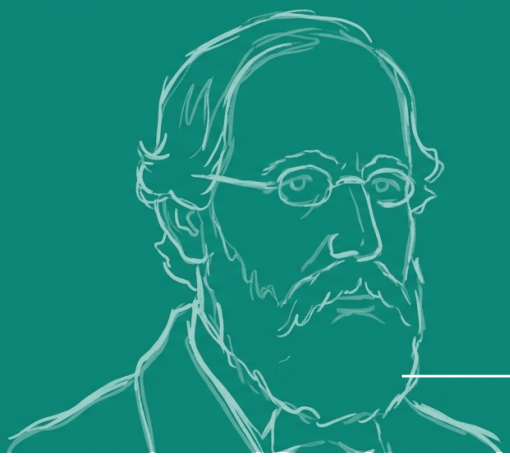
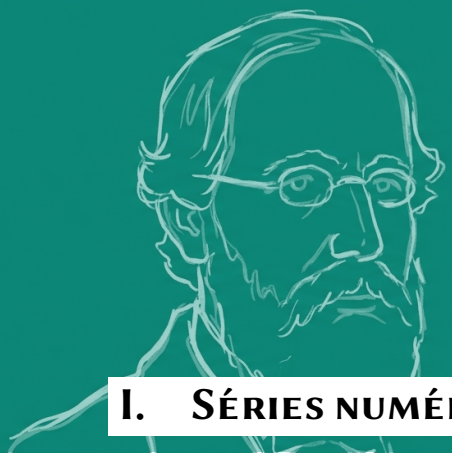


1

Révisions d'analyse

Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Le programme de première année est riche en ce qui concerne l'analyse. Nous ne pourrons pas tout revoir. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur trois thèmes, non pas parce qu'ils sont plus importants dans l'absolu, mais parce que sans eux, des pans entiers du programme de deuxième année seront incompréhensibles.
Il s'agit de l'étude de la convergence des séries numériques (notamment via l'utilisation des relations de comparaison), du calcul d'intégrales, et de la résolution d'équations différentielles. Sur ces trois thèmes, il convient de s'entraîner intensément. Assurez-vous de maîtriser ces notions. Elles seront indispensables cette année.
C'est un chapitre de révisions. En conséquence, nous ne nous étendrons pas sur la théorie. Le chapitre est divisé en trois sections. Dans chacune d'elles, nous rappelons quelques résultats principaux qu'il faudra appliquer dans les exercices.



1

Révisions d'analyse

I. Séries numériques

1. Résultats généraux

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle *série de terme général* u_n, notée $\sum_{n\geq 0} u_n$, la suite $(S_N)_{N\geq 0}$ des *sommes partielles* définie par

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite (S_N) converge dans $\mathbb{K}$. Sa *somme* est alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

Si (S_N) diverge, on dit que la série *diverge*. Le *reste d'ordre n* est $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarque

La définition ainsi donnée est *formelle*. Elle permet de rendre rigoureuse la notion de série. Cela étant dit, l'intuition que l'on cherche à capturer est relativement simple : on cherche à définir ce qu'est une somme avec une infinité de termes.

Remarque

Autant la définition de série formelle sert assez peu en tant que telle, autant il est important de faire la distinction entre une *série* et sa *somme*. La série, c'est le « truc » qui formalise le fait qu'on essaie de faire une somme infinie. La somme, c'est le résultat obtenu si celui existe.
Confondre les deux c'est faire une erreur analogue à confondre une suite et son éventuelle limite. Une suite peut avoir une limite ou elle peut ne pas en avoir. Mais une suite ne se résume pas à sa limite. C'est pareil pour les séries.

Remarque

En revanche, la définition de convergence d'une série comme la convergence de la suite des sommes partielles est *à connaître*. D'ailleurs, faisons quelques exemples d'applications.

Exemple 1.2

La série $\sum_{n\geq 0} n$ diverge. En effet pour $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

En revanche, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge. En effet pour $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{N+1}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2.$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. On peut également calculer le reste de cette série pour tout $n \geqslant 0$.
Pour $N \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N-n}}{1-\frac{1}{2}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$.

Proposition 1.3 (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \to 0$. La réciproque est fausse.

Démonstration

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente. Montrons que $u_n \to 0$.
Notons (S_N) la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$. On a donc pour tout $N \geq 0$:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Puis :

$$S_{N+1} - S_N = \sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n = u_{N+1}.$$

Comme $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, (S_N) admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ finie. Et (S_{N+1}) en tant que suite extraite, admet la même limite finie.
Ainsi :

$$S_{N+1} - S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell - \ell = 0.$$

D'où $u_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ puis en rajoutant le premier terme :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

□

Définition 1.4

Si $u_n \not\to 0$, on dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge **grossièrement**.

Remarque

La divergence grossière est une condition *suffisante* de divergence (si une série diverge grossièrement, alors elle diverge). Mais ce n'est pas une condition *nécessaire.* Ainsi, dire que $u_n \to 0$ ne suffit pas pour prouver que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Cela peut paraître évident mais d'expérience, l'erreur revient encore quelques semaines avant les concours.

Exemple 1.5

Avec les exemples précédents, on a :

$$n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et on a bien $\sum_{n\geq 0} n$ diverge.

En revanche, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge et en effet :

$$\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En revanche, la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge bien que :

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il existe aussi des séries divergentes pour lequel le terme général n'a pas de limite. Par exemple la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ est divergente, et on a bien $(-1)^n \not\to 0$ mais cette fois-ci parce que le terme général n'a pas de limite.

Divergence de la série harmonique

Montrons que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

L'idée de la démonstration est d'utiliser le fait que les sommes partielles de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ évoluent comme $\ln(n)$. Or $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$. Ainsi, on peut espérer qu'en regardant les sommes partielles en $2N$ et en N, on devrait récupérer une constante. Cette constante peut nous permettre de montrer que la série ne converge pas. En ce qui concerne la comparaison entre ces sommes partielles et $(\ln(n))$, nous rendrons cette analogie plus précise dans un chapitre ultérieur.

En attendant, procédons par l'absurde. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge.

Maintenant, pour $N \geq 1$, posons $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. On a :

$$S_{2N} - S_N = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}.$$

Dans cette somme, $n \leq 2N$ donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2N}$. Puis par croissance des sommes finies, on en déduit :

$$S_{2N} - S_N \geq \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} \geq (2N - N) \times \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2}.$$

Puisqu'on a supposé que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge, (S_N) converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$. Et de même (S_{2N}) converge vers la même limite comme suite extraite.
Ainsi :

$$S_{2N} - S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell - \ell = 0.$$

Puis par passage à la limite des inégalités larges : $\boxed{0 \geq \frac{1}{2}.}$ Ce résultat est **absurde**. Ainsi notre hypothèse est fausse et $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$ □

Proposition 1.6 (Linéarité)

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration

Pour $N \geq 0$, notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$. Par linéarité des sommes finies, on a pour tout $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda S_N + \mu T_N.$$

Or (S_N) et (T_N) convergent par hypothèse vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ respectivement. Par opérations sur les limites, $(\lambda S_N + \mu T_N)$ converge vers $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
D'où le résultat. □

Remarque

En particulier, pour $\lambda \neq 0$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature. Cette remarque sera utile pour comparer une série à un multiple d'une série de référence.

Exemple 1.7

Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+3^n}{6^n}$.
On commence par décomposer le terme général :

$$\frac{2+3^n}{6^n} = 2 \times \frac{1}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Les séries $\sum \left(\frac{1}{6}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes (de raisons respectives $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$, toutes deux dans $[0,1[$). Par linéarité, $\sum_{n\geq 0} \frac{2+3^n}{6^n}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+3^n}{6^n} = 2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{6}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{6}{5} + 2 = \boxed{\frac{22}{5}.}$$

Remarque

Attention : la linéarité demande que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ *convergent* avant de pouvoir écrire $\sum(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$. On ne peut donc pas, en général, scinder une série en deux sans précaution.
Plus précisément, sur les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$, il faut qu'au moins *deux* d'entre elles convergent pour pouvoir conclure sur la troisième (et écrire l'égalité des sommes).
Par exemple, $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$ converge (c'est la série nulle), mais on n'a pas le droit d'écrire $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = 0$ puisque ces deux dernières séries divergent. Le symbole $+\infty - \infty$ n'a pas de sens.

2. Séries de référence

Proposition 1.8 (Séries géométriques)

Pour $q \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Convergence des séries géométriques

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = q^n$.
On distingue les deux cas :

- Si $|q| \geq 1$, alors $|q|^N \geq 1$ et donc $|q|^N \not\to 0$. Ainsi $q^N \not\to 0$.
  Puis $\boxed{\sum_{n\geq 0} q^n \text{ diverge grossièrement.}}$

— Si $|q| < 1$, pour tout $N \geq 0$, on pose S_N la $N^{\text{ème}}$ somme partielle et on a :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Maintenant, $\frac{1}{1-q}$ est constant et donc a toujours une limite. Ainsi (S_N) admet une limite finie si et seulement la suite (q^{N+1}) admet une limite finie.
Or $|q| < 1$, donc $q^{N+1} \to 0$ et ainsi $S_N \to \frac{1}{1-q}$.

D'où $\boxed{\sum_{n\geq 0} q^n \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.}$

□

Remarque

Les séries de la forme $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ ou encore $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont appelées séries géométriques dérivées. Elles convergent à la même condition que $|q| < 1$. Cependant ce résultat est en bord de programme de première année et les sujets demandent régulièrement de le redémontrer. On les reverra dans le cadre du chapitre sur les séries entières.

Proposition 1.9 (Série exponentielle)

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x.$$

Convergence de la série exponentielle

Il y a plusieurs façons de montrer ce résultat. Mais l'idée principale est de reconnaître le début du développement limité de exp en 0. Si on pouvait montrer que le reste de ce développement (le petit o) tend vers 0 à x fixé lorsqu'on augmente l'ordre du développement, on aurait notre résultat.
Nous allons le faire en utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange, vue en première année. Rappelons son énoncé. Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est C^{n+1} (avec $n \geq 0$) sur $[a, b]$ et si M_{n+1} est un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a, b]$, alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Autrement dit, l'inégalité de Taylor–Lagrange contrôle précisément le reste du développement, ce qui est exactement ce dont nous avons besoin.
On a envie d'appliquer ce résultat à exp. Mais l'énoncé parle de $x \in \mathbb{C}$ et l'inégalité de Taylor–Lagrange s'applique pour une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour contourner ce problème, à $x \in \mathbb{C}$ fixé posons :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(xt) \end{array} \right.$$

g est C^∞ sur $[0, 1]$ par composition et une récurrence immédiate donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$g^{(k)}(t) = x^k \mathrm{e}^{xt}, \qquad \text{et en particulier} \qquad g^{(k)}(0) = x^k.$$

Majorons la dérivée d'ordre $n+1$ sur $[0,1]$. La fonction $t \mapsto \left|e^{xt}\right|$ est continue sur le segment $[0,1]$: par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et on peut noter M un de ses majorants. Remarquez que M dépend de x, mais pas de n : c'est le point crucial. On a alors, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\left|g^{(n+1)}(t)\right| = |x|^{n+1}\left|e^{xt}\right| \leq M|x|^{n+1}.$$

L'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à g entre 0 et 1, à l'ordre n, donne donc pour tout $n \geq 0$:

$$\left|g(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k\right| \leq M|x|^{n+1}\frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

qui se simplifie en :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or :

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée si $|x| > 1$ et par opérations sur les limites si $|x| \leq 1$. Et donc par encadrement :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(x).$$

Les sommes partielles de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ convergent : la série converge, et d'où pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.}$$

□

Remarque

Nous revisiterons ce résultat via d'autres techniques dans le chapitre sur les séries entières.

Méthode 1.10 (Séries télescopiques)

On considère la série $\sum_{n\geq 0}(a_{n+1} - a_n)$.

— Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^{N} a_{n+1} - \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N+1} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Ainsi par télescopage, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_0.$$

— La suite $\left(\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1} - a_n)\right)$ admet donc une limite finie si et seulement si (a_{N+1}) admet une limite finie.

— Ainsi la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge. De plus, d'après les calculs précédents, dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - a_0.$$

Remarque

Bien que ce résultat soit standard, il faut savoir le remontrer à chaque fois en revenant aux sommes partielles.

Exemple 1.11

Étudions et calculons la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
Commençons par remarquer que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Cela peut se faire par décomposition en éléments simples si on ne le voit pas immédiatement.
Ainsi pour tout $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

où la dernière égalité s'obtient par télescopage.
Or $1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$. Donc $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge}}$ et :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.}$$

Proposition 1.12 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelée série de Riemann d'exposant α, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque

Nous ne donnons pas de démonstration ici : elle repose sur la comparaison série-intégrale, qui sera mise en place dans le chapitre sur les séries numériques. Ce résultat y sera donc réétudié et redémontré.
En attendant, il est indispensable de le connaître : avec les séries géométriques, les séries de Riemann sont les séries de référence les plus utilisées dans les critères de comparaison de la sous-section suivante.

3. Théorèmes de comparaison des séries

Proposition 1.13 (Critère de comparaison des séries à termes positifs)

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Les deux assertions étant contraposées l'une de l'autre, elles sont équivalentes. Il suffit donc de démontrer (par exemple) la première.
Simplifions un peu : on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pas seulement à partir d'un certain rang), on a $0 \leq u_n \leq v_n$. Le cas général se traite en séparant les premiers termes (ce qui ne change pas les natures de série).
Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge.
Pour $N \geq 0$, notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$. Comme $u_n \geq 0$, la suite (S_N) est croissante.
De plus, par croissance des sommes finies :

$$\forall N \geq 0, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n = T_N.$$

Or $\sum v_n$ converge, donc (T_N) converge vers $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Comme (T_N) est elle-même croissante (car $v_n \geq 0$), on a $T_N \leq \ell$ pour tout N, et donc $S_N \leq \ell$ pour tout N.
Ainsi (S_N) est une suite croissante majorée. D'après le théorème de la limite monotone, (S_N) converge.
D'où $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$ □

Exemple 1.14

Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n + n}$ converge.
Pour tout $n \geq 0$, on a $2^n + n \geq 2^n > 0$, donc :

$$0 \leq \frac{1}{2^n + n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Or on a vu précédemment que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0, 1[$). Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n + n} \text{ converge.}}$

Exemple 1.15

Montrons que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
Pour tout $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq n$ et donc :

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par contraposée du critère de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}}$

Proposition 1.16 (Critère d'équivalence des séries à termes positifs)

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

Puisque $u_n \sim v_n$, on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En particulier, il existe un rang n_0 à partir duquel $v_n > 0$ et :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}.$$

En multipliant par $v_n > 0$, on obtient pour tout $n \geq n_0$:

$$0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

Les séries $\sum \frac{1}{2}v_n$ et $\sum \frac{3}{2}v_n$ ont la même nature que $\sum v_n$ par linéarité.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \frac{3}{2}v_n$ converge, et par le critère de comparaison, $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum \frac{1}{2}v_n$ diverge, et comme $\frac{1}{2}v_n \leq u_n$, par contraposée du critère de comparaison, $\sum u_n$ diverge.

Dans les deux cas, $\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}}$ □

Exemple 1.17

Étudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Comme $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Les deux suites sont strictement positives pour $n \geq 1$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (par exemple par comparaison avec $\sum \frac{1}{n(n+1)}$).

Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ converge.}}$

Exemple 1.18

Étudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. Les deux suites sont strictement positives pour $n \geq 1$. Or la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ diverge.}}$

Définition 1.19 (Absolue convergence)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Proposition 1.20 (L'absolue convergence implique la convergence)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Traitons d'abord le cas réel, puis le cas complexe.
Cas réel. Supposons $u_n \in \mathbb{R}$ pour tout n, et que $\sum |u_n|$ converge. Posons pour tout $n \geq 0$:

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \quad \text{et} \quad u_n^- = \max(-u_n, 0).$$

Ce sont les *parties positive et négative* de u_n. Par construction, $u_n^+ \geq 0$, $u_n^- \geq 0$, et on vérifie que :

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \quad \text{et} \quad |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

En particulier, on a les majorations $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Or $\sum |u_n|$ converge, donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent toutes les deux.
Par linéarité, la série $\sum (u_n^+ - u_n^-) = \sum u_n$ converge.
Cas complexe. Supposons maintenant $u_n \in \mathbb{C}$, et notons $u_n = a_n + i\, b_n$ avec $a_n = \mathrm{Re}(u_n) \in \mathbb{R}$ et $b_n = \mathrm{Im}(u_n) \in \mathbb{R}$. On a pour tout n :

$$|a_n| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad |b_n| \leq |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent. Autrement dit, les séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. D'après le cas réel, elles convergent.
Enfin, par linéarité (avec $\lambda = 1$ et $\mu = i$), $\sum u_n = \sum (a_n + i\, b_n)$ converge. □

Exemple 1.21

Montrons que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$). Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, et en particulier $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ converge.}}$

Remarque

La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. On dit alors qu'elles sont *semi-convergentes*. Un exemple est la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, qui converge mais dont la série des valeurs absolues est la série harmonique, qui diverge.

Convergence de la série harmonique alternée

Montrons que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

L'idée est d'utiliser la représentation intégrale $\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x$ pour transformer la somme en une intégrale, puis de majorer le « reste ».

Pour $N \geq 1$, posons $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$. On a :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} (-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

où l'on a sorti le facteur $(-1) = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1}$ de la somme. Or pour tout $x \in [0,1]$, on a $-x \neq 1$, et donc la somme géométrique vaut :

$$\sum_{n=1}^{N} (-x)^{n-1} = \frac{1-(-x)^N}{1-(-x)} = \frac{1-(-x)^N}{1+x}.$$

Ainsi :

$$S_N = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^N}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + \int_0^1 \frac{(-x)^N}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

L'idée de la séparation vient du fait que pour $x \neq 1$, $x^N \to 0$ et donc on s'attend à ce que le second terme devienne négligeable.

Pour le premier terme, on a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

On obtient donc :

$$S_N = -\ln 2 + \int_0^1 \frac{(-x)^N}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Majorons le reste. Pour tout $N \geq 1$, par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^N}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \frac{x^N}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^N\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N+1}$$

où l'on a utilisé que $\frac{1}{1+x} \leq 1$ pour $x \in [0,1]$.

Ainsi $|S_N - (-\ln 2)| \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, donc $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln 2$. D'où $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}}$ et :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.}$$

□

Proposition 1.22 (Critère de domination)

Soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série convergente à termes positifs, et (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $u_n = O(v_n)$. Alors $\sum u_n$ converge absolument, et en particulier $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Par définition de $u_n = O(v_n)$, il existe une constante $M \geq 0$ et un rang n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$:

$$|u_n| \leq M v_n.$$

Comme $\sum v_n$ converge, $\sum M v_n$ converge également par linéarité. Or à partir du rang n_0, $0 \leq |u_n| \leq M v_n$. Par le critère de comparaison appliqué aux séries à termes positifs $\sum |u_n|$ et $\sum M v_n$, la série $\sum |u_n|$ converge.

Ainsi $\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument,}}$ et en particulier elle converge. □

Corollaire 1.23

Soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série convergente à termes positifs, et (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que $u_n = o(v_n)$. Alors $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration

Si $u_n = o(v_n)$, alors en particulier $u_n = O(v_n)$.
On applique directement le critère de domination. □

Exemple 1.24

Étudions la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $|\cos n| \leq 1$, donc :

$$\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi $\frac{\cos n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par le critère de domination, $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2} \text{ converge absolument.}}$

Exemple 1.25

Étudions la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^{100}}{2^n}$.

Par croissance comparée :

$$\frac{n^{100}/2^n}{(3/4)^n} = n^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $\frac{n^{100}}{2^n} = o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$. Or $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{3}{4} \in [0,1[$, donc converge. Par le corollaire du critère de domination, $\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{n^{100}}{2^n} \text{ converge absolument.}}$

Remarque

D'où vient le trois quarts dans l'exemple précédent ?
D'abord il faut développer une intuition qui va souvent vous servir : les croissances comparées ne disent pas simplement que l'exponentielle gagne contre les puissances (ou les puissances contre le logarithme). Les croissances comparées disent que l'exponentielle bat les puissances *à plate couture*.
Par exemple : xe^{-x} tend vers 0 en $+\infty$. Mais peut-être qu'en prenant une plus petite exponentielle, le rapport de force va s'inverser ?
Non. Par exemple $xe^{-\frac{1}{2}x}$ tend encore vers 0 et $xe^{-\frac{1}{4}x}$ aussi et également $xe^{-\frac{1}{100}x}$ ou même $xe^{-\frac{1}{10^{10^{10}}}x}$.
En quoi cela nous est-il utile ? Eh bien dans l'exemple précédent, on étudiait la série de terme général $\frac{n^{100}}{2^n}$ qui, par croissance comparée, tend vers 0.
A priori, cela signifie que la série ne diverge pas grossièrement, mais ça ne nous dit rien sur sa convergence. Mais il faut voir que la croissance comparée a un message caché : le $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ gagne *haut la main*.
Ainsi, en prenant une base d'exponentielle intermédiaire (par exemple $\frac{3}{4}$), on peut espérer garder la convergence vers 0 et en déduire une négligeabilité qui, elle, suffit pour conclure. Et c'est ce qu'on a fait.



1 Révisions d'analyse

II. Intégrales sur un segment

1. Généralités

Proposition 1.26 (Relation de Chasles)

Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur un intervalle I et tous $a, b, c \in I$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

Cet énoncé ne suppose rien sur l'ordre de a, b et c. Il est en effet adossé à la *convention d'orientation* :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On la retrouve d'ailleurs en faisant $c = a$ dans la relation de Chasles, puisque $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Proposition 1.27 (Positivité, croissance et inégalité triangulaire)

Soient $a \leq b$ deux réels.

1. **Positivité.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.
2. **Croissance.** Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues et vérifient $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
3. **Inégalité triangulaire.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue et s'il existe $M \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M(b - a).$$

Remarque

Les deux premiers points sont réservés aux fonctions à valeurs réelles : écrire « $f \geq 0$ » ou « $f \leq g$ » n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$, faute de relation d'ordre. Le troisième, lui, ne compare que des modules : il vaut donc aussi bien pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Remarque

Attention à l'ordre des bornes. Ces trois énoncés supposent *tous* que $a \leq b$: avec la convention d'orientation, l'intégrale d'une fonction positive prise « à l'envers » est négative. C'est l'erreur classique ; il faut toujours vérifier le sens des bornes avant d'écrire une inégalité entre intégrales.
Il est donc commode de disposer d'une version de la dernière majoration qui, elle, ne suppose rien sur l'ordre des bornes. Si $g\colon I \to \mathbb{K}$ est continue, si $u, v \in I$ et s'il existe $M \geq 0$ tel que $|g(t)| \leq M$ pour tout t situé entre u et v, alors :

$$\left| \int_u^v g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq M\,|v-u|\,.$$

En effet, si $u \leq v$ c'est la proposition précédente, et si $v \leq u$ on applique celle-ci à $\int_v^u g$, qui ne diffère que par le signe. La valeur absolue $|v-u|$ rend ainsi la majoration valable quel que soit le signe de $v-u$: changer l'orientation ne change que le signe de l'intégrale. C'est sous cette forme que nous nous en servirons dans la démonstration du théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 1.28 (Théorème fondamental de l'analyse — première forme)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue. La fonction

$$F\colon x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $[a,b]$ et vérifie $F' = f$.

Théorème 1.29 (Théorème fondamental de l'analyse — seconde forme)

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue et G une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) = [G(t)]_a^b\,.$$

Équivalence des deux formes

Montrons que chacune des deux formes se déduit de l'autre.

La première forme entraîne la seconde. Soit f continue sur $[a,b]$ et soit G une primitive de f sur $[a,b]$. D'après la première forme, la fonction $F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ de dérivée f. Ainsi $(F-G)' = f - f = 0$ sur l'*intervalle* $[a,b]$, donc $F-G$ y est constante :

$$F(b) - G(b) = F(a) - G(a).$$

Or $F(a) = 0$ et $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, d'où $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$.

La seconde forme entraîne la première. Supposons la seconde forme acquise, ainsi que l'existence d'une primitive G de f sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, la fonction f est continue sur $[a,x]$ et G y est une primitive de f ; la seconde forme donne donc :

$$\forall x \in [a,b],\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a),$$

c'est-à-dire $F = G - G(a)$. Ainsi F est dérivable sur $[a,b]$, $F' = G' = f$, et comme f est continue, F est bien C^1. □

Remarque

Il faut connaître les deux formes du théorème, car elles ne servent pas du tout à la même chose.
La *seconde* forme est l'outil de *calcul* : on cherche une primitive, on l'évalue aux bornes, c'est terminé. C'est elle que l'on utilise dans presque tous les calculs d'intégrales.
La *première* forme est l'outil d'*existence et de régularité* : à partir d'une simple fonction continue f, elle fabrique une fonction dérivable, sans qu'aucune expression close ne soit nécessaire.

Première forme du théorème fondamental

Il reste donc à démontrer la première forme, c'est-à-dire à fabriquer effectivement une primitive. Revenons pour cela à la définition de la dérivée, par les taux de variation.
Soit $x_0 \in [a,b]$ et soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$. La relation de Chasles donne :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, l'intégrale de la fonction constante égale à $f(x_0)$ vaut $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t = h\,f(x_0)$. En divisant par h et en retranchant $f(x_0)$, il vient donc :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a,b],\ |t-x_0| \leq \delta \implies |f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Supposons $0 < |h| \leq \delta$. Tout t situé entre x_0 et x_0+h vérifie alors $|t-x_0| \leq |h| \leq \delta$, donc $|f(t)-f(x_0)| \leq \varepsilon$. La majoration orientée rappelée plus haut, appliquée à $g\colon t \mapsto f(t)-f(x_0)$ avec $M = \varepsilon$, donne :

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon\ |h|$$

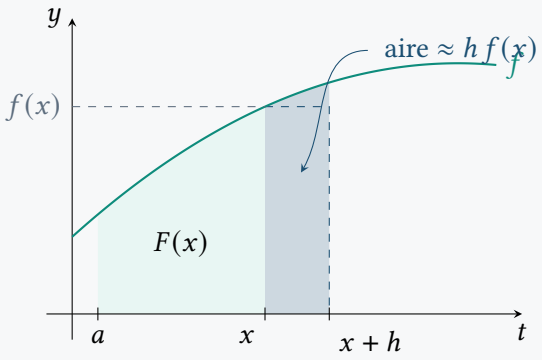
et par conséquent :

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le taux de variation de F en x_0 tend vers $f(x_0)$ lorsque h tend vers 0. Autrement dit, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ — aux extrémités a et b, il s'agit respectivement de la dérivabilité à droite et à gauche.
Enfin $F' = f$ est continue sur $[a,b]$, donc F est bien C^1. □

Remarque

Interprétation graphique. Supposons f positive. Alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du domaine situé sous le graphe de f, entre les abscisses a et x. Faire varier x de h revient à ajouter à ce domaine la tranche verticale comprise entre x et $x+h$.



Si h est petit, f varie peu sur $[x, x+h]$: cette tranche est presque un rectangle de largeur h et de hauteur $f(x)$, donc d'aire $h\,f(x)$. Autrement dit :

$$F(x+h) - F(x) \approx h\,f(x), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x).$$

C'est exactement $F'(x) = f(x)$: la vitesse à laquelle l'aire croît en x est la hauteur du graphe en x. Toute la démonstration ci-dessus consiste à rendre ce « presque » rigoureux, au moyen de la continuité de f.

Exemple 1.30

Commençons par l'usage le plus direct. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$F : x \longmapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

est C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le théorème est pourtant énoncé sur un *segment*, alors que l'on vient de conclure sur $\mathbb{R}$ tout entier. La raison est qu'être de classe C^1 est une propriété *locale* : il suffit de la vérifier au voisinage de chaque point. Fixons donc $x \in \mathbb{R}$ et soit A tel que $x \in [-A, A]$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[-A, A]$; le théorème s'y applique donc et donne $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, avec F' continue au voisinage de x. Comme x était quelconque, F est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On en déduit aussitôt, sans avoir calculé la moindre intégrale : $F' > 0$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $F(0) = 0$; et F est impaire, car F et $x \mapsto -F(-x)$ ont la même dérivée et s'annulent toutes deux en 0.
Il faut bien mesurer ce qui vient de se passer. La fonction F *n'admet aucune expression à l'aide des fonctions usuelles* : on ne peut donc pas l'étudier en la calculant. Et pourtant on connaît son existence, sa régularité, sa dérivée, et donc ses variations.

Exemple 1.31

Soient f continue sur un intervalle I et $a \in I$. Que dire de $G : x \mapsto \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$?
Ici c'est la borne *inférieure* qui varie, et le théorème fondamental ne s'applique pas directement. Mais la convention d'orientation permet de s'y ramener :

$$G(x) = \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = -F(x),$$

où $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est C^1 sur I de dérivée f. Donc G est C^1 sur I et $G'(x) = -f(x)$.

Le signe vient uniquement de l'orientation.

Exemple 1.32

Montrons que

$$G\colon x \longmapsto \int_{-x}^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

est C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculons sa dérivée.
Cette fois les *deux* bornes dépendent de x : aucun des deux exemples précédents ne s'applique tel quel. Cependant, puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue (en fait C^∞), il existe une primitive F de cette fonction. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = \int_{-x}^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F(x^2) - F(-x).$$

Les fonctions $x \mapsto -x$ et $x \mapsto x^2$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$, et F est C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque $F' = f$ est continue : par composition puis par différence, G est C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant :

$$G'(x) = 2x\,F'(x^2) - (-1)\,F'(-x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^4} + \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Exemple 1.33

Terminons par un exemple d'une autre nature. Étudions

$$h\colon x \longmapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{(xt)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Le paramètre x n'est plus dans les bornes mais dans la fonction intégrée : le théorème fondamental ne dit rien tel quel. L'idée est de faire passer x de la fonction intégrée vers les bornes par un changement de variable.
Fixons $x \neq 0$ et posons $\varphi\colon u \mapsto xu$, qui est C^1 sur $[0,1]$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = x$.
Le théorème de changement de variable, appliqué à $f\colon t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$, donne :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f\left(\varphi(u)\right)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = x\int_0^1 \mathrm{e}^{(xu)^2}\,\mathrm{d}u = x\,h(x).$$

On obtient :

$$h(x) = \frac{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et} \quad h(0) = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1.$$

On peut alors conclure. La fonction h est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, comme quotient de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.
On peut même montrer que h est C^1 sur $\mathbb{R}$. En effet, $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse (en effet sa dérivée est C^∞).
En particulier, on a le développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 0 + \mathrm{e}^{0^2}x + \frac{1}{2}\times 2\times 0\times \mathrm{e}^{0^2}x^2 + \mathrm{o}(x^2) = x + \mathrm{o}(x^2).$$

Ainsi :

$$h(x) = \underbrace{1}_{=h(0)} + \mathrm{o}(x).$$

Donc h admet un DL1 en 0 : elle y est dérivable, avec $h'(0) = 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$h'(x) = \frac{e^{x^2} x - \int_0^x e^{t^2}\,dt}{x^2} = \frac{(1 + o(x))\,x - \left(x + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1).$$

Donc $h'(x) \to 0$ quand $x \to 0$: la fonction h' est continue en 0, et h est bien C^1 sur $\mathbb{R}$.
On peut en fait montrer que h est C^∞, mais on verra des techniques pour cela plus tard dans l'année.

Remarque

Le dernier exemple utilise le théorème de changement de variable, qui n'est énoncé que dans la sous-section suivante. Il n'y a pas de cercle vicieux : ces deux résultats sont au programme de première année et sont supposés connus tous les deux.

2. Méthodes de calculs

Proposition 1.34 (Intégration par parties)

Soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{K}$ de classe C^1. Alors

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt.$$

Exemple 1.35

Commençons par un grand classique : une primitive de ln. L'astuce est d'écrire $\ln = 1 \times \ln$, d'intégrer le facteur 1 et de dériver le logarithme.
Soit $x > 0$. Posons $u'(t) = 1$, donc $u(t) = t$, et $v(t) = \ln(t)$, donc $v'(t) = \frac{1}{t}$. Ces deux fonctions sont C^1 sur le segment d'extrémités 1 et x, qui est inclus dans $]0, +\infty[$.
L'intégration par parties donne :

$$\int_1^x \ln(t)\,dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,dt = x\ln(x) - \int_1^x 1\,dt = x\ln(x) - x + 1.$$

Autrement dit, $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de ln sur $]0, +\infty[$.

Exemple 1.36

Le même procédé fonctionne pour arctan. Soit $x \in \mathbb{R}$; posons $u'(t) = 1$, $u(t) = t$, et $v(t) = \arctan(t)$, donc $v'(t) = \frac{1}{1+t^2}$:

$$\int_0^x \arctan(t)\,dt = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

Il reste à reconnaître, dans la dernière intégrale, la forme $\frac{w'}{w}$ à un facteur $\frac{1}{2}$ près, avec $w(t) = 1 + t^2$:

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

Finalement $\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$, et donc $t \mapsto t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$ est une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.37

Terminons par un usage différent de l'intégration par parties. Calculons $\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. L'intégrande est un produit « polynôme × exponentielle ». On dérive le polynôme — ce qui fait baisser son degré — et on intègre l'exponentielle — ce qui ne coûte rien. Posons donc $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$, puis $v(t) = t$ et $v'(t) = 1$, toutes C^1 sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{e}} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Si le facteur polynomial avait été de degré d, il aurait fallu répéter d fois l'opération pour l'épuiser.

Proposition 1.38 (Changement de variable)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{K}$ continue et $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to I$ de classe C^1. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exemple 1.39

Commençons par le sens de lecture le plus visible : on *pose* $t = \varphi(\theta)$, c'est-à-dire que l'on remplace la variable d'intégration par une fonction. Calculons ainsi $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \cos(\theta)$.
La fonction $\varphi\colon \theta \mapsto \cos(\theta)$ est C^1 sur $[0,\pi/2]$, avec $\varphi(\pi/2) = 0$ et $\varphi(0) = 1$, et $f\colon t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0,1] = \varphi\left([0,\pi/2]\right)$. La formule donne donc :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\pi/2)}^{\varphi(0)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2(\theta)}\,\big(-\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

C'est ici que se joue la validité du calcul : $\sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2(\theta)} = |\sin(\theta)|$, et c'est *parce que* θ parcourt $[0,\pi/2]$, où le sinus est positif, que l'on peut écrire $|\sin(\theta)| = \sin(\theta)$. Le signe − et l'échange des bornes se compensent alors :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \big(-\sin^2(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Il ne reste qu'à linéariser :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Le résultat était prévisible : $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ est l'aire du quart de disque unité situé dans le premier quadrant, c'est-à-dire $\frac{1}{4}\times\pi\times 1^2$.

Exemple 1.40

Passons à l'autre sens de lecture, celui que l'on utilise le plus souvent en pratique : on ne pose rien, on *reconnaît* φ' dans la fonction intégrée. Calculons $\int_0^{\pi/4} \tan(t)\,\mathrm{d}t$. Écrivons $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ avec $\varphi(t) = \cos(t)$. Cette fonction est C^1 sur $[0, \pi/4]$ et ne s'y annule pas, avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ainsi $f : w \mapsto \frac{1}{w}$ est continue sur $\varphi([0, \pi/4]) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. La formule, lue de la droite vers la gauche, donne :

$$\int_0^{\pi/4} \tan(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/4} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/4)} f(w)\,\mathrm{d}w = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}w}{w}.$$

Il ne reste qu'à conclure :

$$\int_0^{\pi/4} \tan(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\ln(w)\right]_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Le même calcul, mené sur un segment quelconque de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, montre que $t \mapsto -\ln(\cos(t))$ est une primitive de tan sur cet intervalle. C'est le motif $\frac{w'}{w}$, qu'il faut apprendre à repérer d'emblée : il donne systématiquement un logarithme.

Théorème 1.41 (Sommes de Riemann)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 1.42

Ce théorème se lit surtout de la droite vers la gauche : il donne la limite d'une somme que l'on ne sait pas calculer, en la remplaçant par une intégrale que l'on sait calculer. Cherchons par exemple la limite de :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}.$$

Le facteur $\frac{1}{n}$ en tête et les quotients $\frac{k}{n}$ à l'intérieur sont la signature d'une somme de Riemann sur le segment $[0, 1]$: avec $a = 0$ et $b = 1$, la subdivision du théorème est $a + k\,\frac{b-a}{n} = \frac{k}{n}$ et son pas est $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$. Les termes de la somme sont donc les $f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}},$$

qui est continue sur $[0, 1]$.
Un détail : l'indice varie ici de 1 à n, alors que le théorème somme de 0 à $n-1$. Les deux sommes ne diffèrent que par le terme $k = n$, ajouté, et le terme $k = 0$, retiré, c'est-à-dire par $\frac{1}{n}(f(1) - f(0))$, qui tend vers 0. Elles ont donc la même limite :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Remarque

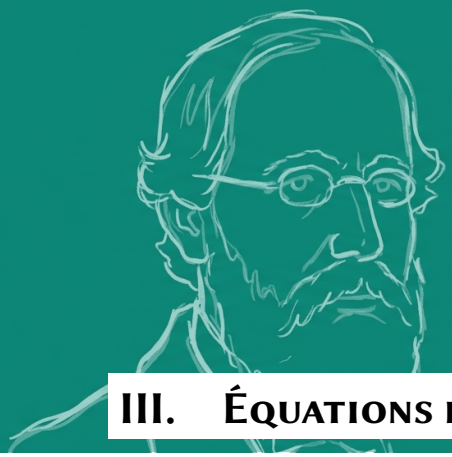
Retenons la méthode, qui ne varie pas. Devant une somme dont on cherche la limite, on cherche à l'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{n}\sum_{k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

autrement dit à faire apparaître deux choses : la variable $\frac{k}{n}$ partout où figurent k et n, et un unique facteur $\frac{1}{n}$ *global*, en dehors de la somme.
On peut d'ailleurs toujours se ramener ainsi à $a = 0$ et $b = 1$. En effet, le changement de variable $t = a + (b - a)u$ donne :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\int_0^1 f\left(a + (b-a)u\right)\mathrm{d}u,$$

de sorte que le cas général du théorème n'est que le cas $[0, 1]$ appliqué à $g\colon u \mapsto f\left(a + (b - a)u\right)$. En pratique, on ne fabrique donc jamais l'intervalle : c'est la somme qui indique la fonction f, sur $[0, 1]$.
Enfin, comme dans l'exemple ci-dessus, les bornes exactes de l'indice sont sans importance : que k aille de 0 à $n - 1$, de 1 à n ou de 1 à $n - 1$, on ne modifie la somme que d'un nombre borné de termes, chacun d'ordre $\frac{1}{n}$. La limite est la même.



1 Révisions d'analyse

III. Équations différentielles

1. Équations du premier ordre

Définition 1.43 (Équation différentielle linéaire du premier ordre)

Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* est une équation de la forme

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I. L'équation est dite *homogène* si $b = 0$.

Théorème 1.44 (Solutions de l'équation homogène du premier ordre)

Les solutions C^1 sur I de $y' + a(t)\,y = 0$, avec I un intervalle et $a : I \to \mathbb{K}$ continue, sont les fonctions

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-A(t)}, \quad C \in \mathbb{K},$$

où A est une primitive de a sur I.

Démonstration

Soit $y : I \to \mathbb{K}$ supposée C^1.
Comme $a : I \to \mathbb{K}$ est continue, il existe A une primitive de a sur I. Posons :

$$g(t) = y(t)\mathrm{e}^{A(t)}.$$

Par composition et produit, g est C^1 sur I. Calculons pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = y'(t)\mathrm{e}^{A(t)} + y(t)a(t)\mathrm{e}^{A(t)}.$$

Ainsi, on a l'équivalence suivante :

$$\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y'(t)\mathrm{e}^{A(t)} + a(t)\,y(t)\mathrm{e}^{A(t)} = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ g'(t) = 0.$$

Et donc y est solution de l'équation différentielle si et seulement si g est constante sur l'intervalle I.
Or g est constante sur I peut aussi s'écrire : il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall t \in I,\ y(t)\mathrm{e}^{A(t)} = C$. Donc y est solution de l'équation différentielle si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-A(t)}.$$

□

Exemple 1.45

Les solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto C\exp(-t)$.
Les solutions C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $y' + \tan(t)y = 0$ sont les fonctions de la forme

$y : t \mapsto C\exp(-\ln(\cos(t)))$ c'est-à-dire $y : t \mapsto \frac{C}{\cos(t)}$.

Remarque

Si y est dérivable sur I et si y vérifie $y' + a(t)\,y = 0$ alors y est C^1. En effet, on a alors :

$$y' = -a(t)y$$

et $t \mapsto -a(t)y(t)$ est continue par produit.
Ainsi, le théorème précédent donne en fait l'ensemble des solutions *dérivables* de l'équation différentielle.

Remarque

Lorsque l'on résout une équation différentielle (en fait lorsque l'on résout n'importe quelle équation), il est important de bien définir dans quel ensemble on se place. Cela a deux rôles principaux. D'abord, cela donne un sens à l'équation elle-même. Dans notre contexte par exemple, que signifie y' ? Pour y une fonction *dérivable*, y' désigne sa fonction dérivée. On ne peut même pas donner de sens à l'équation sans ce contexte.
Et cela permet aussi de savoir quelles sont les opérations autorisées *pour la résolution*. Si je suppose y dérivable, je ne peux pas, *a priori*, dériver y' et parler de y''.
Cela peut changer la résolution. Regardons par exemple la simple équation $x^2 + 1 = 0$. Si on la résout dans $\mathbb{R}$, comme on manipule des réels, on peut utiliser des inégalités. On arrive rapidement à montrer que $x^2 + 1 > 0$ et donc l'équation n'a pas de solution. Mais si on travaille dans $\mathbb{C}$, deux choses se passent. D'une part, *il n'y a pas de notions de positif ou négatif dans* $\mathbb{C}$. D'autre part, il existe un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. On peut donc par exemple écrire :

$$x^2 + 1 = x^2 - \mathrm{i}^2 = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$$

Et on en déduit qu'il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$.
C'est pareil pour les équations différentielles : on précise bien dans quel ensemble de fonctions on travaille. Ce sera particulièrement important lorsqu'on utilisera des séries entières pour résoudre les équations différentielles.

Méthode 1.46 (Variation de la constante)

Pour résoudre $y' + a(t)\,y = b(t)$:

1. Résoudre l'équation homogène : $y_h(t) = C\,\mathrm{e}^{-A(t)}$.
2. Chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$.
3. En substituant dans l'équation, on obtient $C'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$.
4. La solution générale est $y = y_h + y_p$.

Exemple 1.47

Commençons par un exemple simple. Essayons de résoudre $y' + y = \exp(-t)$.

1. $y' + y = 0$ a pour solutions (C^1 sur $\mathbb{R}$) les fonctions de la forme $y : t \mapsto C\exp(-t)$.

2. Posons $y_p(t) = C(t)\exp(-t)$ avec C C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. y_p est C^1 par produit. y_p est solution si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) + y_p(t) = \exp(-t).$$

Cela revient à dire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t)\exp(-t) - C(t)\exp(-t) + C(t)\exp(-t) = \exp(-t)$$

qui se simplifie en :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = 1.$$

Une primitive de $t \mapsto 1$ est $t \mapsto t$. Ainsi $y_p : t \mapsto t\exp(-t)$ est solution particulière.

4. Ainsi l'ensemble des solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = \exp(-t)$ sont les fonctions de la forme : $y : t \mapsto C\exp(-t) + t\exp(-t)$.

Remarque

L'idée de la variation de la constante peut se formuler de plusieurs façons.
La première façon de le comprendre est de voir que $y' + a(t)y$ ressemble fortement à la dérivée d'un produit. En fait, c'est la dérivée d'un produit à un facteur près. La forme que l'on propose est donc adaptée pour isoler le bon terme.
La seconde manière est de se dire que l'on sait résoudre $y' + a(t)y = 0$ et donc, vraisemblablement, on sait *simplifier* cette écriture en utilisant la solution.
Cela est en fait relativement généralisable : on peut souvent trouver des solutions d'une équation différentielle en déformant une solution connue. Voir par exemple un exercice.

Exemple 1.48

Prenons un deuxième exemple sensiblement plus compliqué. Cherchons les solutions C^1 sur $\mathbb{R}$ de :

$$y' - ty = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Commençons par trouver l'ensemble des fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $y' - ty = 0$. Une primitive de $t \mapsto -t$ est $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$. Donc ce sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto C\exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Maintenant, on pose donc $y_p(t) = C(t)\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ avec C C^1 sur $\mathbb{R}$. y_p est solution de l'équation différentielle (non-homogène) si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) - ty_p(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t)\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + C(t)t\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) - tC(t)\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = \exp(t^2).$$

Une primitive est donnée par : $t \mapsto \int_0^t \exp(s^2)\,\mathrm{d}s$.
Ainsi une solution particulière de l'équation différentielle est :

$$t \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_0^t \exp(s^2)\,\mathrm{d}s$$

et donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto C\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \int_0^t \exp(s^2)\,\mathrm{d}s.$$

Remarque

Cet exemple illustre un point : il est tout à fait possible de ne pas avoir de forme simple après une variation de la constante. Pire, il est possible que la forme simple existe mais qu'elle ne se voit pas immédiatement à cause de l'intégrale.
Cela souligne un point important : la variation de la constante est à connaître mais c'est notre *dernière* arme. S'il est possible de trouver une solution particulière sans passer par une variation de la constante, c'est souvent mieux.
En général, on peut commencer par chercher une solution de la même forme que le second membre et ne chercher des choses plus compliqués qu'en deuxième recours.

Théorème 1.49 (Théorème de Cauchy linéaire d'ordre 1)

Soient I un intervalle, $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution C^1 sur I.

Démonstration

Comme a est continue sur l'intervalle I, elle y admet une primitive, et même exactement une qui s'annule en t_0 : c'est $A : t \mapsto \int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s$. Posons également $\varphi : t \mapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$, qui est continue sur I.
Soit $y : I \to \mathbb{K}$ de classe C^1 et posons, comme pour l'équation homogène, $g(t) = y(t)\mathrm{e}^{A(t)}$; la fonction g est C^1 sur I et $g'(t) = (y'(t) + a(t)y(t))\,\mathrm{e}^{A(t)}$. Comme $\mathrm{e}^{A(t)}$ ne s'annule pas, on obtient l'équivalence :

$$\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t) \iff \forall t \in I,\ g'(t) = \varphi(t),$$

c'est-à-dire : y est solution de l'équation si et seulement si g est une primitive de φ sur I. Or φ est continue sur l'intervalle I : elle y admet des primitives, et deux d'entre elles diffèrent d'une constante. Ainsi y est solution si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall t \in I,\ g(t) = C + \int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Il reste à traduire la condition initiale. Comme $A(t_0) = 0$, on a $y(t_0) = g(t_0) = C$: la condition $y(t_0) = y_0$ équivaut donc à $C = y_0$. Il y a une et une seule valeur possible de C, donc une et une

seule solution au problème de Cauchy, à savoir :

$$y : t \longmapsto \mathrm{e}^{-A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)\, \mathrm{e}^{A(s)}\, \mathrm{d}s \right).$$

□

Remarque

La démonstration n'est rien d'autre qu'une variation de la constante menée jusqu'au bout : la « constante » C de la solution homogène devient la fonction $t \mapsto C + \int_{t_0}^{t} \varphi$, et la condition initiale fixe C.
Deux points méritent d'être soulignés. D'abord, la solution est définie *sur I tout entier* : il n'y a ni explosion ni obstruction en cours de route, quel que soit l'intervalle I sur lequel a et b sont continues. Ensuite, l'équation doit être sous *forme résolue*, c'est-à-dire que le coefficient de y' doit valoir 1. L'équation $t\,y' - y = 0$, par exemple, n'est pas sous cette forme sur un intervalle contenant 0 : on vérifie sans peine que $t \mapsto \lambda t$ en est solution sur $\mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si bien que le problème de Cauchy en $t_0 = 0$ avec $y(0) = 0$ a une infinité de solutions, et celui avec $y(0) = 1$ n'en a aucune.

Exemple 1.50

Résolvons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Ici $a : t \mapsto 1$ et $b : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$: le théorème garantit l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$ avant même tout calcul.
Nous avons déjà déterminé les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = \mathrm{e}^{-t}$: ce sont les fonctions $y : t \mapsto (C + t)\mathrm{e}^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. La condition initiale s'écrit $y(0) = C = 2$: une seule valeur de C convient, conformément au théorème. L'unique solution est donc :

$$y : t \longmapsto (2 + t)\, \mathrm{e}^{-t}.$$

Exemple 1.51 (Sans linéarité, tout peut arriver)

Le théorème précédent repose de façon essentielle sur la linéarité de l'équation. Voici deux équations différentielles *non linéaires* qui montrent que ses deux conclusions — l'existence sur I tout entier et l'unicité — peuvent chacune tomber en défaut.

L'unicité peut échouer. Considérons le problème de Cauchy :

$$y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}, \qquad y(0) = 0.$$

La fonction nulle en est évidemment solution sur $\mathbb{R}$. Mais pour tout $c \geq 0$, posons :

$$y_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c, \\ (t - c)^2 & \text{si } t \geq c. \end{cases}$$

Les deux expressions coïncident en $t = c$ (elles y valent 0) et leurs dérivées aussi (elles y valent 0), donc y_c est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $y_c'(t) = 0$ pour $t \leq c$ et $y_c'(t) = 2(t - c)$ pour $t \geq c$. Comme $2\sqrt{|y_c(t)|} = 2\,|t - c| = 2(t - c)$ pour $t \geq c$, la fonction y_c est bien

solution, et $y_c(0) = 0$. Le problème de Cauchy admet donc une *infinité* de solutions sur $\mathbb{R}$.

L'existence globale peut échouer. Considérons cette fois :

$$y'(t) = 1 + y(t)^2, \qquad y(0) = 0.$$

Soit J un intervalle contenant 0 et y une solution dérivable sur J. Comme $1 + y^2$ ne s'annule pas, on peut écrire pour tout $t \in J$:

$$\frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\arctan \circ y)'(t) = 1.$$

En intégrant entre 0 et t et en utilisant $y(0) = 0$, il vient $\arctan(y(t)) = t$ pour tout $t \in J$. Or arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: nécessairement $J \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Aucune solution n'est donc définie sur $\mathbb{R}$, et l'unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $y : t \mapsto \tan t$, qui « explose » aux deux bords.

Remarque

Ces deux phénomènes sont typiques du cas non linéaire : on n'y dispose en général que d'un énoncé *local* (une solution existe au voisinage de t_0), et l'unicité demande une hypothèse supplémentaire sur la fonction, plus forte que la continuité. Ce cadre général n'est pas au programme.

2. Équations du second ordre

Définition 1.52 (Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants)

Une *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, et $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue sur un intervalle I.

Définition 1.53 (Équation caractéristique)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. L'*équation caractéristique* associée à l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ est l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{C}$:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Son *discriminant* est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 1.54 (Cas des coefficients complexes, solutions complexes)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et I un intervalle. Les solutions C^2 de I dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont :

- si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C} ;$$

— si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{C}$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)\, \mathrm{e}^{r_0 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Démonstration

L'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet au moins une racine $r_1 \in \mathbb{C}$ (si $\Delta \neq 0$, il y en a deux ; si $\Delta = 0$, il y en a une).
Soit maintenant $y : I \to \mathbb{C}$ que l'on suppose C^2 sur I et posons :

$$g(t) = y(t)\mathrm{e}^{-r_1 t}, \quad \text{de sorte que} \quad y(t) = g(t)\mathrm{e}^{r_1 t}.$$

Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-r_1 t}$ est C^∞, la fonction g est C^2. Calculons, pour tout $t \in I$:

$$y'(t) = (g'(t) + r_1 g(t))\, \mathrm{e}^{r_1 t} \quad \text{puis} \quad y''(t) = \left(g''(t) + 2r_1 g'(t) + r_1^2 g(t)\right) \mathrm{e}^{r_1 t}.$$

En reportant dans l'équation, il vient :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \mathrm{e}^{r_1 t}\left(ag''(t) + (2ar_1 + b)g'(t) + \underbrace{(ar_1^2 + br_1 + c)}_{=0} g(t)\right)$$

car r_1 est racine de l'équation caractéristique. De plus $2ar_1 + b = a\,(2r_1 - (r_1 + r_2)) = a(r_1 - r_2)$ où r_2 est la seconde racine de l'équation caractéristique (on a $r_1 = r_2$ si $\Delta = 0$), puisque $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$. Ainsi :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = a\,\mathrm{e}^{r_1 t}\,(g''(t) + (r_1 - r_2)g'(t))\,.$$

Comme $a \neq 0$ et $\mathrm{e}^{r_1 t} \neq 0$, on obtient l'équivalence :

$$\forall t \in I,\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \iff \forall t \in I,\ g''(t) + (r_1 - r_2)g'(t) = 0.$$

Posons $h = g'$, qui est C^1 sur I. La condition de droite s'écrit $h' + (r_1 - r_2)h = 0$: c'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, dont une primitive du coefficient constant $r_1 - r_2$ est $t \mapsto (r_1 - r_2)t$. D'après le théorème sur l'équation homogène du premier ordre, cela équivaut à l'existence de $K \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = K\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t}.$$

Distinguons alors les deux cas.

— Si $\Delta \neq 0$, alors $r_2 - r_1 \neq 0$ et une primitive de $t \mapsto K\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t}$ est $t \mapsto \frac{K}{r_2 - r_1}\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t}$. Ainsi g' est de la forme ci-dessus si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall t \in I,\ g(t) = \frac{K}{r_2 - r_1}\mathrm{e}^{(r_2 - r_1)t} + \lambda.$$

En posant $\mu = \frac{K}{r_2 - r_1}$, qui décrit $\mathbb{C}$ lorsque K décrit $\mathbb{C}$, et en multipliant par $\mathrm{e}^{r_1 t}$:

$$\forall t \in I,\ y(t) = \lambda\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\mathrm{e}^{r_2 t}.$$

— Si $\Delta = 0$, alors $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ (car $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$) et la condition devient $g' = K$ sur I, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in I, g(t) = \lambda + Kt$. En multipliant par $\mathrm{e}^{r_1 t}$ et en posant $\mu = K$:

$$\forall t \in I,\ y(t) = (\lambda + \mu t)\mathrm{e}^{r_1 t}.$$

Toutes les étapes étant des équivalences, on a bien décrit exactement l'ensemble des solutions.
□

Proposition 1.55 (Cas des coefficients réels, solutions réelles)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et I un intervalle. Les solutions C^2 de I dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ sont :

— si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,;$$

— si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double $r_0 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ et les solutions sont les

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)\, \mathrm{e}^{r_0 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,;$$

— si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ (avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$) et les solutions sont les

$$y : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Démonstration

Une solution à valeurs réelles est en particulier une solution à valeurs complexes. La proposition précédente en donne donc la forme, et il ne reste qu'à déterminer *lesquelles* de ces solutions sont à valeurs réelles. Pour cela, on utilise à chaque fois le critère : y est à valeurs réelles si et seulement si $\overline{y(t)} = y(t)$ pour tout $t \in I$.
Nous aurons aussi besoin du lemme suivant. Soient $r \neq r'$ deux nombres complexes et $A, B \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall t \in I,\ A\mathrm{e}^{rt} + B\mathrm{e}^{r't} = 0.$$

Alors $A = B = 0$. En effet, en divisant par e^{rt} qui ne s'annule pas, on obtient $A + B\mathrm{e}^{(r'-r)t} = 0$ pour tout $t \in I$; en dérivant, $B(r' - r)\mathrm{e}^{(r'-r)t} = 0$, donc $B = 0$ puisque $r' \neq r$, puis $A = 0$.

Cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$. Les racines sont alors réelles, et l'argument est le même dans les deux cas. Si $\Delta > 0$, les solutions complexes s'écrivent $y(t) = \lambda\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\mathrm{e}^{r_2 t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Comme r_1 et r_2 sont réels, $\overline{y(t)} = \bar{\lambda}\mathrm{e}^{r_1 t} + \bar{\mu}\mathrm{e}^{r_2 t}$, et y est à valeurs réelles si et seulement si :

$$\forall t \in I,\ (\lambda - \bar{\lambda})\mathrm{e}^{r_1 t} + (\mu - \bar{\mu})\mathrm{e}^{r_2 t} = 0,$$

ce qui, d'après le lemme, équivaut à $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\mu = \bar{\mu}$, c'est-à-dire à $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\Delta = 0$, on obtient de même $\left((\lambda - \bar{\lambda}) + (\mu - \bar{\mu})t\right)\mathrm{e}^{r_0 t} = 0$ sur I, donc la fonction affine $t \mapsto (\lambda - \bar{\lambda}) + (\mu - \bar{\mu})t$ est nulle sur l'intervalle I et ses deux coefficients sont nuls : là encore $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Cas $\Delta < 0$. Comme a, b et c sont réels, les deux racines de l'équation caractéristique sont conjuguées et non réelles : notons-les $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\omega$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\omega$, avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ et $\omega \neq 0$. D'après la proposition précédente, les solutions C^2 de I dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} + \mu\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Soit y une telle fonction. Comme α, ω et t sont réels, on a $\overline{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t}} = \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t}$ et donc :

$$\overline{y(t)} = \bar{\lambda}\,\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t} + \bar{\mu}\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t}.$$

Ainsi y est à valeurs réelles si et seulement si :

$$\forall t \in I,\ (\lambda - \bar{\mu})\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} + (\mu - \bar{\lambda})\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t} = 0.$$

Comme $\omega \neq 0$, les deux exposants $\alpha + \mathrm{i}\omega$ et $\alpha - \mathrm{i}\omega$ sont distincts, et le lemme donne $\lambda = \bar{\mu}$, c'est-à-dire $\mu = \bar{\lambda}$. Les solutions à valeurs réelles sont donc exactement les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} + \bar{\lambda}\,\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t} = 2\,\mathrm{Re}\left(\lambda\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Il reste à retrouver la forme annoncée. Écrivons $\lambda = \frac{1}{2}(p - \mathrm{i}q)$ avec $p, q \in \mathbb{R}$: cette écriture est unique et (p, q) décrit $\mathbb{R}^2$ lorsque λ décrit $\mathbb{C}$. Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)$, il vient :

$$2\,\mathrm{Re}\left(\lambda \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t}\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\ \mathrm{Re}\left((p - \mathrm{i}q)\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right)\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(p\cos(\omega t) + q\sin(\omega t)\right).$$

Les solutions à valeurs réelles sont donc bien les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\left(p\cos(\omega t) + q\sin(\omega t)\right)$ avec $p, q \in \mathbb{R}$. □

Remarque

Lorsque a, b et c sont réels, les deux propositions s'appliquent : la première décrit les solutions à valeurs complexes, la seconde les solutions à valeurs réelles. Il faut donc, ici encore, préciser dans quel ensemble de fonctions on cherche les solutions. En revanche, si l'un des coefficients n'est pas réel, la question des solutions réelles ne se pose plus : seule la première proposition a un sens.

Exemple 1.56

Résolvons $y'' - 3y' + 2y = 0$. Ici $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$ sont réels, et $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$.
L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
Les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \mu\,\mathrm{e}^{2t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Mais on peut aussi chercher les solutions à valeurs complexes : ce sont les fonctions de la même forme, cette fois avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Les solutions réelles sont exactement celles pour lesquelles λ et μ sont réels.

Exemple 1.57

Résolvons $y'' + 2y' + 5y = 0$. Ici $a = 1$, $b = 2$ et $c = 5$ sont réels, et $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$.
Les racines de $r^2 + 2r + 5 = 0$ sont $-1 + 2\mathrm{i}$ et $-1 - 2\mathrm{i}$.
Les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ sont, elles, les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{(-1+2\mathrm{i})t} + \mu\,\mathrm{e}^{(-1-2\mathrm{i})t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Les deux ensembles sont bien différents : le premier est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions à valeurs réelles, le second un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de fonctions à valeurs complexes.

Exemple 1.58

Résolvons $y'' - (1 + \mathrm{i})y' + \mathrm{i}y = 0$. Ici $a = 1$, $b = -(1 + \mathrm{i})$ et $c = \mathrm{i}$ ne sont pas tous réels : on cherche donc les solutions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Le discriminant vaut :

$$\Delta = (1 + \mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i} = 1 + 2\mathrm{i} - 1 - 4\mathrm{i} = -2\mathrm{i} \neq 0.$$

Comme $(1 - \mathrm{i})^2 = 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -2\mathrm{i}$, le nombre $1 - \mathrm{i}$ est une racine carrée de Δ, et les

racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{(1+\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})}{2} = \mathrm{i}.$$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \mu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Remarque

Lorsque a, b et c sont réels et que $\Delta < 0$, les deux écritures des solutions complexes coïncident. En effet, si les racines sont $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$, les formules d'Euler donnent :

$$\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)\right)$$

et réciproquement :

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) = \frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} + \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t) = \frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t} - \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t}}{2\mathrm{i}}.$$

Autrement dit, les familles $\left(\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)t}, \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\omega)t}\right)$ et $\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t), \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t)\right)$ engendrent le même $\mathbb{C}$-espace vectoriel : les solutions complexes peuvent aussi s'écrire

$$y : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

On retrouve alors les solutions réelles en imposant $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Méthode 1.59 (Recherche d'une solution particulière)

Pour trouver une solution particulière de $ay'' + by' + cy = f(t)$:

- Si $f(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec P polynôme de degré d : chercher $y_p(t) = t^s Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ où Q est un polynôme de degré d et s est la multiplicité de γ comme racine de l'équation caractéristique.
- Si $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$: chercher $y_p(t) = \gamma\cos(\omega t) + \delta\sin(\omega t)$, sauf si $\mathrm{i}\omega$ est racine caractéristique (résonance), auquel cas on cherche $y_p(t) = t\left(\gamma\cos(\omega t) + \delta\sin(\omega t)\right)$.

La solution générale est la somme de la solution générale homogène et d'une solution particulière.

Exemple 1.60

Commençons par le cas le plus simple. Résolvons $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3t}$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation homogène associée a déjà été résolue plus haut : ses solutions réelles sont les $t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{t} + \mu\mathrm{e}^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les racines caractéristiques étant 1 et 2.
Le second membre est de la forme $P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $P = 1$ (de degré 0) et $\gamma = 3$. Comme 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, sa multiplicité est $s = 0$: on cherche donc $y_p(t) = C\mathrm{e}^{3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$y_p''(t) - 3y_p'(t) + 2y_p(t) = (9 - 9 + 2)\,C\mathrm{e}^{3t} = 2C\mathrm{e}^{3t},$$

qui vaut e^{3t} si et seulement si $C = \frac{1}{2}$. Ainsi $y_p : t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}$ est une solution particulière,

et les solutions réelles de l'équation sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.61

Passons à un cas nettement plus délicat : résolvons $y'' - 2y' + y = t\,e^t$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$: elle a 1 pour racine double.
Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Le second membre est de la forme $P(t)e^{\gamma t}$ avec $P(t) = t$ de degré 1 et $\gamma = 1$. Cette fois γ est racine *double*, donc $s = 2$: on cherche $y_p(t) = t^2 Q(t) e^t$ avec Q de degré 1, c'est-à-dire $y_p(t) = u(t)e^t$ où $u(t) = at^3 + bt^2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour toute fonction u deux fois dérivable, on a $\left(ue^t\right)' = (u' + u)e^t$ et $\left(ue^t\right)'' = (u'' + 2u' + u)e^t$, donc :

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = ((u'' + 2u' + u) - 2(u' + u) + u)\, e^t = u''\, e^t.$$

C'est précisément parce que 1 est racine double que les termes en u et en u' disparaissent. L'équation se ramène donc à $u''(t) = t$, c'est-à-dire $6at + 2b = t$, soit $a = \frac{1}{6}$ et $b = 0$.
Une solution particulière est donc $y_p : t \mapsto \frac{t^3}{6} e^t$, et les solutions réelles de l'équation sont les fonctions :

$$y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^t + \frac{t^3}{6} e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.62

Terminons par un exemple relevant du second point, dans son cas d'exception.
Résolvons $y'' + y = \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour racines i et $-$i : on est dans le cas $\Delta < 0$ avec $\alpha = 0$ et $\omega = 1$, et les solutions réelles de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Le second membre est de la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ avec $\omega = 1$. Or iω = i *est* racine de l'équation caractéristique : il faut donc chercher une solution particulière de la forme $y_p(t) = t\,(\gamma \cos(t) + \delta \sin(t))$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. En effet, une fonction de la forme $\gamma \cos(t) + \delta \sin(t)$ est solution de l'équation homogène et ne peut donc pas convenir.
Calculons :

$$y_p'(t) = \gamma \cos(t) + \delta \sin(t) + t\,(-\gamma \sin(t) + \delta \cos(t)),$$

$$y_p''(t) = 2\,(-\gamma \sin(t) + \delta \cos(t)) + t\,(-\gamma \cos(t) - \delta \sin(t)),$$

et les termes en t se simplifient dans la somme :

$$y_p''(t) + y_p(t) = -2\gamma \sin(t) + 2\delta \cos(t).$$

Cela vaut $\cos(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{2}$. Une solution particulière est donc $y_p : t \mapsto \frac{t}{2} \sin(t)$, et les solutions réelles sont les fonctions :

$$y : t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + \frac{t}{2} \sin(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On observe que toutes les solutions sont non bornées : c'est le phénomène de résonance, l'amplitude croissant linéairement en t.

Théorème 1.63 (Théorème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefficients constants)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution C^2 sur I.

Démonstration

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons r_1 et r_2 les racines complexes de l'équation caractéristique (confondues si $\Delta = 0$). Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 et posons $g(t) = y(t)\mathrm{e}^{-r_1 t}$: comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-r_1 t}$ est C^∞ et ne s'annule pas, se donner y ou se donner g revient au même, et g est C^2 sur I. Le calcul mené dans la démonstration de la proposition sur l'équation homogène donne :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = a\,\mathrm{e}^{r_1 t}\left(g''(t) + (r_1 - r_2)g'(t)\right).$$

En posant $\varphi : t \mapsto \frac{1}{a} f(t)\mathrm{e}^{-r_1 t}$, qui est continue sur I, l'équation équivaut donc à :

$$\forall t \in I,\ g''(t) + (r_1 - r_2)\, g'(t) = \varphi(t).$$

Par ailleurs $y = g\,\mathrm{e}^{r_1 t}$ et $y' = (g' + r_1 g)\,\mathrm{e}^{r_1 t}$, de sorte que les conditions initiales se traduisent exactement en :

$$g(t_0) = y_0\,\mathrm{e}^{-r_1 t_0} \quad \text{et} \quad g'(t_0) = (y_1 - r_1 y_0)\,\mathrm{e}^{-r_1 t_0}.$$

Posons enfin $h = g'$, qui est C^1 sur I. Le problème de Cauchy en y équivaut donc à la conjonction des deux problèmes :

$$\begin{cases} h' + (r_1 - r_2)h = \varphi, \\ h(t_0) = (y_1 - r_1 y_0)\,\mathrm{e}^{-r_1 t_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g' = h, \\ g(t_0) = y_0\,\mathrm{e}^{-r_1 t_0}. \end{cases}$$

Le premier est un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1, dont le coefficient (la constante $r_1 - r_2$) et le second membre φ sont continus sur I : d'après le théorème précédent, il admet une unique solution h, de classe C^1 sur I. Cette fonction h étant continue sur l'intervalle I, elle y admet une unique primitive g valant $y_0\mathrm{e}^{-r_1 t_0}$ en t_0, et cette primitive est C^2 puisque $g' = h$ est C^1. Il y a donc une et une seule fonction $y = g\,\mathrm{e}^{r_1 t}$ convenable, et elle est C^2 sur I.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supposons maintenant a, b, c, f, y_0 et y_1 réels. D'après ce qui précède, le problème admet une unique solution y à valeurs complexes. Comme la conjugaison commute à la dérivation et que les coefficients et le second membre sont réels, $\bar{y}$ est encore C^2 sur I et vérifie $a\bar{y}'' + b\bar{y}' + c\bar{y} = \bar{f} = f$, ainsi que $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 = y_0$ et $\bar{y}'(t_0) = \bar{y}_1 = y_1$: c'est donc une solution du même problème de Cauchy. Par unicité, $\bar{y} = y$, autrement dit y est à valeurs réelles. C'est bien l'unique solution réelle, puisqu'une solution réelle est en particulier une solution complexe. □

Exemple 1.64

Résolvons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = \mathrm{e}^{3t}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Le second membre est continu sur $\mathbb{R}$: le théorème garantit l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$.
Nous avons déjà déterminé les solutions réelles de l'équation : ce sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors $y'(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{2t} + \frac{3}{2}e^{3t}$, et les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \frac{1}{2} = 0, \\ \lambda + 2\mu + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

C'est un système linéaire de deux équations à deux inconnues, de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$: il admet bien une unique solution, comme annoncé. En soustrayant la première ligne à la seconde, on obtient $\mu + 1 = 0$, d'où $\mu = -1$ puis $\lambda = \frac{1}{2}$. L'unique solution du problème de Cauchy est donc :

$$y : t \longmapsto \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Remarque

Le théorème contient aussi une information de structure. Prenons $f = 0$ et notons $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur I. Le théorème dit exactement que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$$

est bijective : tout couple de conditions initiales est atteint (existence) et une seule fois (unicité). Comme elle est de plus linéaire, $\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. C'est ce que confirment les formules explicites obtenues plus haut : deux constantes λ et μ, donc deux degrés de liberté, donc deux conditions initiales à imposer.

Remarque (Ce qui se passe si les coefficients ne sont pas constants)

Le théorème s'étend, et nous l'admettons, à une équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$ où p, q et f sont continues sur I : là encore, il y a une unique solution sur I tout entier pour chaque couple de conditions initiales. Le point crucial est que l'équation soit sous *forme résolue*, c'est-à-dire que le coefficient de y'' vaille 1. Ce résultat est hors-programme. Cependant, certains sujets (écrits ou à l'oral) l'utilisent, il est donc bon de le connaître.
Dès que ce coefficient s'annule, tout peut changer : voir un exercice pour le traitement d'un tel exemple.