

3

Techniques d'étude pour les séries numériques

Exercices

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 3.1 Série harmonique et logarithme
  - 3.2 Stirling : équivalent et nature
  - 3.3 Séries alternées : reste et somme
  - 3.4 Produit de deux séries géométriques
- **Piste rouge**
  - 3.20 Deux séries de restes
  - 3.17 Somme des $\frac{1}{\sqrt{k}}$ et intégrale
  - 3.10 Étude de $\sum \frac{n^n}{n!\,a^n}$ selon a
  - 3.13 Suite de Fibonacci et séries
- **Piste bleue**
  - 3.18 Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
  - 3.5 Séries à factorielles
  - 3.6 Nature de trois séries alternées
  - 3.12 Calcul de trois sommes de séries
- **Piste noire**
  - 3.26 Séries alternées avec racines
  - 3.8 Développement de la somme harmonique
  - 3.21 Série et intégrale, fonction C^1
  - 3.27 Formule de Stirling

Exercice 3.1 ○ Correction p. 10

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 2$:
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, puis un équivalent de H_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.2 ○ Correction p. 11

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+2}}$.

1. À l'aide de la formule de Stirling, donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 3.3 ○ Correction p. 11

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Converge-t-elle absolument ?
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

On note S la somme de la série de la question 2 et, pour $N \geq 1$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

3. Majorer $|S - S_N|$, puis donner un entier N tel que $|S - S_N| \leq 10^{-2}$.
4. Montrer que $-1 \leq S \leq -\frac{3}{4}$.

Exercice 3.4 ○ Correction p. 11

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$.

1. Justifier que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, et calculer leurs sommes.
2. Calculer le terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$ de leur produit de Cauchy, selon la parité de n.
3. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$? Retrouver cette valeur à partir de l'expression de c_n.

Exercice 3.5 • Correction p. 12

Déterminer la nature des séries suivantes en utilisant la règle de d'Alembert :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Exercice 3.6 • Correction p. 12

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
3. $\sum_{n\geq 1} \sin\left(n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 3.7 •• Correction p. 13

Soit $k \geq 2$ un entier. On pose $u_k = \frac{1}{k \ln k}$.

1. En utilisant la comparaison série-intégrale avec la fonction $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$, étudier la nature de $\sum_{k\geq 2} u_k$.
2. En déduire la nature de $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Soient a et b deux réels. Déterminer, en fonction de a et de b, la nature de la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}.$$

Ces séries sont appelées *séries de Bertrand*.

Exercice 3.8 ●● Correction p. 15

Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (somme harmonique). On admet que la suite $(H_n - \ln n)_{n\geq 1}$ converge ; sa limite est notée γ et appelée *constante d'Euler*. Autrement dit,

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

L'objectif est de préciser ce développement d'un ordre.

1. Montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire un équivalent de $H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.9 ● Correction p. 16

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\alpha}}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$

Exercice 3.10 ●●● Correction p. 17

Soit $a > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{n^n}{n!\,a^n}$.

1. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{\mathrm{e}}{a}$. En déduire la nature de $\sum u_n$ lorsque $a \neq \mathrm{e}$.
2. On suppose désormais $a = \mathrm{e}$. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et conclure quant à la nature de $\sum u_n$.
3. Toujours pour $a = \mathrm{e}$, étudier la nature de $\sum (-1)^n u_n$. La convergence est-elle absolue ?
4. Toujours pour $a = \mathrm{e}$, déterminer selon $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de $\displaystyle\sum \frac{u_n}{n^\beta}$.

Exercice 3.11 ●● Correction p. 18

Pour $n \geq 0$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier que R_n est bien défini et montrer que $|R_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$:

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} R_n$ converge, mais qu'elle ne converge pas absolument.
4. Montrer que $R_n \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$.

Exercice 3.12 ● Correction p. 19

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k\, 3^{n-k}} \right)$

2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$

Exercice 3.13 ● ● ● Correction p. 20

On note $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq F_n \leq 2^n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} F_n x^n$ converge absolument pour tout réel x tel que $|x| < \frac{1}{2}$.
2. Soit x un tel réel. On pose $b_0 = 1$, $b_1 = -x$, $b_2 = -x^2$ et $b_n = 0$ pour $n \geq 3$. Justifier que $\displaystyle\sum b_n$ converge absolument, puis calculer le terme général du produit de Cauchy de $\displaystyle\sum F_n x^n$ et de $\displaystyle\sum b_n$.
3. En déduire que pour tout x tel que $|x| < \frac{1}{2}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{F_n}{3^n}$.

Exercice 3.14 ★ Correction p. 20

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ **diverge**. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

1. Montrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{a_n}{S_n^2}$ converge.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_n}$ diverge.
4. Que donnent ces deux résultats dans le cas où $a_n = 1$ pour tout n ?

Exercice 3.15 ● ● ● Correction p. 21

La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. On se propose de montrer qu'en supprimant les entiers dont l'écriture décimale contient le chiffre 9, on obtient une série *convergente*.
Soit A l'ensemble des entiers $n \geq 1$ dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 9, et pour $d \geq 1$, soit A_d l'ensemble des éléments de A s'écrivant avec exactement d chiffres. On note enfin $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ les éléments de A rangés dans l'ordre croissant.

1. Montrer que A_d possède exactement $8 \times 9^{d-1}$ éléments.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\in A_d}\frac{1}{n} \leq 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}$.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{n_k}$ converge et que sa somme est inférieure à 80.

Exercice 3.16 ●●● Correction p. 22

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $N_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 3.17 ●● Correction p. 22

Pour $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad I_n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} - 2, \qquad u_n = S_n - I_n.$$

1. Montrer que $S_n \sim I_n$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3.18 ● Correction p. 24

Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, puis étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{S_n}$.

Exercice 3.19 ●● Correction p. 24

CCP 2013. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} (\ln k)^2$.

1. Montrer que $u_n \geq (\ln n)^2$, et en déduire la nature de $\sum_{n\geq 2} u_n$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$:
$$\int_1^n (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_1^{n+1} (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t.$$
3. Calculer $\int_1^x (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t$ pour $x \geq 1$, et en déduire que $\int_1^x (\ln t)^2 \,\mathrm{d}t \sim x(\ln x)^2$ quand $x \to +\infty$.
4. Trouver un équivalent de u_n, puis déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 3.20 ●● Correction p. 26

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, puis celle de la série de terme général $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Exercice 3.21 ●●● Correction p. 27

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour $n \geq 2$, on pose :

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t) \,\mathrm{d}t - f(n).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$:
$$w_n = -\int_{n-1}^{n} (t - n + 1) f'(t) \,\mathrm{d}t.$$

2. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\int_1^X |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M$ pour tout $X \geq 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge absolument.
3. *Application.* Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge. On admettra que la suite $(\sin(\ln n))_{n\geq 1}$ n'a pas de limite.

Exercice 3.22 ●● Correction p. 28

Soit $\alpha > 0$. Étudier, selon la valeur de α, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}.$$

Exercice 3.23 ●●● Correction p. 29

Soient a et b deux réels. Pour $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}.$$

Préciser, en fonction de a et de b, la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$.

Exercice 3.24 ●● Correction p. 29

Montrer que la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, défini pour $n \geq 2$, converge, puis calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Exercice 3.25 ●● Correction p. 30

Montrer que les séries de termes généraux suivants convergent, et calculer leur somme. On pourra utiliser que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2\,(n-k)!}$
2. $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2\,(n-k)^2}$

Exercice 3.26 ●● Correction p. 31

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
2. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}\right)$
3. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$



3

Techniques d'étude pour les séries numériques

★ Pour aller plus loin

Exercice 3.27 ★ Correction p. 32

Formule de Stirling. L'objectif de cet exercice est de démontrer que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

La **partie I** établit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. La **partie II**, qui est indépendante de la première, étudie les intégrales de Wallis. La **partie III** combine les deux pour identifier C.

Partie I — Un équivalent à une constante multiplicative près

Pour $n \geq 1$, on pose :

$$q_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln q_{n+1} - \ln q_n.$$

1. À l'aide du développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 en 0, montrer que :
$$v_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
2. En déduire que la série $\sum v_n$ converge.
3. Montrer que la suite $(\ln q_n)$ converge vers un réel ℓ.
4. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :
$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Partie II — Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Calculer W_0 et W_1. Montrer que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite (W_n) est décroissante.
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$
7. En déduire que la suite $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$
8. Montrer que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

9. En déduire que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie III — Identification de la constante

10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

11. À l'aide de la partie I, donner un équivalent de $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ faisant intervenir C.
12. En déduire la valeur de C, puis conclure.

Exercice 3.28 ●●● Correction p. 34

La règle de Cauchy. La règle de d'Alembert conclut à partir du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ de deux termes consécutifs. La *règle de Cauchy*, objet de la partie I, procède autrement : elle examine la racine $\sqrt[n]{u_n}$.
On établit dans la partie II qu'elle s'applique chaque fois que la règle de d'Alembert s'applique, et l'on exhibe dans la partie III une série qu'elle traite alors que la règle de d'Alembert reste muette.

Partie I — La règle

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$, où $\ell \in [0, +\infty[$.

1. On suppose $\ell < 1$. En introduisant un réel q tel que $\ell < q < 1$, montrer que $\sum u_n$ converge.
2. On suppose $\ell > 1$. Montrer que $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Montrer, à l'aide des séries de Riemann, que le cas $\ell = 1$ ne permet aucune conclusion.

Partie II — Comparaison avec la règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels *strictement* positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$, où $\ell \in [0, +\infty[$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang N et un réel $B > 0$ tels que, pour tout $n \geq N$:

$$u_n \leq B\,(\ell + \varepsilon)^n.$$

   Montrer de même, lorsque $\varepsilon < \ell$, qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \geq A\,(\ell - \varepsilon)^n$ pour $n \geq N$.
5. En déduire que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.
6. Qu'en conclure sur les deux règles ?

Partie III — La réciproque est fausse

Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = 2^{-n+(-1)^n}$.

7. Calculer $\sqrt[n]{u_n}$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
8. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ selon la parité de n. Que peut-on dire de la règle de d'Alembert pour cette série ?

Exercice 3.29 ★ Correction p. 35

Théorème de Mertens. Le théorème du cours suppose les *deux* séries absolument convergentes. On montre ici qu'il suffit que l'une le soit, l'autre étant seulement convergente, et que cette hypothèse ne peut pas être affaiblie davantage.

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série **absolument convergente**, de somme A, et $\sum_{n\geq 0} b_n$ une série **convergente**, de somme B. On note $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ le terme général de leur produit de Cauchy, puis :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad \beta_n = B_n - B.$$

Partie I — Une autre écriture de C_n

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n - A_n B = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \beta_{n-k}.$$

Partie II — Le théorème

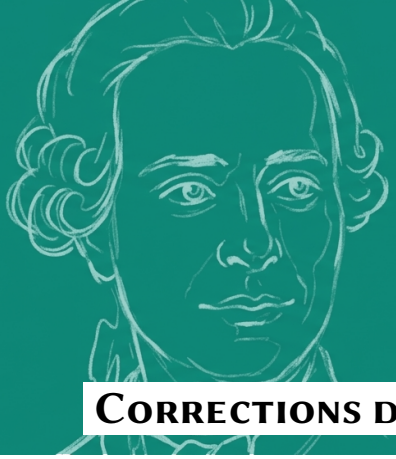
3. Justifier que la suite (β_n) tend vers 0 et qu'elle est bornée. On note M un majorant de $(|\beta_n|)$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un rang P tel que $|\beta_p| \leq \varepsilon$ dès que $p \geq P$, puis montrer que pour tout $n \geq P$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k} \right| \leq \alpha \, \varepsilon + M \sum_{k=n-P+1}^{n} |a_k| .$$

5. Montrer que $\sum_{k=n-P+1}^{n} |a_k| \to 0$ quand $n \to +\infty$, à P fixé.
6. En déduire que $\sum c_n$ converge et que sa somme vaut AB.

Partie III — L'hypothèse est optimale

7. Le cours donne l'exemple de deux séries convergentes dont le produit de Cauchy diverge : $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Vérifier que ces deux séries ne satisfont pas aux hypothèses ci-dessus, et conclure.



3

Techniques d'étude pour les séries numériques

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 3.1 **Énoncé p. 1**

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$. Pour tout $t \in [k, k+1]$:
$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$
En intégrant sur $[k, k+1]$, qui est de longueur 1, par croissance de l'intégrale :
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. Soit $n \geq 2$. Sommons l'inégalité de droite pour k variant de 1 à n et recollons les intégrales par la relation de Chasles :
$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$
Sommons l'inégalité de gauche pour k variant de 1 à $n-1$. Par le changement d'indice $j = k+1$:
$$H_n - 1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n.$$
Donc $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.

3. Comme $H_n \geq \ln(n+1)$ et $\ln(n+1) \to +\infty$, on a $H_n \to +\infty$: la suite des sommes partielles n'a pas de limite finie, donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
Pour $n \geq 2$, divisons l'encadrement par $\ln n > 0$:
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$
Le membre de droite tend vers 1. Pour celui de gauche, $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc :
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
Par le théorème d'encadrement, $\frac{H_n}{\ln n} \to 1$, c'est-à-dire $H_n \sim \ln n$.

Correction de l'exercice 3.2 **Énoncé p. 1**

1. La formule de Stirling s'écrit $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$. Par produit d'équivalents, $n!\, \mathrm{e}^n \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n$. Comme n^{n+2} ne s'annule pas, on peut faire le quotient :
$$u_n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n}{n^{n+2}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{3/2}}.$$
2. Les termes u_n sont positifs. La série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

Correction de l'exercice 3.3 **Énoncé p. 1**

1. La série est alternée. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, la série converge.
   Elle ne converge pas absolument : la série des valeurs absolues est $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, donc divergente.
2. La série est alternée. La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, la série converge.
3. D'après le théorème spécial des séries alternées, le reste $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est majoré en valeur absolue par la valeur absolue de son premier terme :
$$|S - S_N| \leq \frac{1}{(N+1)^2}.$$
   Or $\frac{1}{(N+1)^2} \leq 10^{-2}$ équivaut à $N + 1 \geq 10$. L'entier $N = 9$ convient.
4. D'après le même théorème, le reste R_N est du signe de son premier terme $\frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)^2}$. Pour $N = 1$, ce terme est positif : $S - S_1 \geq 0$, donc $S \geq S_1 = -1$. Pour $N = 2$, il est négatif : $S - S_2 \leq 0$, donc $S \leq S_2 = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 3.4 **Énoncé p. 2**

1. On a $|a_n| = |b_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, donc convergente : les deux séries convergent absolument. Ce sont des séries géométriques de raisons $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:
$$a_k\, b_{n-k} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}} = \frac{(-1)^{n-k}}{2^n}.$$
   Avec le changement d'indice $j = n - k$:
$$c_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j.$$

La somme $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j$ vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair. Donc $c_n = \frac{1}{2^n}$ si n est pair, et $c_n = 0$ si n est impair.

3. Les deux séries étant absolument convergentes, le théorème du produit de Cauchy s'applique : la série $\sum c_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Retrouvons cette valeur. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $c_{2p} = \frac{1}{4^p}$ et $c_{2p+1} = 0$, donc pour tout $P \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{2P+1} c_n = \sum_{p=0}^{P} \frac{1}{4^p} \xrightarrow[P\to+\infty]{} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$. La série $\sum c_n$ converge, donc sa somme est la limite de cette suite extraite de ses sommes partielles : on retrouve $\frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 3.5

Énoncé p. 2

1. On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{\mathrm{e}} < 1.$$

La série converge.

2. On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{n^n \cdot n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

On a $\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \to 4$ et $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{4}{\mathrm{e}} > 1$. La série diverge grossièrement.

3. On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4 \cdot \binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \to 1.$$

La règle de d'Alembert ne conclut pas. On utilise Stirling : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.
Donc $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Cette série diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1/2$).

Correction de l'exercice 3.6

Énoncé p. 2

1. On pose $a_n = \frac{1}{n+\ln n}$. La suite (a_n) est positive pour $n \geq 2$, décroissante (car $n + \ln n$ est strictement croissante) et $a_n \to 0$. Par le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ converge.
De plus, $\frac{1}{n+\ln n} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la convergence n'est pas absolue : la série est semi-convergente.
2. On pose $a_n = \frac{\ln n}{n}$. Pour $n \geq 3$, la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est décroissante (car

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ pour $x > \mathrm{e}$). Donc (a_n) est décroissante à partir d'un certain rang. De plus, $a_n \to 0$. Par le théorème des séries alternées, la série converge.
La convergence n'est pas absolue car $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

3. On a

$$\sin\left(n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sin(n\pi)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \cos(n\pi)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On pose $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Pour $n \geq 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \in]0, 1]$, intervalle sur lequel sin est positive et croissante ; comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ décroît vers 0, la suite (a_n) est positive, décroissante et tend vers 0. Par le théorème des séries alternées, la série converge.
Comme $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1/2 \leq 1$), la convergence n'est pas absolue : la série est semi-convergente.

Correction de l'exercice 3.7 **Énoncé p. 2**

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$, et elle y est décroissante car $t \mapsto t \ln t$ y est positive et croissante. Notons $S_N = \sum_{k=2}^{N} u_k$ les sommes partielles.
Soit $k \geq 2$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, qui est de longueur 1 :

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

Soit $N \geq 3$. Sommons l'inégalité de droite pour k variant de 2 à $N-1$ et recollons les intégrales par la relation de Chasles :

$$\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leq \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k \ln k} = S_{N-1}.$$

Or $t \mapsto \ln(\ln t)$ est une primitive de f sur $[2, +\infty[$, donc cette intégrale, prise *sur un segment*, se calcule :

$$\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^N = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2).$$

Ainsi $S_{N-1} \geq \ln(\ln N) - \ln(\ln 2)$ pour tout $N \geq 3$, et le membre de droite tend vers $+\infty$: donc $S_N \to +\infty$ et la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln k}$ diverge.

2. Posons $w_k = \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ pour $k \geq 2$; ces termes sont positifs.
Si $\alpha \leq 1$. Pour $k \geq 3$ on a $\ln k \geq 1$, donc $(\ln k)^\alpha \leq \ln k$ et par conséquent $w_k \geq \frac{1}{k \ln k} > 0$. Or la série $\sum \frac{1}{k \ln k}$ diverge d'après la question 1 : par comparaison de séries à termes positifs, $\sum w_k$ diverge.
Si $\alpha > 1$. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$, et elle y est décroissante car $t \mapsto t(\ln t)^\alpha$ y est un produit de fonctions positives

et croissantes. Soit $k \geq 2$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $g(k+1) \leq g(t) \leq g(k)$, d'où, en intégrant sur ce segment de longueur 1 :

$$g(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq g(k).$$

Soit $N \geq 3$. Sommons l'inégalité de gauche pour k variant de 2 à $N-1$ et recollons par la relation de Chasles ; avec le changement d'indice $p = k+1$:

$$\sum_{p=3}^{N} w_p \leq \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha}.$$

Or $t \mapsto \frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est une primitive de g sur $[2, +\infty[$, et $\alpha - 1 > 0$:

$$\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha} = \left[\frac{(\ln t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^N = \frac{(\ln 2)^{1-\alpha} - (\ln N)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Les sommes partielles de $\sum w_k$ sont donc majorées :

$$\sum_{k=2}^{N} w_k \leq \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

La série est à termes positifs, ses sommes partielles forment une suite croissante et majorée : elle converge.

Conclusion : la série $\sum \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. C'est l'analogue des séries de Riemann avec ln à la place de la puissance.

3. Le terme général est bien défini pour $n \geq 2$, et il est positif : les critères de comparaison des séries à termes positifs s'appliquent. On note $u_n = \frac{1}{n^a(\ln n)^b}$.

   Si $a > 1$**,** choisissons un réel r tel que $1 < r < a$. Alors :

$$n^r u_n = \frac{(\ln n)^{-b}}{n^{a-r}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

   par croissance comparée si $-b > 0$, et parce que le numérateur est majoré par 1 pour $n \geq 3$ si $-b \leq 0$; dans les deux cas $a - r > 0$. Donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, et $\sum \frac{1}{n^r}$ est une série de Riemann convergente (car $r > 1$) à termes positifs : par comparaison, la série converge.

   Si $a < 1$**,** choisissons cette fois un réel r tel que $a < r < 1$. Alors :

$$n^r u_n = \frac{n^{r-a}}{(\ln n)^b} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

   par croissance comparée si $b > 0$, et parce que le dénominateur est majoré par 1 pour $n \geq 3$ si $b \leq 0$; dans les deux cas $r - a > 0$. Il existe donc un rang à partir duquel $n^r u_n \geq 1$, c'est-à-dire $u_n \geq \frac{1}{n^r} > 0$. Or $\sum \frac{1}{n^r}$ est une série de Riemann divergente (car $r \leq 1$) : par comparaison, la série diverge.

   Si $a = 1$**,** c'est exactement la question 2 : la série converge si et seulement si $b > 1$.

   Conclusion : la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a(\ln n)^b}$ converge si et seulement si

$$a > 1 \qquad \text{ou} \qquad (a = 1 \text{ et } b > 1).$$

Correction de l'exercice 3.8 **Énoncé p. 3**

1. Posons $\gamma_n = H_n - \ln n$, de sorte que $\gamma_n \to \gamma$ par hypothèse. Il s'agit d'estimer la vitesse de cette convergence.

   Étape 1 : le terme général. Pour $n \geq 2$,

   $$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

   Comme $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ au voisinage de 0, on obtient en prenant $x = 1/n$:

   $$\gamma_n - \gamma_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

   Étape 2 : passage au reste. La somme partielle de la série $\sum_{k\geq 2}(\gamma_k - \gamma_{k-1})$ est télescopique : $\sum_{k=2}^{N}(\gamma_k - \gamma_{k-1}) = \gamma_N - \gamma_1 \to \gamma - \gamma_1$. La série converge donc, et son reste d'ordre n vaut

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) = \gamma - \gamma_n.$$

   Étape 3 : estimation du reste par comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Soit $k \geq 2$ un entier ; en intégrant les encadrements de cette fonction sur $[k, k+1]$ puis sur $[k-1, k]$, qui sont de longueur 1 :

   $$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   Soient $n \geq 1$ et $N > n$. Sommons pour k variant de $n+1$ à N et recollons par la relation de Chasles :

   $$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

   À n fixé, faisons tendre N vers $+\infty$: la somme du milieu tend vers le reste, d'où

   $$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

   Comme $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, il vient $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   De même, $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\frac{1}{k^3} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ pour tout $k \geq 2$; en sommant pour k variant de $n+1$ à N :

   $$0 \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2} \leq \frac{1}{2n^2},$$

   et en faisant tendre N vers $+\infty$ à n fixé, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   Conclusion. En sommant l'étape 1 et en reportant :

   $$\gamma - \gamma_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}\right) = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $\gamma_n = \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, c'est-à-dire

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Posons $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Comme $m \longrightarrow +\infty$, le développement $H_m = \ln m + \gamma + o(1)$ est licite, et par différence :

$$H_n - H_m = (\ln n + \gamma + o(1)) - (\ln m + \gamma + o(1)) = \ln \frac{n}{m} + o(1).$$

Or $m = \lfloor n/2 \rfloor \sim \frac{n}{2}$, donc $\frac{n}{m} \longrightarrow 2$ et, par continuité du logarithme, $\ln \frac{n}{m} \longrightarrow \ln 2$. Ainsi $H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor} \longrightarrow \ln 2$, et comme $\ln 2 \neq 0$:

$$H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln 2.$$

Correction de l'exercice 3.9 **Énoncé p. 3**

1. La formule de Stirling appliquée à n et à la suite extraite d'indice $2n$ donne :

$$(n!)^2 \sim 2\pi n \cdot \frac{n^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}} \qquad \text{et} \qquad (2n)! \sim 2\sqrt{\pi n} \cdot \frac{4^n n^{2n}}{\mathrm{e}^{2n}}.$$

Comme $(2n)!$ ne s'annule pas, on peut faire le quotient :

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{2\pi n}{2\sqrt{\pi n} \cdot 4^n} = \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}.$$

Par croissance comparée, $n^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \longrightarrow 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et que les termes sont positifs, la série **converge**.

2. Commençons par observer que la règle de d'Alembert est inopérante :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\alpha}} \cdot \frac{n^{n+\alpha}}{n!\,\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot 1 = 1,$$

quelle que soit la valeur de α.
On passe donc par Stirling. De $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$ on tire :

$$u_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\alpha}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^n}{n^{n+\alpha}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^\alpha} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{\alpha-1/2}}.$$

Les termes sont positifs : par comparaison avec la série de Riemann d'exposant $\alpha - \frac{1}{2}$, la série **converge si et seulement si** $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, c'est-à-dire $\alpha > \frac{3}{2}$.

3. Pour $n \geq 2$, on a $\ln(n!) > 0$ et le terme général est bien défini. La formule de Stirling donne :

$$\ln(n!) = \ln\left(\sqrt{2\pi n}\right) + n \ln n - n + o(1).$$

Or $\ln\left(\sqrt{2\pi n}\right) = O(\ln n) = o(n \ln n)$ et $n = o(n \ln n)$, donc :

$$\ln(n!) \sim n \ln n \qquad \text{puis} \qquad \frac{1}{\ln(n!)} \sim \frac{1}{n \ln n}.$$

Les deux suites sont positives, et $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge par comparaison série-intégrale avec la fonction continue, positive et décroissante $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$: pour $N \geq 3$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k \ln k} \geq \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2) \to +\infty$ (exercice 3.7). Par le critère d'équivalence, la série **diverge**.

Correction de l'exercice 3.10 **Énoncé p. 3**

1. Tous les termes sont strictement positifs et :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, a^{n+1}} \cdot \frac{n!\, a^n}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\, n^n\, a} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}}{a},$$
car $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \to \mathrm{e}$.
Par la règle de d'Alembert : si $a > \mathrm{e}$, la limite e/a est strictement inférieure à 1 et la série **converge** ; si $a < \mathrm{e}$, la limite est strictement supérieure à 1, le terme général ne tend pas vers 0 et la série **diverge grossièrement**.
Le cas $a = \mathrm{e}$ donne une limite égale à 1 : la règle ne conclut pas.

2. Pour $a = \mathrm{e}$, on a $u_n = \dfrac{n^n}{n!\, \mathrm{e}^n}$. La formule de Stirling s'écrit $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$, d'où $n!\, \mathrm{e}^n \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n$. Comme $n!\, \mathrm{e}^n$ ne s'annule pas :
$$u_n \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$
Les termes sont positifs et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, donc divergente. Par le critère d'équivalence, $\sum u_n$ **diverge**.

3. La suite (u_n) est positive. Elle est de plus *décroissante* : d'après la question 1 avec $a = \mathrm{e}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$
et l'inégalité stricte $\ln(1+x) < x$, valable pour tout $x > 0$, donne $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$, c'est-à-dire $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$. Ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
Enfin $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0$. Le théorème spécial des séries alternées s'applique : $\sum (-1)^n u_n$ **converge**.
La convergence n'est pas absolue, puisque $\sum |(-1)^n u_n| = \sum u_n$ diverge d'après la question 2 : la série est **semi-convergente**.

4. Par la question 2,
$$\frac{u_n}{n^\beta} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n^{\beta+1/2}}.$$
Les termes sont positifs : par comparaison avec la série de Riemann d'exposant $\beta + \frac{1}{2}$, la série **converge si et seulement si** $\beta + \frac{1}{2} > 1$, c'est-à-dire $\beta > \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3.11 **Énoncé p. 3**

1. La série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ est alternée, et la suite $a_k = \frac{1}{k}$ est positive, décroissante et tend vers 0. Le théorème spécial des séries alternées s'applique : la série converge, donc son reste R_n est bien défini, et
$$|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

2. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ et S la somme de la série. Pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x$, donc par linéarité, pour $n \geq 1$:
$$S_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^{k-1}\right) \mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-x)^j\right) \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$
la dernière égalité étant la somme géométrique de raison $-x \neq 1$ pour $x \in [0,1]$. En séparant :
$$S_n = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
Or $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$, donc $S = -\ln 2$ en faisant tendre n vers $+\infty$. Par différence :
$$R_n = S - S_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
(Le cas $n = 0$ se vérifie directement : $R_0 = S = -\ln 2$.)

3. Posons $b_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \geq 0$, de sorte que $R_n = (-1)^{n+1} b_n$: la série $\sum R_n$ est alternée.
Convergence. Pour $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$, donc par croissance de l'intégrale $b_{n+1} \leq b_n$: la suite (b_n) est décroissante. Elle est positive et $b_n \leq \frac{1}{n+1} \to 0$. Le théorème spécial des séries alternées donne la **convergence** de $\sum R_n$.
Absence de convergence absolue. Pour $x \in [0,1]$, on a $1 + x \leq 2$, donc $\frac{x^n}{1+x} \geq \frac{x^n}{2}$ et :
$$|R_n| = b_n \geq \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)}.$$
Comme $\sum \frac{1}{2(n+1)}$ diverge et que les termes sont positifs, $\sum |R_n|$ **diverge** : la série est semi-convergente.
Remarquons que la majoration $|R_n| \leq \frac{1}{n+1}$ de la question 1 ne permettait à elle seule de conclure ni dans un sens ni dans l'autre ; c'est le signe de R_n, lu sur la forme intégrale, qui donne la convergence, et la minoration qui exclut la convergence absolue.

4. Comparons b_n à $\frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$:
$$b_n - \frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{2(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leq \frac{1-x}{2(1+x)} \leq \frac{1-x}{2}$, donc :

$$0 \leq b_n - \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Ainsi $b_n = \frac{1}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n}$, et en multipliant par $(-1)^{n+1}$, qui est de module 1 :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

Correction de l'exercice 3.12 **Énoncé p. 3**

1. Posons $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Le terme général proposé est exactement $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$: c'est le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
   Ces deux séries géométriques sont de raison $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, de module strictement inférieur à 1 : elles convergent absolument, de sommes $\frac{1}{1-1/2} = 2$ et $\frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$. Le théorème du produit de Cauchy s'applique :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k\,3^{n-k}}\right) = 2\times\frac{3}{2} = 3.$$

2. Avec $a_n = b_n = \frac{1}{n!}$, le terme général est le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{n!}$ avec elle-même. Cette série converge absolument (ses termes sont positifs et sa somme vaut e), donc :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}\right) = \mathrm{e}\times\mathrm{e} = \mathrm{e}^2.$$
   On peut le retrouver directement : par la formule du binôme, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{2^n}{n!}$, et $\sum \frac{2^n}{n!} = \mathrm{e}^2$.

3. Il faut répartir le facteur $\frac{1}{2^n}$ entre les deux séries. En écrivant $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2^{n-k}}$:
   $$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k\,k!}\cdot\frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k\,b_{n-k}, \qquad a_k = \frac{(1/2)^k}{k!}, \quad b_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$
   La série $\sum a_n$ converge absolument, de somme $\mathrm{e}^{1/2}$, et $\sum b_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de somme 2. Le théorème du produit de Cauchy donne :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) = 2\sqrt{\mathrm{e}}.$$

Correction de l'exercice 3.13 **Énoncé p. 4**

1. Montrons l'encadrement par récurrence double. Il est vrai aux rangs 0 et 1, puisque $0 \leq F_0 = 0 \leq 1$ et $0 \leq F_1 = 1 \leq 2$. Supposons-le vrai aux rangs n et $n+1$. Alors $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geq 0$ et :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \leq 2^{n+1} + 2^n \leq 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 0$.
Soit x tel que $|x| < \frac{1}{2}$. Alors $|F_n x^n| \leq (2|x|)^n$, terme général d'une série géométrique de raison $2|x| \in [0, 1[$, donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum F_n x^n$ converge absolument.

2. La suite (b_n) est nulle à partir du rang 3 : la série $\sum b_n$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, elle converge donc absolument, et sa somme vaut $1 - x - x^2$.
Notons $a_n = F_n x^n$ et $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Comme $b_j = 0$ pour $j \geq 3$, seuls les indices $k \in \{n-2, n-1, n\}$ contribuent.
   - $c_0 = a_0 b_0 = F_0 = 0$.
   - $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 + F_1 x = x$.
   - Pour $n \geq 2$:

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 = F_n x^n - F_{n-1} x^{n-1} \cdot x - F_{n-2} x^{n-2} \cdot x^2 = (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})\, x^n,$$

     qui est nul par la relation de récurrence.

   Ainsi $c_1 = x$ et $c_n = 0$ pour tout $n \neq 1$.

3. Les deux séries étant absolument convergentes, le théorème du produit de Cauchy s'applique :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n\right)(1 - x - x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = x.$$

Il reste à vérifier que $1 - x - x^2 \neq 0$. Les racines de $x^2 + x - 1$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, de valeurs absolues $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62$ et $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}62$, toutes deux strictement supérieures à $\frac{1}{2}$. Le polynôme ne s'annule donc pas sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, et l'on peut diviser :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

4. On applique le résultat à $x = \frac{1}{3}$, qui vérifie bien $|x| < \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{3^n} = \frac{1/3}{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{1/3}{5/9} = \frac{3}{5}.$$

Correction de l'exercice 3.14 **Énoncé p. 4**

1. Les termes étant strictement positifs, la suite (S_n) est strictement croissante. Si elle était majorée, elle convergerait, et la série $\sum a_n$ serait convergente : c'est exclu par hypothèse. La suite (S_n) est donc croissante et non majorée,

donc $S_n \to +\infty$.

2. Soit $n \geq 2$. Comme $0 < S_{n-1} \leq S_n$, on a $S_{n-1}S_n \leq S_n^2$, et comme $a_n = S_n - S_{n-1}$:

$$0 < \frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{a_n}{S_{n-1}S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}S_n} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

Le majorant est le terme général d'une série télescopique : pour $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_N} \leq \frac{1}{S_1}.$$

Les sommes partielles de $\sum \dfrac{a_n}{S_n^2}$, série à termes positifs, sont donc majorées par $\frac{1}{S_1}$: elle **converge**.

3. Soient $n \geq 1$ et $m > n$. Pour tout k compris entre $n+1$ et m, la croissance de (S_k) donne $S_k \leq S_m$, donc $\frac{a_k}{S_k} \geq \frac{a_k}{S_m}$. En sommant :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{S_m} \sum_{k=n+1}^{m} a_k = \frac{S_m - S_n}{S_m} = 1 - \frac{S_n}{S_m}.$$

À n fixé, $S_m \to +\infty$ quand $m \to +\infty$, donc $\frac{S_n}{S_m} \to 0$: il existe un rang $m > n$ tel que $\frac{S_n}{S_m} \leq \frac{1}{2}$, et alors

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{2}.$$

Construisons par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $n_0 = 1 < n_1 < n_2 < \cdots$: n_{p+1} est un rang $m > n_p$ fourni par ce qui précède appliqué à $n = n_p$. En notant T_N la somme partielle de $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$, on obtient pour tout $P \geq 1$:

$$T_{n_P} \geq \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{P}{2}.$$

La suite (T_N) est croissante et admet une sous-suite tendant vers $+\infty$: elle tend donc vers $+\infty$, et la série **diverge**.

4. Pour $a_n = 1$, on a $S_n = n$. La question 2 redonne la convergence de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et la question 3 la divergence de $\sum \dfrac{1}{n}$: on retrouve deux séries de Riemann, de part et d'autre de l'exposant critique.

Correction de l'exercice 3.15 **Énoncé p. 4**

1. Un élément de A_d s'écrit avec d chiffres, dont aucun n'est un 9. Le chiffre de tête est non nul et différent de 9 : il y a 8 choix possibles, dans $\{1, \ldots, 8\}$. Chacun des $d-1$ chiffres suivants est quelconque, hormis le 9 : il y a 9 choix, dans $\{0, \ldots, 8\}$. Par principe multiplicatif, on obtient

$$|A_d| = 8 \times 9^{d-1}.$$

2. Tout entier à d chiffres vérifie $n \geq 10^{d-1}$, donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^{d-1}}$. En sommant sur les

$8 \times 9^{d-1}$ éléments de A_d :

$$\sum_{n \in A_d} \frac{1}{n} \leq \frac{8 \times 9^{d-1}}{10^{d-1}} = 8 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}.$$

3. La série $\sum \frac{1}{n_k}$ est à termes positifs : il suffit de majorer ses sommes partielles. Soit $K \geq 1$. Notons D le nombre de chiffres de n_K. Les entiers $n_1, \ldots, n_K$ appartiennent tous à A et ont au plus D chiffres, donc à la réunion disjointe $A_1 \cup \cdots \cup A_D$. Tous les termes étant positifs :

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{n_k} \leq \sum_{d=1}^{D} \sum_{n \in A_d} \frac{1}{n} \leq \sum_{d=1}^{D} 8 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} \leq \sum_{d=1}^{+\infty} 8 \left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80,$$

la dernière égalité étant la somme d'une série géométrique de raison $\frac{9}{10} \in [0, 1[$. Les sommes partielles sont croissantes et majorées par 80 : la série **converge**, et sa somme est inférieure à 80.

Correction de l'exercice 3.16 Énoncé p. 5

1. Développons les deux puissances par la formule du binôme :

$$N_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\sqrt{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(-\sqrt{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\sqrt{3}\right)^k \left(1 + (-1)^k\right).$$

Le facteur $1 + (-1)^k$ est nul pour k impair et vaut 2 pour k pair. Seuls les indices pairs $k = 2j$ subsistent, et pour ceux-là $\left(\sqrt{3}\right)^{2j} = 3^j$ est un entier :

$$N_n = 2 \sum_{2j \leq n} \binom{n}{2j} 2^{n-2j} \, 3^j.$$

La somme est un entier : N_n est bien un entier pair.

2. Écrivons $\left(2 + \sqrt{3}\right)^n = N_n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$. Comme N_n est un entier pair, $\sin(\pi N_n) = 0$ et $\cos(\pi N_n) = 1$, d'où :

$$u_n = \sin\left(\pi N_n - \pi \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right) = -\cos(\pi N_n) \sin\left(\pi \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right).$$

Or $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$, et l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ donne :

$$|u_n| \leq \pi \left(2 - \sqrt{3}\right)^n.$$

Le majorant est le terme général d'une série géométrique de raison $2 - \sqrt{3} \in [0, 1[$, donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge : la série $\sum u_n$ **converge absolument**.

Correction de l'exercice 3.17 Énoncé p. 5

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Soit $k \geq 1$ un

entier ; pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, qui est de longueur 1 :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Sommons pour k variant de 1 à n et recollons les intégrales par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = I_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = S_n.$$

Par le changement d'indice $p = k+1$, la somme de gauche vaut $\displaystyle\sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{p}} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$. On obtient donc, pour tout $n \geq 1$:

$$S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leq I_{n+1} \leq S_n.$$

En particulier $S_n \geq I_{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2 \to +\infty$, donc $S_n \to +\infty$; en particulier $S_n > 0$ à partir d'un certain rang, et l'on peut diviser l'encadrement par S_n :

$$1 + \frac{1}{S_n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{S_n} \leq \frac{I_{n+1}}{S_n} \leq 1.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers 1, donc $I_{n+1} \sim S_n$ par le théorème d'encadrement. Enfin :

$$I_{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2 \sim 2\sqrt{n+1} \sim 2\sqrt{n} \sim I_n,$$

d'où $S_n \sim I_n$.

2. Pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = (S_{n+1} - S_n) - (I_{n+1} - I_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}.$$

Développons chacun des deux morceaux. D'une part :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} &= 2\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right) = 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Les termes en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ se compensent, d'où $v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, donc convergente, et à termes positifs. Par comparaison, la série $\sum v_n$ converge absolument, donc converge.

Or ses sommes partielles se télescopent : pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} v_n = u_{N+1} - u_1$. Cette suite a donc une limite finie, et il en va de même de (u_n) : la suite (u_n) converge.

Correction de l'exercice 3.18 **Énoncé p. 5**

La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t}$ est continue et *croissante* sur $[0, +\infty[$. Soit $k \geq 1$ un entier. Pour tout $t \in [k-1, k]$ on a $\sqrt{t} \leq \sqrt{k}$, et pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $\sqrt{k} \leq \sqrt{t}$. En intégrant sur des segments de longueur 1 :

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$

Sommons pour k variant de 1 à N et recollons par la relation de Chasles :

$$\int_{0}^{N} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leq S_N \leq \int_{1}^{N+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2}{3}N^{3/2} \leq S_N \leq \frac{2}{3}\left((N+1)^{3/2} - 1\right).$$

Divisons par $\frac{2}{3}N^{3/2} > 0$:

$$1 \leq \frac{S_N}{\frac{2}{3}N^{3/2}} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{3/2} - \frac{1}{N^{3/2}}.$$

Le membre de droite tend vers 1, donc par le théorème d'encadrement :

$$S_N \sim \frac{2}{3}N^{3/2}.$$

Par passage à l'inverse, $\frac{1}{S_n} \sim \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$. Cette dernière est le terme général d'une série de Riemann convergente (d'exposant $\frac{3}{2} > 1$) à termes positifs : par le critère d'équivalence, la série $\sum \frac{1}{S_n}$ converge.

Correction de l'exercice 3.19 **Énoncé p. 5**

1. Soit $n \geq 2$. Tous les termes de la somme sont positifs, et celui d'indice $k = n$ vaut $(\ln n)^2$:

$$u_n = (\ln n)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} (\ln k)^2 \geq (\ln n)^2.$$

   Donc $u_n \to +\infty$: en particulier $u_n \not\to 0$ et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2. La fonction $f : t \mapsto (\ln t)^2$ est continue sur $[1, +\infty[$ et croissante, car dérivable de dérivée $f'(t) = \frac{2\ln t}{t} \geq 0$ sur $[1, +\infty[$.

Soit $k \geq 1$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$: $(\ln k)^2 \leq (\ln t)^2 \leq (\ln(k+1))^2$. En intégrant sur $[k, k+1]$, qui est de longueur 1 :

$$(\ln k)^2 \leq \int_k^{k+1} (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t \leq (\ln(k+1))^2.$$

Sommons l'inégalité de gauche pour k variant de 1 à n. Comme $\ln 1 = 0$, la somme de gauche vaut u_n, et la relation de Chasles recolle les intégrales :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 \leq \int_1^{n+1} (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Sommons l'inégalité de droite pour k variant de 1 à $n-1$. Par le changement d'indice $p = k+1$, la somme de droite vaut $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} (\ln p)^2 = u_n$:

$$\int_1^{n} (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1))^2 = u_n.$$

3. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\ln t)^2$ sont de classe C^1 sur $[1, x]$. Une intégration par parties donne :

$$\int_1^x (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t = \Big[t(\ln t)^2\Big]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{2\ln t}{t} \, \mathrm{d}t = x(\ln x)^2 - 2\int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Une seconde intégration par parties donne $\int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln x - x + 1$, d'où :

$$\int_1^x (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x - 2.$$

Pour $x > 1$, divisons par $x(\ln x)^2 > 0$:

$$\frac{1}{x(\ln x)^2} \int_1^x (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t = 1 - \frac{2}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} - \frac{2}{x(\ln x)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$

c'est-à-dire $\int_1^x (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t \sim x(\ln x)^2$.

4. D'après la question 3, $\int_1^n (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t \sim n(\ln n)^2$ et $\int_1^{n+1} (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t \sim (n+1)(\ln(n+1))^2$. Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln n$, car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 tandis que $\ln n$ tend vers $+\infty$; et $n+1 \sim n$. Donc $(n+1)(\ln(n+1))^2 \sim n(\ln n)^2$, et les deux bornes de la question 2 sont équivalentes à $n(\ln n)^2$.

   En divisant l'encadrement de la question 2 par $n(\ln n)^2 > 0$, les deux membres extrêmes tendent vers 1 ; par le théorème d'encadrement :

$$u_n \sim n(\ln n)^2, \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

   Ces deux suites sont positives. Étudions donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$, et elle y est décroissante car $t \mapsto t(\ln t)^2$ y est un produit de fonctions positives et croissantes.

Soit $k \geq 2$ un entier. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $g(k+1) \leq g(t) \leq g(k)$, d'où, en intégrant sur ce segment de longueur 1 :

$$g(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq g(k).$$

Soit $N \geq 3$. Sommons l'inégalité de gauche pour k variant de 2 à $N-1$ et recollons par la relation de Chasles ; le changement d'indice $p = k+1$ donne :

$$\sum_{p=3}^{N} \frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^N = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln N} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

Les sommes partielles de $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ sont donc majorées par $\frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$; comme cette série est à termes positifs, ses sommes partielles forment une suite croissante et majorée, et elle converge. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$ converge.

Correction de l'exercice 3.20 **Énoncé p. 5**

Ces deux quantités sont bien définies : ce sont les restes de la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ et de la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{k^2}$, qui convergent toutes deux absolument (série de Riemann d'exposant $2 > 1$).

La série $\sum u_n$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Soit $k \geq 2$ un entier ; en intégrant les encadrements de f sur $[k, k+1]$ puis sur $[k-1, k]$, qui sont de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Soient $n \geq 1$ et $N > n$. Sommons pour k variant de $n+1$ à N et recollons par la relation de Chasles :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2},$$

soit encore :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

À n fixé, faisons tendre N vers $+\infty$: la somme du milieu tend vers u_n, et il vient :

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

En divisant par $\frac{1}{n}$, les deux membres extrêmes tendent vers 1, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique, qui diverge, et les deux suites sont positives : par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.

La série $\sum v_n$. Le raisonnement précédent ne s'applique pas : la série qui définit v_n n'est pas à termes de signe constant.

En revanche, v_n est exactement le reste d'indice n de la série alternée $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2}$, à laquelle le théorème spécial des séries alternées s'applique : la suite $\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est positive, décroissante et tend vers 0. La majoration du reste donne alors, pour tout $n \geq 1$:

$$|v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$, décalée d'un indice). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge absolument, donc converge.

Correction de l'exercice 3.21 **Énoncé p. 5**

1. Soit $n \geq 2$. Les fonctions $t \mapsto n-1-t$ et f sont de classe C^1 sur $[n-1, n]$, segment inclus dans $[1, +\infty[$. Une intégration par parties donne :

$$\int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = [(n-1-t)f(t)]_{n-1}^{n} + \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Le crochet vaut $(-1)f(n) - 0 \cdot f(n-1) = -f(n)$, d'où :

$$\int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = w_n,$$

   ce qui est bien la formule annoncée.

2. Soit $n \geq 2$. Pour $t \in [n-1, n]$ on a $0 \leq t-n+1 \leq 1$, donc par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale :

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} (t-n+1)\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

   Posons $\alpha_n = \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \geq 0$. Par la relation de Chasles, les sommes partielles de $\sum \alpha_n$ valent, pour $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} \alpha_n = \int_{1}^{N} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M.$$

   La série $\sum \alpha_n$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées : elle converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |w_n|$ converge : la série $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge absolument.

3. Posons $f(t) = \frac{\cos(\ln t)}{t}$, qui est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, avec :

$$f'(t) = \frac{-\frac{\sin(\ln t)}{t} \cdot t - \cos(\ln t)}{t^2} = -\frac{\sin(\ln t) + \cos(\ln t)}{t^2}.$$

   Comme $|\sin| \leq 1$ et $|\cos| \leq 1$, on a $|f'(t)| \leq \frac{2}{t^2}$, d'où pour tout $X \geq 1$:

$$\int_{1}^{X} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{1}^{X} \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{2}{X} \leq 2.$$

L'hypothèse de la question 2 est donc vérifiée avec $M = 2$: la série $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge.
Or, par définition de w_n et par la relation de Chasles, pour tout $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} w_n = \int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=2}^{N} f(n).$$

Le changement de variable $u = \ln t$, licite car $t \mapsto \ln t$ est de classe C^1 sur $[1, N]$, donne :

$$\int_1^N \frac{\cos(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln N} \cos u\,\mathrm{d}u = \sin(\ln N).$$

Ainsi, pour tout $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{\cos(\ln n)}{n} = \sin(\ln N) - \sum_{n=2}^{N} w_n.$$

Si la série $\sum \dfrac{\cos(\ln n)}{n}$ convergeait, le membre de gauche aurait une limite finie ; comme $\sum w_n$ converge, la suite $(\sin(\ln N))$ en aurait une aussi, ce qui est exclu. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge.

Correction de l'exercice 3.22 **Énoncé p. 6**

La formule de Stirling donne $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, donc par produit d'équivalents :

$$(n!)^3 \sim (2\pi n)^{3/2}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{3n},$$

et en l'appliquant à la suite extraite d'indice $3n$:

$$(3n)! \sim \sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{\mathrm{e}}\right)^{3n} = \sqrt{6\pi n}\cdot 3^{3n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{3n}.$$

Comme $(n!)^3$ ne s'annule pas, on peut faire le quotient :

$$u_n \sim \frac{\sqrt{6\pi n}}{(2\pi n)^{3/2}}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi n}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n}.$$

Posons $q = \left(\frac{3}{\alpha}\right)^3 > 0$, de sorte que $u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} q^n$. Trois cas se présentent.
Si $\alpha > 3$**,** alors $0 < q < 1$. Par croissance comparée, $n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} q^n = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} n\, q^n \to 0$, donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$) et est à termes positifs : par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.
Si $0 < \alpha < 3$**,** alors $q > 1$ et, par croissance comparée, $\frac{\sqrt{3}}{2\pi n} q^n \to +\infty$. Donc $u_n \to +\infty$, et en particulier $u_n \not\to 0$: la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $\alpha = 3$**,** alors $q = 1$ et $u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi n}$. Les deux suites sont positives et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge : par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge.

Correction de l'exercice 3.23 **Énoncé p. 6**

Le cas $a = b$. Pour n impair, le dénominateur vaut $n^a - n^a = 0$: le terme u_n n'est pas défini. On suppose désormais $a \neq b$, ce qui assure que $n^a + (-1)^n n^b \neq 0$ pour tout $n \geq 2$.
Le cas $b > a$. Mettons n^b en facteur au dénominateur :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^b\left((-1)^n + n^{a-b}\right)} = \frac{1}{n^b} \cdot \frac{1}{1 + (-1)^n n^{a-b}},$$

la dernière égalité s'obtenant en multipliant numérateur et dénominateur par $(-1)^n$. Comme $a - b < 0$, on a $n^{a-b} \to 0$, donc le second facteur tend vers 1. En particulier $u_n \sim \frac{1}{n^b}$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Les deux suites étant de signe constant, le critère d'équivalence s'applique : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b > 1$.
Le cas $a > b$. Mettons cette fois n^a en facteur :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \cdot \frac{1}{1 + (-1)^n n^{b-a}}, \qquad \text{avec } n^{b-a} \to 0.$$

Si $a \leq 0$, alors $|u_n| \sim \frac{1}{n^a}$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.
Supposons donc $a > 0$. Le développement limité $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ en 0, appliqué à $x = (-1)^n n^{b-a}$, donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 - (-1)^n n^{b-a} + o\left(n^{b-a}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right),$$

où l'on a utilisé $((-1)^n)^2 = 1$. Notons r_n la différence :

$$r_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^a} = -\frac{1}{n^{2a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right).$$

D'une part, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge par le théorème spécial des séries alternées, car $a > 0$ assure que $\left(\frac{1}{n^a}\right)$ est positive, décroissante et tend vers 0.
D'autre part, $r_n \sim -\frac{1}{n^{2a-b}}$, donc r_n est de signe constant à partir d'un certain rang et, par le critère d'équivalence, la série $\sum r_n$ converge si et seulement si $2a - b > 1$.
Comme $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + r_n$ est la somme d'un terme général de série convergente et de r_n, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum r_n$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $2a - b > 1$.
Conclusion. Le terme u_n est défini si et seulement si $a \neq b$, et la série $\sum u_n$ converge si et seulement si :

$$(b > a \text{ et } b > 1) \qquad \text{ou} \qquad (a > b \text{ et } a > 0 \text{ et } 2a - b > 1).$$

Correction de l'exercice 3.24 **Énoncé p. 6**

Convergence. Comme $\ln(1 + x) = x + O(x^2)$ quand $x \to 0$ et que $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$, on obtient, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème spécial des séries alternées, car $\left(\frac{1}{n}\right)$ est positive, décroissante et tend vers 0. Le reste est dominé par $\frac{1}{n^2}$, terme général d'une

série de Riemann convergente à termes positifs : la série correspondante converge absolument. Somme de deux séries convergentes, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

Calcul de la somme. Pour $n \geq 1$, les termes d'indices $2n$ et $2n+1$ se compensent :

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = 0.$$

Notons $(S_N)_{N\geq 2}$ la suite des sommes partielles. En regroupant les termes deux par deux :

$$S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} (u_{2k} + u_{2k+1}) = 0.$$

La suite extraite (S_{2n+1}) est donc nulle, et tend vers 0. Or la suite (S_N) converge, puisque la série converge : elle a nécessairement la même limite que la suite extraite. Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0.$$

Correction de l'exercice 3.25

Énoncé p. 6

Posons, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$z_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ \frac{1}{k^2} & \text{si } k \geq 1, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_k = \frac{1}{k!}.$$

Ces deux séries convergent absolument : $\sum z_k$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$ à un terme près, de somme $\frac{\pi^2}{6}$, et $\sum w_k$ est la série exponentielle en $x = 1$, de somme e.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme d'indice $k = 0$ du produit de Cauchy est nul puisque $z_0 = 0$, donc :
$$\sum_{k=0}^{n} z_k\, w_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2\,(n-k)!} = u_n.$$
Ainsi $\sum u_n$ est le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Le théorème du produit de Cauchy donne sa convergence absolue et la valeur de sa somme :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} w_k\right) = \frac{\pi^2}{6}\,\mathrm{e}.$$
Comme $u_0 = z_0 w_0 = 0$, on a également $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2 \mathrm{e}}{6}$.
2. Cette fois, le produit de Cauchy de $\sum z_k$ avec elle-même a pour terme général, les indices $k = 0$ et $k = n$ donnant des termes nuls :
$$\sum_{k=0}^{n} z_k\, z_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2\,(n-k)^2} = v_n.$$

La série $\sum z_k$ étant absolument convergente, le théorème du produit de Cauchy s'applique de nouveau : la série $\sum v_n$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z_k\right)^2 = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 = \frac{\pi^4}{36}.$$

Comme $v_0 = 0$ et $v_1 = 0$ (la somme qui définit v_1 est vide), on a également $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \frac{\pi^4}{36}$.

Correction de l'exercice 3.26 **Énoncé p. 6**

1. Posons $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. En multipliant par la quantité conjuguée :
$$a_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$
Sous cette forme, la suite (a_n) est manifestement positive, décroissante (son dénominateur croît) et tend vers 0. Le théorème spécial des séries alternées s'applique : la série converge.
Elle ne converge pas absolument : $a_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, donc divergente. La série est semi-convergente.
2. Mettons $\sqrt{n}$ en facteur, de façon à faire apparaître une quantité qui tend vers 0 :
$$u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1\right).$$
Le développement limité $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$ en 0, appliqué à $x = \frac{(-1)^n}{n}$, donne :
$$u_n = \sqrt{n}\left(\frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$
La série $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge par le théorème spécial des séries alternées. Le reste est dominé par $\frac{1}{n^{3/2}}$, terme général d'une série de Riemann convergente à termes positifs : la série correspondante converge absolument. Somme de deux séries convergentes, la série $\sum u_n$ converge.
Là encore la convergence n'est pas absolue, puisque $|u_n| \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. Cette fois $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 moins vite, et il faut pousser le développement limité à l'ordre 2. De $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$ en 0, appliqué à $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, on tire, en utilisant $x^2 = \frac{1}{n}$:
$$u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}_{v_n} \underbrace{-\frac{1}{8n}}_{w_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{z_n}.$$
La série $\sum v_n$ converge par le théorème spécial des séries alternées, et la série $\sum z_n$ converge absolument par comparaison à $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$. En revanche $\sum w_n$ est, au facteur $-\frac{1}{8}$ près, la série harmonique : elle diverge.

Or $w_n = u_n - v_n - z_n$. Si la série $\sum u_n$ convergeait, alors $\sum w_n$ convergerait comme somme de trois séries convergentes, ce qui est faux. Donc la série $\sum u_n$ diverge.

Les termes généraux des questions 2 et 3 sont tous deux équivalents à $\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$, et pourtant les deux séries ne sont pas de même nature : c'est le terme d'ordre 2 qui décide.

Correction de l'exercice 3.27 **Énoncé p. 7**

1. Commençons par simplifier v_n. Pour tout $n \geq 1$:

$$\ln q_n = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln n - n\ln n + n,$$

car $\ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = n\ln n - n$. Donc :

$$v_n = \ln\left((n+1)!\right) - \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n + 1.$$

Or $\ln\left((n+1)!\right) - \ln(n!) = \ln(n+1)$, et $\ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) = -n\ln(n+1)$. Il reste :

$$v_n = -n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1 = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Posons maintenant $u = \frac{1}{n}$, qui tend vers 0. Le développement limité $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + O(u^4)$ donne :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Les termes en $\frac{1}{n}$ se compensent et $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, d'où :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad \text{donc} \qquad v_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

2. D'après la question précédente, $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$: il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que $|v_n| \leq \frac{M}{n^2}$ pour tout $n \geq n_0$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |v_n|$ converge, donc $\sum v_n$ converge.
3. La somme est télescopique : pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \ln q_n - \ln q_1.$$

Comme $\sum v_n$ converge, le membre de gauche admet une limite finie quand $n \to +\infty$. Donc $(\ln q_n)$ converge vers $\ell = \ln q_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$.

4. Par continuité de l'exponentielle, $q_n \to C := \mathrm{e}^{\ell}$, et $C > 0$ car l'exponentielle est strictement positive. Comme $q_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ et $C \neq 0$, cela s'écrit :

$$\boxed{n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

5. On a $W_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.
Pour tout n, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue et positive sur $[0, \pi/2]$, et n'est pas identiquement nulle : donc $W_n > 0$.
Enfin, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$: la suite est décroissante.

6. Écrivons $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) \cdot \sin(t)\,\mathrm{d}t$ et intégrons par parties avec $u(t) = \sin^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \sin(t)$, donc $v(t) = -\cos(t)$ et $u'(t) = (n+1)\sin^n(t)\cos(t)$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$:

$$W_{n+2} = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet est nul (en 0 car $\sin 0 = 0$, en $\pi/2$ car $\cos\frac{\pi}{2} = 0$). En écrivant $\cos^2 = 1 - \sin^2$:

$$W_{n+2} = (n+1)\,(W_n - W_{n+2}),$$

c'est-à-dire $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

7. Posons $a_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Alors :

$$a_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = a_n$$

d'après la question précédente. La suite (a_n) est donc constante, égale à $a_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

8. La suite (W_n) étant décroissante et à termes strictement positifs :

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Or $\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$. Par le théorème d'encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$.

9. De $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ on tire :

$$(n+1)W_n^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W_n}{W_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2},$$

d'où $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$. Comme $W_n > 0$:

$$\frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = \sqrt{\frac{W_n^2}{\frac{\pi}{2n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \qquad \text{donc} \qquad W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

10. Pour $n = 0$, le membre de droite vaut $\frac{0!}{1\cdot(0!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$.
Supposons la formule vraie au rang n. La question 6 appliquée à l'indice $2n$ donne $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n}$. Par ailleurs :

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)\,(2n)!}{4\cdot 2^{2n}(n+1)^2(n!)^2} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{4(n+1)^2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

En multipliant par $\frac{\pi}{2}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient bien $W_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

11. La partie I donne $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. En appliquant cet équivalent à la suite extraite d'indice $2n$:

$$(2n)! \sim C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \qquad \text{et} \qquad (n!)^2 \sim C^2 n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}.$$

En faisant le quotient (le dénominateur ne s'annule pas) :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{C\sqrt{2n}\cdot 2^{2n}n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{C^2 n\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{2n}}{C\sqrt{n}}.$$

12. D'une part, la question 10 s'écrit $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2^{2n+1}}$, donc d'après la question précédente :

$$W_{2n} \sim \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{2n}}{C\sqrt{n}}\cdot\frac{\pi}{2^{2n+1}} = \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}.$$

D'autre part, la partie II donne $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.
Le quotient de ces deux équivalents d'une même suite tend donc vers 1 :

$$\frac{\frac{\pi}{C\sqrt{2n}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}} = \frac{\pi}{C\sqrt{2}\sqrt{n}}\cdot\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{2\pi}{C\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{C}.$$

Ce quotient étant constant et de limite 1, il vaut 1, d'où $C = \sqrt{2\pi}$. En reportant dans la partie I :

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

Correction de l'exercice 3.28 **Énoncé p. 8**

1. Soit q tel que $\ell < q < 1$. En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = q - \ell > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, c'est-à-dire $u_n \leq q^n$ en élevant à la puissance n (licite car les deux membres sont positifs).
La série géométrique $\sum q^n$ converge, car $q \in [0, 1[$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
2. En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \ell - 1 > 0$, il existe un rang N tel que $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pour $n \geq N$, donc $u_n \geq 1$. Le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.
3. Rappelons d'abord que $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} \to 1$, car $\frac{\ln n}{n} \to 0$ par croissance comparée. Pour $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ et la série harmonique diverge. Pour $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1$ et la série converge. La valeur $\ell = 1$ est donc compatible avec les deux natures : on ne peut rien conclure.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$:

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq N$ que $u_n \leq u_N(\ell+\varepsilon)^{n-N}$. C'est vrai au rang N. Si c'est vrai au rang n, alors, les termes étant strictement positifs :

$$u_{n+1} \leq (\ell+\varepsilon)\,u_n \leq u_N(\ell+\varepsilon)^{n+1-N}.$$

En posant $B = \frac{u_N}{(\ell+\varepsilon)^N} > 0$, on obtient bien $u_n \leq B(\ell+\varepsilon)^n$ pour $n \geq N$.
Si de plus $\varepsilon < \ell$, alors $\ell - \varepsilon > 0$ et la même récurrence avec l'inégalité de gauche donne $u_n \geq A(\ell-\varepsilon)^n$ pour $n \geq N$, où $A = \frac{u_N}{(\ell-\varepsilon)^N} > 0$.

5. *Cas* $\ell > 0$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \ell$. Pour $n \geq N$, en élevant l'encadrement précédent à la puissance $\frac{1}{n}$, ce qui préserve l'ordre entre réels positifs :

$$\sqrt[n]{A}\,(\ell-\varepsilon) \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[n]{B}\,(\ell+\varepsilon).$$

Or $\sqrt[n]{A} = \mathrm{e}^{\frac{\ln A}{n}} \to 1$ et de même $\sqrt[n]{B} \to 1$. Il existe donc un rang $N' \geq N$ à partir duquel $\sqrt[n]{A}\,(\ell-\varepsilon) \geq \ell - 2\varepsilon$ et $\sqrt[n]{B}\,(\ell+\varepsilon) \leq \ell + 2\varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon.$$

Ceci valant pour tout ε assez petit, on a bien $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.
Cas $\ell = 0$. Seule la majoration subsiste : $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[n]{B}\,\varepsilon$, et le majorant est inférieur à 2ε à partir d'un certain rang. Donc $\sqrt[n]{u_n} \to 0$.

6. Dès que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite ℓ, la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ admet la même limite. Les deux règles concluent donc toujours simultanément, et dans le même sens : la règle de Cauchy s'applique chaque fois que celle de d'Alembert s'applique.
7. On a $u_n > 0$ et :

$$\sqrt[n]{u_n} = 2^{\frac{-n+(-1)^n}{n}} = 2^{-1+\frac{(-1)^n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

car $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ et $x \mapsto 2^x$ est continue. La limite $\frac{1}{2}$ étant strictement inférieure à 1, la partie I donne la **convergence** de $\sum u_n$.
8. On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{\left(-(n+1)+(-1)^{n+1}\right)-\left(-n+(-1)^n\right)} = 2^{-1-2(-1)^n}.$$

Si n est pair, ce rapport vaut $2^{-3} = \frac{1}{8}$; si n est impair, il vaut $2^1 = 2$. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ prend alternativement deux valeurs distinctes : elle n'a pas de limite, et la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.
La réciproque de la partie II est donc fausse : il existe des séries que la règle de Cauchy traite et que la règle de d'Alembert ne traite pas.

Correction de l'exercice 3.29

Énoncé p. 8

1. Par définition de C_n puis de c_j :

$$C_n = \sum_{j=0}^{n} c_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}.$$

On somme $a_k b_{j-k}$ sur le triangle $\left\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq k \leq j \leq n\right\}$. En échangeant l'ordre de sommation, c'est-à-dire en décrivant ce triangle à k fixé, j variant de k à n :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=k}^{n} b_{j-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{n-k} b_i = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k},$$

le changement d'indice étant $i = j-k$. Toutes les sommes sont finies : l'échange est licite.

2. En écrivant $B_{n-k} = B + \beta_{n-k}$ et par linéarité :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(B + \beta_{n-k}) = B\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} a_k\beta_{n-k} = A_nB + \sum_{k=0}^{n} a_k\beta_{n-k}.$$

3. Par hypothèse $B_n \to B$, donc $\beta_n = B_n - B \to 0$. Toute suite convergente étant bornée, (β_n) est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $|\beta_n| \leq M$ pour tout n.

4. L'existence de P est la traduction de $\beta_p \to 0$ appliquée à ε. Soit $n \geq P$. Coupons la somme en deux selon que $n-k \geq P$ ou non, c'est-à-dire selon que $k \leq n-P$ ou $k \geq n-P+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\beta_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-P} a_k\beta_{n-k} + \sum_{k=n-P+1}^{n} a_k\beta_{n-k}.$$

Dans la première somme, $n-k \geq P$, donc $|\beta_{n-k}| \leq \varepsilon$; dans la seconde, on majore par M. L'inégalité triangulaire donne :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\beta_{n-k}\right| \leq \varepsilon\sum_{k=0}^{n-P}|a_k| + M\sum_{k=n-P+1}^{n}|a_k| \leq \alpha\,\varepsilon + M\sum_{k=n-P+1}^{n}|a_k|,$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-P}|a_k| \leq \alpha$, la série $\sum|a_k|$ étant à termes positifs et convergente de somme α.

5. La somme comporte P termes, tous d'indices supérieurs à $n-P+1$:

$$0 \leq \sum_{k=n-P+1}^{n}|a_k| \leq \sum_{k=n-P+1}^{+\infty}|a_k|.$$

Le membre de droite est le reste d'ordre $n-P$ de la série convergente $\sum|a_k|$. À P fixé, $n-P+1 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, et les restes d'une série convergente tendent vers 0. Par encadrement, $\displaystyle\sum_{k=n-P+1}^{n}|a_k| \to 0$.

6. Soit $\varepsilon > 0$, et soit P le rang de la question 4. D'après la question 5, il existe un rang $N \geq P$ tel que, pour tout $n \geq N$:

$$M\sum_{k=n-P+1}^{n}|a_k| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geq N$:

$$|C_n - A_nB| \leq (\alpha+1)\,\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire et que $\alpha+1$ ne dépend pas de ε, on en déduit $C_n - A_nB \to 0$.

Or $A_n \to A$, donc $A_nB \to AB$, et par somme $C_n = (C_n - A_nB) + A_nB \to AB$. Autrement dit, la série $\sum c_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

7. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge par le théorème spécial des séries alternées, mais la série des valeurs absolues est $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, donc divergente : aucune des deux séries n'est absolument convergente.
L'hypothèse du théorème n'est donc pas satisfaite, et la conclusion tombe effectivement en défaut : le terme général du produit de Cauchy s'écrit $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$, et chacun des $n+1$ termes de la somme est minoré par $\frac{1}{n+1}$, donc $|c_n| \geq 1$ et le produit de Cauchy diverge grossièrement (voir l'exemple du cours). Dans le théorème de Mertens, on ne peut donc pas remplacer « l'une des deux séries est absolument convergente » par « les deux séries sont convergentes ».