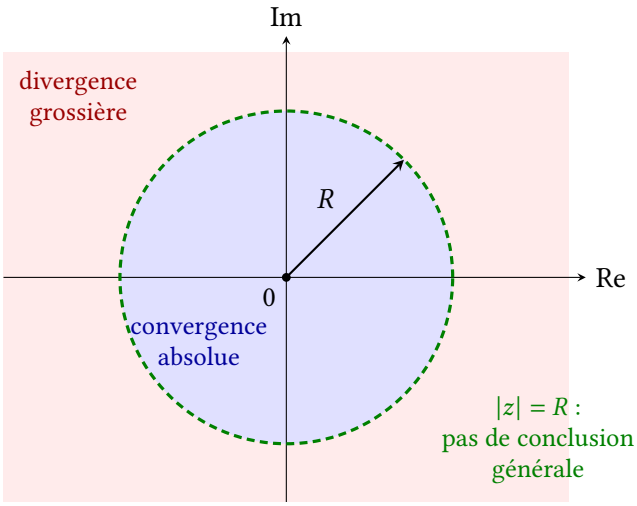
Définition 10.14 (Intervalle ouvert et disque ouvert de convergence)

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.
Pour une série entière de la variable réelle, on appelle intervalle ouvert de convergence l'intervalle $]-R, R[$.
Pour une série entière de la variable complexe, on appelle disque ouvert de convergence l'ensemble $\mathring{B}(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$.

Remarque

Si $R = +\infty$, l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbb{R}$ et le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$. Si $R = 0$, ils sont vides, et la série ne converge qu'en $z = 0$.

La proposition précédente se lit sur le schéma suivant : dans le disque ouvert de convergence, la série converge absolument ; à l'extérieur du disque fermé, elle diverge grossièrement ; sur le cercle, on ne peut pas conclure en général.



Remarque

Le cercle $S(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\}$ est le bord du disque ouvert de convergence. Sur ce cercle, le comportement de la série numérique $\sum a_n z^n$ dépend de la série entière et du point considéré ; aucun résultat général ne permet de conclure.

2. Calcul de rayon de convergence

Le rayon de convergence se détermine rarement par la seule définition. Les résultats de cette sous-section permettent de le calculer à partir de la nature de la série en un point, d'une comparaison des coefficients ou de la règle de d'Alembert.

Proposition 10.15

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On note R son rayon de convergence. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $R \leqslant |z_0|$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente (convergente mais pas absolument) alors $R = |z_0|$.

Démonstration

Les trois points découlent de ce que la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$ et diverge grossièrement si $|z| > R$ (proposition de la page 4).

- Supposons que $\sum a_n z_0^n$ converge. Son terme général tend vers 0, donc elle ne diverge pas grossièrement. Si l'on avait $|z_0| > R$, elle divergerait grossièrement ; donc $|z_0| \leqslant R$.
- Supposons que $\sum a_n z_0^n$ diverge. Si l'on avait $|z_0| < R$, elle convergerait absolument, donc convergerait ; donc $|z_0| \geqslant R$.
- Supposons que $\sum a_n z_0^n$ converge sans converger absolument. Par le premier point, $R \geqslant |z_0|$. Si l'on avait $|z_0| < R$, la série convergerait absolument, ce qui est exclu. Donc $R = |z_0|$.

□

Exemple 10.16

La série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge par critère spécial des séries alternées et ne converge pas absolument. La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est donc semi-convergente en $z_0 = -1$, et son rayon de convergence est $|-1| = 1$ (proposition précédente), ce que l'on avait obtenu par la définition.

Proposition 10.17 (Comparaison de séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On note R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- *A fortiori,* si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$. En particulier, si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Démonstration

Notons I_a (resp. I_b) l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ (resp. $(b_n r^n)$) est bornée, de sorte que $R_a = \sup I_a$ et $R_b = \sup I_b$.

- Supposons $a_n = \mathrm{O}(b_n)$: il existe $M \geqslant 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|a_n| \leqslant M|b_n|$ pour tout $n \geqslant n_0$. Soit $r \in I_b$, et soit $B \geqslant 0$ tel que $|b_n r^n| \leqslant B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant n_0$,
$$|a_n r^n| \leqslant M|b_n r^n| \leqslant MB,$$
et les termes d'indice $n < n_0$ sont en nombre fini : la suite $(a_n r^n)$ est bornée, donc $r \in I_a$. Ainsi $I_b \subset I_a$, et $R_b = \sup I_b \leqslant \sup I_a = R_a$.
- Si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et le point précédent s'applique.
- Supposons $|a_n| \sim |b_n|$. On a alors $|a_n| = \mathrm{O}(|b_n|)$ et $|b_n| = \mathrm{O}(|a_n|)$, c'est-à-dire $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et $b_n = \mathrm{O}(a_n)$. Par le premier point, $R_a \geqslant R_b$ et $R_b \geqslant R_a$, donc $R_a = R_b$.
Si $a_n \sim b_n$, il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $a_n = b_n(1+\varepsilon_n)$ à partir d'un certain rang. Alors $|a_n| = |b_n|\,|1+\varepsilon_n|$ et $|1+\varepsilon_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: on a $|a_n| \sim |b_n|$, et l'on conclut par ce qui précède.

□

Remarque

La suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $(|a_n|\, r^n)$ l'est : les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n|\, z^n$ ont le même rayon de convergence. Pour le rayon de convergence, seul le module des coefficients compte.

Il n'en va pas de même sur le cercle $|z| = R$. En un point de ce cercle, la convergence absolue ne dépend que des modules, puisque $|a_n z^n| = |a_n| R^n$, mais la convergence dépend aussi des arguments des coefficients. Par exemple, les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$ ont des coefficients de même module et pour rayon de convergence 1 ; en $z = 1$, la première converge par critère spécial des séries alternées, et la seconde, qui est la série harmonique, diverge.

Exemple 10.18

Déterminons le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ où $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+2}$. On a $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Par comparaison avec $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$, de rayon 1, on obtient $R = 1$.

Exemple 10.19

Pour $n \geqslant 1$, on note a_n le nombre de diviseurs entiers strictement positifs de n, et l'on pose $a_0 = 0$. Déterminons le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$.
Pour tout $n \geqslant 1$, les diviseurs strictement positifs de n sont des entiers de $\{1, \dots, n\}$, et 1 en fait partie, donc $1 \leqslant a_n \leqslant n$.
Comme $a_n \leqslant n$ pour $n \geqslant 1$, on a $a_n = \mathrm{O}(n)$. Par comparaison avec $\sum nz^n$, de rayon 1, on obtient la minoration $R \geqslant 1$.
Comme $1 \leqslant a_n$ pour $n \geqslant 1$, on a $1 = \mathrm{O}(a_n)$. Par comparaison avec $\sum z^n$, de rayon 1, on obtient la majoration $R \leqslant 1$. Ainsi $R = 1$.

Proposition 10.20 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que ses coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang. Notons R son rayon de convergence.
Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0, +\infty]$ alors :

- si $\ell = 0$, alors $R = +\infty$;
- si $\ell \in \mathbb{R}_+^\star$ alors $R = \frac{1}{\ell}$;
- si $\ell = +\infty$ alors $R = 0$.

Démonstration

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$. Pour $z = 0$, les termes $a_n z^n$ sont nuls dès que $n \geqslant 1$ et le rapport n'a pas de sens ; on fixe donc $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $a_n z^n \neq 0$ et

$$\frac{\left|a_{n+1} z^{n+1}\right|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\,|z|,$$

avec la convention $\ell\,|z| = +\infty$ si $\ell = +\infty$. On applique la règle de d'Alembert pour les séries numériques à la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n z^n$, de même nature que $\sum a_n z^n$.

- Si $\ell = 0$, alors $\ell\,|z| = 0 < 1$ pour tout $z \neq 0$: la série $\sum a_n z^n$ converge, donc $R \geqslant |z|$ (proposition de la page 5). Ceci valant pour tout $z \neq 0$, $R = +\infty$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}_+^\star$ et $0 < |z| < \frac{1}{\ell}$, alors $\ell\,|z| < 1$: la série converge et $R \geqslant |z|$. En faisant tendre $|z|$ vers $\frac{1}{\ell}$, on obtient $R \geqslant \frac{1}{\ell}$. Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors $\ell\,|z| > 1$: la série diverge grossièrement et $R \leqslant |z|$. En faisant tendre $|z|$ vers $\frac{1}{\ell}$, on obtient $R \leqslant \frac{1}{\ell}$. Donc $R = \frac{1}{\ell}$.
- Si $\ell = +\infty$, alors pour tout $z \neq 0$ le rapport tend vers $+\infty$: la série diverge grossièrement et $R \leqslant |z|$. Ceci valant pour tout $z \neq 0$, $R = 0$.

□

Remarque

La proposition précédente s'utilise directement : dès que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ a une limite $\ell \in [0, +\infty]$, le rayon de convergence est $\frac{1}{\ell}$ (avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$), sans refaire l'étude de la série numérique $\sum a_n z^n$ pour chaque z.
Avant de l'appliquer, on vérifie ses deux hypothèses : les coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang, et le rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ a une limite. La réciproque est fausse : toute série entière a un rayon de convergence, alors que ce rapport peut ne pas être défini ou ne pas avoir de limite.

Exemple 10.21

Déterminons le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où $a_n = \frac{(2n)!}{n!\, n^n}$ (avec $0^0 = 1$). Les coefficients sont non nuls et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \frac{2(2n+1)}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

D'une part $\frac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$. D'autre part, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ et $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n \cdot \frac{1}{n} = 1$, donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ par continuité de l'exponentielle. Ainsi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{\mathrm{e}},$$

et par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $R = \frac{\mathrm{e}}{4}$.

Exemple 10.22

Pour $a_n = 2 + (-1)^n$, les coefficients sont non nuls, mais $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ vaut $\frac{1}{3}$ pour n pair et 3 pour n impair : le rapport n'a pas de limite, et la règle de d'Alembert ne s'applique pas. Comme $1 \leqslant a_n \leqslant 3$ pour tout n, on a $a_n = \mathrm{O}(1)$ et $1 = \mathrm{O}(a_n)$: par comparaison avec $\sum z^n$, le rayon de convergence est 1.

Méthode 10.23 (Calculer un rayon de convergence)

Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$, on essaie dans cet ordre :

1. **Comparaison.** Si l'on dispose d'un équivalent de a_n, d'une domination ou d'un encadrement de $|a_n|$, on compare avec une série entière de rayon connu, par exemple $\sum n^\alpha z^n$, de rayon 1, ou $\sum \frac{z^n}{n!}$, de rayon $+\infty$ (proposition de la page 6).
2. **Règle de d'Alembert.** Si les a_n sont non nuls à partir d'un certain rang et si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ a une limite $\ell \in [0, +\infty]$, alors $R = \frac{1}{\ell}$ (proposition de la page 7). C'est le cas typique des coefficients formés de factorielles, de produits ou de puissances, dont le rapport se simplifie.
3. **Nature en un point, définition.** À défaut, la nature de $\sum a_n z_0^n$ en un point z_0 donne une minoration ou une majoration de R (proposition de la page 5).

On peut aussi étudier pour quels $r \geqslant 0$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée : un r pour lequel elle l'est donne $R \geqslant r$, un r pour lequel elle ne l'est pas donne $R \leqslant r$.

Exemple 10.24

Déterminons le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ où $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Comparaison. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}, \quad \text{donc} \quad a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi $a_n = \mathrm{O}\left(n^{-1/2}\right)$ et $n^{-1/2} = \mathrm{O}(a_n)$. Par comparaison avec $\sum_{n\geqslant 1} n^{-1/2} z^n$, de rayon 1, on obtient $R \geqslant 1$ et $R \leqslant 1$, donc $R = 1$. La première étape de la méthode suffit.

Exemple 10.25

Déterminons le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ où $a_n = \frac{n^n}{n!}$ (avec $0^0 = 1$).
Comparaison. On ne dispose pas d'un équivalent de a_n qui ramène à une série entière de rayon connu.
Règle de d'Alembert. Les coefficients sont non nuls et leur rapport se simplifie : pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Comme $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n \cdot \frac{1}{n} = 1$, on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$ par continuité de l'exponentielle.
Par la règle de d'Alembert, $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exemple 10.26

Déterminons le rayon de convergence R de $\sum \cos(n) z^n$.
Comparaison. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\cos(n)| \leqslant 1$, donc $\cos(n) = \mathrm{O}(1)$: par comparaison avec $\sum z^n$, de rayon 1, on obtient $R \geqslant 1$. On ne dispose pas d'une comparaison dans l'autre sens.
Règle de d'Alembert. Le rapport $\frac{\cos(n+1)}{\cos(n)}$ ne se simplifie pas et l'on ne sait pas en déterminer la limite : on n'applique pas la règle.
Nature en un point. Montrons que la suite $(\cos(n))$ ne tend pas vers 0. Supposons par l'absurde que $\cos(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. Or $(\cos(2n))$ est une suite extraite de $(\cos(n))$, donc elle tend vers 0 : c'est absurde. La série numérique $\sum \cos(n)$ diverge donc grossièrement : la série entière diverge en $z_0 = 1$, donc $R \leqslant 1$ (proposition de la page 5). Ainsi $R = 1$.

On dit ici qu'une série entière est **lacunaire** lorsqu'une infinité de ses coefficients sont nuls. C'est le cas de $\sum b_p z^{2p}$: c'est la série entière $\sum a_n z^n$ de coefficients $a_{2p} = b_p$ et $a_{2p+1} = 0$. La règle de d'Alembert de la page 7 ne s'applique pas à une telle série. Pour z fixé, les termes nuls ne modifient pas les sommes partielles : les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_p z^{2p}$ sont de même nature.

Exemple 10.27

Pour la série entière $\sum z^{2p}$, les coefficients sont $a_{2p} = 1$ et $a_{2p+1} = 0$. Par la définition : pour $r \geqslant 0$, la suite $(a_n r^n)$ prend les valeurs r^{2p} et 0, elle est donc bornée si et seulement si $(r^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $r \leqslant 1$. Le rayon de convergence est 1.

Méthode 10.28 (Calculer le rayon de convergence d'une série lacunaire)

Pour déterminer le rayon de convergence R d'une série entière lacunaire :

1. **Changement de variable.** Si la série s'écrit $\sum b_p z^{2p}$, on détermine le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum b_p Z^p$ par la méthode précédente. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < \sqrt{\rho}$, alors $|z^2| < \rho$ et la série $\sum b_p (z^2)^p$ converge, donc $R \geqslant |z|$. Si $|z| > \sqrt{\rho}$, alors $|z^2| > \rho$ et la série diverge, donc $R \leqslant |z|$. Ainsi $R = \sqrt{\rho}$. On procède de même pour $\sum b_p z^{kp}$ avec $Z = z^k$.
2. **Règle de d'Alembert pour les séries numériques.** Si la série s'écrit $\sum b_p z^{n_p}$ avec des b_p non nuls, on fixe $z \neq 0$ et l'on étudie, selon la valeur de $|z|$, la limite du rapport $\frac{|u_{p+1}|}{|u_p|}$ où $u_p = b_p z^{n_p}$. Un z pour lequel la série converge donne $R \geqslant |z|$, un z pour lequel elle diverge donne $R \leqslant |z|$ (proposition de la page 5).
3. **Définition.** À défaut, on étudie pour quels $r \geqslant 0$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Exemple 10.29

Déterminons le rayon de convergence R de $\sum \frac{z^{2p}}{2^p}$ par changement de variable. La série entière $\sum \frac{Z^p}{2^p}$ a des coefficients $b_p = \frac{1}{2^p}$ non nuls, et $\left|\frac{b_{p+1}}{b_p}\right| = \frac{1}{2}$: par la règle de d'Alembert, son rayon de convergence est 2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < \sqrt{2}$, alors $|z^2| < 2$: la série $\sum \frac{(z^2)^p}{2^p}$ converge, donc $R \geqslant |z|$. Ceci valant pour tout z tel que $|z| < \sqrt{2}$, $R \geqslant \sqrt{2}$.
- Si $|z| > \sqrt{2}$, alors $|z^2| > 2$: la série $\sum \frac{(z^2)^p}{2^p}$ diverge, donc $R \leqslant |z|$. Ceci valant pour tout z tel que $|z| > \sqrt{2}$, $R \leqslant \sqrt{2}$.

Ainsi $R = \sqrt{2}$. La limite $\frac{1}{2}$ du rapport $\left|\frac{b_{p+1}}{b_p}\right|$ donne le rayon de convergence 2 de la série entière $\sum b_p Z^p$, et non celui de $\sum b_p z^{2p}$.

Exemple 10.30

Retrouvons le rayon de convergence R de $\sum \frac{z^{2p}}{2^p}$ par la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. On pose $u_p = \frac{z^{2p}}{2^p}$, non nul, et

$$\frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = \frac{|z|^2}{2}.$$

Si $|z| < \sqrt{2}$, alors $\frac{|z|^2}{2} < 1$: la série $\sum u_p$ converge, donc $R \geqslant |z|$. Si $|z| > \sqrt{2}$, alors $\frac{|z|^2}{2} > 1$: la série $\sum u_p$ diverge, donc $R \leqslant |z|$. Ainsi $R = \sqrt{2}$.

Exemple 10.31

Déterminons le rayon de convergence R de $\sum z^{p^2}$. Les exposants ne sont pas les multiples d'un même entier, et l'on applique la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. On pose $u_p = z^{p^2}$, non nul, et

$$\frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = |z|^{(p+1)^2-p^2} = |z|^{2p+1}.$$

Si $|z| < 1$, ce rapport tend vers $0 < 1$: la série $\sum u_p$ converge, donc $R \geqslant |z|$. Si $|z| > 1$, ce rapport tend vers $+\infty$: la série $\sum u_p$ diverge, donc $R \leqslant |z|$. Ainsi $R = 1$.

3. Opérations arithmétiques

Proposition 10.32 (Somme de séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On note R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.
Le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n)z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
De plus, si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent (absolument), puisque $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$ (proposition de la page 4), donc leur somme $\sum (a_n + b_n)z^n$ converge, et sa somme est la somme des deux sommes par linéarité. La série $\sum (a_n + b_n)z^n$ convergeant, $R \geqslant |z|$ (proposition de la page 5). Ceci valant pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
Supposons $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$, de sorte que $\min(R_a, R_b) = R_a$ et $R \geqslant R_a$. On a $a_n = (a_n + b_n) + (-b_n)$, et la série entière $\sum (-b_n)z^n$ a pour rayon R_b (les modules des coefficients sont les mêmes). Par ce qui précède, $R_a \geqslant \min(R, R_b)$. Si l'on avait $R > R_a$, on aurait $\min(R, R_b) > R_a$, ce qui est exclu. Donc $R = R_a = \min(R_a, R_b)$. □

Exemple 10.33

Si $R_a = R_b$, le rayon de la somme peut être strictement plus grand. Prenons $a_n = 1$ et $b_n = -1 + \frac{1}{2^n}$. On a $R_a = 1$ et, comme $|b_n| \sim 1$, $R_b = 1$ par comparaison avec $\sum z^n$. Or $a_n + b_n = \frac{1}{2^n}$, et $\frac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = \frac{1}{2}$: par la règle de d'Alembert, la série entière $\sum \frac{z^n}{2^n}$ a pour rayon $2 > \min(R_a, R_b) = 1$.

Proposition 10.34 (Rappel : produit de Cauchy de deux séries numériques)

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument alors $\sum c_n$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Démonstration

Voir le chapitre « Séries numériques ». □

Proposition 10.35 (Produit de Cauchy de deux séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On note R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.
On pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. La série entière $\sum c_n z^n$ est appelée le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Comme $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument (proposition de la page 4). Le terme général de leur produit de Cauchy est

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \, b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n.$$

Le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes converge absolument, et sa somme est le produit de leurs sommes (rappel précédent) : la série $\sum c_n z^n$ converge absolument et sa somme est le produit des sommes de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. La série $\sum c_n z^n$ convergeant, $R \geqslant |z|$ (proposition de la page 5). Ceci valant pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. □

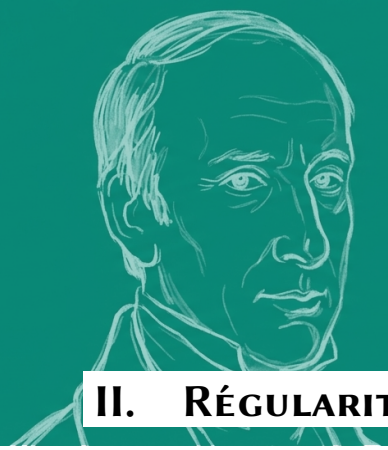
Exemple 10.36

Le produit de Cauchy de $\sum z^n$ (de rayon 1) avec elle-même a pour coefficients $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n + 1$. Comme $n + 1 \sim n$, la série entière $\sum (n+1) z^n$ a pour rayon 1 par comparaison avec $\sum n z^n$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$, et comme la somme du produit de Cauchy est le produit des sommes pour $|z| < \min(R_a, R_b) = 1$ (proposition précédente), on obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Exemple 10.37

Le rayon du produit peut être strictement plus grand que $\min(R_a, R_b)$. Prenons $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour $n \geqslant 2$ (de sorte que $\sum a_n z^n$ est le polynôme $1 - z$, de rayon $+\infty$), et $b_n = 1$ pour tout n (rayon 1). Alors $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} = 1 - 1 = 0$. Le produit de Cauchy est la série entière $\sum c_n z^n$ réduite au terme constant 1, de rayon $+\infty > 1 = \min(R_a, R_b)$.



10 Séries entières

II. Régularité de la somme d'une série entière

Dans cette partie, $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et l'on considère sa fonction somme, définie sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Cette fonction, définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, peut être étudiée comme toute fonction d'une variable réelle ; on s'intéresse ici à sa régularité.

Remarque

L'étude de la régularité de S en $-R$ et en R, c'est-à-dire au bord de l'intervalle ouvert de convergence, n'est pas un objectif du programme.

1. Convergence normale et continuité

Proposition 10.38 (Convergence normale sur tout segment)

Soit $[a, b] \subset]-R, R[$. La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[a, b]$.

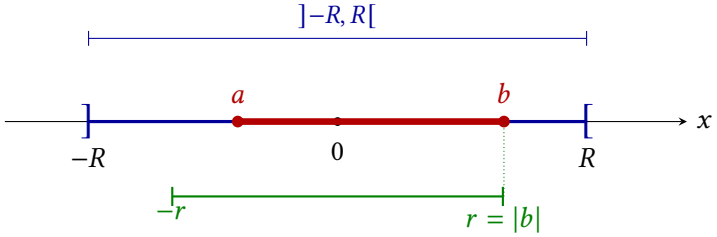
Démonstration

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto a_n x^n$, et posons $r = \max(|a|, |b|)$. Comme a et b appartiennent à $]-R, R[$, on a $|a| < R$ et $|b| < R$, donc $r < R$.
Soit $x \in [a, b]$. On a $a \leqslant x \leqslant b$, donc $-r \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant |b| \leqslant r$, c'est-à-dire $|x| \leqslant r$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $|f_n(x)| = |a_n|\,|x|^n \leqslant |a_n|\,r^n$. Ainsi f_n est bornée sur $[a, b]$ et $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant |a_n|\,r^n$. Comme r ou $-r$ est l'une des bornes a ou b, le majorant est atteint :

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = |a_n|\,r^n.$$

Comme $r < R$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument (proposition de la page 4) : la série $\sum |a_n|\,r^n$ converge. La série $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge, c'est-à-dire que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. □

La démonstration se lit sur le schéma suivant : tout le segment $[a, b]$ est contenu dans le segment symétrique $[-r, r]$, avec $r = \max(|a|, |b|) < R$.



Proposition 10.39 (Continuité sur les réels)

S est continue sur $]-R, R[$.

Démonstration

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$ (c'est une fonction polynomiale). La série entière $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans son intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ (proposition de la page 13), donc uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$, la convergence normale entraînant la convergence uniforme. Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions du chapitre « Suites et séries de fonctions », appliqué sur chacun de ces segments (la continuité étant une propriété locale), la somme S est continue sur $]-R, R[$. □

Exemple 10.40

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1. La somme d'une série entière étant continue sur son intervalle ouvert de convergence (proposition précédente), la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

est continue sur $]-1, 1[$. Déterminons un équivalent de f en 0. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+1}$ a aussi pour rayon 1, par comparaison avec $\sum n^\alpha x^n$ (on a $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$). Sa somme $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ est donc continue sur $]-1, 1[$, en particulier en 0, et $g(0) = 1$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, en posant $k = n - 1$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} = xg(x).$$

Pour $x \neq 0$, on a donc $\frac{f(x)}{x} = g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) = 1$, c'est-à-dire $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Remarque

On peut aussi considérer la fonction somme $\underline{S}$ de la série entière de la variable complexe, définie sur le disque ouvert de convergence $\mathring{B}(0, R)$. C'est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et sa continuité a un sens pour la norme donnée par le module, $\mathbb{C}$ étant un espace vectoriel normé. La continuité de $\underline{S}$ sur le disque ouvert de convergence est traitée dans la section « Séries géométriques et exponentielles d'une variable complexe ».

2. Primitive

Proposition 10.41

La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R, et sa somme est la primitive de S sur $]-R, R[$ qui s'annule en 0 : S admet une primitive sur $]-R, R[$ et l'on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Démonstration

Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence (proposition de la page 15 ci-après) : le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est R.
La fonction S, somme d'une série entière de rayon R, est continue sur l'intervalle $]-R, R[$ (proposition de la page 14) : elle y admet donc des primitives, et $F : x \mapsto \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$ est celle qui s'annule en 0. Soit $x \in]-R, R[$. Si $x = 0$, les deux membres de l'égalité sont nuls.
Supposons $x > 0$. Le segment $[0, x]$ est inclus dans $]-R, R[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto a_n t^n$ est continue sur $[0, x]$, et la série $\sum a_n t^n$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[0, x] \subset]-R, R[$ (proposition de la page 13). Par le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment du chapitre « Suites et séries de fonctions », la série numérique $\sum \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Supposons $x < 0$. Le même théorème, appliqué sur le segment $[x, 0] \subset]-R, R[$, donne

$$\int_x^0 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^0 a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right),$$

et l'on obtient l'égalité annoncée en multipliant par -1, puisque $\int_0^x = -\int_x^0$.
Dans tous les cas, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$: la somme de la série primitive est la primitive F de S qui s'annule en 0. □

Proposition 10.42

En tant que série entière, $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a un rayon de convergence R', et $R' = R$. Ce résultat vaut pour toute série entière $\sum a_n x^n$, quel que soit son rayon $R \in [0, +\infty]$.

Démonstration

Notons I l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, et I' l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $\left(\frac{a_n}{n+1} r^{n+1}\right)$ est bornée, de sorte que $R = \sup I$ et $R' = \sup I'$. En effet, les coefficients de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ sont $b_0 = 0$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$: pour $r \geqslant 0$, la suite $(b_m r^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $\left(\frac{a_n}{n+1} r^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est.
On a $R' \geqslant R$. Soit $r \in I$, et soit $M \geqslant 0$ tel que $|a_n r^n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{a_n}{n+1} r^{n+1}\right| = \frac{r}{n+1} |a_n r^n| \leqslant Mr,$$

donc $r \in I'$. Ainsi $I \subset I'$, et $R \leqslant R'$.
On a $R' \leqslant R$. Soit $r \in I'$, et montrons que $r \leqslant R$. Si $r = 0$, c'est vrai. Supposons $r > 0$, et soit $M' \geqslant 0$ tel que $\left|\frac{a_n}{n+1} r^{n+1}\right| \leqslant M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $s \in [0, r[$, et posons $q = \frac{s}{r} \in [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n|\, s^n = \frac{|a_n|\, r^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{r} q^n \leqslant \frac{M'}{r}(n+1)q^n.$$

Par croissances comparées, $(n+1)q^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc la suite $((n+1)q^n)$ est bornée, et la suite $(a_n s^n)$ l'est aussi : $s \in I$, donc $s \leqslant R$. Ceci valant pour tout $s \in [0, r[$, on obtient $r \leqslant R$ (si l'on avait $R < r$, tout $s \in]R, r[$ contredirait $s \leqslant R$). Ainsi R majore I', et $R' = \sup I' \leqslant R$.
Donc $R' = R$. □

Exemple 10.43

Pour tout $t \in]-1,1[$, la série géométrique $\sum(-t)^n$ converge, puisque $|-t| < 1$, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t}.$$

La série entière $\sum(-1)^n t^n$ a pour rayon 1, ses coefficients étant de module 1 (comparaison avec $\sum t^n$). Une série entière s'intègre terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence (proposition de la page 14) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}.$$

Comme $1+t > 0$ pour $t \in]-1,1[$, le membre de gauche vaut $\ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$. En posant $k = n+1$, on obtient, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Exemple 10.44

Pour tout $t \in]-1,1[$, on a $\left|-t^2\right| < 1$, donc la série géométrique $\sum(-t^2)^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Il s'agit de la série entière $\sum b_k t^k$, où $b_{2n} = (-1)^n$ et $b_{2n+1} = 0$. Son rayon est 1 : la série converge pour $|t| < 1$, donc le rayon est au moins 1, et pour $t = 1$ son terme général ne tend pas vers 0, donc le rayon est au plus 1 (proposition de la page 5). Une série entière s'intègre terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence (proposition de la page 14) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b_k}{k+1}x^{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

les termes d'indice k impair étant nuls. Comme $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$, on obtient, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

La relation entre les rayons de la proposition de la page 15 a l'analogue suivant, où les coefficients sont multipliés par n au lieu d'être divisés par $n+1$.

Proposition 10.45

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence quelconque dans $[0,+\infty]$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_1 celui de $\sum n a_n z^n$.
On a $R \geqslant R_1$. Pour tout $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant n\,|a_n|$, donc $a_n = \mathrm{O}(n a_n)$. Par comparaison de séries entières, $R \geqslant R_1$ (proposition de la page 6).
On a $R_1 \geqslant R$. Si $R = 0$, c'est vrai. Supposons $R > 0$, et soit $r \in [0, R[$. Choisissons s tel que $r < s < R$. Comme $s < R$, la série $\sum a_n s^n$ converge absolument (proposition de la page 4) ; son terme général tend vers 0, donc il existe $M \geqslant 0$ tel que $|a_n|\, s^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n\,|a_n|\, r^n = |a_n|\, s^n \cdot n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leqslant Mn \left(\frac{r}{s}\right)^n .$$

Comme $0 \leqslant \frac{r}{s} < 1$, on a $n\left(\frac{r}{s}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées : la suite $(n a_n r^n)$ est bornée, donc $r \leqslant R_1$. Ceci valant pour tout $r \in [0, R[$, on obtient $R \leqslant R_1$.
Donc $R = R_1$. □

3. Dérivées successives

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$, obtenue en dérivant terme à terme $\sum a_n x^n$, est appelée la série entière dérivée de $\sum a_n x^n$. La proposition de la page 16 permet de lui appliquer les résultats précédents, sur le même intervalle ouvert de convergence.

Proposition 10.46 (Dérivées successives de la somme)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme sur $]-R, R[$.

- La série entière dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R ; S est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

- S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ a pour rayon de convergence R et, pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} ;$$

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Démonstration

Le cas d'une dérivée. Soit $\sum b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et T sa somme sur $]-R, R[$. Montrons que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n b_n x^{n-1}$ a pour rayon R, que T est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et que $T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$ pour tout $x \in]-R, R[$.
Les coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n b_n x^{n-1}$ sont les $c_m = (m+1) b_{m+1}$, pour $m \in \mathbb{N}$. Soit $r > 0$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $c_m r^m = \frac{1}{r}(m+1) b_{m+1} r^{m+1}$, donc la suite $(c_m r^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(n b_n r^n)_{n\geqslant 1}$ l'est. Les deux séries entières $\sum_{n\geqslant 1} n b_n x^{n-1}$ et $\sum n b_n x^n$ ont donc même rayon de convergence, et celui-ci vaut R, puisque $\sum n b_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon de convergence (proposition de la page 16).
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto b_n x^n$. Soit $r \in]0, R[$. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions du chapitre « Suites et séries de fonctions » sur le segment $[-r, r]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction polynomiale, donc de classe C^1 sur $[-r, r]$, avec

$f_0' = 0$ et $f_n'(x) = nb_n x^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

— Pour tout $x \in [-r, r]$, on a $|x| \leqslant r < R$, donc la série $\sum f_n(x)$ converge (proposition de la page 4) : $\sum f_n$ converge simplement sur $[-r, r]$.

— La série $\sum f_n'$ est, à son terme nul d'indice 0 près, la série entière $\sum_{n\geqslant 1} nb_n x^{n-1}$, de rayon R. Comme $[-r, r] \subset]-R, R[$, elle converge normalement sur $[-r, r]$ (proposition de la page 13), donc uniformément sur $[-r, r]$.

Par ce théorème, T est de classe C^1 sur $[-r, r]$ et $T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^{n-1}$ pour tout $x \in [-r, r]$. Soit $x \in]-R, R[$, et soit r tel que $|x| < r < R$. Alors x appartient à l'intervalle ouvert $]-r, r[$, sur lequel T est de classe C^1 avec la dérivée ci-dessus. La dérivabilité et la continuité de la dérivée étant des propriétés locales, T est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et $T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n x^{n-1}$ pour tout $x \in]-R, R[$.
Appliqué à $b_n = a_n$, ce cas donne le premier point.
Les dérivées successives. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(k)$ la propriété : « S est de classe C^k sur $]-R, R[$, la série entière $\sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ a pour rayon de convergence R et, pour tout $x \in]-R, R[$, $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ ».
Initialisation. Pour $k = 0$, on a $\frac{n!}{n!} = 1$, la série entière considérée est $\sum a_n x^n$, de rayon R, et $S^{(0)} = S$ est sa somme ; S, somme d'une série entière de rayon R, est continue sur $]-R, R[$ (proposition de la page 14). Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. En posant $m = n - k$, on a, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m x^m, \quad \text{où} \quad b_m = \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k},$$

et la série entière $\sum b_m x^m$ a pour rayon R. Par le cas d'une dérivée, $S^{(k)}$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$, la série entière $\sum_{m\geqslant 1} mb_m x^{m-1}$ a pour rayon R et, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} S^{(k+1)}(x) &= \sum_{m=1}^{+\infty} m \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k} x^{m-1} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{(m-1)!} a_{m+k} x^{m-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k-1)!} a_n x^{n-k-1}, \end{aligned}$$

en posant $n = m + k$. La série entière $\sum_{m\geqslant 1} mb_m x^{m-1}$ est, après ce changement d'indice, la série $\sum_{n\geqslant k+1} \frac{n!}{(n-(k+1))!} a_n x^{n-(k+1)}$, qui a donc pour rayon R. Comme S est de classe C^k et $S^{(k)}$ de classe C^1, S est de classe C^{k+1} sur $]-R, R[$: $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui donne le troisième point. En particulier S est de classe C^k sur $]-R, R[$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire de classe C^∞ sur $]-R, R[$, ce qui donne le deuxième point.
Les coefficients. Soit $k \in \mathbb{N}$. En évaluant en 0 la formule donnant $S^{(k)}$, tous les termes d'indice $n > k$ sont nuls, et il reste le terme d'indice $n = k$, avec la convention $0^0 = 1$:

$$S^{(k)}(0) = \frac{k!}{0!} a_k = k!\, a_k, \quad \text{donc} \quad a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}.$$

□

Exemple 10.47

La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (série géométrique de raison x, avec $|x| < 1$). Notons $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $]-1, 1[$. La somme d'une série entière se dérive terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence (proposition précédente) : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

Or $S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. On obtient, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{puis, en multipliant par } x, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

le terme d'indice 0 étant nul. Pour $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{1/4} = 2$.

Exemple 10.48

Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$ pour $x \in]-1,1[$. La série entière $\sum n^2x^n$ a pour rayon 1 (la série entière $\sum n^\alpha x^n$ a pour rayon 1 pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$). La fonction $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est la somme sur $]-1,1[$ de la série entière $\sum x^n$, de rayon 1 ; elle se dérive terme à terme deux fois sur $]-1,1[$ (proposition précédente) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

Or $S''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. En multipliant par x^2, et comme les termes d'indices 0 et 1 de $\sum n(n-1)x^n$ sont nuls,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 = n(n-1) + n$. Les séries $\sum n(n-1)x^n$ et $\sum nx^n$ convergeant, on obtient par linéarité, avec $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ (exemple précédent),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{(1/2)(3/2)}{1/8} = 6$.

Exemple 10.49

Vérifions la relation $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$ sur $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, somme sur $]-1,1[$ de la série entière $\sum x^n$, dont tous les coefficients valent 1. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, $S^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$. Pour $k = 0$, c'est la définition de S. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $S^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)}$ pour tout $x \in]-1,1[$. En dérivant, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S^{(k+1)}(x) = k! \cdot (k+1)(1-x)^{-(k+2)} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}},$$

ce qui est la propriété au rang $k+1$. En particulier $S^{(k)}(0) = k!$, et $\frac{S^{(k)}(0)}{k!} = 1 = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En comparant avec la dérivée k-ième terme à terme $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ (proposition de la page 17), on obtient de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Remarque

Les coefficients de la série entière sont déterminés par les dérivées successives en 0 de sa somme : $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$. Or les dérivées successives en 0 ne dépendent que des valeurs de S sur un voisinage de 0, aussi petit soit-il. Ainsi, si deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, de rayons de convergence strictement positifs, ont des sommes qui coïncident sur un intervalle $]-r, r[$, avec $r > 0$, inclus dans leurs deux intervalles ouverts de convergence, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: les deux séries entières sont égales, ont même rayon, et leurs sommes coïncident sur tout l'intervalle ouvert de convergence. En ce sens, le comportement d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence est entièrement déterminé par son comportement au voisinage de l'origine. Ce résultat donne l'unicité du développement en série entière, traitée dans la section suivante.



10 Séries entières

III. Développement en séries entières

1. Généralités

Définition 10.50 (Fonction développable en série entière)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$ tel que $]-r, r[\subset I$ (avec $]-r, r[= \mathbb{R}$ si $r = +\infty$). On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Lorsque $r = +\infty$, on dit que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est développable en série entière en 0, ou au voisinage de 0, s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.

Exemple 10.51

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$. En effet, la série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 (deuxième exemple de la sous-section « Généralités » de la section « Rayon de convergence ») et, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série géométrique de raison x converge, puisque $|x| < 1$, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exemple 10.52

La fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. En effet, la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (cinquième exemple de la sous-section « Généralités » de la section « Rayon de convergence »), et sa somme vaut e^x pour tout réel x, comme on l'a rappelé au premier exemple du chapitre ; cette égalité est démontrée par la formule de Taylor avec reste intégral dans l'exemple qui suit la méthode de la fin de cette sous-section.

Exemple 10.53

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$. En effet, la série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ a pour rayon de convergence 1 (cas $\alpha = -1$ de l'exemple $\sum n^\alpha x^n$, les coefficients étant de module $\frac{1}{n}$) et, en intégrant terme à terme sur $[0, x]$ le développement $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$, valable pour $t \in]-1, 1[$ (premier exemple de

la sous-section « Primitive »), on obtient, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Elle n'est développable en série entière sur aucun intervalle $]-r,r[$ avec $r > 1$: une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ est par définition définie sur $]-r,r[$, et $x \mapsto \ln(1+x)$ n'est pas définie en -1, qui appartient à $]-r,r[$ dès que $r > 1$.

Définition 10.54 (Série de Taylor)

Soit $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$ et soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-r,r[$. On appelle série de Taylor de f la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Exemple 10.55

La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\exp^{(n)} = \exp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\exp^{(n)}(0) = 1$. La série de Taylor de exp est $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Exemple 10.56

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et l'on a vu dans le dernier exemple de la sous-section « Dérivées successives » que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Ainsi $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$, et la série de Taylor de f est $\sum x^n$.

Dans ces deux exemples, la série de Taylor est la série entière dont la somme vaut la fonction dans les exemples de fonctions développables en série entière ci-dessus. La proposition suivante montre qu'il ne peut en être autrement.

Proposition 10.57 (Unicité du développement en série entière)

Soit $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$. Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r,r[$, alors :

- f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$;
- la série de Taylor de f converge sur $]-r,r[$;
- pour tout $x \in]-r,r[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Démonstration

Notons $R \geqslant r$ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, et S sa somme sur $]-R,R[$. On a $R \geqslant r > 0$, donc S, somme d'une série entière de rayon strictement positif, est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (proposition de la page 17).
Les fonctions f et S coïncident sur l'intervalle ouvert $]-r,r[\subset]-R,R[$. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est k fois dérivable sur $]-r,r[$ et $f^{(k)}(x) = S^{(k)}(x)$ pour tout $x \in]-r,r[$. Pour $k = 0$, c'est l'hypothèse. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que f est k fois dérivable sur $]-r,r[$ et que $f^{(k)} = S^{(k)}$ sur $]-r,r[$. Soit $x \in]-r,r[$. Comme $]-r,r[$ est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $]x-\eta, x+\eta[\subset]-r,r[$, et pour tout h tel que $0 < |h| < \eta$,

$$\frac{f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)}{h} = \frac{S^{(k)}(x+h) - S^{(k)}(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} S^{(k+1)}(x).$$

Donc $f^{(k)}$ est dérivable en x et $f^{(k+1)}(x) = S^{(k+1)}(x)$: la propriété est vraie au rang $k+1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi f a sur $]-r,r[$ les mêmes dérivées successives que S, qui sont continues : f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$.
Comme $0 \in]-r,r[$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. La série de Taylor de f est donc la série entière $\sum a_n x^n$, qui converge sur $]-r,r[$ puisque $r \leqslant R$, et dont la somme vaut $f(x)$ pour tout $x \in]-r,r[$ par hypothèse. □

Corollaire 10.58 (Unicité des coefficients)

Soit $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence supérieurs ou égaux à r, dont les sommes coïncident sur $]-r,r[$:

$$\forall x \in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ a un seul développement en série entière sur $]-r,r[$.

Démonstration

Notons $f :]-r,r[\to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Elle est développable en série entière sur $]-r,r[$, avec la série $\sum a_n x^n$ comme avec la série $\sum b_n x^n$. Les coefficients d'un développement en série entière de f sur $]-r,r[$ sont les $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (proposition précédente, appliquée aux deux séries) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ par deux séries entières, celles-ci ont des sommes qui coïncident sur $]-r,r[$, donc les mêmes coefficients par ce qui précède. □

Exemple 10.59

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r,r[$. Supposons f paire. Pour tout $x \in]-r,r[$, on a $-x \in]-r,r[$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = f(-x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Les séries entières $\sum (-1)^n a_n x^n$ et $\sum a_n x^n$ ont des coefficients de même module, donc le même rayon de convergence, supérieur ou égal à r, et leurs sommes coïncident sur $]-r,r[$. Par unicité des coefficients (corollaire précédent), $(-1)^n a_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: pour n impair, $-a_n = a_n$, c'est-à-dire $a_n = 0$. Les coefficients d'indice impair d'une fonction paire développable en série entière sont nuls ; de même, ceux d'indice pair d'une fonction impaire développable en série entière sont nuls.

Exemple 10.60

Pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ (dernier exemple de la sous-section « Dérivées successives ») ; avec $k = 1$ puis $k = 2$ et le changement

d'indice $m = n - k$, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)x^m \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+2}{2} x^m,$$

ces deux séries entières ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, puisqu'elles convergent en tout point de $]-1,1[$ (proposition de la page 5). Le produit de Cauchy de $\sum (m+1)x^m$ et de $\sum x^m$, toutes deux de rayon au moins 1, a pour coefficients $c_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 1$; comme produit de Cauchy de deux séries entières de rayon au moins 1, son rayon est au moins 1 et sa somme est le produit des sommes sur $]-1,1[$ (proposition de la page 12) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+2}{2} x^n.$$

Les séries entières $\sum c_n x^n$ et $\sum \binom{n+2}{2} x^n$ ont un rayon au moins égal à 1 et des sommes qui coïncident sur $]-1,1[$: par unicité des coefficients (corollaire précédent, appliqué avec $r = 1$), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Remarque

Si une fonction est développable en série entière sur $]-r,r[$, la série entière de son développement est nécessairement sa série de Taylor (proposition de la page 22).

Remarque

En revanche, une fonction de classe C^∞ sur $]-r,r[$ a une série de Taylor sans être nécessairement développable en série entière : l'exemple suivant donne une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor converge sur $\mathbb{R}$ et a une somme nulle, alors que la fonction ne s'annule qu'en 0. Il n'existe donc aucun intervalle $]-r,r[$, avec $r > 0$, sur lequel la fonction et la somme de sa série de Taylor coïncident.

Exemple 10.61

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$. C'est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, puisque $-\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ et donc $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Montrons que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les dérivées sur $\mathbb{R}^\star$. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\star$, comme composée de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ et de exp. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x \neq 0$. Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ convient. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x \neq 0$. En dérivant, pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

où $P_{n+1} = 2X^3P_n - X^2P_n'$ est un polynôme. La propriété est vraie au rang $n+1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
Une limite. Soit P un polynôme. Montrons que $P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Par linéarité de la limite, il suffit de le faire pour $P = X^k$, avec $k \in \mathbb{N}$. Pour $x \neq 0$, en posant $u = \frac{1}{x^2} > 0$,

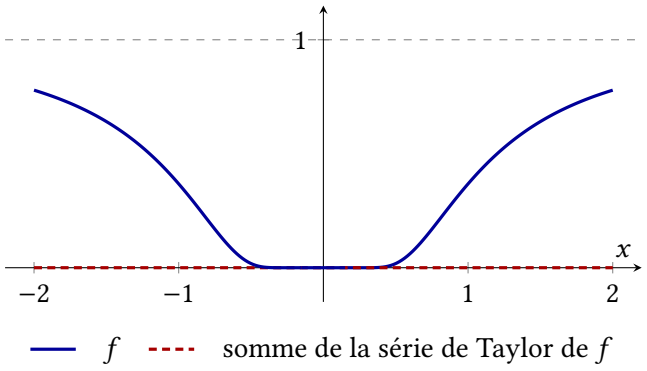
$$\left|\frac{1}{x^k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right| = u^{k/2}\mathrm{e}^{-u},$$

et $u \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, avec $u^{k/2}\mathrm{e}^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
Les dérivées en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ ». Pour $n = 0$, $f(0) = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ et en 0 par le prolongement par continuité : $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et pour $x \neq 0$,

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

par la limite précédente appliquée au polynôme XP_n. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$: f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$, et $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f^{(n+1)}(0)$ par la limite précédente : elle est continue en 0. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, et par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa série de Taylor est la série entière nulle, de rayon $+\infty$ et de somme nulle sur $\mathbb{R}$. Or $f(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$: pour tout $r > 0$, f ne coïncide pas avec la somme de sa série de Taylor sur $]-r, r[$, puisque f ne s'annule pas sur $]0, r[$. Si f était développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, son développement serait sa série de Taylor, les coefficients d'un développement en série entière de f étant les $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (proposition de la page 22), ce qui vient d'être exclu : f n'est développable en série entière sur aucun intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

Le schéma suivant représente f sur $[-2, 2]$: son graphe est plat au voisinage de 0, et la somme de sa série de Taylor en 0 est la fonction nulle, dont le graphe est l'axe des abscisses. La droite en pointillés gris, d'équation $y = 1$, est l'asymptote horizontale du graphe de f en $\pm\infty$.



Remarque

Dit autrement, être développable en série entière est une condition de *régularité plus forte* que d'être de classe C^∞ : une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ y est de classe C^∞ (proposition de la page 22), et l'exemple précédent montre que la réciproque est fausse.

Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière, on utilise d'abord les opérations sur les séries entières, la primitivation, la dérivation et les développements usuels de la sous-section suivante. Lorsqu'ils ne suffisent pas, on peut revenir à la formule de Taylor avec reste intégral. Cette voie demande de calculer et de majorer toutes les dérivées successives de la fonction, ce qui n'est possible que dans peu de cas : on ne l'emploie qu'en dernier recours.

Proposition 10.62 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une application de classe C^{n+1} sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et soit $a \in I$. Alors :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Fixons $a \in I$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « pour toute application f de classe C^{n+1} sur I et tout $x \in I$, l'égalité ci-dessus est vraie ».
Initialisation. Soit f de classe C^1 sur I et soit $x \in I$. La fonction f est une primitive de la fonction continue f' sur l'intervalle I, donc $\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$: c'est l'égalité pour $n = 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit f de classe C^{n+2} sur I et soit $x \in I$. La fonction f est en particulier de classe C^{n+1}, donc par $\mathcal{P}(n)$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On intègre par parties sur le segment d'extrémités a et x, inclus dans I, avec $u : t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v = f^{(n+1)}$, toutes deux de classe C^1, de dérivées $u' : t \mapsto \frac{(x-t)^n}{n!}$ et $v' = f^{(n+2)}$:

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En reportant, on obtient l'égalité au rang $n+1$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition 10.63 (Développement par la formule de Taylor)

Soient $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$ et f une fonction de classe C^∞ sur $]-r,r[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-r,r[$, on note

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $x \in]-r,r[$, alors f est développable en série entière sur

$]-r,r[$ et

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Démonstration

Soit $x \in]-r,r[$. Par la formule de Taylor avec reste intégral en $a = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

La série numérique $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge donc, et sa somme vaut $f(x)$. La série de Taylor de f convergeant en x, son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant |x|$ (proposition de la page 5). Ceci valant pour tout $x \in]-r,r[$, on a $R \geqslant r$: f est développable en série entière sur $]-r,r[$. □

Méthode 10.64 (Développer en série entière par la formule de Taylor)

Pour montrer qu'une fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$:

1. **Dérivées.** On justifie que f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$ et l'on calcule ses dérivées successives.
2. **Formule de Taylor.** On fixe $x \in]-r,r[$ et $n \in \mathbb{N}$, et l'on écrit la formule de Taylor avec reste intégral en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. **Majoration du reste.** On majore $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ par un réel M_{n+1} pour tout t entre 0 et x, puis on majore l'intégrale, en distinguant $x \geqslant 0$ et $x < 0$. On obtient

$$|R_n(x)| \leqslant M_{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   Cette majoration se redémontre à chaque fois.
4. **Limite.** On montre que ce majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, x étant fixé. Alors $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

5. **Conclusion.** Ceci valant pour tout $x \in]-r,r[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-r,r[$ (proposition de la page 26) et

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Exemple 10.65

Montrons que exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Dérivées. La fonction exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$. En particulier $\exp^{(n)}(0) = 1$.
Formule de Taylor. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral en 0,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

Majoration du reste. Pour tout t entre 0 et x, on a $t \leqslant |x|$, donc $0 \leqslant e^t \leqslant e^{|x|}$. Si $x \geqslant 0$,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{|x|} \, dt = e^{|x|} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $x < 0$,

$$|R_n(x)| = \left| \int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \right| \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} e^{|x|} \, dt = e^{|x|} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans les deux cas, $|R_n(x)| \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.
Limite. La série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge (premier exemple du chapitre), donc son terme général tend vers 0 : $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$.
Conclusion. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (proposition de la page 26) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Remarque

Une autre hypothèse sur les dérivées successives, qui assure que le reste tend vers 0, est étudiée dans un exercice, qui l'applique à la fonction tangente.

2. Développements des fonctions usuelles

Les développements de cette sous-section s'obtiennent de trois façons : à partir de la somme d'une série géométrique, par substitution et primitivation ; par la formule de Taylor avec reste intégral, ou par des opérations sur des développements déjà connus ; à l'aide d'une équation différentielle linéaire, pour $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

À partir de la somme d'une série géométrique, on obtient les développements suivants.

Proposition 10.66 (Développements usuels issus de la série géométrique)

Les six séries entières ci-dessous ont pour rayon de convergence 1, et les égalités ont lieu sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$:

- $\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$;
- $\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$;
- $\forall x \in]-1,1[, \ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$;
- $\forall x \in]-1,1[, \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$;
- $\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$;
- $\forall x \in]-1,1[, \ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Démonstration

La série géométrique. La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1 (deuxième exemple de la sous-section « Généralités » de la section « Rayon de convergence »). Pour tout $x \in]-1,1[$, la série géométrique de raison x converge, puisque $|x| < 1$, et sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$.
Substitution de $-x$. Soit $x \in]-1,1[$. On a $-x \in]-1,1[$, donc, par le point précédent,

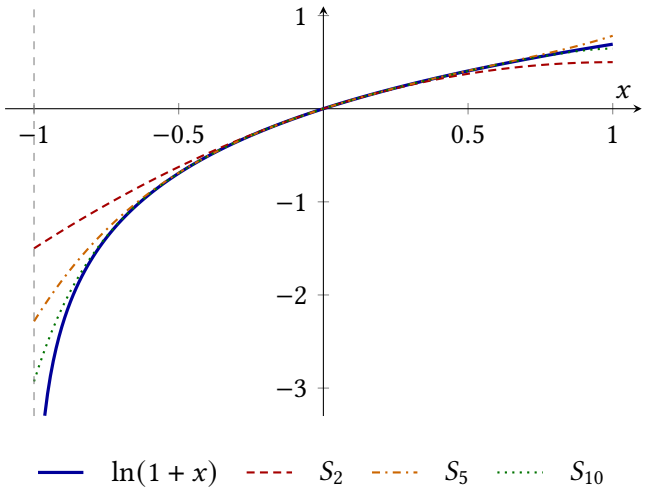
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Les coefficients de $\sum (-1)^n x^n$ ont même module que ceux de $\sum x^n$: par comparaison de séries entières, les deux séries entières ont même rayon, égal à 1 (proposition de la page 6).
Primitivation : $\ln(1-x)$. La série entière $\sum t^n$, de rayon 1, s'intègre terme à terme sur $]-1,1[$, et sa série primitive $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon 1 (proposition de la page 14) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

en posant $k = n+1$ puis en renommant l'indice. Comme $1-t > 0$ pour $t \in]-1,1[$, le membre de gauche vaut $[-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$. En multipliant par -1, on obtient le troisième développement.
Primitivation : $\ln(1+x)$. C'est le premier exemple de la sous-section « Primitive » : la primitive qui s'annule en 0 de $t \mapsto \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ donne, pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, et $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$. La série entière obtenue, primitive terme à terme d'une série entière de rayon 1, a pour rayon 1 (proposition de la page 14).
Substitution de x^2 et primitivation : $\frac{1}{1+x^2}$ *et* arctan. Ce sont les deux résultats du second exemple de la sous-section « Primitive » : pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x^2 \in]-1,1[$, d'où le développement de $\frac{1}{1+x^2}$ par substitution de $-x^2$ dans celui de $\frac{1}{1-x}$, avec une série entière de rayon 1, puis celui de arctan par primitivation, avec une série entière de même rayon 1 (proposition de la page 14). □

Le schéma suivant représente $x \mapsto \ln(1+x)$ pour $-1 < x \leqslant 1$ et les sommes partielles $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ pour $N \in \{2, 5, 10\}$. Sur $]-1,1[$, $S_N(x)$ tend vers $\ln(1+x)$ quand N tend vers $+\infty$; pour N fixé, l'écart est plus grand au voisinage de -1, où $\ln(1+x)$ tend vers $-\infty$.



Les théorèmes de régularité, la formule de Taylor avec reste intégral et les opérations sur les séries entières donnent les développements suivants.

Proposition 10.67 (Développements usuels sur $\mathbb{R}$)

Les cinq séries entières ci-dessous ont pour rayon de convergence $+\infty$, et les égalités ont lieu sur $\mathbb{R}$:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Démonstration

L'exponentielle. La série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (cinquième exemple de la sous-section « Généralités » de la section « Rayon de convergence »), et l'égalité s'obtient par la formule de Taylor avec reste intégral : pour tout $x \in \mathbb{R}$, le reste vérifie $|R_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (exemple qui suit la méthode de la sous-section précédente).

Cosinus et sinus. Les fonctions cos et sin sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos^{(n)}(t) = \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin^{(n)}(t) = \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right),$$

donc $\left|\cos^{(n)}(t)\right| \leqslant 1$ et $\left|\sin^{(n)}(t)\right| \leqslant 1$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, et soit $R_n(x)$ le reste intégral de cos ou de sin. En majorant par 1 la dérivée $(n+1)$-ième dans l'intégrale, et en distinguant $x \geqslant 0$ et $x < 0$ (calcul de l'exemple de l'exponentielle, avec 1 à la place de $\mathrm{e}^{|x|}$), on obtient

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Le reste intégral tendant vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, cos et sin sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et leurs développements sont leurs séries de Taylor (proposition de la page 26). Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\cos^{(2k)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \qquad \cos^{(2k+1)}(0) = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin^{(2k)}(0) = \sin(k\pi) = 0, \qquad \sin^{(2k+1)}(0) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k.$$

Les séries de Taylor de cos et de sin sont donc $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, les termes d'indice impair, pour la première, et pair, pour la seconde, étant nuls. Elles convergent en tout point de $\mathbb{R}$, donc leur rayon est $+\infty$ (proposition de la page 5).

Cosinus et sinus hyperboliques. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant le développement de l'exponentielle en $-x$,

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

et cette série entière, qui converge en tout point de $\mathbb{R}$, a pour rayon $+\infty$. Les séries entières $\sum \frac{1}{2}\frac{x^n}{n!}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}$ ont pour rayon $+\infty$; la somme de deux séries entières a un rayon supérieur ou égal au minimum de leurs rayons, et sa somme est la somme de leurs sommes (proposition de la page 11) : leur somme et leur différence ont un rayon supérieur ou égal à $+\infty$, donc égal à $+\infty$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}.$$

Le coefficient $\frac{1+(-1)^n}{2}$ vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair, et $\frac{1-(-1)^n}{2}$ vaut 0 si n est pair et 1 si n est impair : en ne gardant que les termes non nuls, on obtient les développements de ch et de sh. □

Remarque

Le développement de l'exponentielle vaut aussi pour une variable complexe :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ce résultat est traité dans la section « Séries géométriques et exponentielles d'une variable complexe », où se trouve sa démonstration. Celle-ci est plus subtile que dans le cas réel ; elle utilise, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$ de la variable réelle t.

Proposition 10.68 (Binôme de Newton généralisé)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\binom{\alpha}{0} = 1$ et, pour $n \geqslant 1$:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

La série entière $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ a pour rayon de convergence 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$, et $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, la somme est finie, $\binom{\alpha}{n}$ est le coefficient binomial usuel pour $n \leqslant \alpha$, et l'égalité est la formule du binôme de Newton, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration

La démonstration part de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0$, et suit la méthode décrite après cette proposition. On note $a_n = \binom{\alpha}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Une relation entre les coefficients. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)a_{n+1} = (n+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} = (\alpha-n)a_n.$$

Le rayon de convergence. Supposons $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant \alpha+1$, le produit $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ contient le facteur $\alpha - \alpha = 0$, donc $a_n = 0$: la série entière n'a qu'un nombre fini de coefficients non nuls, elle converge en tout point de $\mathbb{R}$, et son rayon est $+\infty$ (proposition de la page 5).
Pour $n \leqslant \alpha$, on a

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha!}{n!\,(\alpha-n)!},$$

qui est le coefficient binomial usuel, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ par la formule du binôme de Newton.
Supposons $\alpha \notin \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha - k \neq 0$, donc $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par la relation précédente

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} = \frac{|n-\alpha|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Par la règle de d'Alembert (proposition de la page 7), le rayon de convergence est 1.
Dans les deux cas, le rayon R vérifie $R \geqslant 1$. On note S la somme de $\sum a_n x^n$ sur $]-1,1[$.
La somme est solution d'un problème de Cauchy. La fonction S est la somme d'une série entière de rayon $R \geqslant 1$, donc elle se dérive terme à terme sur $]-1,1[$ (proposition de la page 17) : S est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \qquad xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,$$

ces deux séries entières ayant pour rayon R (même proposition, et proposition de la page 16). Sur $]-1,1[$, où ces séries entières convergent toutes, la somme de leurs sommes est la somme de la série entière dont les coefficients sont les sommes des coefficients (proposition de la page 11) ; avec la relation entre les coefficients, on obtient, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)S'(x)-\alpha S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((\alpha-n)a_n + (n-\alpha)a_n\right) x^n = 0.$$

De plus $S(0) = a_0 = 1$. Ainsi S est solution sur $]-1,1[$ du problème de Cauchy

$$(1+x)y' - \alpha y = 0, \qquad y(0) = 1.$$

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en est solution. Soit $f : x \mapsto (1+x)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)}$ sur $]-1,1[$. Elle est dérivable, avec $f'(x) = \frac{\alpha}{1+x}\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)} = \frac{\alpha}{1+x}f(x)$, donc $(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$, et $f(0) = 1$.
Conclusion. On admet que ce problème de Cauchy a une unique solution sur $]-1,1[$. Les fonctions S et f en sont deux solutions, donc elles sont égales : pour tout $x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.
Ici, l'unicité se vérifie aussi directement. La fonction $g : x \mapsto \frac{S(x)}{f(x)} = S(x)(1+x)^{-\alpha}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = S'(x)(1+x)^{-\alpha} - \alpha S(x)(1+x)^{-\alpha-1} = (1+x)^{-\alpha-1}\left((1+x)S'(x) - \alpha S(x)\right) = 0.$$

La dérivée de g étant nulle sur l'intervalle $]-1,1[$, g y est constante, égale à $g(0) = 1 : S = f$ sur $]-1,1[$. □

La démonstration précédente suit une méthode qui s'applique à d'autres fonctions : on trouve une équation différentielle linéaire dont la fonction est solution, on en cherche une solution développable en série entière, puis l'on conclut par l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Méthode 10.69 (Développer en série entière par une équation différentielle)

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant 0.

1. *Une équation différentielle.* On cherche une équation différentielle linéaire (E), à coefficients polynomiaux, dont f est solution, et les conditions initiales en 0 (valeurs de f, et de ses dérivées si l'équation est d'ordre supérieur à 1) qui forment avec (E) un problème de Cauchy.
2. *Analyse.* On suppose qu'une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon $R > 0$, a une somme S solution de (E) sur $]-R,R[$. On exprime S' (et S'' s'il le faut) par dérivation terme à terme (proposition de la page 17), on regroupe les termes de même degré après des changements d'indice, et l'on identifie les coefficients par le corollaire de la page 23 : on obtient une relation de récurrence entre les a_n, et les conditions initiales donnent les premiers coefficients.
3. *Le rayon.* On calcule les a_n, ou l'on étudie la relation de récurrence, et l'on détermine le rayon R de la série entière obtenue ; il faut $R > 0$. Réciproquement, la somme de cette série entière vérifie (E) et les conditions initiales sur $]-R,R[$, en refaisant les calculs de l'analyse dans l'autre sens.
4. *Conclusion.* On admet l'unicité de la solution du problème de Cauchy formé par (E) et les conditions initiales, sur un intervalle contenant 0 où le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé ne s'annule pas. La fonction f et la somme S étant deux solutions de ce problème, $f = S$ sur un tel intervalle, inclus dans $]-R,R[$ et dans l'intervalle de définition de f : f est développable en série entière, et son développement est $\sum a_n x^n$.

Exemple 10.70

Développons en série entière $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$.
Une équation différentielle. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2} = 2xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; de plus $f(0) = 1$. Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$y' - 2xy = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Analyse. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, dont la somme S est solution de ce problème sur $]-R, R[$. La fonction S se dérive terme à terme sur $]-R, R[$ (proposition de la page 17) : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

et

$$2xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} x^n.$$

La première série entière est la série dérivée de $\sum a_n x^n$, qui a le même rayon R (même proposition). Pour $x \neq 0$, le terme général $2a_{n-1}x^n = 2x \cdot a_{n-1}x^{n-1}$ de la seconde est celui de $\sum a_n x^n$, décalé d'un rang et multiplié par $2x$: les deux séries convergent pour les mêmes x, et la seconde série entière a aussi pour rayon R (proposition de la page 5). Ces deux séries entières ayant pour rayon R, leur différence se calcule coefficient par coefficient sur $]-R, R[$ (proposition de la page 11) : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$0 = S'(x) - 2xS(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1}\right) x^n.$$

La somme de cette série entière coïncide sur $]-R, R[$ avec celle de la série entière nulle : par unicité des coefficients (corollaire de la page 23), $a_1 = 0$ et $(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. De plus $a_0 = S(0) = 1$. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{2k+1} = 0$, puisque $a_1 = 0$ et $a_{2k+3} = \frac{2}{2k+3} a_{2k+1}$; et $a_{2k} = \frac{1}{k!}$, puisque $a_0 = 1$ et $a_{2k+2} = \frac{2}{2k+2} a_{2k} = \frac{1}{k+1} a_{2k}$.
Le rayon. La série entière obtenue est $\sum \frac{x^{2k}}{k!}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{(x^2)^k}{k!}$ converge (série exponentielle en x^2) : le rayon est $+\infty$ (proposition de la page 5). Les coefficients vérifiant $a_1 = 0$, $(n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et $a_0 = 1$, le calcul de l'analyse montre que sa somme S vérifie $S' - 2xS = 0$ sur $\mathbb{R}$ et $S(0) = 1$.
Conclusion. Par l'unicité, admise, de la solution du problème de Cauchy $y' - 2xy = 0$, $y(0) = 1$ sur $\mathbb{R}$, on a $f = S$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

On retrouve le résultat obtenu en appliquant directement le développement de l'exponentielle en x^2 : $\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k!}$.

Les développements usuels, combinés aux opérations sur les séries entières, permettent d'obtenir d'autres développements et de calculer des sommes.

Exemple 10.71

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)(2-x)}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Pour $x \notin \{1, 2\}$,

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{(2-x)-(1-x)}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{(1-x)(2-x)}.$$

Pour tout $x \in]-2, 2[$, on a $\frac{x}{2} \in]-1, 1[$, donc

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}},$$

et cette série entière a pour rayon 2 : elle converge pour $|x| < 2$, et pour $x = 2$ son terme général vaut $\frac{1}{2}$ et ne tend pas vers 0 (proposition de la page 5). La série entière $\sum x^n$ a pour rayon $1 \neq 2$; la somme de deux séries entières de rayons distincts a pour rayon le plus petit des deux, et sa somme est la somme de leurs sommes (proposition de la page 11) : la série entière $\sum \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$ a pour rayon $\min(1, 2) = 1$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

Le rayon 1 est le minimum des rayons des deux développements ; c'est aussi la distance de 0 au pôle le plus proche, 1.

Exemple 10.72

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. En appliquant le développement de cos en $2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

série entière qui converge en tout point de $\mathbb{R}$, donc de rayon $+\infty$. La somme de deux séries entières de rayon $+\infty$ a pour rayon $+\infty$, et sa somme est la somme de leurs sommes (proposition de la page 11) : en ajoutant la constante 1 (série entière de rayon $+\infty$) et en divisant par 2, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en isolant le terme d'indice 0, qui vaut $\frac{1+1}{2} = 1$:

$$\cos^2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n},$$

avec une série entière de rayon $+\infty$.

Exemple 10.73

Développons $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ sur $]-1, 1[$. Pour $n \geqslant 1$,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1).$$

En multipliant et en divisant par les facteurs pairs $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$, on a $1 \cdot$

$3 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, donc

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n},$$

formule encore vraie pour $n = 0$. Soit $x \in]-1,1[$. On a $-x \in]-1,1[$ et, par le développement du binôme généralisé $(1+u)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} u^n$, valable pour $u \in]-1,1[$, appliqué avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -x$ (proposition de la page 31),

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n.$$

Comme $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, la série entière $\sum \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$ a pour rayon 1, et la série entière $\sum \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$, dont les coefficients ont même module, aussi (proposition de la page 6).

Exemple 10.74

Calculons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$. Comme $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, le développement de $\ln(1-x)$ (proposition de la page 28) donne

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}, \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$



10 Séries entières

IV. Séries géométriques et exponentielles d'une variable complexe

On revient dans cette section à la variable complexe.

Définition 10.75 (Somme d'une série entière de la variable complexe)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $z \in \mathring{B}(0,R)$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument (proposition de la page 4). On appelle somme de la série entière de la variable complexe $\sum a_n z^n$ la fonction

$$\underline{S} \colon \mathring{B}(0,R) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

avec $\mathring{B}(0,R) = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$.

Remarque

L'intersection du disque ouvert de convergence $\mathring{B}(0,R)$ avec la droite réelle est l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$. La restriction de $\underline{S}$ à $]-R,R[$ est la somme S de la série entière de la variable réelle, étudiée dans la section « Régularité de la somme d'une série entière ».

Définition 10.76 (Continuité d'une fonction de la variable complexe)

Soient D une partie de $\mathbb{C}$, $f \colon D \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in D$. On dit que f est continue en z_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in D,\ |z - z_0| \leqslant \delta \implies |f(z) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Remarque

Cette définition est celle de la continuité d'une fonction de la variable réelle, dans laquelle le module remplace la valeur absolue. C'est un cas particulier de la continuité d'une fonction entre espaces vectoriels normés, qui sera étudiée dans le chapitre « Fonctions sur un espace vectoriel normé », l'ensemble $\mathbb{C}$ étant muni de la norme donnée par le module.

Le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions du chapitre « Suites et séries de fonctions » est énoncé pour des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$; la démonstration ci-dessous en reprend les arguments sur un disque.

Proposition 10.77 (Continuité sur le disque ouvert)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $\underline{S}$ sa somme, définie sur le disque ouvert de convergence $\mathring{B}(0,R)$. Alors $\underline{S}$ est continue sur $\mathring{B}(0,R)$: la somme d'une série entière d'une variable complexe est continue sur son disque ouvert de convergence.

Démonstration

Hors-programme. Soit $z_0 \in \mathring{B}(0,R)$ et soit $\varepsilon > 0$.
Choix d'un rayon intermédiaire. Comme $|z_0| < R$, il existe un réel r tel que $|z_0| < r < R$: $r = \frac{|z_0|+R}{2}$ si R est fini, $r = |z_0| + 1$ si $R = +\infty$. Comme $r < R$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument (proposition de la page 4) : la série $\sum |a_n| r^n$ converge. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant r$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$: la série entière converge normalement sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r\}$.
Découpage. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant r$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z_0^n$ convergent absolument, et le terme d'indice 0 de leur différence est nul, donc

$$\underline{S}(z) - \underline{S}(z_0) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(z^n - z_0^n\right) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n z_0^n.$$

Par l'inégalité triangulaire, et comme $|z| \leqslant r$ et $|z_0| \leqslant r$,

$$\left|\underline{S}(z) - \underline{S}(z_0)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n| \left|z^n - z_0^n\right| + 2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

Choix d'un rang. Le reste d'ordre N de la série convergente $\sum |a_n| r^n$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$: on fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| r^n \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$.
Les premiers termes. Pour $n \geqslant 1$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant r$, on a $z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}$, et chacun des n termes de la somme est de module au plus r^{n-1}, donc $\left|z^n - z_0^n\right| \leqslant n r^{n-1} |z - z_0|$. En posant $C = \sum_{n=1}^{N} n |a_n| r^{n-1}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n| \left|z^n - z_0^n\right| \leqslant C |z - z_0|.$$

Conclusion. Posons $\delta = \min\left(r - |z_0|, \frac{\varepsilon}{2(C+1)}\right) > 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leqslant \delta$. Alors $|z| \leqslant |z_0| + |z - z_0| \leqslant r < R$, donc $z \in \mathring{B}(0,R)$, et ce qui précède donne

$$\left|\underline{S}(z) - \underline{S}(z_0)\right| \leqslant C\delta + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{C}{C+1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

La fonction $\underline{S}$ est donc continue en z_0, et ceci pour tout $z_0 \in \mathring{B}(0,R)$. □

La somme d'une série géométrique donne le premier développement d'une variable complexe.

Proposition 10.78

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum z^n$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est donc développable en série entière sur le disque unité ouvert $\mathring{B}(0,1)$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. La série $\sum |z|^n$ est une série géométrique de raison $|z| \in [0, 1[$, donc elle converge : la série $\sum z^n$ est absolument convergente. Comme $z \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Or $\left|z^{n+1}\right| = |z|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $0 \leqslant |z| < 1$, donc $z^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et la somme partielle tend vers $\frac{1}{1-z}$. La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 (deuxième exemple de la sous-section « Généralités » de la section « Rayon de convergence »), et sa somme coïncide avec $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ sur le disque ouvert de convergence $\mathring{B}(0, 1)$. □

Exemple 10.79

Soit $a \in \mathbb{C}$ non nul. Développons $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ pour $|z| < |a|$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |a|$. Alors $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$ et, la série géométrique de raison w ayant pour somme $\frac{1}{1-w}$ pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < 1$ (proposition précédente), on obtient avec $w = \frac{z}{a}$

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{a^{n+1}}$ est $|a|$: pour $r \geqslant 0$, la suite $\left(\frac{r^n}{|a|^{n+1}}\right) = \left(\frac{1}{|a|}\left(\frac{r}{|a|}\right)^n\right)$ est bornée si et seulement si $r \leqslant |a|$. L'égalité a donc lieu sur tout le disque ouvert de convergence $\mathring{B}(0, |a|)$. Par exemple, avec $a = \mathrm{i}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, comme $\frac{1}{\mathrm{i}^{n+1}} = (-\mathrm{i})^{n+1}$,

$$\frac{1}{z - \mathrm{i}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-\mathrm{i})^{n+1} z^n.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\exp(z) = \mathrm{e}^z$ l'exponentielle complexe de première année :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z} \left(\cos(\mathrm{Im}\, z) + \mathrm{i} \sin(\mathrm{Im}\, z)\right).$$

On a $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}$ et, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$ de la variable réelle t est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto z\mathrm{e}^{zt}$ (résultats de première année).

Proposition 10.80

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

La fonction exp est donc développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente par la règle de d'Alembert, le rapport $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1}$ tendant vers 0 si $z \neq 0$ (premier exemple de la sous-section « Généralités » de la section « Rayon de convergence »), et la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ (cinquième exemple de la même sous-section).

Dérivées successives. Posons $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrons par

récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi^{(n)} : t \mapsto z^n \mathrm{e}^{zt}$. Pour $n = 0$, c'est la définition de φ. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que φ est n fois dérivable et que $\varphi^{(n)} = z^n \varphi$. Comme φ est dérivable de dérivée $z\varphi$, la fonction $\varphi^{(n)}$ est dérivable et $\varphi^{(n+1)} = z^n \cdot z\varphi = z^{n+1}\varphi$. Chaque $\varphi^{(n)}$ étant dérivable, donc continue, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier $\varphi^{(k)}(0) = z^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\left|\varphi^{(n+1)}(t)\right| = |z|^{n+1} \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} z} \leqslant |z|^{n+1} \mathrm{e}^{|z|},$$

car $t \operatorname{Re} z \leqslant t|z| \leqslant |z|$.
Formule de Taylor. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral (proposition de la page 26) appliquée à φ entre 0 et 1,

$$\mathrm{e}^z = \varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Pour une fonction continue sur le segment $[0, 1]$, à valeurs complexes, le module de l'intégrale est majoré par l'intégrale du module (résultat de première année), donc

$$\left|\mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leqslant |z|^{n+1} \mathrm{e}^{|z|} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, \mathrm{d}t = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{|z|}.$$

Conclusion. La série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge, puisque $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument (même exemple), donc son terme général tend vers 0 : $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Les sommes partielles de $\sum \frac{z^n}{n!}$ tendent donc vers e^z. □

Exemple 10.81

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!}$. Par le développement $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ (proposition précédente), appliqué à $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et comme $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n!} = \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \exp\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right) = \mathrm{e}^{\cos\theta}\left(\cos(\sin\theta) + \mathrm{i}\sin(\sin\theta)\right).$$

Si une série $\sum u_n$ de nombres complexes converge, les séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent et ont pour sommes la partie réelle et la partie imaginaire de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (résultat de première année). En prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} = \mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} = \mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta).$$

De la même façon, pour $x \in \mathbb{R}$, la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!}$ redonnent les développements de cos et de sin (proposition de la page 30) : comme $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$ et $\mathrm{i}^{2k+1} = (-1)^k \mathrm{i}$, les termes d'indice pair sont réels et ceux d'indice impair imaginaires purs.

Le produit de Cauchy redonne la relation fonctionnelle de l'exponentielle, connue depuis la première année.

Corollaire 10.82

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z)\exp(z') = \exp(z+z').$$

Démonstration

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Posons $a_n = \frac{z^n}{n!}$ et $b_n = \frac{z'^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $w \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum a_n w^n = \sum \frac{(zw)^n}{n!}$ converge, donc le rayon de convergence de $\sum a_n w^n$ est supérieur ou égal à $|w|$ (proposition de la page 5) ; il vaut donc $+\infty$, et de même pour $\sum b_n w^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la formule du binôme,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

Les séries entières $\sum a_n w^n$ et $\sum b_n w^n$ étant de rayon $+\infty$, la somme de leur produit de Cauchy $\sum c_n w^n$ est le produit de leurs sommes pour tout $w \in \mathbb{C}$, en particulier en $w = 1$ (proposition de la page 12), et $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour tout $u \in \mathbb{C}$, en particulier en $u = z$, z' et $z + z'$ (proposition de la page 38) :

$$\exp(z+z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \exp(z)\exp(z').$$

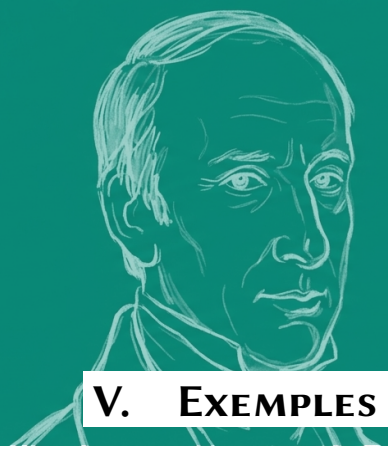
□

Remarque

La démonstration précédente n'utilise de l'exponentielle que l'égalité $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. On peut donc définir l'exponentielle d'un nombre complexe par sa série entière, en posant $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$: la série converge absolument, et le produit de Cauchy donne la relation $\exp(z)\exp(z') = \exp(z+z')$.

Remarque (Hors programme)

Cette définition s'étend à d'autres espaces. Pour une matrice carrée A, ou pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on pose de même $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. La relation $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ n'est alors assurée que si A et B commutent.



10 Séries entières

V. Exemples d'applications

1. Résolution d'une équation différentielle linéaire

Cette sous-section applique la méthode de la page 32 à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients ne sont pas constants.

Exemple 10.83

On considère l'équation :

$$(T) \ : \ (1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$$

où p est un paramètre réel ou complexe.
Soit f une solution de (T) supposée développable en série entière au voisinage de l'origine : il existe $r > 0$ et une suite (a_n) tels que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$.

1. Réécrire (T) en remarquant que $x(xy')' = xy' + x^2 y''$.
2. En déduire une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n.
3. Si une suite (a_n) satisfait cette relation de récurrence, montrer que les séries entières $\sum a_{2n} x^n$ et $\sum a_{2n+1} x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1 puis montrer que c'est le cas aussi pour $\sum a_n x^n$.
4. Quelle est la dimension de l'espace des solutions de (T) développables en série entière ? En existe-t-il d'autres ?
5. Que dire de la solution particulière satisfaisant la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ lorsque p est un entier positif pair ?
6. (Mines-Ponts MP) Caractériser les $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ tels que la fonction $x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ soit polynomiale.

Le coefficient $1 - x^2$ de y'' ne s'annule pas sur $]-1, 1[$: c'est l'intervalle contenant 0 sur lequel on étudie (T). Quitte à remplacer r par $\min(r, 1)$, on suppose $r \leqslant 1$. On note $R \geqslant r$ le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et S sa somme sur $]-R, R[$.

Question 1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur un intervalle. La fonction $x \mapsto xy'(x)$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto y'(x) + xy''(x)$, donc $x(xy')' = xy' + x^2 y''$. Ainsi

$$(1-x^2)y'' - xy' = y'' - \left(x^2 y'' + xy'\right) = y'' - x(xy')',$$

et (T) s'écrit

$$y'' - x(xy')' + p^2 y = 0.$$

Question 2. Les fonctions f et S coïncident sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$, donc leurs dérivées successives aussi. La somme S se dérive terme à terme sur $]-R, R[$, y compris deux fois (proposition de la page 17) : pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

la série entière $\sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ ayant pour rayon R (même proposition, avec $k=2$). De même, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n.$$

Pour $x \neq 0$, le terme général $na_n x^n = x \cdot na_n x^{n-1}$ est celui de la série entière dérivée multiplié par x : les deux séries convergent pour les mêmes x, et $\sum na_n x^n$ a pour rayon R (proposition de la page 5). En dérivant terme à terme cette série entière de rayon R (proposition de la page 17), on obtient, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$(xf')'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1}, \qquad x(xf')'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^n,$$

et la série entière $\sum n^2 a_n x^n$ a encore pour rayon R, par le même argument. Par la question 1, et comme la somme de séries entières de rayon R se calcule coefficient par coefficient sur $]-R,R[$ (proposition de la page 11), on a, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$0 = f''(x) - x(xf')'(x) + p^2 f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n + p^2 a_n\right) x^n.$$

La somme de cette série entière coïncide sur $]-r,r[$ avec celle de la série entière nulle : par unicité des coefficients (corollaire de la page 23), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2 - p^2)a_n.$$

Question 3. Soit (a_n) une suite qui vérifie cette relation. Posons $b_n = a_{2n}$ et $c_n = a_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La relation, écrite aux rangs $2n$ et $2n+1$, donne

$$b_{n+1} = \frac{4n^2 - p^2}{(2n+2)(2n+1)} b_n \qquad \text{et} \qquad c_{n+1} = \frac{(2n+1)^2 - p^2}{(2n+3)(2n+2)} c_n.$$

Étudions $\sum b_n x^n$.

— S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b_{n_0} = 0$, la relation donne $b_n = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$, par récurrence : la série entière $\sum b_n x^n$ est un polynôme, elle converge en tout point et son rayon est $+\infty \geqslant 1$.

— Sinon, $b_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{\left|4n^2 - p^2\right|}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \ :$$

par la règle de d'Alembert (proposition de la page 7), $\sum b_n x^n$ a pour rayon 1.

Le même raisonnement, avec $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\left|(2n+1)^2 - p^2\right|}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ lorsque les c_n sont tous non nuls, montre que $\sum c_n x^n$ a un rayon au moins égal à 1.

Passons à $\sum a_n x^n$. Notons $\alpha_n = a_n$ si n est pair et $\alpha_n = 0$ sinon, $\beta_n = a_n$ si n est impair et $\beta_n = 0$ sinon, de sorte que $a_n = \alpha_n + \beta_n$. Soit $x \in]-1,1[$. On a $x^2 \in [0,1[$, donc les séries $\sum b_k (x^2)^k$ et $\sum c_k (x^2)^k$ convergent. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{2N+1} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{2N} \alpha_n x^n = \sum_{k=0}^{N} b_k x^{2k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{2N+1} \beta_n x^n = x \sum_{k=0}^{N} c_k x^{2k},$$

et $\sum_{n=0}^{2N+2} \beta_n x^n = \sum_{n=0}^{2N+1} \beta_n x^n$. Les suites des sommes partielles d'indices pairs et impairs convergent vers la même limite : les séries $\sum \alpha_n x^n$ et $\sum \beta_n x^n$ convergent. Ceci valant pour tout $x \in]-1,1[$, ces deux séries entières ont un rayon au moins égal à 1 (proposition de la page 5), et le rayon de leur somme $\sum a_n x^n$ est au moins égal au minimum de leurs rayons, donc à $\min(1,1) = 1$ (proposition de la page 11).

Question 4. Cette question repose sur le résultat suivant.

Proposition 10.84 (Hors programme)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b\colon I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Remarque

Ce résultat est hors programme, mais il faut le connaître. Le programme de PC le donne à l'ordre 1, où l'espace des solutions est de dimension 1, et à l'ordre 2 lorsque les coefficients sont constants. À l'ordre 2 avec des coefficients non constants, il est pourtant utilisé dans des sujets de concours, à l'oral surtout. Ses hypothèses sont à citer : I est un intervalle, le coefficient de y'' vaut 1, et les fonctions a et b sont continues sur I.

Sur l'intervalle $]-1,1[$, le coefficient $1-x^2$ de y'' ne s'annule pas, donc (T) équivaut à

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}\,y' + \frac{p^2}{1-x^2}\,y = 0.$$

Les fonctions $x \mapsto -\frac{x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{p^2}{1-x^2}$ sont continues sur l'intervalle $]-1,1[$, donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (T) sur $]-1,1[$ est un espace vectoriel de dimension 2.

D'après les questions 2 et 3, la relation de récurrence, avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ puis avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, définit deux séries entières de rayon au moins égal à 1, dont les sommes f_0 et f_1 sont solutions de (T) sur $]-1,1[$. La fonction f_0 est paire et f_1 est impaire, et aucune n'est nulle : la famille (f_0, f_1) est libre. C'est une famille libre de deux éléments de $\mathcal{S}$, qui est de dimension 2, donc une base de $\mathcal{S}$.

Les solutions de (T) développables en série entière forment donc un espace de dimension 2, et il n'en existe pas d'autres : toute solution de (T) sur $]-1,1[$ est combinaison linéaire de f_0 et de f_1.

Question 5. Soit $p = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$, et soit f_0 la solution telle que $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$, c'est-à-dire $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Comme $a_1 = 0$, la relation donne $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence. Pour les indices pairs, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k+2} = \frac{4k^2 - 4m^2}{(2k+2)(2k+1)}\,a_{2k}.$$

— Pour $k = m$, le facteur $4k^2 - 4m^2$ est nul, donc $a_{2m+2} = 0$, puis $a_{2k} = 0$ pour tout $k \geqslant m+1$, par récurrence.

— Pour $0 \leqslant k < m$, on a $4k^2 - 4m^2 \neq 0$; comme $a_0 = 1 \neq 0$, on obtient par récurrence $a_{2k} \neq 0$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$.

La relation de récurrence s'arrête : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{2k} x^{2k},$$

et f_0 est la restriction à $]-1,1[$ d'un polynôme pair de degré exactement $2m$. Par exemple, pour $p = 2$, $a_2 = \frac{-4}{2} = -2$ et $f_0(x) = 1 - 2x^2$; pour $p = 4$, $a_2 = \frac{-16}{2} = -8$, $a_4 = \frac{4-16}{4\cdot 3}\cdot(-8) = 8$ et $f_0(x) = 1 - 8x^2 + 8x^4$.

Question 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et $g\colon x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$, définie et continue sur $[-1,1]$. La fonction arcsin est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc g est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = -\frac{\alpha \sin(\alpha \arcsin(x))}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{soit} \qquad \sqrt{1-x^2}\, g'(x) = -\alpha \sin(\alpha \arcsin(x)).$$

En dérivant cette égalité, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} g'(x) + \sqrt{1-x^2}\, g''(x) = -\frac{\alpha^2 \cos(\alpha \arcsin(x))}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\alpha^2 g(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

et, en multipliant par $\sqrt{1-x^2} \neq 0$,

$$(1-x^2)g''(x) - xg'(x) + \alpha^2 g(x) = 0.$$

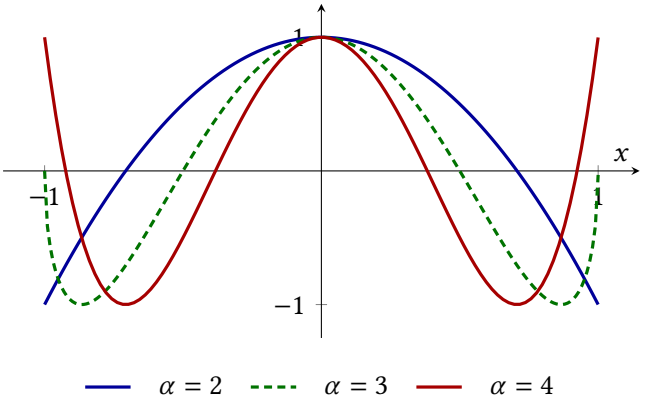
Ainsi g est solution de (T) sur $]-1,1[$ avec $p = \alpha$, et $g(0) = \cos(0) = 1, g'(0) = -\alpha \sin(0) = 0$. Par l'unicité admise de la solution du problème de Cauchy (question 4), g est la solution f_0 de (T) telle que $f_0(0) = 1$ et $f_0'(0) = 0$: pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$, avec $a_0 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+2} = \frac{4k^2 - \alpha^2}{(2k+2)(2k+1)}\, a_{2k},$$

les coefficients d'indice impair étant nuls. Montrons que g est polynomiale sur $[-1,1]$ si et seulement si $\alpha = 2m$ avec $m \in \mathbb{Z}^\star$.

- Supposons $\alpha = 2m$ avec $m \in \mathbb{Z}^\star$. La relation ne dépend que de $\alpha^2 = 4|m|^2$; par la question 5 avec $p = 2|m|$, il existe un polynôme P de degré $2|m|$ tel que $g(x) = P(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Les fonctions g et P sont continues sur $[-1,1]$: en faisant tendre x vers 1 et vers -1, on obtient $g(\pm 1) = P(\pm 1)$, et $g = P$ sur $[-1,1]$.
- Supposons $\alpha \notin \{2m,\ m \in \mathbb{Z}^\star\}$; comme $\alpha \neq 0$, on a $\alpha \notin 2\mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4k^2 - \alpha^2 \neq 0$, sinon $\alpha = \pm 2k \in 2\mathbb{Z}$. Comme $a_0 = 1 \neq 0$, la relation donne par récurrence $a_{2k} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P = \sum_{n=0}^{d} c_n X^n$ tel que $g = P$ sur $[-1,1]$. En posant $c_n = 0$ pour $n > d$, la série entière $\sum c_n x^n$ a pour rayon $+\infty$ et sa somme coïncide sur $]-1,1[$ avec celle de $\sum a_n x^n$, de rayon au moins égal à 1. Par unicité des coefficients (corollaire de la page 23), $a_n = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $a_{2d+2} = c_{2d+2} = 0$, ce qui est exclu. Donc g n'est pas polynomiale.

La fonction $x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ est donc polynomiale si et seulement si α est un entier pair non nul. Pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$, on retrouve les polynômes de la question 5 : pour $x \in [-1,1]$, $\cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2x^2$ et $\cos(4\arcsin(x)) = 1 - 8x^2 + 8x^4$. Pour $\alpha = 3$, en posant $\theta = \arcsin(x)$, on a $\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}\,(1-4x^2)$, qui n'est pas polynomiale.



La figure représente $x \mapsto \cos(\alpha \arcsin(x))$ sur $[-1,1]$ pour $\alpha \in \{2,3,4\}$.

2. Résolution d'une équation de récurrence linéaire

Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes, dont la réunion est E. Cette notion et les techniques de dénombrement utilisées ici relèvent de la première année ; on l'utilise ici pour définir une suite d'entiers, que l'on étudie à l'aide d'une série entière dont elle donne les coefficients.

Exemple 10.85

On appelle n-ième nombre de Bell le nombre B_n de partitions différentes de $[\![1, n]\!]$ (avec $[\![1, 0]\!] = \varnothing$).

1. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

Dans la suite, on considère la série entière $B : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

3. Justifier que cette série entière a un rayon de convergence au moins égal à 1.
4. Montrer que B satisfait sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle $B' - \mathrm{e}^x B = 0$.
5. En déduire une expression de B sur $]-1, 1[$.
6. En déduire la formule dite de Dobiński : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Question 1. L'ensemble vide a une seule partition, l'ensemble vide de parties (une réunion vide est vide) : $B_0 = 1$. L'ensemble $\{1\}$ a pour seule partition $\{\{1\}\}$: $B_1 = 1$. Les partitions de $\{1, 2\}$ sont $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$: $B_2 = 2$. Les partitions de $\{1, 2, 3\}$ sont

$$\{\{1,2,3\}\},\quad \{\{1\},\{2,3\}\},\quad \{\{2\},\{1,3\}\},\quad \{\{3\},\{1,2\}\},\quad \{\{1\},\{2\},\{3\}\}\ :$$

une partition en une part, trois en deux parts (selon l'élément isolé), une en trois parts. Donc $B_3 = 5$.

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une bijection entre deux ensembles transporte leurs partitions : un ensemble à k éléments, en bijection avec $[\![1, k]\!]$, a B_k partitions.

Soit $\mathcal{P}$ une partition de $[\![1, n+1]\!]$. Notons A la part qui contient $n+1$ et $C = [\![1, n+1]\!] \setminus A$, qui est une partie de $[\![1, n]\!]$. Les autres parts, $\mathcal{P} \setminus \{A\}$, forment une partition de C. Réciproquement, si $C \subset [\![1, n]\!]$ et si $\mathcal{Q}$ est une partition de C, alors $\mathcal{Q} \cup \{[\![1, n+1]\!] \setminus C\}$ est une partition de $[\![1, n+1]\!]$: la part ajoutée contient $n+1$, donc n'est pas vide, et elle est disjointe des parts de $\mathcal{Q}$, incluses dans C. Les deux constructions sont réciproques l'une de l'autre : les partitions de $[\![1, n+1]\!]$ sont en bijection avec les couples $(C, \mathcal{Q})$ formés d'une partie C de $[\![1, n]\!]$ et d'une partition $\mathcal{Q}$ de C.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, il y a $\binom{n}{k}$ parties C de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, et chacune a B_k partitions. En regroupant les couples selon le cardinal de C,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Par exemple, $B_4 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + B_3 = 1 + 3 + 6 + 5 = 15$.

Question 3. Montrons par récurrence forte que $B_n \leqslant n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $B_0 = 1 = 0!$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $B_k \leqslant k!$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Par la question 2,

$$B_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)\, n! = (n+1)!,$$

puisque $(n-k)! \geqslant 1$. La propriété est vraie au rang $n+1$; par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $0 \leqslant \frac{B_n}{n!} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\frac{B_n}{n!} = \mathrm{O}(1)$. Par comparaison avec $\sum x^n$, de rayon 1 (proposition de la page 6), le rayon R_B de $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ vérifie $R_B \geqslant 1$. La somme B est donc définie sur $]-1,1[$.

Question 4. La fonction B, somme d'une série entière de rayon $R_B \geqslant 1$, se dérive terme à terme sur $]-1,1[$ (proposition de la page 17) : B est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$B'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{B_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!}x^n.$$

La série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon $+\infty$ et pour somme e^x. Son produit de Cauchy avec $\sum \frac{B_n}{n!}x^n$ a pour coefficients, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{B_k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = \frac{B_{n+1}}{n!},$$

par la question 2. Comme $\min(+\infty, R_B) \geqslant 1$, la somme de ce produit de Cauchy est le produit des sommes sur $]-1,1[$ (proposition de la page 12) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\mathrm{e}^x B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!}x^n = B'(x).$$

Donc $B' - \mathrm{e}^x B = 0$ sur $]-1,1[$.

Question 5. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, résolue en première année ; refaisons le calcul. La fonction $\varphi : x \mapsto B(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\varphi'(x) = B'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^x B(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} = \left(B'(x) - \mathrm{e}^x B(x)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x} = 0.$$

La dérivée de φ étant nulle sur l'intervalle $]-1,1[$, φ y est constante, égale à $\varphi(0) = B(0)\mathrm{e}^{-1} = B_0\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Question 6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le développement de l'exponentielle en e^x, et comme $(\mathrm{e}^x)^k = \mathrm{e}^{kx}$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!},$$

avec la convention $0^0 = 1$. Il s'agit d'intervertir les deux sommes. On utilise pour cela la sommation par paquets et le théorème de Fubini pour les familles sommables, qui relèvent du programme de probabilités (chapitre « Espaces probabilisés »). Le programme en réserve l'usage au contexte probabiliste : ce passage n'est pas exigible. Une famille $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres réels telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{k,n}| < +\infty$ est sommable, et alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n},$$

toutes les séries écrites convergeant absolument.

Posons $u_{k,n} = \frac{k^n x^n}{k!\,n!}$ pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(k|x|)^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{k|x|}}{k!}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{k|x|}}{k!} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{|x|}} < +\infty.$$

La famille $(u_{k,n})$ est donc sommable, et

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{k!\, n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Posons $d_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$, série convergente par ce qui précède. La série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$ converge en tout $x \in \mathbb{R}$: son rayon est $+\infty$ (proposition de la page 5), et sa somme vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par la question 5, les séries entières $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$, de rayons au moins égaux à 1, ont la même somme sur $]-1, 1[$. Par unicité des coefficients (corollaire de la page 23), $\frac{B_n}{n!} = \frac{d_n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on retrouve $B_0 = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1$ et $B_1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = 1$.

Les deux séries entières ayant les mêmes coefficients, le rayon de $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ est en fait $+\infty$, et $B(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.