

4

Compléments d'algèbre linéaire

Exercices

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 4.4 Un plan et une droite de $\mathbb{R}^3$
  - 4.1 Sous-espaces stables et blocs
  - 4.27 Puissances par blocs
  - 4.2 Interpolation de Lagrange
- **Piste rouge**
  - 4.14 La relation $u^3 = u$
  - 4.26 Noyau et image en somme directe
  - 4.30 Inverse triangulaire par blocs
  - 4.46 Inverse d'une matrice de Vandermonde
- **Piste bleue**
  - 4.18 Stabilité et opérations
  - 4.15 Les symétries
  - 4.35 Trace, transposée et similitude
  - 4.16 Une décomposition de $\mathbb{R}_n[X]$
- **Piste noire**
  - 4.20 Sous-espaces stables par dérivation
  - 4.38 Une caractérisation de la trace
  - 4.25 Hyperplans stables (CCP 2014)
  - 4.50 Projecteurs de somme l'identité

Exercice 4.1 ○ Correction p. 22

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.
3. Justifier que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u, puis écrire la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition.
4. En déduire $\operatorname{tr}(u)$ et vérifier le résultat sur A.

Exercice 4.2 ○ Correction p. 23

1. Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(2) = 1$, $P(3) = 4$.
2. Calculer les polynômes de Lagrange associés aux points $0, 1, 2$ et en déduire le polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(0) = 2$, $Q(1) = 1$, $Q(2) = 4$.

Exercice 4.3 ○ Correction p. 23

1. Calculer le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, 3)$.
2. Calculer $V(1, 2, 3, 4)$.
3. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.4 ○ Correction p. 24

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad D = \text{Vect}(v), \text{ où } v = (1, 2, 3).$$

1. Montrer que P est un plan, puis que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Décomposer $e_1 = (1, 0, 0)$ sur cette somme directe.
3. Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition.
4. Soit p la projection sur P parallèlement à D. Écrire la matrice de p dans $\mathcal{B}$, puis dans la base canonique.
5. Vérifier sur ces deux matrices que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Exercice 4.5 • Correction p. 24

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *graphe* de f la partie

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subset E \times F.$$

1. Montrer que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ et déterminer sa dimension.
2. Montrer que $E \times F = \Gamma_f \oplus (\{0_E\} \times F)$.
3. Déterminer $\Gamma_f \cap (E \times \{0_F\})$ et en déduire une caractérisation de l'injectivité de f.

Exercice 4.6 •• Correction p. 25

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On considère l'application

$$\varphi : F \times G \to E, \qquad (x, y) \mapsto x + y.$$

1. Montrer que φ est linéaire et déterminer son image.
2. Montrer que $x \mapsto (x, -x)$ réalise un isomorphisme de $F \cap G$ sur $\text{Ker}\,\varphi$.
3. En appliquant le théorème du rang à φ, démontrer la *formule de Grassmann* :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

4. Retrouver le fait que la somme $F + G$ est directe si et seulement si $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Exercice 4.7 • Correction p. 26

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$. On note S l'ensemble des suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'application $\Psi : S \to \mathbb{K}^p$, $u \mapsto (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$ est un isomorphisme. En déduire $\dim S = p$.
3. On prend $p = 3$ et la relation $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$. Vérifier que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à S, puis en déduire l'expression du terme général de la suite de S définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 5$.

Exercice 4.8 • Correction p. 27

Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et soient p_1 et p_2 les deux projections de $E_1 \times E_2$ sur E_1 et E_2.

1. Soient F_1 un sous-espace vectoriel de E_1 et F_2 un sous-espace vectoriel de E_2. Montrer que $F_1 \times F_2$ est un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$ et donner sa dimension.
2. La réciproque est-elle vraie ? Autrement dit, tout sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$ est-il de la forme $F_1 \times F_2$? On pourra considérer la droite $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Soit G un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$. Montrer que $G \subset p_1(G) \times p_2(G)$, et que G est un produit de sous-espaces si et seulement si $G = p_1(G) \times p_2(G)$.

Exercice 4.9 •• Correction p. 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $-(n-1) \leq k \leq n-1$, on note $\mathcal{D}_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices élémentaires $E_{i,j}$ telles que $j - i = k$: c'est l'espace des matrices dont tous les coefficients sont nuls en dehors de la k-ième diagonale.

1. Décrire $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_{n-1}$ et $\mathcal{D}_{-(n-1)}$, puis montrer que $\dim \mathcal{D}_k = n - |k|$.
2. Montrer que
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_{-(n-1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_{n-1}.$$
3. Vérifier la cohérence des dimensions, c'est-à-dire $\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n - |k|) = n^2$.

Exercice 4.10 •• Correction p. 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reprend les notations de l'exercice précédent : pour $-(n-1) \leq k \leq n-1$, $\mathcal{D}_k$ désigne le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les $E_{i,j}$ tels que $j - i = k$, et

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_{-(n-1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_{n-1}.$$

Soit $t \in \mathbb{K}$ non nul. On note Δ la matrice diagonale dont le i-ième coefficient diagonal vaut t^{i-1} :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & t & & \\ & & \ddots & \\ & & & t^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & \Delta M \Delta^{-1}. \end{array}$$

1. Justifier que Δ est inversible et que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Calculer $f(E_{i,j})$. En déduire que chaque $\mathcal{D}_k$ est stable par f, et identifier l'endomorphisme induit $f|_{\mathcal{D}_k}$.
3. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition.
4. En déduire $\operatorname{tr}(f)$ et $\det(f)$ en fonction de n et t.
5. Expliciter le cas $n = 2$ dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$.

Exercice 4.11 •• Correction p. 29

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$.
2. Montrer que cette inclusion peut être stricte, à l'aide de trois droites bien choisies de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que si $G \subset H$, alors il y a égalité :
$$(F + G) \cap H = (F \cap H) + G.$$

Exercice 4.12 • Correction p. 29

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que $E = F_1 \oplus F_2$, et soit G un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que la somme $(G \cap F_1) + (G \cap F_2)$ est directe et contenue dans G.
2. A-t-on toujours $G = (G \cap F_1) \oplus (G \cap F_2)$? On pourra considérer $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$, où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ désignent les matrices symétriques et antisymétriques, avec $G = \mathrm{Vect}(E_{1,2})$.
3. Montrer qu'il y a égalité dès que $F_1 \subset G$.

Exercice 4.13 •• Correction p. 30

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que les deux sommes $E_1 + \cdots + E_n$ et $F_1 + \cdots + F_n$ soient directes et vérifient

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad E_i \subset F_i, \qquad \text{et} \qquad \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

1. Comparer $\dim E_i$ et $\dim F_i$.
2. Montrer que $E_i = F_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 4.14 •• Correction p. 30

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note

$$N_0 = \mathrm{Ker}\, u, \qquad N_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E), \qquad N_{-1} = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E).$$

1. Soient $x \in N_0$, $y \in N_1$ et $z \in N_{-1}$. Calculer u^2 et u^3 en chacun de ces trois vecteurs.
2. En déduire que si $E = N_0 \oplus N_1 \oplus N_{-1}$, alors $u^3 = u$.
3. On suppose désormais $u^3 = u$. Montrer que la somme $N_0 + N_1 + N_{-1}$ est directe.
4. Vérifier que tout $x \in E$ s'écrit

$$x = \left(x - u^2(x)\right) + \frac{u^2(x) + u(x)}{2} + \frac{u^2(x) - u(x)}{2},$$

puis conclure.

Exercice 4.15 • Correction p. 31

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. On pose

$$F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

1. Vérifier que, pour tout $x \in E$,

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2},$$

puis en déduire que $E = F \oplus G$.
2. Montrer que F et G sont stables par s, et identifier les endomorphismes induits $s|_F$ et $s|_G$.
3. En déduire que la matrice de s dans une base adaptée à cette décomposition est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}, \qquad \text{où } p = \dim F \text{ et } q = \dim G.$$

4. Calculer $\mathrm{tr}(s)$ et $\det(s)$ en fonction de p et q. En déduire p et q à partir des seuls n et $\mathrm{tr}(s)$.

5. Montrer que $\frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur, d'image F et de noyau G.
6. Application : soit $m \in \mathbb{N}^*$. On prend $E = \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $s : M \mapsto M^\top$. Déterminer F, G, puis $\mathrm{tr}(s)$ et $\det(s)$.

Exercice 4.16 • Correction p. 32

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$F_i = \{P \in E \mid \forall j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}.$$

1. Montrer que F_i est un sous-espace vectoriel de E.
2. On note $(L_0, \dots, L_n)$ les polynômes de Lagrange associés aux points $0, 1, \dots, n$. Montrer que $F_i = \mathrm{Vect}(L_i)$.
3. En déduire que $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exercice 4.17 •• Correction p. 33

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ une décomposition en somme directe. Pour $x \in E$, de décomposition $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_i \in F_i$, et pour $i \in \{1, \dots, k\}$, on pose $p_i(x) = x_i$.

1. Justifier que p_i est bien définie et que $p_i \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}\, p_i$ et $\mathrm{Ker}\, p_i$.
3. Montrer que $p_i \circ p_i = p_i$, que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$, et que $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E$.
4. Écrire la matrice de p_i dans une base adaptée à la décomposition. En déduire $\mathrm{tr}(p_i) = \dim F_i$, puis retrouver $\dim F_1 + \cdots + \dim F_k = \dim E$.
5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u stabilise tous les F_i si et seulement si u commute avec tous les p_i.

Exercice 4.18 ○ Correction p. 34

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose F et G stables par u. Montrer que $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par u.
2. On suppose F stable par u et par v. Montrer que F est stable par $u \circ v$ et par $\lambda u + \mu v$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
3. En déduire que si F est stable par u, alors F est stable par u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis par $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$, pour tous $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$.

Exercice 4.19 • Correction p. 34

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u|_F) = F \cap \mathrm{Ker}\, u$ et que $\mathrm{Im}(u|_F) = u(F)$.
2. Montrer que si u est un projecteur, alors $u|_F$ est un projecteur de F, et que si $u \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors $u|_F$ vérifie $u|_F \circ u|_F = \mathrm{Id}_F$.
3. Soient G un supplémentaire de F dans E et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ une base adaptée à $E = F \oplus G$. En écrivant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, montrer que
$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(u|_F) + \mathrm{tr}(D) \qquad \text{et} \qquad \det(u) = \det(u|_F) \cdot \det(D).$$
4. On suppose de plus G stable par u. Montrer que D est la matrice de $u|_G$, et que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u|_F) + \mathrm{rg}(u|_G)$.

5. Montrer sur un exemple que, si G n'est pas stable, l'égalité $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(D)$ peut être fausse.

Exercice 4.20 ●● Correction p. 35

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $D : P \mapsto P'$ l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}_n[X]$. On se propose de déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ stables par D.

1. Vérifier que $\{0\}$ et les $\mathbb{K}_k[X]$, pour $0 \leq k \leq n$, sont stables par D.
2. Soit F un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ stable par D. Justifier l'existence de $k = \max\{\deg P \mid P \in F,\ P \neq 0\}$, et montrer que $F \subset \mathbb{K}_k[X]$.
3. Soit $P \in F$ de degré k. Montrer que la famille $\left(P, P', \ldots, P^{(k)}\right)$ est une base de $\mathbb{K}_k[X]$.
4. Conclure.

Exercice 4.21 ●● Correction p. 36

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un automorphisme de E et F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $u(F) = F$, puis que F est stable par u^{-1}.
2. On considère maintenant $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'endomorphisme $u : f \mapsto (x \mapsto f(x-1))$ et
$$F = \{f \in E \mid \forall x \leq 0,\ f(x) = 0\}.$$
Vérifier que u est un automorphisme de E, que F est un sous-espace vectoriel stable par u, mais qu'il n'est pas stable par u^{-1}.
3. Où l'argument de la première question échoue-t-il sur cet exemple ?

Exercice 4.22 ●● Correction p. 36

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par *tout* endomorphisme de E.

1. On suppose $F \neq \{0\}$ et on fixe $x \in F$ non nul. Soit $y \in E$. Construire $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(x) = y$.
2. En déduire que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les endomorphismes de E sont $\{0\}$ et E.
3. Qu'obtient-on si l'on n'impose la stabilité que par les *automorphismes* de E ?

Exercice 4.23 ● Correction p. 37

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^2 = -\mathrm{Id}_E$. Soit $x \in E$ non nul.

1. Montrer que $u(x)$ n'est pas colinéaire à x, puis qu'aucune droite vectorielle de E n'est stable par u.
2. Montrer que le plan $\operatorname{Vect}(x, u(x))$ est stable par u.

Exercice 4.24 ●● Correction p. 37

Soient α, β, γ trois réels non tous nuls,
$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\right\}$$
et φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice A dans la base canonique, et soit $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\dim H = 2$.

2. On suppose dans cette question que H est stable par u.
   (a) Montrer que $\varphi \circ u$ est une forme linéaire dont le noyau contient H.
   (b) Soit (e_1, e_2) une base de H, complétée par e_3 en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Donner l'allure des matrices de φ et de $\varphi \circ u$ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base (1) de $\mathbb{R}$ à l'arrivée.
   (c) Justifier que $\varphi(e_3) \neq 0$, puis en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ u = \lambda\varphi$.
3. Réciproquement, montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ u = \lambda\varphi$, alors H est stable par u.
4. En déduire que H est stable par u si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^\top X = \lambda X$.
5. Caractériser de même les droites vectorielles stables par u.

Exercice 4.25 ●●● Correction p. 38

CCP 2014.
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, H un *hyperplan* de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que H est stable par u si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Im}(u + \lambda \operatorname{Id}_E) \subset H$.
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
dans la base canonique.

Exercice 4.26 ●● Correction p. 39

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ et $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$, puis que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.
2. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.
3. Montrer l'équivalence des trois conditions :
$$\text{(i) } \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}, \qquad \text{(ii) } \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u, \qquad \text{(iii) } \operatorname{rg} u^2 = \operatorname{rg} u.$$
4. On suppose ces conditions vérifiées. Montrer que la matrice de u dans une base adaptée à $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } B \text{ inversible.}$$
5. Les endomorphismes de $\mathbb{K}^2$ de matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
vérifient-ils ces conditions ?
6. Montrer que si u est un projecteur, les conditions sont vérifiées, et retrouver la décomposition de l'exemple du cours.

Exercice 4.27 ○ Correction p. 40

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que M est inversible et donner M^{-1}.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $N = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$N^k = 2^{k-1} \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k \end{pmatrix}.$$
3. La matrice N est-elle inversible ?

Exercice 4.28 • Correction p. 40

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, et
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

1. Écrire $M^\top$ par blocs.
2. Montrer que M est symétrique si et seulement si A et D le sont et $C = B^\top$. En déduire la dimension de l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$, et vérifier qu'on retrouve $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$.
3. Caractériser de même les matrices antisymétriques.
4. Soit $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & N \\ -N^\top & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique, et calculer sa trace.
5. Soit M une matrice triangulaire inférieure par blocs. Retrouver par transposition que $\det M$ est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Exercice 4.29 • Correction p. 41

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r \leq n$. On pose
$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$
le bloc nul en bas à droite étant de taille $(n-r) \times (n-r)$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, découpée en blocs selon le même partage : $M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$. Calculer $J_r M$ et $M J_r$.
2. En déduire que M commute avec J_r si et seulement si M est diagonale par blocs selon ce découpage.
3. Quelle est la dimension du commutant $C(J_r) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MJ_r = J_r M\}$?
4. Retrouver le résultat de la question 2 à l'aide de la proposition du cours sur la stabilité par un endomorphisme qui commute.

Exercice 4.30 •• Correction p. 42

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C le sont.

2. On suppose A et C inversibles. En cherchant M^{-1} sous la forme $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, découpée selon le même partage, montrer que
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$
3. Appliquer ce résultat à
$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Exercice 4.31 ●● Correction p. 43

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose
$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$
1. Traiter le cas $n = 1$.
2. Dans le cas général, montrer qu'en échangeant convenablement les lignes de M on obtient la matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, et compter le nombre d'échanges nécessaires. En déduire
$$\det M = (-1)^{n^2} \det A \cdot \det B.$$
3. Retrouver ainsi le contre-exemple de la remarque du cours, où $A = B = I_2$.
4. On prend $B = I_n$, c'est-à-dire $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible si et seulement si A l'est, puis calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.32 ● Correction p. 44

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose
$$P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$
1. Montrer que
$$P = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$
2. Calculer le déterminant du premier facteur, en effectuant des opérations sur les lignes.
3. En déduire $\det P$.

Exercice 4.33 ●● Correction p. 44

Adapté de E3A 2018.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et
$$M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$
1. Vérifier que
$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ 0 & A + I_n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $\det M = \det(A - I_n)\det(A + I_n)$.
3. Montrer que M est inversible si et seulement si $A - I_n$ et $A + I_n$ le sont.

Exercice 4.34 ●● Correction p. 45

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose
$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0_{n,1} & T \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$M^k = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LT^{k-1} \\ \hline 0_{n,1} & T^k \end{array}\right).$$
2. En déduire, par récurrence sur n, que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle vérifie $M^n = 0_n$.

Exercice 4.35 ● Correction p. 45

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même rang.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et $A^\top$ ont même trace, même déterminant et même rang.
3. Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même trace, même déterminant et même rang. Sont-elles semblables ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à $2A$. Montrer que $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont même trace, mais qu'elles ne sont pas nécessairement semblables.
6. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(M)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que vaut A ?

Exercice 4.36 ● Correction p. 46

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer $\operatorname{tr}\left(AE_{j,i}\right)$.
2. En déduire que si $\operatorname{tr}(AB) = 0$ pour toute $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A = 0$.
3. On suppose maintenant seulement que $\operatorname{tr}(AB) = 0$ pour toute matrice B *de trace nulle*. Montrer que A est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme λI_n.
4. Montrer que l'application $\Psi : A \mapsto (M \mapsto \operatorname{tr}(AM))$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right)$. En déduire que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 4.37 ●● Correction p. 47

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixées. On considère les applications

$$\Phi : M \mapsto AM \qquad \text{et} \qquad \Psi : M \mapsto AMB,$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.

1. Vérifier que Φ et Ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quelle est la taille de leurs matrices dans la base canonique ?

2. Calculer $AE_{i,j}B$ en fonction des coefficients de A et de B, puis en déduire $\operatorname{tr}(\Psi) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.
3. En déduire $\operatorname{tr}(\Phi) = n\operatorname{tr}(A)$. Vérifier ce résultat pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
4. Que vaut $\operatorname{tr}(\Psi)$ lorsque A et B sont deux projecteurs de rangs respectifs r et s ?

Exercice 4.38 ● ● ● Correction p. 48

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(AB) = f(BA).$$

On se propose de montrer que f est proportionnelle à la trace. On rappelle que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

1. Montrer que $f(E_{i,j}) = 0$ dès que $i \neq j$.
2. Montrer que les n scalaires $f(E_{1,1}), \dots, f(E_{n,n})$ sont tous égaux ; on note λ leur valeur commune.
3. Conclure que $f = \lambda \operatorname{tr}$.
4. Quelles sont les formes linéaires f vérifiant l'hypothèse ci-dessus et de plus $f(I_n) = 1$?

Exercice 4.39 ● Correction p. 49

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 4.40 ● ● Correction p. 49

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad M \mapsto -M + \operatorname{tr}(M)\, A.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose $\operatorname{tr}(A) \neq 1$. Montrer que f est bijective.
3. On suppose désormais $\operatorname{tr}(A) = 1$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$, puis montrer que $\operatorname{Im} f = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$.
4. Toujours avec $\operatorname{tr}(A) = 1$, résoudre l'équation $f(X) = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donnée.

Exercice 4.41 ● ● Correction p. 50

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts, $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ les polynômes de Lagrange associés, et

$$A = \prod_{j=0}^{n} (X - a_j).$$

1. Montrer que, pour tout i,

$$A'(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j).$$

En particulier, $A'(a_i) \neq 0$.

2. En déduire la forme compacte
$$L_i = \frac{1}{A'(a_i)} \cdot \frac{A}{X - a_i}.$$
3. On suppose $n \geq 1$. En comparant les coefficients dominants dans la relation $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$ du cours, montrer que
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{A'(a_i)} = 0.$$
4. Vérifier ce dernier résultat sur les points 0, 1, 2.

Exercice 4.42 ●● Correction p. 51

Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts, (L_i) les polynômes de Lagrange associés et $A = \prod_{j=0}^{n}(X - a_j)$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ *quelconque*, on pose
$$\mathcal{I}(P) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\, L_i.$$
1. Montrer que $P - \mathcal{I}(P)$ est divisible par A.
2. En déduire que $\mathcal{I}(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i^{n+1} L_i$.
4. Application : avec $n = 2$ et les points 0, 1, 2, calculer $\sum_{i=0}^{2} a_i^3 L_i$ et vérifier le résultat en trois points.

Exercice 4.43 ●● Correction p. 52

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant
$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(k) = 2^k.$$
On se propose de calculer $P(n+1)$.
1. Traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$.
2. Soient $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ les polynômes de Lagrange associés aux points $0, 1, \ldots, n$. Montrer que
$$L_k(n+1) = (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k}.$$
3. En déduire $P(n+1) = 2^{n+1} - 1$.

Exercice 4.44 ● Correction p. 53

CCP PC 2014.
Soient $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_d$ des rationnels deux à deux distincts et $P \in \mathbb{C}_d[X]$ tel que $P(a_k) \in \mathbb{Q}$ pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 4.45 ●● Correction p. 53

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_d$ des réels deux à deux distincts. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$, la suite numérique $(P_n(a_i))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; on note ℓ_i sa limite.
1. En notant $(L_0, \ldots, L_d)$ les polynômes de Lagrange associés aux points $a_0, \ldots, a_d$, exprimer P_n en fonction des L_i.

2. On pose $P = \sum_{i=0}^{d} \ell_i L_i$. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, le coefficient de X^k dans P_n converge vers le coefficient de X^k dans P.

Exercice 4.46 ●● Correction p. 53

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $V = V(a_0, \dots, a_n)$ la matrice de Vandermonde associée et (L_i) les polynômes de Lagrange associés aux mêmes points. On note

$$\Phi \colon \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}, \qquad P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) .$$

1. Justifier que Φ est un isomorphisme et que V est sa matrice dans les bases canoniques.
2. Montrer que, pour tout i, la i-ième colonne de V^{-1} est formée des coefficients de L_i dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
3. Application : calculer V^{-1} pour les points -1, 0, 2.

Exercice 4.47 ●●● Correction p. 54

Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. On pose

$$\Delta(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Il manque la colonne des carrés : ce déterminant est *lacunaire*. On le calcule de deux façons.

1. Calculer $\Delta(1, 2, 3)$ et $\Delta(2, -1, 5)$.
2. **Première méthode.** Soit X une indéterminée.
   (a) Écrire $\det V(a_1, a_2, a_3, X)$ de deux façons : par le théorème du cours, puis en développant par rapport à la dernière ligne.
   (b) En identifiant les coefficients de X^2, en déduire
   $$\Delta(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (a_j - a_i).$$
3. **Seconde méthode.** Soit $P = X^3 + \beta X + \gamma$ un polynôme unitaire de degré 3 sans terme en X^2.
   (a) Montrer qu'en remplaçant la troisième colonne du déterminant $\Delta(a_1, a_2, a_3)$ par la colonne des $P(a_i)$, on ne change pas sa valeur.
   (b) Déterminer $t \in \mathbb{K}$ pour que le polynôme $(X - a_1)(X - a_2)(X - t)$ soit sans terme en X^2.
   (c) Retrouver la formule de la première méthode.
4. À quelle condition la matrice associée est-elle inversible ?

Exercice 4.48 ●● Correction p. 56

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$,

$$A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que J est une matrice de Vandermonde, puis qu'elle est inversible.
2. Calculer AJ, en déduire $\det(AJ)$, puis $\det A$.

Exercice 4.49 ●● Correction p. 56

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z_0, z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.

1. Écrire $(X + z_i)^n$ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que le déterminant de la famille $((X + z_0)^n, \ldots, (X + z_n)^n)$ dans cette base vaut, au signe près,
$$\left(\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right) \prod_{0 \leq i < l \leq n} (z_l - z_i).$$
3. En déduire que cette famille est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.



4 Compléments d'algèbre linéaire

★ Pour aller plus loin

Exercice 4.50 ● ● ● Correction p. 57

Une famille de projecteurs qui somme à l'identité.
On appelle *projecteur* d'un espace vectoriel E tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. Une décomposition de E en somme directe en fournit toute une famille, dont la somme vaut Id_E : c'est l'objet de la **partie I**. La **partie II** établit la réciproque, à savoir qu'une famille de projecteurs de somme Id_E provient toujours d'une décomposition, et la **partie III** en tire deux conséquences.
Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et k un entier naturel non nul.

Partie I — Le sens direct

On suppose dans cette partie que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$. Pour $x \in E$, de décomposition $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_i \in F_i$, et pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, on pose $p_i(x) = x_i$.

1. Vérifier que chaque p_i est un projecteur de E, d'image F_i, et que $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E$.

Partie II — La réciproque

On se donne maintenant des projecteurs $p_1, \ldots, p_k$ de E tels que

$$p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E,$$

sans rien supposer d'autre.

2. Montrer que $\mathrm{rg}(p_i) = \mathrm{tr}(p_i)$ pour tout i.
3. En déduire que $\mathrm{rg}(p_1) + \cdots + \mathrm{rg}(p_k) = n$.
4. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 + \cdots + \mathrm{Im}\, p_k$.
5. En déduire que cette somme est directe.
6. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$.
7. Conclure que p_i est le projecteur associé à la décomposition $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, p_k$ au sens de la partie I, puis écrire la matrice de p_i dans une base adaptée à cette décomposition.

Partie III — Deux conséquences

8. On suppose tous les p_i de rang 1. Montrer que $k = n$, puis que le choix d'un vecteur non nul dans chaque $\mathrm{Im}\, p_i$ fournit une base de E.
9. Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$, et qu'alors $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Exercice 4.51 ★ Correction p. 58

Le complément de Schur.
Ce problème part d'une matrice découpée en quatre blocs. La **partie I** en donne une factorisation, d'où l'on tire son déterminant et son inverse. La **partie II** en déduit l'identité

de Sylvester, qui compare $\det(I_p + UV)$ et $\det(I_q + VU)$. La **partie III** donne la formule de Sherman–Morrison, qui inverse une perturbation de rang 1. Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie I — La factorisation

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *inversible*, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S = D - CA^{-1}B,$$

la matrice $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ étant appelée *complément de Schur* de A dans M.

1. Vérifier l'identité
$$M = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ CA^{-1} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $\det M = \det A \cdot \det S$.
3. En déduire également que M est inversible si et seulement si S l'est.
4. Dans cette question seulement, on suppose D inversible au lieu de A, et l'on pose $T = A - BD^{-1}C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, le complément de Schur de D dans M. Établir l'identité
$$M = \begin{pmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ D^{-1}C & I_q \end{pmatrix},$$
puis en déduire que $\det M = \det D \cdot \det T$.
5. On suppose M inversible. En inversant la factorisation de la question 1, montrer que
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}.$$
6. Application : calculer le déterminant de
$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Partie II — L'identité de Sylvester

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $U \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} I_p & -U \\ V & I_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K}).$$

7. Calculer le complément de Schur de I_p dans M, puis en déduire, à l'aide de la question 2, que $\det M = \det(I_q + VU)$.
8. Calculer le complément de Schur de I_q dans M, puis en déduire, à l'aide de la question 4, que $\det M = \det(I_p + UV)$.
9. En déduire l'*identité de Sylvester* :
$$\det(I_p + UV) = \det(I_q + VU).$$
10. On suppose $p = q$: montrer que $\det(UV) = \det(VU)$. Montrer en revanche que si $p < q$, la matrice VU n'est jamais inversible, et donner un exemple où $\det(UV) \neq \det(VU)$.

11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Déduire de la question 9 que
$$\det\left(I_n + xy^\top\right) = 1 + y^\top x,$$
la matrice $y^\top x$, de taille 1×1, étant identifiée au scalaire qu'elle contient.
12. Application : soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Calculer $\det(I_n + J)$.

Partie III — La formule de Sherman–Morrison

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible* et $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose
$$M = \begin{pmatrix} A & -x \\ y^\top & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad s = 1 + y^\top A^{-1} x \in \mathbb{K},$$
les matrices de taille 1×1 étant là encore identifiées à des scalaires.

13. Montrer que s est le complément de Schur de A dans M, puis que M est inversible si et seulement si $s \neq 0$.
14. On suppose désormais $s \neq 0$. Montrer que le complément de Schur du bloc (1) dans M est $A + xy^\top$, et en déduire que cette matrice est inversible.
15. En inversant la factorisation de la question 4, montrer que le bloc supérieur gauche de M^{-1} vaut $(A + xy^\top)^{-1}$. En le comparant à celui que donne la question 5, établir la *formule de Sherman–Morrison* :
$$\left(A + xy^\top\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} x y^\top A^{-1}}{s}.$$
16. Vérifier la formule pour $n = 2$, $A = I_2$, $x = e_1$ et $y = e_2$, où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
17. Application : soient $a \in \mathbb{K}$ tel que $a \neq 1$ et $a \neq 1 - n$, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, sauf ceux de la diagonale, qui valent a. Calculer B^{-1}.

Exercice 4.52 ●● Correction p. 62

La relation de commutation $AB - BA = I$.

Ce problème prolonge l'exercice 4.39, où l'on a montré que la relation $AB - BA = I_n$ ne peut pas être vérifiée par deux matrices carrées. La **partie I** étudie la variante où le membre de droite est A au lieu de I_n. La **partie II** réalise la relation initiale sur $\mathbb{K}[X]$, où la dimension n'est plus finie.

Partie I — En dimension finie

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Montrer par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad A^k B - BA^k = kA^k.$$
2. En déduire que $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que A n'est pas inversible.
4. Que peut-on dire si l'on suppose seulement $AB - BA = \lambda A$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul ?

Partie II — En dimension infinie

On travaille sur $E = \mathbb{K}[X]$ et l'on pose, pour $P \in E$,
$$D(P) = P' \qquad \text{et} \qquad M(P) = XP.$$
5. Vérifier que D et M sont des endomorphismes de E, et que
$$D \circ M - M \circ D = \mathrm{Id}_E\,.$$

6. Montrer que $D \circ M^k - M^k \circ D = k\,M^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
7. Justifier que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie, et expliquer en quoi cela lève la contradiction avec l'exercice 4.39.
8. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie et stable à la fois par D et par M. Que donne l'exercice 4.39 appliqué aux endomorphismes induits par D et M sur F ? Retrouver ce résultat directement, en considérant un polynôme non nul de F de degré maximal.

Remarque (En mécanique quantique)

L'état d'une particule est décrit par une *fonction d'onde* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Sa position est représentée par un *opérateur*, c'est-à-dire un endomorphisme de l'espace des fonctions d'onde : l'opérateur $\hat{x}$ défini par $\hat{x}(\psi)(x) = x\,\psi(x)$. Sa quantité de mouvement est représentée par l'opérateur $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. La relation de commutation étudiée ici est, au facteur $\mathrm{i}\hbar$ près, celle qui relie $\hat{x}$ et $\hat{p}$: l'exercice 4.39 interdit de la réaliser en dimension finie.

Exercice 4.53 ● ● ● Correction p. 64

L'interpolation d'Hermite.
L'interpolation de Lagrange impose à un polynôme ses valeurs en des points deux à deux distincts. On impose ici, en chaque point, la valeur *et* la dérivée. La **partie I** établit l'existence et l'unicité de la solution, la **partie II** en construit une base, et la **partie III** montre que ce problème est la limite du problème de Lagrange lorsque deux points se rapprochent.
Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}$, les scalaires $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts, $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ désigne la famille des polynômes de Lagrange associés, et

$$A = \prod_{i=0}^{n}(X - a_i).$$

Partie I — Existence et unicité

On considère l'application

$$\Phi : \mathbb{K}_{2n+1}[X] \to \mathbb{K}^{2n+2}, \qquad P \mapsto \left(P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n)\right).$$

1. Montrer que Φ est linéaire, et comparer les dimensions de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée.
2. Montrer que $P \in \operatorname{Ker}\Phi$ si et seulement si chaque a_i est racine de P de multiplicité au moins 2, c'est-à-dire si et seulement si A^2 divise P.
3. En déduire, par un argument de degré, que $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, puis que Φ est un isomorphisme.
4. Énoncer le résultat obtenu : pour toutes familles $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(\beta_i)_{0\leq i\leq n}$ de scalaires, il existe un unique polynôme P vérifiant certaines conditions, que l'on précisera.

Partie II — La base d'Hermite

Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$H_i = \left(1 - 2L_i'(a_i)(X - a_i)\right) L_i^2 \qquad \text{et} \qquad K_i = (X - a_i)L_i^2.$$

5. Vérifier que H_i et K_i appartiennent à $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$, puis calculer $H_i(a_j)$, $H_i'(a_j)$, $K_i(a_j)$ et $K_i'(a_j)$ pour tout j.

6. En déduire que la famille $(H_0, K_0, \dots, H_n, K_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$, et que le polynôme de la question 4 s'écrit
$$P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i + \sum_{i=0}^{n} \beta_i K_i.$$
7. Soit $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux valeurs α_i. Montrer que le polynôme d'Hermite associé aux données α_i et $\beta_i = \Lambda'(a_i)$ est égal à Λ.

Partie III — Le cas de deux points confondus

8. Traiter le cas $n = 0$: montrer que le polynôme de la question 4 est $P = \alpha_0 + \beta_0(X - a_0)$.
9. Déterminer $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$, $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$.
10. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon \in \mathbb{K}$ non nul. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points 0 et ε et aux valeurs α et $\alpha + \varepsilon\beta$, puis étudier sa limite lorsque ε tend vers 0 (on prendra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Interpréter.

Exercice 4.54 • • • Correction p. 65

Les matrices circulantes.
Une matrice circulante est une matrice dont chaque ligne se déduit de la précédente par un décalage circulaire. La **partie I** montre que ces matrices sont exactement les polynômes en une seule d'entre elles, la **partie II** en calcule le déterminant à l'aide d'une matrice de Vandermonde, et la **partie III** exhibe une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à toutes les circulantes à la fois.
Soient $n \geq 2$ un entier et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. Pour $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut a_{j-i}, l'indice étant pris modulo n :
$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$
On note C_n l'ensemble de ces matrices, dites *circulantes*, et
$$\Omega = C(0, 1, 0, \dots, 0).$$

Partie I — Les polynômes en Ω

1. Calculer Ω^k pour $k \in \mathbb{N}$, et montrer que $\Omega^n = I_n$.
2. Montrer que $C(a_0, \dots, a_{n-1}) = P(\Omega)$, où $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.
3. En déduire que C_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n, stable par produit, et que deux matrices circulantes commutent toujours.

Partie II — Le déterminant

Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on pose
$$v_k = \begin{pmatrix} 1 & \omega^k & \omega^{2k} & \cdots & \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}).$$
On fixe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, et l'on note C et P la matrice circulante et le polynôme associés comme en question 2.

4. Montrer que $\Omega\, v_k = \omega^k v_k$, puis que $C\, v_k = P(\omega^k)\, v_k$.

5. Soit V la matrice dont les colonnes sont $v_0, \dots, v_{n-1}$. Reconnaître une matrice de Vandermonde et justifier qu'elle est inversible.
6. En déduire que
$$CV = V \operatorname{diag}\left(P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1})\right) \qquad \text{puis} \qquad \det C = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$
7. Montrer que C est inversible si et seulement si P et $X^n - 1$ n'ont aucune racine commune.

Partie III — Une base adaptée commune

8. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \operatorname{Vect}(v_0) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Vect}(v_{n-1})$, et que chacune de ces droites est stable par toute matrice circulante.
9. En déduire que la matrice, dans la base $(v_0, \dots, v_{n-1})$, de l'endomorphisme canoniquement associé à une circulante C est diagonale, de coefficients diagonaux les $P(\omega^k)$.
10. Application : calculer le déterminant de la circulante associée au polynôme $P = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$, puis celui de $C(1, 2, 3, 4)$.

Exercice 4.55 ••• Correction p. 67

Le déterminant de Cauchy.
Le déterminant de Vandermonde se calcule par récurrence, en faisant apparaître les différences $a_j - a_i$. On mène ici le même travail sur une autre matrice célèbre, dont la matrice de Hilbert est un cas particulier.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des scalaires tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tous i et j. On pose
$$C_n = \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad D_n = \det C_n.$$

1. Calculer D_1, puis D_2.
2. On suppose $n \geq 2$. Dans C_n, on effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Montrer que le coefficient d'indice (i, j) de la matrice obtenue vaut
$$\frac{a_n - a_i}{(a_i + b_j)(a_n + b_j)}$$
pour $i \leq n - 1$, la dernière ligne étant inchangée.
3. En factorisant $\frac{1}{a_n + b_j}$ sur chaque colonne puis $a_n - a_i$ sur chaque ligne d'indice $i \leq n-1$, montrer que
$$D_n = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_n + b_j} \cdot \det M,$$
où M est la matrice de coefficient d'indice (i, j) égal à $\frac{1}{a_i + b_j}$ pour $i \leq n - 1$, et dont la dernière ligne est formée de 1.
4. Opérer de même sur les colonnes de M : montrer que
$$\det M = \prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i + b_n} \cdot D_{n-1}.$$

5. En déduire par récurrence que

$$D_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}.$$

6. Application : la *matrice de Hilbert* d'ordre n est $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Justifier que c'est un cas particulier de C_n, donner $\det H_n$, et calculer $\det H_3$.



4

Compléments d'algèbre linéaire

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 4.1 **Énoncé p. 1**

1. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $u(x, y, z) = (x + y - 2z,\ y - z,\ 0)$. Le système $y - z = 0$ et $x + y - 2z = 0$ donne $y = z$ puis $x = z$, donc

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}\left((1, 1, 1)\right).$$

En particulier $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, et le théorème du rang donne $\operatorname{rg} u = 2$. Les deux premières colonnes de A, à savoir $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$, sont non colinéaires ; elles forment donc une base de l'image et

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \left\{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. Les dimensions se somment bien : $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Il suffit donc de vérifier que l'intersection est réduite au vecteur nul. Un vecteur de $\operatorname{Ker} u$ s'écrit $\lambda(1, 1, 1)$; il appartient à $\operatorname{Im} u$ si et seulement si sa troisième coordonnée λ est nulle. Ainsi $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$ et

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

3. Le noyau et l'image d'un endomorphisme sont toujours stables par cet endomorphisme. On peut le revérifier directement : u est nulle sur $\operatorname{Ker} u$, et $u(e_1) = (1, 0, 0)$, $u(e_2) = (1, 1, 0)$ sont bien dans $\operatorname{Im} u$.
Posons $f_3 = (1, 1, 1)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition, en commençant par $\operatorname{Im} u$. On calcule $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(f_3) = 0$, d'où

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Elle est diagonale par blocs, comme annoncé par le théorème du cours : le bloc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme induit $u|_{\operatorname{Im} u}$ dans la base (e_1, e_2), et le bloc nul celle de $u|_{\operatorname{Ker} u}$.

4. Les matrices A et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ représentent le même endomorphisme : elles sont semblables, donc de même trace. Sur la matrice diagonale par blocs, la trace est la somme des traces des blocs : $\operatorname{tr}(u) = (1 + 1) + 0 = 2$. On retrouve bien $\operatorname{tr}(A) = 1 + 1 + 0 = 2$.

Correction de l'exercice 4.2 **Énoncé p. 1**

1. Les polynômes de Lagrange associés à 0, 1, 2, 3 sont :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{6},$$

$$L_1 = \frac{X(X-2)(X-3)}{(1)(1-2)(1-3)} = \frac{X(X-2)(X-3)}{2},$$

$$L_2 = \frac{X(X-1)(X-3)}{(2)(2-1)(2-3)} = -\frac{X(X-1)(X-3)}{2},$$

$$L_3 = \frac{X(X-1)(X-2)}{(3)(3-1)(3-2)} = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}.$$

Donc $P = 1 \cdot L_0 + 0 \cdot L_1 + 1 \cdot L_2 + 4 \cdot L_3$. Après développement et simplification :

$$P = -\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{6} - \frac{X(X-1)(X-3)}{2} + \frac{4X(X-1)(X-2)}{6}.$$

En développant : $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
Vérification : $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(2) = 1$, $P(3) = 4$.

2. Les polynômes de Lagrange associés à 0, 1, 2 sont :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(X-1)(X-2)}{2},$$

$$L_1 = \frac{X(X-2)}{(1-0)(1-2)} = -X(X-2),$$

$$L_2 = \frac{X(X-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{X(X-1)}{2}.$$

Donc $Q = 2L_0 + L_1 + 4L_2 = (X-1)(X-2) - X(X-2) + 2X(X-1)$. En développant :

$$Q = (X^2 - 3X + 2) - (X^2 - 2X) + (2X^2 - 2X) = 2X^2 - 3X + 2.$$

Vérification : $Q(0) = 2$, $Q(1) = 2 - 3 + 2 = 1$, $Q(2) = 8 - 6 + 2 = 4$.

Correction de l'exercice 4.3 **Énoncé p. 1**

1. Par la formule de Vandermonde :

$$\det V(1,2,3) = (2-1)(3-1)(3-2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

2. De même :

$$\det V(1,2,3,4) = (2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3) = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12.$$

3. La matrice M est la matrice de Vandermonde $V(1, a, a^2)$, donc

$$\det M = (a-1)(a^2-1)(a^2-a) = (a-1) \cdot (a-1)(a+1) \cdot a(a-1) = a(a-1)^3(a+1).$$

La matrice est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$, c'est-à-dire $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

Correction de l'exercice 4.4 **Énoncé p. 2**

1. Notons $s(x,y,z) = x+y+z$: c'est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$, et $P = \operatorname{Ker} s$ est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un plan.
   On a $s(v) = 1+2+3 = 6 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$; posons $t = \frac{s(x)}{6}$. Alors
   $$s(x - tv) = s(x) - t\,s(v) = s(x) - s(x) = 0,$$
   donc $x - tv \in P$ et $x = (x - tv) + tv \in P + D$. Ainsi $\mathbb{R}^3 = P + D$. Si de plus $x \in P \cap D$, alors $x = \lambda v$ et $0 = s(x) = 6\lambda$, donc $\lambda = 0$ et $x = 0$. La somme est directe :
   $$\mathbb{R}^3 = P \oplus D.$$
2. Avec $x = e_1$, on a $s(e_1) = 1$, donc $t = \frac{1}{6}$ et
   $$e_1 = \left(e_1 - \frac{1}{6}v\right) + \frac{1}{6}v = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}(1,2,3),$$
   le premier vecteur étant dans P (la somme de ses coordonnées est bien nulle) et le second dans D.
3. Les vecteurs $f_1 = (1,-1,0)$ et $f_2 = (0,1,-1)$ appartiennent à P et ne sont pas colinéaires : comme $\dim P = 2$, la famille (f_1, f_2) est une base de P. En lui concaténant la base (v) de D, on obtient une base adaptée :
   $$\mathcal{B} = (f_1, f_2, v).$$
4. Par définition de la projection, $p(f_1) = f_1$, $p(f_2) = f_2$ et $p(v) = 0$, d'où
   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Dans la base canonique, la question 1 donne $p(x) = x - \frac{s(x)}{6}v$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. En particulier
   $$p(e_1) = e_1 - \frac{1}{6}v, \qquad p(e_2) = e_2 - \frac{1}{6}v, \qquad p(e_3) = e_3 - \frac{1}{6}v,$$
   puisque $s(e_1) = s(e_2) = s(e_3) = 1$. En rangeant ces trois vecteurs en colonnes,
   $$\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
5. Le rang de p vaut $\dim \operatorname{Im} p = \dim P = 2$. La première matrice a pour trace $1+1+0 = 2$, et la seconde $\frac{5+4+3}{6} = \frac{12}{6} = 2$. Les deux matrices représentent le même endomorphisme, donc sont semblables ; la trace d'un projecteur est son rang (exemple du cours sur la trace d'un projecteur), ce qui donne bien la valeur commune $\operatorname{rg}(p) = 2$.

Correction de l'exercice 4.5 **Énoncé p. 2**

1. Considérons l'application
   $$\gamma : E \to E \times F, \qquad x \mapsto (x, f(x)).$$

Elle est linéaire : pour $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda x + x') &= (\lambda x + x',\ f(\lambda x + x')) \\ &= (\lambda x + x',\ \lambda f(x) + f(x')) = \lambda\gamma(x) + \gamma(x'),\end{aligned}$$

les opérations sur $E \times F$ étant définies composante par composante. Or $\Gamma_f = \operatorname{Im}\gamma$: c'est donc un sous-espace vectoriel de $E \times F$.
De plus γ est injective, car $\gamma(x) = 0$ impose déjà $x = 0$ en regardant la première composante. Ainsi γ induit un isomorphisme de E sur Γ_f, et

$$\dim \Gamma_f = \dim E.$$

2. *L'intersection est nulle.* Soit $(x, y) \in \Gamma_f \cap (\{0_E\} \times F)$. Comme $(x, y) \in \Gamma_f$, on a $y = f(x)$; comme $(x, y) \in \{0_E\} \times F$, on a $x = 0_E$. Alors $y = f(0_E) = 0_F$ et $(x, y) = (0_E, 0_F)$.
   Les dimensions se somment. On a $\dim \Gamma_f = \dim E$ d'après la question précédente, et $\dim(\{0_E\} \times F) = \dim F$. Leur somme vaut $\dim E + \dim F = \dim(E \times F)$. La somme est donc directe et égale à $E \times F$ tout entier :

$$E \times F = \Gamma_f \oplus (\{0_E\} \times F)\,.$$

3. Un couple (x, y) appartient à cette intersection si et seulement si $y = f(x)$ et $y = 0_F$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y = 0_F$. Autrement dit

$$\Gamma_f \cap (E \times \{0_F\}) = \operatorname{Ker} f \times \{0_F\}\,.$$

   Ce sous-espace est de dimension $\dim \operatorname{Ker} f$; il est donc réduit au vecteur nul si et seulement si f est injective. Géométriquement : f est injective si et seulement si son graphe ne rencontre le « sol » $E \times \{0_F\}$ qu'à l'origine.

Correction de l'exercice 4.6 **Énoncé p. 2**

1. Soient $(x, y), (x', y') \in F \times G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les lois de $F \times G$ étant définies composante par composante,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda(x, y) + (x', y')\right) &= \varphi(\lambda x + x',\ \lambda y + y') = \lambda x + x' + \lambda y + y' \\ &= \lambda(x + y) + (x' + y') = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y'),\end{aligned}$$

   donc φ est linéaire. Son image est

$$\operatorname{Im}\varphi = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\} = F + G,$$

   par définition même de la somme de deux sous-espaces.
2. Déterminons d'abord le noyau. Un couple $(x, y) \in F \times G$ vérifie $\varphi(x, y) = 0$ si et seulement si $y = -x$. La condition $y \in G$ s'écrit alors $-x \in G$, c'est-à-dire $x \in G$ puisque G est un sous-espace vectoriel. Ainsi

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{(x, -x) \mid x \in F \cap G\}\,.$$

   Posons maintenant $\psi : F \cap G \to F \times G$, $x \mapsto (x, -x)$. Elle est linéaire (chaque composante l'est), et injective car $\psi(x) = 0$ impose $x = 0$. D'après le calcul précédent, son image est exactement $\operatorname{Ker}\varphi$. C'est donc un isomorphisme de $F \cap G$ sur $\operatorname{Ker}\varphi$, et en particulier

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim(F \cap G).$$

3. L'espace $F \times G$ est de dimension finie $\dim F + \dim G$. Le théorème du rang appliqué à φ donne

$$\dim(F \times G) = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{rg} \varphi,$$

soit, avec les deux questions précédentes,

$$\dim F + \dim G = \dim(F \cap G) + \dim(F + G).$$

C'est la formule annoncée.

4. La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $\dim(F \cap G) = 0$. Vu la formule de Grassmann, cela équivaut à $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.
On peut aussi le lire directement sur φ : la somme est directe si et seulement si φ est injective, c'est-à-dire si et seulement si tout vecteur de $F + G$ s'écrit d'une unique façon $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Correction de l'exercice 4.7 **Énoncé p. 2**

1. La suite nulle appartient à S. Si $u, v \in S$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, les opérations sur les suites étant définies terme à terme,

$$(\lambda u + v)_{n+p} = \lambda u_{n+p} + v_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k \, (\lambda u_{n+k} + v_{n+k}) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k (\lambda u + v)_{n+k},$$

donc $\lambda u + v \in S$. Ainsi S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. L'application Ψ est linéaire, puisque chacune de ses composantes $u \mapsto u_k$ l'est.
Injectivité. Soit $u \in \operatorname{Ker} \Psi$, c'est-à-dire $u_0 = \cdots = u_{p-1} = 0$. Montrons par récurrence forte que $u_n = 0$ pour tout n. C'est vrai pour $n \leq p - 1$; et si $u_0 = \cdots = u_{n+p-1} = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence donne $u_{n+p} = 0$. Donc $u = 0$.
Surjectivité. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$. La suite u définie par $u_k = \alpha_k$ pour $k \leq p-1$ et par la relation de récurrence pour $n \geq p$ est bien définie, appartient à S et vérifie $\Psi(u) = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1})$.
Ainsi Ψ est un isomorphisme de S sur $\mathbb{K}^p$, et $\dim S = \dim \mathbb{K}^p = p$.

3. Pour la suite constante égale à $1 : 2+1-2 = 1$. Pour $(2^n) : 2 \cdot 2^{n+2} + 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = (8 + 2 - 2)2^n = 8 \cdot 2^n = 2^{n+3}$. Pour $((-1)^n) : 2(-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} - 2(-1)^n = (2 - 1 - 2)(-1)^n = -(-1)^n = (-1)^{n+3}$. Les trois suites sont donc dans S.
Leurs images par Ψ sont $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 4)$ et $(1, -1, 1)$. Ces trois vecteurs de $\mathbb{K}^3$ sont libres : c'est un déterminant de Vandermonde en $1, 2, -1$, qui vaut $(2 - 1)(-1 - 1)(-1 - 2) = 6 \neq 0$. Comme Ψ est un isomorphisme, les trois suites forment une famille libre de S, donc une base puisque $\dim S = 3$.
Cherchons alors u sous la forme $u_n = \lambda + \mu \, 2^n + \nu \, (-1)^n$. Les conditions initiales s'écrivent

$$\lambda + \mu + \nu = 0, \qquad \lambda + 2\mu - \nu = 1, \qquad \lambda + 4\mu + \nu = 5.$$

La différence des troisième et première équations donne $3\mu = 5$, soit $\mu = \frac{5}{3}$. Il reste $\lambda + \nu = -\frac{5}{3}$ et $\lambda - \nu = -\frac{7}{3}$, d'où $\lambda = -2$ et $\nu = \frac{1}{3}$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2 + \frac{5 \cdot 2^n + (-1)^n}{3} = \frac{5 \cdot 2^n + (-1)^n - 6}{3}.$$

Vérification : $u_0 = \frac{5+1-6}{3} = 0$, $u_1 = \frac{10-1-6}{3} = 1$ et $u_2 = \frac{20+1-6}{3} = 5$.

Correction de l'exercice 4.8 **Énoncé p. 3**

1. Le couple $(0,0)$ appartient à $F_1 \times F_2$. Si $(x,y), (x',y') \in F_1 \times F_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda(x,y) + (x',y') = (\lambda x + x',\ \lambda y + y'),$$

dont la première composante est dans F_1 et la seconde dans F_2, car F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels. Donc $F_1 \times F_2$ est un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$, et la dimension d'un produit donne

$$\dim(F_1 \times F_2) = \dim F_1 + \dim F_2.$$

2. Non. La droite Δ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (c'est Vect $((1,1))$). Supposons $\Delta = F_1 \times F_2$ avec F_1, F_2 sous-espaces de $\mathbb{R}$. Comme $(1,1) \in \Delta$, on a $1 \in F_1$ et $1 \in F_2$, donc $F_1 = F_2 = \mathbb{R}$ et $F_1 \times F_2 = \mathbb{R}^2$. Or $(1,0) \notin \Delta$: contradiction.
Autrement dit, un sous-espace d'un produit n'est pas en général un produit de sous-espaces : les deux composantes peuvent être liées.

3. *L'inclusion.* Soit $(x_1,x_2) \in G$. Alors $x_1 = p_1(x_1,x_2) \in p_1(G)$ et $x_2 = p_2(x_1,x_2) \in p_2(G)$, donc $(x_1,x_2) \in p_1(G) \times p_2(G)$. Remarquons au passage que $p_1(G)$ et $p_2(G)$ sont bien des sous-espaces vectoriels, comme images du sous-espace G par des applications linéaires.
L'équivalence. Si $G = p_1(G) \times p_2(G)$, alors G est bien un produit de sous-espaces. Réciproquement, supposons $G = F_1 \times F_2$. Pour tout $x \in F_1$, on a $(x,0) \in G$ car $0 \in F_2$, donc $x \in p_1(G)$; l'inclusion réciproque étant claire, $p_1(G) = F_1$. De même $p_2(G) = F_2$, et donc $G = F_1 \times F_2 = p_1(G) \times p_2(G)$.
Sur l'exemple de la question précédente : $p_1(\Delta) = p_2(\Delta) = \mathbb{R}$, et Δ est strictement contenue dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4.9 **Énoncé p. 3**

1. L'espace $\mathcal{D}_0$ est celui des matrices diagonales. À l'autre extrémité, $\mathcal{D}_{n-1} = \text{Vect}(E_{1,n})$ et $\mathcal{D}_{-(n-1)} = \text{Vect}(E_{n,1})$ sont deux droites, engendrées par les deux coins de la matrice.
Fixons $k \geq 0$. Les couples (i,j) avec $1 \leq i,j \leq n$ et $j - i = k$ sont exactement les $(i, i+k)$ pour $1 \leq i \leq n-k$: il y en a $n-k$. Les matrices élémentaires correspondantes forment une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc une famille libre ; elles engendrent $\mathcal{D}_k$ par définition. Ainsi $\dim \mathcal{D}_k = n-k$.
Le cas $k \leq 0$ est symétrique, en échangeant les rôles de i et j, et l'on obtient dans les deux cas

$$\dim \mathcal{D}_k = n - |k|\,.$$

2. La base canonique $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se partitionne selon la valeur de $j-i$, qui est un entier compris entre $-(n-1)$ et $n-1$: chaque matrice élémentaire appartient à un paquet et un seul, celui d'indice $k = j - i$. Le k-ième paquet engendre précisément $\mathcal{D}_k$.
Si l'on découpe une base en paquets, l'espace est la somme directe des sous-espaces engendrés par les paquets (construction inverse vue dans le cours, partitionner une base). La somme des $\mathcal{D}_k$ est donc directe et vaut $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=-(n-1)}^{n-1} \mathcal{D}_k.$$

Concrètement, décomposer une matrice revient à la découper en diagonales, ce qui se fait bien d'une unique façon.

Notons que la décomposition comporte $2n-1$ termes : pour $n=3$, par exemple, sept sous-espaces.

3. Séparons le terme $k=0$ et regroupons k et $-k$:

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|) = n + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n + 2\sum_{m=1}^{n-1} m$$
$$= n + 2\cdot\frac{n(n-1)}{2} = n + n(n-1) = n^2,$$

où l'on a posé $m = n-k$. On retrouve bien $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.

Correction de l'exercice 4.10 **Énoncé p. 3**

1. La matrice Δ est diagonale à coefficients diagonaux $1, t, \dots, t^{n-1}$, tous non nuls puisque $t \neq 0$: elle est inversible, et son inverse est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, t^{-1}, \dots, t^{-(n-1)}$.

   L'application f est linéaire, car le produit matriciel l'est en la variable centrale. Elle est bijective, de réciproque $M \mapsto \Delta^{-1}M\Delta$: c'est donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Notons $\delta_1, \dots, \delta_n$ les coefficients diagonaux de Δ, de sorte que $\delta_i = t^{i-1}$. Multiplier une matrice à gauche par Δ revient à multiplier sa i-ième ligne par δ_i, pour tout i ; la multiplier à droite par Δ^{-1} revient à diviser sa j-ième colonne par δ_j, pour tout j. Sur la matrice $E_{i,j}$, dont le seul coefficient non nul est en position (i,j), cela donne

$$f(E_{i,j}) = \frac{\delta_i}{\delta_j}E_{i,j} = t^{i-j}E_{i,j}.$$

   Soit k fixé. Les matrices $E_{i,j}$ avec $j-i=k$ engendrent $\mathcal{D}_k$ et sont toutes envoyées sur $t^{-k}E_{i,j}$: par linéarité, $f(M) = t^{-k}M$ pour tout $M \in \mathcal{D}_k$. En particulier $\mathcal{D}_k$ est stable par f, et

$$f|_{\mathcal{D}_k} = t^{-k}\,\mathrm{Id}_{\mathcal{D}_k}.$$

3. Tous les $\mathcal{D}_k$ étant stables, la matrice de f dans une base adaptée est diagonale par blocs, le bloc d'indice k étant celui de $f|_{\mathcal{D}_k}$, c'est-à-dire $t^{-k}I_{n-|k|}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} t^{n-1}I_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & t^{-(n-1)}I_1 \end{pmatrix},$$

   les blocs étant rangés dans l'ordre $k = -(n-1), \dots, n-1$. Cette matrice est en fait diagonale : elle compte $2n-1$ blocs, dont le bloc central I_n correspond à $\mathcal{D}_0$.

4. La trace se lit sur les blocs diagonaux, et le déterminant est leur produit :

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)\,t^{-k}, \qquad \det(f) = \prod_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(t^{-k}\right)^{n-|k|}.$$

Dans le produit, l'exposant total de t vaut $-\sum_k k\,(n-|k|)$; les termes d'indices k et $-k$ s'y annulent deux à deux, et le terme $k=0$ est nul. Donc $\det(f)=1$.

On peut aussi calculer la trace sans passer par les blocs : la base canonique $(E_{i,j})$ est formée de vecteurs vérifiant $f(E_{i,j})=t^{i-j}E_{i,j}$, donc la matrice de f y est déjà diagonale, de coefficients t^{i-j}, et $\operatorname{tr}(f)=\sum_{i,j} t^{i-j}$.

5. Pour $n=2$, on a $f(E_{1,1})=E_{1,1}$, $f(E_{2,2})=E_{2,2}$, $f(E_{1,2})=t^{-1}E_{1,2}$ et $f(E_{2,1})=t\,E_{2,1}$. La base proposée est adaptée à $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})=\mathcal{D}_0\oplus\mathcal{D}_{-1}\oplus\mathcal{D}_1$ à l'ordre des facteurs près, et
$$\operatorname{Mat}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&t^{-1}&0\\0&0&0&t\end{pmatrix}.$$
On retrouve $\operatorname{tr}(f)=2+t+t^{-1}$ et $\det(f)=1$.

Correction de l'exercice 4.11

Énoncé p. 3

1. Soit $z\in(F\cap H)+(G\cap H)$: il s'écrit $z=x+y$ avec $x\in F\cap H$ et $y\in G\cap H$. Alors $x\in F$ et $y\in G$, donc $z\in F+G$; et $x,y\in H$, donc $z\in H$ puisque H est un sous-espace vectoriel. Ainsi $z\in(F+G)\cap H$.
2. Prenons dans $\mathbb{R}^2$
$$F=\operatorname{Vect}((1,0)),\qquad G=\operatorname{Vect}((0,1)),\qquad H=\operatorname{Vect}((1,1)).$$
Ces trois droites sont deux à deux distinctes, donc d'intersections deux à deux réduites à $\{0\}$: le membre de gauche vaut $\{0\}$. En revanche $F+G=\mathbb{R}^2$, donc le membre de droite vaut H, qui est une droite.
L'inclusion est donc stricte : intersecter puis sommer n'est pas sommer puis intersecter.
3. Supposons $G\subset H$. Alors $G\cap H=G$, et l'inclusion de la première question s'écrit $(F\cap H)+G\subset(F+G)\cap H$.
Réciproquement, soit $z\in(F+G)\cap H$. Écrivons $z=x+y$ avec $x\in F$ et $y\in G$. Comme $y\in G\subset H$ et $z\in H$, on a
$$x=z-y\in H,$$
donc $x\in F\cap H$ et $z=x+y\in(F\cap H)+G$. D'où l'égalité annoncée.
C'est bien l'hypothèse $G\subset H$ qui fait fonctionner l'argument : dans le contre-exemple précédent, aucune des trois droites n'était contenue dans une autre.

Correction de l'exercice 4.12

Énoncé p. 4

1. Les deux sous-espaces $G\cap F_1$ et $G\cap F_2$ sont contenus dans G, donc leur somme aussi. Et
$$(G\cap F_1)\cap(G\cap F_2)\subset F_1\cap F_2=\{0\},$$
puisque la somme $F_1\oplus F_2$ est directe : la somme des deux intersections est donc directe.
2. Non. Avec la décomposition proposée, une matrice de G s'écrit $\lambda E_{1,2}$. Elle est symétrique si et seulement si $\lambda E_{1,2}=\lambda E_{2,1}$, donc si et seulement si $\lambda=0$; elle est antisymétrique si et seulement si $\lambda E_{1,2}=-\lambda E_{2,1}$, donc là encore si et

seulement si $\lambda = 0$. Ainsi

$$G \cap \mathcal{S} = G \cap \mathcal{A} = \{0\},$$

et la somme des deux intersections est nulle alors que G est une droite.

L'image géométrique est la même dans $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$ avec G la première bissectrice : une droite oblique ne rencontre aucun des deux axes ailleurs qu'à l'origine, et elle n'est pourtant pas nulle.

3. Supposons $F_1 \subset G$; alors $G \cap F_1 = F_1$ et il s'agit de montrer $G = F_1 \oplus (G \cap F_2)$. La somme est directe d'après la première question, et contenue dans G. Réciproquement, soit $z \in G$. Comme $E = F_1 \oplus F_2$, on peut écrire $z = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Alors

$$x_2 = z - x_1 \in G,$$

car $z \in G$ et $x_1 \in F_1 \subset G$. Donc $x_2 \in G \cap F_2$ et $z \in F_1 + (G \cap F_2)$.

On peut aussi voir ce résultat comme un cas particulier de l'exercice précédent, appliqué à $H = G$: on a $G = (F_1 + F_2) \cap G$, et l'hypothèse $F_1 \subset G$ permet d'y faire sortir F_1.

Correction de l'exercice 4.13 **Énoncé p. 4**

1. L'inclusion $E_i \subset F_i$ donne $\dim E_i \leq \dim F_i$: pour tout i, l'entier $\dim F_i - \dim E_i$ est positif ou nul.
2. Les deux sommes sont directes, donc la dimension de chacune est la somme des dimensions des sous-espaces (proposition du cours sur la dimension d'une somme) :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \qquad \text{et} \qquad \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

Les deux sous-espaces sont égaux, donc ont même dimension, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} (\dim F_i - \dim E_i) = 0.$$

C'est une somme d'entiers positifs ou nuls : ils sont tous nuls. Ainsi $\dim E_i = \dim F_i$ pour tout i, et comme $E_i \subset F_i$ avec égalité des dimensions, on conclut $E_i = F_i$.

Correction de l'exercice 4.14 **Énoncé p. 4**

1. Si $x \in N_0$, alors $u(x) = 0_E$, donc $u^2(x) = 0_E$ et $u^3(x) = 0_E = u(x)$.
   Si $y \in N_1$, alors $u(y) = y$, donc $u^2(y) = u(y) = y$ et $u^3(y) = y = u(y)$.
   Si $z \in N_{-1}$, alors $u(z) = -z$, donc $u^2(z) = -u(z) = z$ et $u^3(z) = u(z) = -z$.
   Dans les trois cas, u^3 et u coïncident sur le vecteur.
2. Soit $x \in E$. La décomposition donne $x = x_0 + x_1 + x_{-1}$ avec $x_0 \in N_0$, $x_1 \in N_1$ et $x_{-1} \in N_{-1}$. Par linéarité de u^3 et de u, et d'après la question précédente :

$$u^3(x) = u^3(x_0) + u^3(x_1) + u^3(x_{-1}) = u(x_0) + u(x_1) + u(x_{-1}) = u(x).$$

Ceci valant pour tout x, on a bien $u^3 = u$.

3. Soient $x \in N_0$, $y \in N_1$ et $z \in N_{-1}$ tels que $x + y + z = 0_E$. En appliquant u, puis u^2, et en utilisant les calculs de la question 1 :

$$0_E + y - z = 0_E \qquad \text{et} \qquad 0_E + y + z = 0_E.$$

En additionnant, $2y = 0_E$, donc $y = 0_E$, puis $z = 0_E$ et enfin $x = 0_E$. La seule décomposition du vecteur nul est la décomposition nulle, donc la somme est directe (caractérisation d'une somme directe, dans le cours).

4. L'identité est immédiate : les deux fractions s'ajoutent en $u^2(x)$, qui se simplifie avec $-u^2(x)$. Posons

$$a = x - u^2(x), \qquad b = \frac{u^2(x) + u(x)}{2}, \qquad c = \frac{u^2(x) - u(x)}{2}.$$

Comme $u^3 = u$:

$$u(a) = u(x) - u^3(x) = 0_E,$$

donc $a \in N_0$;

$$u(b) = \frac{u^3(x) + u^2(x)}{2} = \frac{u(x) + u^2(x)}{2} = b,$$

donc $b \in N_1$; et

$$u(c) = \frac{u^3(x) - u^2(x)}{2} = \frac{u(x) - u^2(x)}{2} = -c,$$

donc $c \in N_{-1}$. Ainsi $E = N_0 + N_1 + N_{-1}$, et cette somme est directe d'après la question 3 :

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + \mathrm{Id}_E).$$

Avec la question 2, l'équivalence annoncée est démontrée.

Correction de l'exercice 4.15 **Énoncé p. 4**

1. L'identité est immédiate : les deux termes s'ajoutent en $\frac{2x}{2} = x$. Posons $x_+ = \frac{x+s(x)}{2}$ et $x_- = \frac{x-s(x)}{2}$. Comme $s \circ s = \mathrm{Id}_E$,

$$s(x_+) = \frac{s(x) + s^2(x)}{2} = \frac{s(x) + x}{2} = x_+, \qquad s(x_-) = \frac{s(x) - x}{2} = -x_-.$$

Donc $x_+ \in F$ et $x_- \in G$, ce qui montre $E = F + G$.
Soit maintenant $x \in F \cap G$. Alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$, donc $2x = 0$ et $x = 0$. La somme est directe : $E = F \oplus G$.

2. Si $x \in F$, alors $s(x) = x \in F$; si $x \in G$, alors $s(x) = -x \in G$. Les deux sous-espaces sont donc stables, et

$$s|_F = \mathrm{Id}_F, \qquad s|_G = -\mathrm{Id}_G\,.$$

3. Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ une base adaptée à $E = F \oplus G$. Les deux sous-espaces étant stables, la matrice de s est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant les matrices des endomorphismes induits, à savoir I_p et $-I_q$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

4. La trace et le déterminant se lisent sur cette matrice diagonale :
$$\operatorname{tr}(s) = p - q, \qquad \det(s) = (-1)^q.$$
Comme $p + q = n$, on obtient par somme et différence
$$p = \frac{n + \operatorname{tr}(s)}{2}, \qquad q = \frac{n - \operatorname{tr}(s)}{2}.$$
Les dimensions de F et de G se lisent donc sur la trace de n'importe quelle matrice de s, sans chercher de base adaptée.
5. Posons $\pi = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$. Alors
$$\pi \circ \pi = \frac{1}{4}\left(s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E\right) = \frac{1}{4}\left(2\,\mathrm{Id}_E + 2s\right) = \pi,$$
donc π est un projecteur. Avec les notations de la question 1, $\pi(x) = x_+$: l'image de π est donc contenue dans F, et $\pi(x) = x$ pour $x \in F$, d'où $\operatorname{Im}\pi = F$. Enfin $\pi(x) = 0$ équivaut à $s(x) = -x$, c'est-à-dire $x \in G$: $\operatorname{Ker}\pi = G$.
6. La transposition est linéaire et vérifie $(M^\top)^\top = M$, donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Ici $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des matrices symétriques et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ celui des matrices antisymétriques, et la question 1 redonne la décomposition
$$M = \frac{M + M^\top}{2} + \frac{M - M^\top}{2}.$$
On sait que $p = \frac{m(m+1)}{2}$ et $q = \frac{m(m-1)}{2}$. Donc
$$\operatorname{tr}(s) = p - q = m, \qquad \det(s) = (-1)^{m(m-1)/2}.$$
La décomposition $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}_0$ vue dans le cours en est un raffinement : elle coupe en deux le sous-espace F des matrices symétriques.

Correction de l'exercice 4.16 **Énoncé p. 5**

1. L'ensemble F_i est inclus dans E et contient le polynôme nul. Soient $P, Q \in F_i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $j \in \{0, \dots, n\} \setminus \{i\}$:
$$(P + \lambda Q)(j) = P(j) + \lambda Q(j) = 0,$$
donc $P + \lambda Q \in F_i$. C'est bien un sous-espace vectoriel.
2. Le polynôme L_i est de degré n et vérifie $L_i(j) = 0$ pour tout $j \neq i$: il appartient à F_i, donc $\operatorname{Vect}(L_i) \subset F_i$.
Réciproquement, soit $P \in F_i$. C'est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, donc sa décomposition dans la base de Lagrange s'écrit
$$P = \sum_{k=0}^{n} P(k)\, L_k = P(i)\, L_i,$$
puisque $P(k) = 0$ pour $k \neq i$. Donc $P \in \operatorname{Vect}(L_i)$ et l'égalité $F_i = \operatorname{Vect}(L_i)$ est établie.
3. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de E. Tout $P \in E$ s'écrit donc de manière unique $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire de manière unique comme une somme $\sum_{i=0}^n P_i$ avec $P_i \in \operatorname{Vect}(L_i) = F_i$. C'est exactement dire que
$$E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n.$$

Correction de l'exercice 4.17 **Énoncé p. 5**

1. La somme étant directe et égale à E, tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_j \in F_j$ d'une unique façon : la composante x_i ne dépend que de x, et p_i est bien définie.
   Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, de décompositions $x = \sum_j x_j$ et $y = \sum_j y_j$. Alors
   $$\lambda x + y = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda x_j + y_j\right),$$
   et $\lambda x_j + y_j \in F_j$ pour tout j : par unicité, c'est *la* décomposition de $\lambda x + y$. Sa i-ième composante est donc $\lambda x_i + y_i$, c'est-à-dire $p_i(\lambda x + y) = \lambda p_i(x) + p_i(y)$. Ainsi $p_i \in \mathcal{L}(E)$.
2. Par construction $p_i(x) = x_i \in F_i$, donc $\operatorname{Im} p_i \subset F_i$. Réciproquement, si $x \in F_i$, sa décomposition est $x = 0 + \cdots + x + \cdots + 0$, d'où $p_i(x) = x$: le sous-espace F_i est contenu dans l'image. Donc
   $$\operatorname{Im} p_i = F_i,$$
   et p_i est l'identité sur F_i.
   Par ailleurs $p_i(x) = 0$ signifie $x_i = 0$, c'est-à-dire que x est somme de ses autres composantes :
   $$\operatorname{Ker} p_i = \bigoplus_{j \neq i} F_j.$$
3. Soit $x \in E$. Comme $p_i(x) \in F_i$ et que p_i est l'identité sur F_i d'après la question précédente, $p_i\left(p_i(x)\right) = p_i(x)$: donc $p_i \circ p_i = p_i$, et p_i est un projecteur.
   Si $i \neq j$, alors $p_j(x) \in F_j \subset \operatorname{Ker} p_i$, donc $p_i\left(p_j(x)\right) = 0$ et $p_i \circ p_j = 0$.
   Enfin $p_1(x) + \cdots + p_k(x) = x_1 + \cdots + x_k = x$ par définition de la décomposition, d'où $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E$.
4. Notons $d_j = \dim F_j$ et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ une base adaptée. Chaque F_j est stable par p_i : c'est clair pour $j = i$, où p_i induit l'identité, et pour $j \neq i$ on a $F_j \subset \operatorname{Ker} p_i$, où p_i induit l'endomorphisme nul. La matrice est donc diagonale par blocs, tous les blocs étant nuls sauf le i-ième, égal à I_{d_i} :
   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_i) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{d_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$
   Sa trace vaut d_i, donc $\operatorname{tr}(p_i) = \dim F_i$. En sommant sur i et en utilisant la linéarité de la trace ainsi que $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E$:
   $$\sum_{i=1}^{k} \dim F_i = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) = \operatorname{tr}(\mathrm{Id}_E) = \dim E.$$
5. Supposons d'abord que u stabilise tous les F_j. Soit $x \in E$, de décomposition $x = x_1 + \cdots + x_k$. En appliquant u :
   $$u(x) = u(x_1) + \cdots + u(x_k),$$

avec $u(x_j) \in F_j$ par stabilité : c'est donc la décomposition de $u(x)$, et sa i-ième composante est $u(x_i)$. Autrement dit

$$p_i\left(u(x)\right) = u(x_i) = u\left(p_i(x)\right),$$

et u commute avec p_i.

Réciproquement, supposons $u \circ p_i = p_i \circ u$ pour tout i. Comme p_i commute avec u, l'image de p_i est stable par u (proposition du cours sur la stabilité par un endomorphisme qui commute). Or $\operatorname{Im} p_i = F_i$ d'après la question 2 : tous les F_i sont stables par u.

Correction de l'exercice 4.18 **Énoncé p. 5**

1. Soit $z \in F + G$: il s'écrit $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Par linéarité,

$$u(z) = u(x) + u(y) \in F + G,$$

puisque $u(x) \in F$ et $u(y) \in G$. Donc $F + G$ est stable.

Soit maintenant $x \in F \cap G$. Alors $u(x) \in F$ car F est stable, et $u(x) \in G$ car G l'est : donc $u(x) \in F \cap G$.

2. Soit $x \in F$. Alors $v(x) \in F$ par stabilité par v, puis $u\left(v(x)\right) \in F$ par stabilité par u : ainsi $(u \circ v)(x) \in F$.

De même, $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à F, donc

$$(\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) + \mu v(x) \in F,$$

car F est un sous-espace vectoriel.

3. Montrons par récurrence que F est stable par u^k. C'est vrai pour $k = 0$, car $u^0 = \mathrm{Id}_E$ laisse F en place. Et si F est stable par u^k, la première partie de la question précédente appliquée à u et u^k montre que F est stable par $u \circ u^k = u^{k+1}$.

Enfin, F est stable par chacun des u^k ; une récurrence sur p utilisant la seconde partie de la question précédente donne alors la stabilité par $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$.

Correction de l'exercice 4.19 **Énoncé p. 5**

1. L'endomorphisme induit $u|_F$ est l'application de F dans F qui à x associe $u(x)$; elle est bien définie puisque F est stable. Son noyau est l'ensemble des $x \in F$ tels que $u(x) = 0$, c'est-à-dire $F \cap \operatorname{Ker} u$. Son image est l'ensemble des $u(x)$ pour $x \in F$, c'est-à-dire $u(F)$.

2. Si $u \circ u = u$, alors pour $x \in F$ on a $u|_F\left(u|_F(x)\right) = u\left(u(x)\right) = u(x) = u|_F(x)$, donc $u|_F$ est un projecteur de F. Le même calcul avec $u \circ u = \mathrm{Id}_E$ donne $u|_F\left(u|_F(x)\right) = x$ pour tout $x \in F$.

Dans les deux cas, il n'y a rien à vérifier de plus : l'identité satisfaite par u sur E l'est en particulier sur F, et les deux membres restent dans F.

3. Le sous-espace F est stable par u et $\mathcal{B}$ est adaptée à $E = F \oplus G$: le bloc en bas à gauche de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est nul, et celui en haut à gauche est $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u|_F)$ (proposition du cours). La trace de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est la somme de ses coefficients

diagonaux, qui sont ceux de A suivis de ceux de D :

$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(u|_F) + \operatorname{tr}(D).$$

Quant au déterminant, la matrice est triangulaire par blocs, donc

$$\det(u) = \det(A) \cdot \det(D) = \det(u|_F) \cdot \det(D).$$

4. Si G est également stable, alors pour $x \in \mathcal{B}_G$ le vecteur $u(x)$ appartient à G : ses coordonnées sur $\mathcal{B}_F$ sont nulles, donc $C = 0$ et

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_G}(u|_G).$$

Le rang d'une matrice diagonale par blocs est la somme des rangs des blocs : une combinaison des colonnes est nulle si et seulement si la combinaison correspondante des colonnes de A et celle des colonnes de D le sont, les deux paquets de lignes étant disjoints. Donc

$$\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(D) = \operatorname{rg}(u|_F) + \operatorname{rg}(u|_G).$$

On peut aussi le voir sans matrices : $\operatorname{Im} u = u(F) \oplus u(G)$, puisque $u(F) \subset F$, $u(G) \subset G$ et $F \cap G = \{0\}$.

5. Prenons $E = \mathbb{K}^2$, $u(x, y) = (y, 0)$, $F = \operatorname{Vect}(e_1)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_2)$. Comme $u(e_1) = 0 \in F$, le sous-espace F est stable ; en revanche $u(e_2) = e_1 \notin G$, donc G ne l'est pas. Dans la base canonique,

$$\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = (0), \quad C = (1), \quad D = (0).$$

Ici $\operatorname{rg}(u) = 1$, tandis que $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(D) = 0$: tout le rang de u est porté par le bloc C.

Correction de l'exercice 4.20 **Énoncé p. 6**

1. Le sous-espace nul est stable par n'importe quel endomorphisme. Et si $P \in \mathbb{K}_k[X]$, alors $\deg P' \leq \deg P - 1 \leq k$, donc $P' \in \mathbb{K}_k[X]$: dériver ne peut que faire baisser le degré.
2. L'ensemble des degrés des polynômes non nuls de F est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $F \neq \{0\}$) et majorée par n : elle admet donc un plus grand élément k. Par définition de k, tout polynôme non nul de F est de degré au plus k, et le polynôme nul appartient à $\mathbb{K}_k[X]$: ainsi $F \subset \mathbb{K}_k[X]$.
3. Comme F est stable par D, une récurrence immédiate montre que $P^{(i)} \in F$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, P étant de degré k, on a $\deg P^{(i)} = k - i$ pour $0 \leq i \leq k$.
   La famille $\left(P, P', \dots, P^{(k)}\right)$ est donc constituée de $k + 1$ polynômes de degrés deux à deux distincts : elle est échelonnée en degré, donc libre. Ses éléments appartiennent tous à $\mathbb{K}_k[X]$, qui est de dimension $k + 1$: c'est donc une base de $\mathbb{K}_k[X]$.
4. De la question précédente on tire

$$\mathbb{K}_k[X] = \operatorname{Vect}\left(P, P', \dots, P^{(k)}\right) \subset F,$$

puisque tous ces polynômes sont dans F et que F est un sous-espace vectoriel. Avec l'inclusion de la question 2, il vient $F = \mathbb{K}_k[X]$.

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ stables par la dérivation sont donc exactement

$$\{0\}, \quad \mathbb{K}_0[X], \quad \mathbb{K}_1[X], \quad \ldots, \quad \mathbb{K}_n[X].$$

Il y en a $n+2$, et ils sont totalement ordonnés par l'inclusion.

Correction de l'exercice 4.21 **Énoncé p. 6**

1. Comme F est stable par u, l'application u induit un endomorphisme $u|_F$ de F, c'est-à-dire une application linéaire de F dans F. Elle est injective, comme restriction de l'application injective u. Or F est de dimension finie : un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif. Donc $u|_F$ est surjective, autrement dit
$$u(F) = F.$$
Soit alors $x \in F$. Il existe $y \in F$ tel que $x = u(y)$, d'où $u^{-1}(x) = y \in F$: le sous-espace F est stable par u^{-1}.
2. L'application u est linéaire, car $(\lambda f + g)(x-1) = \lambda f(x-1) + g(x-1)$. Elle est bijective, de réciproque $f \mapsto (x \mapsto f(x+1))$: les deux translations sont inverses l'une de l'autre.
L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E : la fonction nulle y appartient, et une combinaison linéaire de fonctions nulles sur $]-\infty, 0]$ y est encore nulle.
F est stable par u. Soit $f \in F$ et $x \leq 0$. Alors $x - 1 \leq 0$, donc $u(f)(x) = f(x-1) = 0$. Ainsi $u(f) \in F$.
F n'est pas stable par u^{-1}. Considérons la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x$ pour $x > 0$: elle appartient à F. Mais
$$u^{-1}(f)\left(-\tfrac{1}{2}\right) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} \neq 0,$$
donc $u^{-1}(f) \notin F$.
3. L'application induite $u|_F$ est bien injective, mais elle n'est pas surjective : son image est l'ensemble des fonctions nulles sur $]-\infty, 1]$, qui est strictement contenu dans F. C'est l'argument de dimension finie qui manque : en dimension infinie, un endomorphisme injectif n'a aucune raison d'être surjectif.

Correction de l'exercice 4.22 **Énoncé p. 6**

1. Le vecteur x étant non nul, la famille (x) est libre : on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (x, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Une application linéaire étant entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base, on peut définir $u \in \mathcal{L}(E)$ par
$$u(x) = y, \qquad u(e_2) = \cdots = u(e_n) = 0_E.$$
2. Supposons $F \neq \{0\}$ et fixons $x \in F$ non nul. Soit $y \in E$ quelconque, et soit u l'endomorphisme construit à la question précédente. Comme F est stable par u et que $x \in F$,
$$y = u(x) \in F.$$
Ceci valant pour tout $y \in E$, on a $F = E$. Les seuls sous-espaces stables par tous les endomorphismes sont donc $\{0\}$ et E.

3. La conclusion est la même, mais l'endomorphisme construit ci-dessus ne convient plus : il n'est pas bijectif dès que $n \geq 2$. Reprenons $F \neq \{0\}$, $x \in F$ non nul et $y \in E$.

   Si $y = 0_E$, alors $y \in F$ puisque F est un sous-espace vectoriel. Sinon, complétons (x) en une base $(x, e_2, \ldots, e_n)$ et (y) en une base $(y, f_2, \ldots, f_n)$. L'unique application linéaire u envoyant la première base sur la seconde transforme une base en une base : c'est un automorphisme, et $u(x) = y$. On conclut comme précédemment que $F = E$.

Correction de l'exercice 4.23 **Énoncé p. 6**

1. Supposons $u(x) = \lambda x$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$. En appliquant u :

$$-x = u^2(x) = \lambda\, u(x) = \lambda^2 x.$$

   Comme $x \neq 0_E$, il vient $\lambda^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc $u(x)$ n'est pas colinéaire à x.

   Soit maintenant $D = \text{Vect}(a)$ une droite vectorielle de E, avec $a \neq 0_E$. Si D était stable par u, on aurait $u(a) \in D$, c'est-à-dire $u(a)$ colinéaire à a : c'est exclu par ce qui précède, appliqué à a. Aucune droite n'est donc stable.

2. Comme x et $u(x)$ ne sont pas colinéaires, la famille $(x, u(x))$ est libre et $P = \text{Vect}\,(x, u(x))$ est bien un plan. On a $u(x) \in P$ et

$$u\,(u(x)) = u^2(x) = -x \in P.$$

   L'image par u des deux vecteurs d'une famille génératrice de P reste dans P ; par linéarité, $u(P) \subset P$.

Correction de l'exercice 4.24 **Énoncé p. 6**

1. L'application φ est une forme linéaire non nulle, car $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Son image est un sous-espace non nul de $\mathbb{R}$, donc $\text{Im}\,\varphi = \mathbb{R}$ et $\text{rg}\,\varphi = 1$. Le théorème du rang donne

$$\dim H = \dim \text{Ker}\,\varphi = 3 - 1 = 2.$$

2. (a) L'application $\varphi \circ u$ est composée de deux applications linéaires, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ puis de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. Soit $h \in H$. Par stabilité, $u(h) \in H = \text{Ker}\,\varphi$, donc $(\varphi \circ u)(h) = 0$. Ainsi $H \subset \text{Ker}(\varphi \circ u)$.

   (b) La matrice d'une forme linéaire dans ces bases est la matrice ligne de ses valeurs sur $\mathcal{B}$. Comme $e_1, e_2 \in H = \text{Ker}\,\varphi$ et $e_1, e_2 \in \text{Ker}(\varphi \circ u)$:

$$\text{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi(e_3) \end{pmatrix}, \qquad \text{Mat}(\varphi \circ u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi\,(u(e_3)) \end{pmatrix}.$$

   (c) Si $\varphi(e_3)$ était nul, φ s'annulerait sur les trois vecteurs de la base $\mathcal{B}$, donc serait la forme linéaire nulle : exclu. Posons alors

$$\lambda = \frac{\varphi\,(u(e_3))}{\varphi(e_3)}.$$

   Les deux matrices lignes ci-dessus vérifient $\text{Mat}(\varphi \circ u) = \lambda\,\text{Mat}(\varphi)$. Deux applications linéaires de mêmes espaces ayant la même matrice dans les mêmes bases sont égales, donc $\varphi \circ u = \lambda\varphi$.

3. Supposons $\varphi \circ u = \lambda\varphi$ et soit $h \in H$. Alors
$$\varphi\left(u(h)\right) = \lambda\,\varphi(h) = 0,$$
donc $u(h) \in \operatorname{Ker}\varphi = H$. Le plan H est stable par u.
4. Dans les bases canoniques, la matrice de φ est la matrice ligne $X^\top$, et celle de $\varphi \circ u$ est $X^\top A$. La condition $\varphi \circ u = \lambda\varphi$ s'écrit donc $X^\top A = \lambda X^\top$, c'est-à-dire, en transposant, $A^\top X = \lambda X$. Avec les questions 2 et 3 :
$$H \text{ stable par } u \iff \exists\lambda \in \mathbb{R},\ A^\top X = \lambda X.$$
5. Une droite $D = \operatorname{Vect}(v)$, avec $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, est stable par u si et seulement si $u(v) \in \operatorname{Vect}(v)$, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(v) = \lambda v$. En notant V la matrice colonne des coordonnées de v, cela s'écrit $AV = \lambda V$. Les droites stables se lisent donc sur A comme les plans stables se lisent sur $A^\top$.

Correction de l'exercice 4.25 **Énoncé p. 7**

1. Supposons d'abord qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Im}(u + \lambda\operatorname{Id}_E) \subset H$. Soit $h \in H$. Alors
$$u(h) = (u + \lambda\operatorname{Id}_E)(h) - \lambda h,$$
somme de deux vecteurs de H, donc $u(h) \in H$: l'hyperplan H est stable par u.
Réciproquement, supposons H stable par u. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H, complétée par e_n en une base $\mathcal{B}$ de E. Cette base est adaptée à H, qui est stable par u, donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs (proposition du cours sur la matrice d'un endomorphisme avec un sous-espace stable) :
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & \mu \end{array}\right),$$
où $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $\mu \in \mathbb{C}$: la dernière ligne vaut $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu \end{pmatrix}$. Posons $\lambda = -\mu$. Alors
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u + \lambda\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \lambda I_n$$
a sa dernière ligne nulle. Autrement dit, pour tout $x \in E$, la dernière coordonnée de $(u+\lambda\operatorname{Id}_E)(x)$ dans $\mathcal{B}$ est nulle, donc $(u+\lambda\operatorname{Id}_E)(x) \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$. Ainsi $\operatorname{Im}(u + \lambda\operatorname{Id}_E) \subset H$.
2. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ de matrice A. Les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{C}^3$ sont stables ; il reste les droites et les plans.
Les droites. Une droite $\operatorname{Vect}(v)$, avec $v \neq 0$, est stable si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u(v) = \lambda v$, c'est-à-dire tel que $A - \lambda I_3$ ne soit pas injective, donc de déterminant nul. On calcule, en développant par rapport à la deuxième ligne :
$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2.$$
Les valeurs possibles de λ sont donc 2 et -2.
Pour $\lambda = 2$, le système $(A - 2I_3)V = 0$ s'écrit
$$\begin{cases} -a + b + 2c = 0 \\ a - 3b = 0 \\ a + b - 4c = 0 \end{cases}$$

et donne $a = 3b$ puis $c = b$: le noyau est Vect $((3,1,1))$.

Pour $\lambda = -2$, le système $(A + 2I_3)V = 0$ se réduit à $a + b = 0$ et $3a + b + 2c = 0$, d'où $b = -a$ et $c = -a$: le noyau est Vect $((1,-1,-1))$.

Il y a donc exactement deux droites stables : Vect $((3,1,1))$ et Vect $((1,-1,-1))$.

Les plans. Un plan de $\mathbb{C}^3$ est un hyperplan : d'après la question 1, il est stable si et seulement s'il contient $\operatorname{Im}(u + \lambda \operatorname{Id})$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. Un plan étant de dimension 2, cela impose $\operatorname{rg}(A + \lambda I_3) \leq 2$, donc $\det(A + \lambda I_3) = 0$, c'est-à-dire $\lambda \in \{2, -2\}$.

Pour $\lambda = -2$, la matrice $A - 2I_3$ est de rang 2 (son noyau est une droite), donc $\operatorname{Im}(u - 2\operatorname{Id})$ est un plan, et le plan cherché lui est égal. Ses colonnes $(-1,1,1)$ et $(1,-3,1)$ l'engendrent ; en cherchant son équation sous la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, ces deux vecteurs donnent $-\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\alpha - 3\beta + \gamma = 0$, d'où $\alpha = 2\beta$ et $\gamma = \beta$. On obtient le plan d'équation $2x + y + z = 0$.

Pour $\lambda = 2$, la matrice $A + 2I_3$ est de rang 2 et ses colonnes $(3,1,1)$ et $(1,1,1)$ engendrent $\operatorname{Im}(u + 2\operatorname{Id})$; les conditions $3\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$ donnent $\alpha = 0$ et $\gamma = -\beta$. On obtient le plan d'équation $y - z = 0$.

Il y a donc exactement deux plans stables, d'équations $2x + y + z = 0$ et $y - z = 0$.

Au total, les sous-espaces stables sont $\{0\}$, les deux droites Vect $((3,1,1))$ et Vect $((1,-1,-1))$, les deux plans d'équations $2x + y + z = 0$ et $y - z = 0$, et $\mathbb{C}^3$.

Correction de l'exercice 4.26 **Énoncé p. 7**

1. Si $u(x) = 0$, alors $u^2(x) = u(0) = 0$: d'où $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Si $y = u^2(x)$, alors $y = u(u(x))$ appartient à $\operatorname{Im} u$: d'où $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.

   Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0 \in \operatorname{Ker} u$, donc $\operatorname{Ker} u$ est stable. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors $u(y) \in \operatorname{Im} u$ par définition de l'image, donc $\operatorname{Im} u$ est stable.

2. Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = n = \dim E$. La somme $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$ est donc directe si et seulement si elle vaut E, et dans les deux cas cela équivaut à $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$: en effet, si l'intersection est nulle la somme est directe, donc de dimension n, donc égale à E ; et réciproquement.

3. Montrons (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$: il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$, et $u(x) = 0$, c'est-à-dire $u^2(y) = 0$. Donc $y \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, d'où $x = u(y) = 0$.

   Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). L'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ est acquise. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$. Alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$, et $u(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u$. Ainsi $u(x) \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} u$.

   Enfin (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : le théorème du rang appliqué à u et à u^2 donne

   $$\dim \operatorname{Ker} u = n - \operatorname{rg} u, \qquad \dim \operatorname{Ker} u^2 = n - \operatorname{rg} u^2,$$

   donc $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} u^2$ ont même dimension si et seulement si $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$. Comme $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$, l'égalité des dimensions équivaut à l'égalité des sous-espaces.

4. Les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u d'après la question 1, et ils sont supplémentaires d'après la question 2. Dans une base adaptée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} u}, \mathcal{B}_{\operatorname{Im} u})$, la matrice de u est donc diagonale par blocs, les blocs étant les matrices des endomorphismes induits. Or $u|_{\operatorname{Ker} u}$ est l'endomorphisme nul, d'où

   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\operatorname{Im} u}}\left(u|_{\operatorname{Im} u}\right).$$

Reste à voir que B est inversible, c'est-à-dire que $u|_{\operatorname{Im} u}$ est bijectif. Son noyau est $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ par hypothèse ; c'est donc un endomorphisme injectif de $\operatorname{Im} u$, qui est de dimension finie, donc bijectif.

5. Pour A, on calcule $A^2 = A$: donc $\operatorname{rg} A^2 = \operatorname{rg} A$ et les conditions sont vérifiées. On peut le voir directement : $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}((1,-1))$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(e_1)$, deux droites distinctes de $\mathbb{K}^2$.
   Pour N, on a $N^2 = 0$, donc $\operatorname{rg} N^2 = 0 \neq 1 = \operatorname{rg} N$: les conditions ne sont pas vérifiées. En effet $\operatorname{Ker} N = \operatorname{Im} N = \operatorname{Vect}(e_1)$, et l'intersection n'est pas nulle.
6. Si $u \circ u = u$, alors $u^2 = u$ et en particulier $\operatorname{rg} u^2 = \operatorname{rg} u$: la condition (iii) est vérifiée. La question 2 donne alors $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$, qui est la décomposition établie dans le cours pour un projecteur. La matrice de la question 4 est ici $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$ avec $r = \operatorname{rg} u$, puisque u induit l'identité sur $\operatorname{Im} u$.

Correction de l'exercice 4.27

Énoncé p. 8

1. Montrons par récurrence que $M^k = \begin{pmatrix} I_n & kB \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. C'est vrai pour $k = 0$, où l'on obtient I_{2n}. Si la formule vaut au rang k, alors, en multipliant par blocs,

$$M^{k+1} = M^k M = \begin{pmatrix} I_n & kB \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B + kB \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & (k+1)B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

   Les blocs jouent ici exactement le rôle des coefficients d'une matrice 2×2, la seule précaution étant de ne jamais intervertir deux facteurs.
   La même formule vaut d'ailleurs pour k entier négatif si l'on pose $M^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$: le produit de ces deux matrices vaut I_{2n}, dans les deux sens. Donc M est inversible et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

2. Récurrence sur k. Pour $k = 1$ la formule s'écrit $N^1 = N$, ce qui est exact puisque $2^0 = 1$. Supposons-la vraie au rang k ; alors

$$N^{k+1} = N^k N = 2^{k-1}\begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = 2^{k-1}\begin{pmatrix} A^{k+1} + A^{k+1} & A^{k+1} + A^{k+1} \\ A^{k+1} + A^{k+1} & A^{k+1} + A^{k+1} \end{pmatrix},$$

   soit $N^{k+1} = 2^k \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^{k+1} \\ A^{k+1} & A^{k+1} \end{pmatrix}$.
3. Non, quelle que soit A. Les n premières colonnes de N sont identiques aux n suivantes, donc les colonnes de N forment une famille liée dès que $n \geq 1$: par exemple $C_1 - C_{n+1} = 0$. Ainsi $\det N = 0$.

Correction de l'exercice 4.28

Énoncé p. 8

1. La transposition échange les rôles des lignes et des colonnes, donc échange les deux blocs hors diagonale tout en transposant chaque bloc :

$$M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}.$$

   Les tailles sont cohérentes : $C^\top \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ occupe bien la place de B.

2. Par unicité du découpage en blocs, $M^\top = M$ équivaut à l'égalité des quatre blocs, c'est-à-dire

$$A^\top = A, \qquad D^\top = D, \qquad C^\top = B \quad \text{et} \quad B^\top = C.$$

Les deux dernières conditions n'en font qu'une, puisque $(B^\top)^\top = B$. Donc M est symétrique si et seulement si A et D le sont et $C = B^\top$.

Une telle matrice est alors déterminée par le choix libre de A symétrique, de D symétrique et de B quelconque, le bloc C s'en déduisant. La dimension cherchée vaut donc

$$\frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} + pq = \frac{p^2+p+q^2+q+2pq}{2} = \frac{(p+q)^2+(p+q)}{2},$$

c'est-à-dire $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$.

3. Le même raisonnement avec $M^\top = -M$ donne : M est antisymétrique si et seulement si A et D le sont et $C = -B^\top$. La dimension correspondante est

$$\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + pq = \frac{(p+q)(p+q-1)}{2},$$

comme attendu.

4. Les deux blocs diagonaux, nuls, sont antisymétriques, et le bloc inférieur gauche est bien l'opposé de la transposée du bloc supérieur droit : la caractérisation de la question 3 s'applique. On peut aussi transposer directement :

$$\begin{pmatrix} 0 & N \\ -N^\top & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & -N \\ N^\top & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & N \\ -N^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa diagonale est incluse dans les deux blocs diagonaux, qui sont nuls : sa trace est nulle.

5. Écrivons

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & A_r \end{pmatrix}.$$

En transposant, les blocs hors diagonale passent au-dessus de la diagonale et les blocs diagonaux deviennent $A_1^\top, \dots, A_r^\top$: la matrice $M^\top$ est triangulaire *supérieure* par blocs. Son déterminant est donc le produit des déterminants de ses blocs diagonaux (proposition du cours sur le déterminant par blocs), et comme une matrice et sa transposée ont même déterminant :

$$\det M = \det M^\top = \det A_1^\top \cdots \det A_r^\top = \det A_1 \cdots \det A_r.$$

C'est la remarque du cours sur le cas triangulaire inférieur (du cours).

Correction de l'exercice 4.29 **Énoncé p. 8**

1. Le calcul par blocs donne

$$J_r M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad MJ_r = \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplier par J_r à gauche ne conserve que les r premières lignes ; multiplier à droite ne conserve que les r premières colonnes.

2. Les deux matrices obtenues sont égales si et seulement si leurs blocs le sont deux à deux, c'est-à-dire si et seulement si $Q = 0$ et $R = 0$. Ainsi

$$MJ_r = J_rM \iff M = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

les blocs P et S étant quelconques.

3. D'après ce qui précède, l'application qui à (P, S) associe la matrice diagonale par blocs correspondante est un isomorphisme de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ sur $C(J_r)$. Donc

$$\dim C(J_r) = r^2 + (n-r)^2.$$

Ce nombre est minimal pour r voisin de $\frac{n}{2}$ et vaut n^2 aux deux extrémités $r = 0$ et $r = n$, où J_r vaut 0 ou I_n et commute donc avec tout le monde.

4. Notons p l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à J_r : c'est le projecteur sur $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$, et $\text{Im}\, p = F$, $\text{Ker}\, p = G$. Soit u l'endomorphisme associé à M.

Si u et p commutent, le noyau et l'image de p sont stables par u (proposition du cours sur la stabilité par un endomorphisme qui commute) : $\text{Ker}\, p$ et $\text{Im}\, p$ sont stables par u. Comme la base canonique est adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^n = F \oplus G$, la matrice M est alors diagonale par blocs.

Réciproquement, si M est diagonale par blocs, F et G sont stables par u, et l'on vérifie sur la décomposition $x = x_F + x_G$ que $u\left(p(x)\right) = u(x_F) = p\left(u(x)\right)$, les deux composantes restant chacune dans leur sous-espace.

Correction de l'exercice 4.30 **Énoncé p. 8**

1. La matrice M est triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux A et C, donc $\det M = \det A \cdot \det C$ (proposition du cours sur le déterminant par blocs). Un produit de scalaires est non nul si et seulement si chacun l'est, d'où :

$$\det M \neq 0 \iff \det A \neq 0 \text{ et } \det C \neq 0,$$

ce qui est exactement l'équivalence demandée.

2. Écrivons la condition $MN = I_{p+q}$ pour $N = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. Le produit par blocs donne

$$MN = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BT \\ CZ & CT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

L'égalité des blocs en bas à gauche donne $CZ = 0$, d'où $Z = 0$ en multipliant par C^{-1}. Celle des blocs en bas à droite donne $CT = I_q$, donc $T = C^{-1}$. Le bloc en haut à gauche devient alors $AX = I_p$, soit $X = A^{-1}$. Enfin, le bloc en haut à droite s'écrit

$$AY + BC^{-1} = 0, \qquad \text{donc} \qquad Y = -A^{-1}BC^{-1}.$$

Réciproquement, la matrice ainsi obtenue vérifie aussi $NM = I_{p+q}$, comme le montre le même calcul ; on peut aussi invoquer le fait qu'en dimension finie un inverse à droite est un inverse.

On remarquera que l'inverse est encore triangulaire supérieure par blocs, et que le bloc B intervient dans le seul coefficient hors diagonale.

3. Ici $p = q = 2$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices triangulaires sont inversibles, d'inverses

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Correction de l'exercice 4.31 **Énoncé p. 9**

1. Pour $n = 1$, la matrice s'écrit $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ et $\det M = -ab$. La formule annoncée donne bien $(-1)^1 \det A \cdot \det B = -ab$.
2. Notons $L_1, \dots, L_{2n}$ les lignes de M. On veut passer de l'ordre $(L_1, \dots, L_n, L_{n+1}, \dots, L_{2n})$ à l'ordre $(L_{n+1}, \dots, L_{2n}, L_1, \dots, L_n)$, ce qui place les lignes contenant B en haut et celles contenant A en bas : on obtient alors la matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
   Pour cela, faisons remonter L_{n+1} jusqu'à la première place par échanges de lignes voisines : il en faut n. Puis L_{n+2} jusqu'à la deuxième place : encore n. Et ainsi de suite pour chacune des n dernières lignes. Au total, $n \times n = n^2$ échanges.
   Chaque échange de deux lignes change le déterminant en son opposé, donc

$$\det \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = (-1)^{n^2} \det M.$$

   Or la matrice de gauche est triangulaire (et même diagonale) par blocs : son déterminant vaut $\det B \cdot \det A$. Comme $(-1)^{n^2} = \pm 1$, il vient

$$\det M = (-1)^{n^2} \det A \cdot \det B.$$

   Signalons que n^2 et n ont même parité : on peut donc aussi écrire $\det M = (-1)^n \det A \cdot \det B$.
3. Avec $n = 2$ et $A = B = I_2$, la formule donne

$$\det M = (-1)^4 \times 1 \times 1 = 1.$$

   C'est bien la valeur annoncée dans le cours, où l'on constatait que la formule naïve $\det A \cdot \det D - \det C \cdot \det B$ aurait donné -1. L'exercice fournit donc la *vraie* formule dans ce cas : le déterminant d'une matrice anti-diagonale par blocs se calcule bien à partir de ceux des deux blocs, mais avec un signe que le cas 2×2 ne laissait pas deviner.

4. Avec $B = I_n$, la question 2 donne $\det M = (-1)^{n^2} \det A$: le déterminant de M est nul si et seulement si celui de A l'est, donc M est inversible si et seulement si A l'est.
   Calculons M^2 par blocs :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$
   Une récurrence immédiate donne alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$M^{2k} = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix},$$
   puis, en multipliant une fois de plus par M :
$$M^{2k+1} = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^{k+1} \\ A^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4.32 Énoncé p. 9

1. Les deux découpages sont compatibles, donc le produit se calcule par blocs :
$$\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI_nM + bI_n \cdot 0 & aI_n \cdot 0 + bI_nM \\ cI_nM + dI_n \cdot 0 & cI_n \cdot 0 + dI_nM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} = P.$$

2. Notons $Q = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$. Pour $1 \leq i \leq n$, l'opération $L_{n+i} \leftarrow L_{n+i} - \frac{c}{a} L_i$ (licite car $a \neq 0$) ne change pas le déterminant et annule le bloc inférieur gauche :
$$\det Q = \det \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ 0 & \left(d - \frac{bc}{a}\right) I_n \end{pmatrix}.$$
   Cette matrice est triangulaire par blocs, donc
$$\det Q = \det(aI_n) \cdot \det\left(\left(d - \frac{bc}{a}\right) I_n\right) = a^n \left(d - \frac{bc}{a}\right)^n = (ad - bc)^n.$$

3. La matrice $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs, de déterminant $(\det M)^2$. Par multiplicativité du déterminant :
$$\det P = (ad - bc)^n (\det M)^2.$$

Correction de l'exercice 4.33 Énoncé p. 9

1. On calcule d'abord le produit de droite :
$$M \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ I_n - A & A \end{pmatrix},$$
   puis on multiplie à gauche :
$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ I_n - A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ (A - I_n) + (I_n - A) & I_n + A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ 0 & A + I_n \end{pmatrix}.$$

2. Les deux matrices qui encadrent M sont triangulaires inférieures, avec des 1 sur la diagonale : leur déterminant vaut 1. En passant au déterminant dans l'identité de la question précédente :

$$\det M = \det \begin{pmatrix} A - I_n & I_n \\ 0 & A + I_n \end{pmatrix} = \det(A - I_n) \det(A + I_n),$$

la dernière égalité venant de ce que la matrice est triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux $A - I_n$ et $A + I_n$ (proposition du cours sur le déterminant par blocs).

3. La matrice M est inversible si et seulement si $\det M \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\det(A - I_n) \neq 0$ et $\det(A + I_n) \neq 0$, autrement dit si et seulement si $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles.

Correction de l'exercice 4.34 **Énoncé p. 10**

1. Récurrence sur k.
   Pour $k = 1$, la formule s'écrit $M^1 = M$, puisque $LT^0 = LI_n = L$.
   Supposons la formule vraie au rang k. Le produit par blocs donne

$$M^{k+1} = M^k M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LT^{k-1} \\ \hline 0_{n,1} & T^k \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0_{n,1} & T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LT^k \\ \hline 0_{n,1} & T^{k+1} \end{array}\right),$$

   car le bloc en haut à gauche vaut $0 \cdot 0 + LT^{k-1} \cdot 0_{n,1} = 0$, celui en haut à droite $0 \cdot L + LT^{k-1}T = LT^k$, et de même pour la seconde ligne de blocs. La formule est vraie au rang $k + 1$.

2. Récurrence sur n.
   Pour $n = 1$, une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle est la matrice nulle, et $M^1 = 0_1$.
   Supposons le résultat vrai au rang n et soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle. Sa première colonne est nulle, donc M se découpe sous la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0_{n,1} & T \end{array}\right),$$

   où $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est encore triangulaire supérieure à diagonale nulle. La question 1 donne

$$M^{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & LT^n \\ \hline 0_{n,1} & T^{n+1} \end{array}\right),$$

   et l'hypothèse de récurrence donne $T^n = 0_n$. Donc $LT^n = 0$ et $T^{n+1} = T^n T = 0_n$, d'où $M^{n+1} = 0_{n+1}$.

Correction de l'exercice 4.35 **Énoncé p. 10**

1. Soient A et $B = P^{-1}AP$ deux matrices semblables, avec P inversible. Pour la trace (c'est le corollaire du cours) :

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \operatorname{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}(A),$$

   puisque $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ pour toutes matrices $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (théorème du

cours). Pour le déterminant, la multiplicativité donne

$$\det(B) = \det\left(P^{-1}\right)\det(A)\det(P) = \frac{\det(A)\det(P)}{\det(P)} = \det(A).$$

Enfin multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang, donc $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A)$.

2. La transposition ne modifie pas la diagonale, donc $\operatorname{tr}\left(A^\top\right) = \operatorname{tr}(A)$. On sait par ailleurs que $\det\left(A^\top\right) = \det(A)$ et que $\operatorname{rg}\left(A^\top\right) = \operatorname{rg}(A)$, le rang des lignes étant égal au rang des colonnes.
3. Les deux matrices ont pour trace 2, pour déterminant 1 et pour rang 2. Pourtant elles ne sont pas semblables : pour toute matrice inversible P, on a

$$P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2,$$

donc la seule matrice semblable à I_2 est I_2 elle-même. Trace, déterminant et rang ne suffisent donc pas à caractériser une classe de similitude.
4. Par hypothèse, il existe P inversible telle que $2A = P^{-1}AP$. En élevant à la puissance k :

$$2^kA^k = \left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP,$$

les facteurs PP^{-1} intermédiaires se simplifiant. Les matrices 2^kA^k et A^k sont donc semblables, et la question 1 donne

$$2^k \operatorname{tr}\left(A^k\right) = \operatorname{tr}\left(A^k\right),$$

soit $\left(2^k - 1\right)\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$. Comme $k \geq 1$, on a $2^k \neq 1$, d'où $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$.
5. Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (théorème du cours). En revanche, prenons $A = E_{1,1}$ et $B = E_{1,2}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. La règle $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ donne

$$AB = E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2}, \qquad BA = E_{1,2}E_{1,1} = 0.$$

Ces deux matrices ont bien même trace, nulle, mais l'une est de rang 1 et l'autre de rang 0 : elles ne sont pas semblables.
6. Appliquons l'hypothèse à $M = E_{j,i}$. Le produit $AE_{j,i}$ a pour seule colonne non nulle sa i-ième, égale à la j-ième colonne de A ; le seul terme diagonal non nul est celui d'indice i, et il vaut $a_{i,j}$. Ainsi $\operatorname{tr}\left(AE_{j,i}\right) = a_{i,j}$. D'autre part $\operatorname{tr}\left(E_{j,i}\right)$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Donc $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour tous i et j, c'est-à-dire

$$A = I_n.$$

Réciproquement, $A = I_n$ convient.

Correction de l'exercice 4.36 **Énoncé p. 10**

1. La matrice $E_{j,i}$ n'a qu'un coefficient non nul, un 1 en position (j, i). Le produit $AE_{j,i}$ a donc pour seule colonne non nulle sa i-ième, égale à la j-ième colonne de A :

$$\left(AE_{j,i}\right)_{k,l} = a_{k,j}\,\delta_{i,l}.$$

Sa trace est la somme des termes d'indices $k = l$; seul le terme $k = l = i$

subsiste, et il vaut $a_{i,j}$. Ainsi

$$\operatorname{tr}\left(AE_{j,i}\right) = a_{i,j}.$$

Autrement dit, chaque coefficient de A se lit comme une trace.

2. Si $\operatorname{tr}(AB) = 0$ pour toute B, on peut en particulier prendre $B = E_{j,i}$ pour chaque couple (i, j) : la question précédente donne $a_{i,j} = 0$. Tous les coefficients de A sont nuls, donc $A = 0$.
   On retiendra la formulation : la trace *sépare* les matrices. Si deux matrices A et A' vérifient $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A'B)$ pour toute B, alors $A = A'$; il suffit d'appliquer ce qui précède à $A - A'$.
3. L'hypothèse est plus faible : on ne dispose plus que des matrices B de trace nulle.
   Soient $i \neq j$. La matrice $E_{j,i}$ est de trace nulle, puisque son unique coefficient non nul est hors de la diagonale. L'hypothèse et la question 1 donnent donc $a_{i,j} = 0$: la matrice A est diagonale.
   Soient maintenant $i \neq j$. La matrice $E_{j,j} - E_{i,i}$ est elle aussi de trace nulle, et
   $$\operatorname{tr}\left(A\left(E_{j,j} - E_{i,i}\right)\right) = a_{j,j} - a_{i,i} = 0.$$
   Tous les coefficients diagonaux de A sont donc égaux, à une valeur commune λ, et $A = \lambda I_n$.
   Réciproquement, une matrice scalaire convient : si $\operatorname{tr}(B) = 0$, alors $\operatorname{tr}(\lambda I_n B) = \lambda \operatorname{tr}(B) = 0$. Les matrices cherchées sont donc exactement les matrices scalaires.
4. Pour A fixée, l'application $\varphi_A : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ est composée de $M \mapsto AM$ et de la trace, toutes deux linéaires : c'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application Ψ est donc bien à valeurs dans $\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right)$, et elle est linéaire : pour A, $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et toute M,
   $$\operatorname{tr}\left((A + \lambda A')M\right) = \operatorname{tr}(AM) + \lambda \operatorname{tr}(A'M).$$
   Elle est injective : si $\Psi(A)$ est la forme linéaire nulle, alors $\operatorname{tr}(AM) = 0$ pour toute M, donc $A = 0$ d'après la question 2.
   Enfin
   $$\dim \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right) = n^2 \times 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$
   donc Ψ est un isomorphisme. En particulier elle est surjective : toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit $\varphi = \varphi_A$ pour une unique matrice A, c'est-à-dire $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction de l'exercice 4.37 **Énoncé p. 10**

1. Ces deux applications vont bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et elles sont linéaires par bilinéarité du produit matriciel : pour $\lambda \in \mathbb{K}$,
   $$A(\lambda M + M')B = \lambda AMB + AM'B.$$
   L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension n^2, leurs matrices dans la base canonique sont de taille $n^2 \times n^2$. Il n'est donc pas question de les écrire ; seule leur diagonale nous intéresse.

2. Calculons le coefficient d'indice (k,l) du produit :

$$\left(AE_{i,j}B\right)_{k,l} = \sum_{s,t} a_{k,s}\left(E_{i,j}\right)_{s,t} b_{t,l} = a_{k,i}\, b_{j,l},$$

le seul terme non nul de la double somme étant celui d'indices $(s,t) = (i,j)$. Autrement dit,

$$AE_{i,j}B = \sum_{k,l} a_{k,i}\, b_{j,l}\, E_{k,l}.$$

La trace de Ψ est la somme des coefficients diagonaux de sa matrice dans la base canonique : pour chaque vecteur de base $E_{i,j}$, il faut donc relever la composante de $\Psi(E_{i,j})$ selon ce même $E_{i,j}$, c'est-à-dire le terme d'indices $(k,l) = (i,j)$ dans la somme ci-dessus. Il vaut $a_{i,i}\, b_{j,j}$. D'où

$$\operatorname{tr}(\Psi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,i}\, b_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j,j}\right) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B),$$

la double somme se factorisant puisque chaque facteur ne dépend que d'un seul indice.

3. L'application Φ est le cas particulier $B = I_n$ de Ψ. Comme $\operatorname{tr}(I_n) = n$, il vient

$$\operatorname{tr}(\Phi) = n\operatorname{tr}(A).$$

Pour $n = 2$ et la matrice proposée, $\operatorname{tr}(A) = 1 + 5 = 6$, donc $\operatorname{tr}(\Phi) = 12$. On peut le vérifier directement : dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$, on calcule $AE_{1,1} = E_{1,1} + 3E_{2,1}$ et $AE_{1,2} = E_{1,2} + 3E_{2,2}$, dont les composantes diagonales valent 1 ; de même $AE_{2,1} = 2E_{1,1} + 5E_{2,1}$ et $AE_{2,2} = 2E_{1,2} + 5E_{2,2}$ apportent chacune 5. La somme vaut $1 + 1 + 5 + 5 = 12$.

4. La trace d'un projecteur est son rang (exemple du cours). Donc $\operatorname{tr}(A) = r$, $\operatorname{tr}(B) = s$ et

$$\operatorname{tr}(\Psi) = rs.$$

Correction de l'exercice 4.38 **Énoncé p. 11**

1. Soient $i \neq j$. L'astuce consiste à écrire $E_{i,j}$ comme un produit dont les deux facteurs, une fois échangés, donnent 0. La règle rappelée donne

$$E_{i,i}E_{i,j} = E_{i,j} \qquad \text{et} \qquad E_{i,j}E_{i,i} = \delta_{j,i}E_{i,i} = 0,$$

cette dernière égalité venant de $j \neq i$. L'hypothèse sur f appliquée au couple $(E_{i,i}, E_{i,j})$ donne alors

$$f(E_{i,j}) = f\left(E_{i,i}E_{i,j}\right) = f\left(E_{i,j}E_{i,i}\right) = f(0) = 0.$$

2. Soient $i \neq j$. Cette fois,

$$E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i} \qquad \text{et} \qquad E_{j,i}E_{i,j} = E_{j,j}.$$

L'hypothèse appliquée au couple $(E_{i,j}, E_{j,i})$ donne $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$. Ceci valant pour tous $i \neq j$, les n scalaires sont égaux ; notons λ leur valeur commune. (Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer.)

3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En décomposant A dans la base canonique et en utilisant la linéarité de f :

$$f(A) = f\left(\sum_{i,j} a_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum_{i,j} a_{i,j}f(E_{i,j}) = \sum_i a_{i,i}f(E_{i,i}),$$

tous les termes hors diagonale étant nuls d'après la question 1. Avec la question 2,

$$f(A) = \lambda \sum_i a_{i,i} = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

Ainsi $f = \lambda \operatorname{tr}$.

C'est bien la réciproque du théorème $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (du cours) : la trace vérifie $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, et c'est essentiellement la seule forme linéaire à le faire.

4. Une telle f s'écrit $\lambda \operatorname{tr}$ d'après ce qui précède, et la condition $f(I_n) = 1$ impose $\lambda \operatorname{tr}(I_n) = \lambda n = 1$, soit $\lambda = \frac{1}{n}$. Réciproquement, $\frac{1}{n}\operatorname{tr}$ convient. Il y a donc une unique forme linéaire de ce type :

$$f = \frac{1}{n}\operatorname{tr}.$$

On suppose ici que n est inversible dans $\mathbb{K}$, ce qui est le cas pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 4.39 **Énoncé p. 11**

1. Supposons qu'il existe de telles matrices. La trace est linéaire et vérifie $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, donc

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

Or $\operatorname{tr}(I_n) = n \neq 0$. L'égalité $AB - BA = I_n$ est donc impossible.

2. Supposons A inversible. En multipliant l'égalité $AB - BA = A$ à gauche par A^{-1} :

$$B - A^{-1}BA = I_n.$$

Posons $C = A^{-1}B$. Alors $B = AC$ et $A^{-1}BA = CA$, de sorte que

$$AC - CA = I_n,$$

ce que la question 1 interdit. Donc A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 4.40 **Énoncé p. 11**

1. L'application f va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la linéarité de la trace donne

$$f(M + \lambda N) = -(M + \lambda N) + \operatorname{tr}(M + \lambda N)A = f(M) + \lambda f(N).$$

2. Soit $M \in \operatorname{Ker} f$: alors $M = \operatorname{tr}(M)A$. En prenant la trace :

$$\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A), \qquad \text{soit} \qquad \operatorname{tr}(M)\,(1 - \operatorname{tr}(A)) = 0.$$

Comme $\operatorname{tr}(A) \neq 1$, il vient $\operatorname{tr}(M) = 0$, puis $M = 0$. Donc f est injective, et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, f est bijective.

3. Supposons $\operatorname{tr}(A) = 1$; en particulier $A \neq 0$. Le calcul précédent montre que $M \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $M = \operatorname{tr}(M)A$, donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(A)$. Réciproquement, pour $M = \lambda A$ on a $\operatorname{tr}(M) = \lambda \operatorname{tr}(A) = \lambda$ et

$$f(\lambda A) = -\lambda A + \lambda A = 0.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)$, qui est de dimension 1.
Notons $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$. Pour tout M :

$$\operatorname{tr}(f(M)) = -\operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A) = 0,$$

donc $\operatorname{Im} f \subset H$. L'ensemble H est le noyau de la forme linéaire non nulle tr, donc $\dim H = n^2 - 1$. Le théorème du rang donne

$$\dim \operatorname{Im} f = n^2 - \dim \operatorname{Ker} f = n^2 - 1 = \dim H,$$

d'où $\operatorname{Im} f = H$.

4. Si $\operatorname{tr}(B) \neq 0$, alors $B \notin \operatorname{Im} f$ et l'équation n'a pas de solution.
Si $\operatorname{tr}(B) = 0$, la matrice $-B$ est une solution particulière :

$$f(-B) = B + \operatorname{tr}(-B)A = B.$$

L'ensemble des solutions est donc $-B + \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire

$$\{-B + \lambda A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Correction de l'exercice 4.41 **Énoncé p. 11**

1. Le polynôme A est un produit de $n+1$ facteurs. La formule de dérivation d'un produit donne

$$A' = \sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (X - a_j),$$

chaque terme de la somme correspondant au facteur que l'on dérive.
Évaluons en a_i. Dans le terme d'indice k, le produit porte sur tous les $j \neq k$; si $k \neq i$, l'indice $j = i$ est présent et le facteur $(a_i - a_i) = 0$ annule tout le terme. Seul survit le terme $k = i$, d'où

$$A'(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j).$$

Ce produit est non nul, les a_j étant deux à deux distincts.

2. Le polynôme A est divisible par $X - a_i$, et le quotient est

$$\frac{A}{X - a_i} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j).$$

C'est exactement le numérateur de L_i. Quant au dénominateur, c'est $A'(a_i)$ d'après la question précédente. Donc

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)} = \frac{1}{A'(a_i)} \cdot \frac{A}{X - a_i}.$$

Cette écriture a l'avantage de ne faire intervenir qu'un seul polynôme, A, au lieu de $n+1$ produits distincts.

3. Le polynôme $\frac{A}{X-a_i}$ est unitaire de degré n : c'est un produit de n facteurs de la forme $X-a_j$. D'après la question précédente, le coefficient de X^n dans L_i vaut donc $\frac{1}{A'(a_i)}$.
   Or la décomposition du polynôme constant 1, de degré au plus n, dans la base de Lagrange donne $\sum_{i=0}^{n} L_i = 1$ (cours). Comme $n \geq 1$, son coefficient de X^n est nul, d'où
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{A'(a_i)} = 0.$$

4. Avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, on a $A = X(X-1)(X-2)$ et, par la question 1,
$$A'(0) = (0-1)(0-2) = 2, \qquad A'(1) = (1-0)(1-2) = -1,$$
$$A'(2) = (2-0)(2-1) = 2.$$
   La somme des inverses vaut bien $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$.

Correction de l'exercice 4.42 **Énoncé p. 12**

1. Posons $Q = P - \mathcal{I}(P)$. Pour tout k, la relation $L_i(a_k) = \delta_{ik}$ donne
$$\mathcal{I}(P)(a_k) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(a_k) = P(a_k),$$
   donc $Q(a_k) = 0$. Le polynôme Q admet ainsi les $n+1$ racines distinctes $a_0, \ldots, a_n$; il est donc divisible par le produit $\prod_j (X - a_j) = A$.
   Attention : contrairement à la proposition du cours, on ne suppose plus $\deg P \leq n$. C'est bien la divisibilité, et non l'égalité, que l'on obtient.

2. Écrivons $P = \mathcal{I}(P) + A \cdot S$, ce que la question précédente autorise. On a $\deg \mathcal{I}(P) \leq n$, puisque $\mathcal{I}(P)$ est combinaison linéaire des L_i, tandis que $\deg A = n+1$. La condition de degré caractérisant le reste est donc remplie, et l'unicité de la division euclidienne donne le résultat : $\mathcal{I}(P)$ est le reste de la division de P par A, et S en est le quotient.
   En particulier, si $\deg P \leq n$, le reste est P lui-même et l'on retrouve $\mathcal{I}(P) = P$: c'est la formule de décomposition du cours, ainsi que les identités $\sum L_i = 1$ et $\sum a_i L_i = X$ obtenues en prenant $P = 1$ puis $P = X$.

3. Prenons $P = X^{n+1}$. Son reste dans la division par A s'obtient sans calcul : les polynômes X^{n+1} et A sont tous deux unitaires de degré $n+1$, donc
$$X^{n+1} = A \cdot 1 + \left(X^{n+1} - A\right),$$
   avec $\deg\left(X^{n+1} - A\right) \leq n$ puisque les termes dominants se simplifient. Le quotient vaut 1 et le reste $X^{n+1} - A$. D'où
$$\sum_{i=0}^{n} a_i^{n+1} L_i = X^{n+1} - \prod_{j=0}^{n} (X - a_j).$$
   On notera que le membre de gauche est de degré au plus n, alors que chacun des deux termes de droite est de degré $n+1$: c'est bien la première fois que la somme $\sum a_i^m L_i$ cesse de valoir X^m.

4. Ici $A = X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X$, donc

$$\sum_{i=0}^{2} a_i^3 L_i = X^3 - A = 3X^2 - 2X.$$

Vérification aux trois points : en 0 on trouve $0 = 0^3$, en 1 on trouve $3-2 = 1 = 1^3$, et en 2 on trouve $12 - 4 = 8 = 2^3$. Le polynôme $3X^2 - 2X$ coïncide bien avec X^3 en 0, 1 et 2, sans lui être égal.

Correction de l'exercice 4.43 **Énoncé p. 12**

1. Pour $n = 1$: P est de degré au plus 1 avec $P(0) = 1$ et $P(1) = 2$, donc $P = X + 1$ et $P(2) = 3 = 2^2 - 1$.
   Pour $n = 2$: on cherche $P = aX^2 + bX + c$ avec $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$. La première condition donne $c = 1$, puis $a + b = 1$ et $4a + 2b = 3$, d'où $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$. Ainsi $P(3) = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 7 = 2^3 - 1$.
2. Par définition,
$$L_k(n+1) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{n+1-j}{k-j}.$$
   Au numérateur, j parcourt $\{0, \dots, n\}$ privé de k : le produit des $n+1-j$ vaut donc $(n+1)!$ divisé par le facteur manquant $n+1-k$, soit $\frac{(n+1)!}{n+1-k}$.
   Au dénominateur, séparons les $j < k$ et les $j > k$:
$$\prod_{j<k}(k-j) = k!, \qquad \prod_{j>k}(k-j) = (-1)^{n-k}\prod_{j>k}(j-k) = (-1)^{n-k}(n-k)!,$$
   le second produit comportant $n-k$ facteurs. En regroupant :
$$\begin{aligned} L_k(n+1) &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)\cdot k!\cdot(-1)^{n-k}(n-k)!} \\ &= (-1)^{n-k}\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = (-1)^{n-k}\binom{n+1}{k}, \end{aligned}$$
   puisque $(n+1-k)\cdot(n-k)! = (n+1-k)!$ et que $(-1)^{n-k} = \frac{1}{(-1)^{n-k}}$.
3. La décomposition dans la base de Lagrange donne $P = \sum_{k=0}^{n} 2^k L_k$, d'où
$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+1}{k}2^k = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}2^k(-1)^{n+1-k}.$$
   La formule du binôme appliquée à $(2-1)^{n+1}$ donne
$$1 = (2-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k(-1)^{n+1-k}.$$
   Le terme $k = n+1$ de cette somme vaut 2^{n+1} ; les autres forment exactement la somme apparue ci-dessus. Donc
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}2^k(-1)^{n+1-k} = 1 - 2^{n+1},$$
   et finalement
$$P(n+1) = -\left(1 - 2^{n+1}\right) = 2^{n+1} - 1.$$
   Le polynôme P coïncide donc avec $k \mapsto 2^k$ en $n+1$ points consécutifs, et se trompe exactement de 1 au point suivant — et ce, quelle que soit la valeur de n.

Correction de l'exercice 4.44 **Énoncé p. 12**

Notons $(L_0, \dots, L_d)$ les polynômes de Lagrange associés aux points $a_0, \dots, a_d$, qui sont bien deux à deux distincts. Pour tout k :

$$L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{d} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}.$$

C'est un produit de polynômes à coefficients rationnels, les dénominateurs $a_k - a_j$ étant des rationnels non nuls : donc $L_k \in \mathbb{Q}[X]$.
Comme $P \in \mathbb{C}_d[X]$, sa décomposition dans la base de Lagrange s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{d} P(a_k)\, L_k.$$

C'est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de polynômes à coefficients rationnels : tous les coefficients de P sont rationnels, donc $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Correction de l'exercice 4.45 **Énoncé p. 12**

1. Chaque P_n appartient à $\mathbb{R}_d[X]$, donc sa décomposition dans la base de Lagrange s'écrit
$$P_n = \sum_{i=0}^{d} P_n(a_i)\, L_i.$$

2. Écrivons $L_i = \sum_{k=0}^{d} c_{i,k} X^k$, les $c_{i,k}$ étant des réels fixés, indépendants de n. D'après la question précédente, le coefficient de X^k dans P_n vaut
$$\sum_{i=0}^{d} P_n(a_i)\, c_{i,k}.$$
C'est une somme finie, à $d+1$ termes, de suites convergentes : elle converge vers
$$\sum_{i=0}^{d} \ell_i\, c_{i,k},$$
qui est exactement le coefficient de X^k dans $P = \sum_{i=0}^{d} \ell_i L_i$. Le polynôme P appartient bien à $\mathbb{R}_d[X]$, comme combinaison linéaire des L_i.

Correction de l'exercice 4.46 **Énoncé p. 13**

1. L'application Φ est linéaire, car l'évaluation en un point l'est. Elle va d'un espace de dimension $n+1$ dans un espace de même dimension. Elle est injective : si $\Phi(P) = 0$, le polynôme P admet les $n+1$ racines distinctes $a_0, \dots, a_n$ tout en étant de degré au plus n, donc $P = 0$. C'est donc un isomorphisme.
Sa matrice dans les bases canoniques a pour j-ième colonne les coordonnées de $\Phi(X^j) = \left(a_0^j, \dots, a_n^j\right)$. Le coefficient d'indice (i, j) vaut donc a_i^j : c'est bien V, telle que définie dans le cours.

2. La matrice de Φ^{-1} dans les mêmes bases est V^{-1}. Sa i-ième colonne est formée des coordonnées de $\Phi^{-1}(\varepsilon_i)$ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$, où $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

   Or $\Phi^{-1}(\varepsilon_i)$ est l'unique polynôme de degré au plus n valant 1 en a_i et 0 en les autres points : c'est exactement L_i, puisque $L_i(a_j) = \delta_{ij}$. D'où le résultat.

   Autrement dit : les colonnes de V portent les puissances des points, celles de V^{-1} portent les polynômes de Lagrange. C'est le même objet lu dans les deux sens, et c'est la raison pour laquelle interpolation et déterminant de Vandermonde figurent dans le même chapitre.

3. Ici $n = 2$ et
$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Les polynômes de Lagrange associés à -1, 0, 2 sont
$$L_0 = \frac{(X-0)(X-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{X^2-2X}{3},$$
$$L_1 = \frac{(X+1)(X-2)}{(0+1)(0-2)} = \frac{-X^2+X+2}{2},$$
$$L_2 = \frac{(X+1)(X-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{X^2+X}{6}.$$
   En rangeant leurs coefficients en colonnes, dans l'ordre $1, X, X^2$:
$$V^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Vérification sur la première ligne de V et la première colonne de V^{-1} : $1 \times 0 + (-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \times \frac{1}{3} = 1$, comme attendu. Le produit complet VV^{-1} donne bien I_3.

Correction de l'exercice 4.47 Énoncé p. 13

1. En développant par rapport à la première ligne :
$$\Delta(1,2,3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 27 \end{vmatrix} = (54-24) - (27-8) + (3-2) = 30 - 19 + 1 = 12,$$
   et de même $\Delta(2,-1,5) = -324$. La formule à démontrer se vérifie sur ces deux exemples : dans le premier cas $(1+2+3) \times (2-1)(3-1)(3-2) = 6 \times 2 = 12$; dans le second, $(2-1+5) \times (-1-2)(5-2)(5+1) = 6 \times (-54) = -324$.

2. **Première méthode.**

   (a) La formule du déterminant de Vandermonde (théorème du cours), appliquée aux quatre scalaires a_1, a_2, a_3, X, donne
$$\det V(a_1, a_2, a_3, X) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (a_j - a_i) \right) \prod_{i=1}^{3} (X - a_i).$$

Par ailleurs, la dernière ligne de cette matrice 4×4 est $(1, X, X^2, X^3)$. Le développement par rapport à cette ligne s'écrit

$$\det V(a_1, a_2, a_3, X) = \sum_{k=0}^{3} X^k \, (-1)^{4+(k+1)} \, M_k,$$

où M_k est le mineur obtenu en supprimant la dernière ligne et la colonne des a_i^k.

(b) Regardons le coefficient de X^2 dans chacune des deux écritures.
À droite du développement. Le terme $k = 2$ a pour signe $(-1)^{4+3} = -1$, et le mineur M_2 s'obtient en supprimant la colonne des carrés : c'est exactement $\Delta(a_1, a_2, a_3)$. Le coefficient de X^2 vaut donc $-\Delta(a_1, a_2, a_3)$.
Dans la formule du cours. Le facteur $\prod_{i<j}(a_j - a_i)$ ne dépend pas de X. Dans $(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$, le coefficient de X^2 est $-(a_1 + a_2 + a_3)$, d'après les relations entre coefficients et racines (ou simplement en développant). Le coefficient de X^2 vaut donc $-(a_1+a_2+a_3)\prod_{i<j}(a_j-a_i)$.
Deux polynômes égaux ayant les mêmes coefficients, on identifie et l'on simplifie par -1 :

$$\Delta(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (a_j - a_i).$$

3. **Seconde méthode.**

(a) Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes du déterminant. Pour chaque i,

$$P(a_i) = a_i^3 + \beta a_i + \gamma,$$

donc la colonne des $P(a_i)$ est $C_3 + \beta C_2 + \gamma C_1$. Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

(b) En développant,

$$(X - a_1)(X - a_2)(X - t) = X^3 - (a_1 + a_2 + t)X^2 + \cdots$$

Le terme en X^2 est nul si et seulement si $t = -(a_1 + a_2)$.

(c) Prenons donc $P = (X - a_1)(X - a_2)\,(X + a_1 + a_2)$: c'est un polynôme unitaire de degré 3 sans terme en X^2, auquel la question (a) s'applique. Il vérifie $P(a_1) = P(a_2) = 0$ et

$$P(a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_1 + a_2 + a_3).$$

Donc

$$\Delta(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 1 & a_3 & P(a_3) \end{vmatrix} = P(a_3) \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = P(a_3)(a_2 - a_1),$$

en développant par rapport à la troisième colonne. On retrouve

$$\Delta(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (a_j - a_i).$$

4. Le déterminant est non nul si et seulement si chacun des deux facteurs l'est, c'est-à-dire si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts *et* $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$. La lacune coûte donc une condition supplémentaire : trois points distincts ne suffisent plus. Par exemple, pour $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 0, 1)$, les points sont distincts mais leur somme est nulle, et le déterminant s'annule ; c'est cohérent, car $a^3 = a$ pour $a \in \{-1, 0, 1\}$, de sorte que les deux dernières colonnes sont alors identiques.

Correction de l'exercice 4.48 **Énoncé p. 13**

1. Comme $j^3 = 1$, on a $j^4 = j$, donc la troisième ligne de J s'écrit $\begin{pmatrix}1 & j^2 & (j^2)^2\end{pmatrix}$ et
$$J = V(1, j, j^2).$$
Les trois racines cubiques de l'unité 1, j, j^2 sont deux à deux distinctes, donc la matrice de Vandermonde J a un déterminant non nul (théorème du cours sur le déterminant de Vandermonde) : J est inversible.

2. Calculons les colonnes de AJ.
La première colonne de J est $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^\top$ et chaque ligne de A a pour somme $a+b+c$, donc la première colonne de AJ vaut $(a+b+c)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^\top$.
Pour la deuxième, posons $\lambda = c + bj + aj^2$. En utilisant $j^3 = 1$:
$$a + cj + bj^2 = j\left(c + bj + aj^2\right) = \lambda j, \qquad b + aj + cj^2 = j^2\left(c + bj + aj^2\right) = \lambda j^2,$$
donc la deuxième colonne de AJ vaut λ fois la deuxième colonne de J.
De même, en posant $\mu = c + bj^2 + aj$, la troisième colonne de AJ vaut μ fois la troisième colonne de J. Ainsi
$$AJ = J\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$
En passant au déterminant, $\det A \cdot \det J = \det J \cdot (a+b+c)\lambda\mu$, et comme $\det J \neq 0$:
$$\det A = (a+b+c)\left(c + bj + aj^2\right)\left(c + bj^2 + aj\right).$$

Correction de l'exercice 4.49 **Énoncé p. 14**

1. La formule du binôme donne
$$(X + z_i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_i^{n-k} X^k.$$

2. La matrice N de la famille dans la base canonique a pour colonne d'indice i les coordonnées de $(X + z_i)^n$: son coefficient d'indice (k, i) vaut $\binom{n}{k} z_i^{n-k}$, pour $0 \leq k, i \leq n$.
On factorise $\binom{n}{k}$ dans la ligne d'indice k, pour chaque k :
$$\det N = \left(\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right) \det\left(z_i^{n-k}\right)_{0\leq k,i\leq n}.$$
Dans ce dernier déterminant, on renverse l'ordre des $n+1$ lignes, ce qui revient à effectuer $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ échanges de lignes : au signe $(-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$ près, on obtient $\det\left(z_i^k\right)_{0\leq k,i\leq n}$. Cette dernière matrice est la transposée de $V(z_0, \ldots, z_n)$, donc a le même déterminant. La formule du déterminant de Vandermonde (théorème du cours) donne enfin
$$\det V(z_0, \ldots, z_n) = \prod_{0\leq i<l\leq n} (z_l - z_i),$$
d'où la formule annoncée.

3. Les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ sont non nuls, et les z_i sont deux à deux distincts, donc le produit $\prod_{i<l}(z_l - z_i)$ est non nul. Ainsi $\det N \neq 0$: la famille est libre. Elle compte $n+1$ polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$: c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction de l'exercice 4.50 **Énoncé p. 15**

1. La somme étant directe et égale à E, tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_j \in F_j$ d'une unique façon : la composante x_i ne dépend que de x, et p_i est bien définie.

   Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, de décompositions $x = \sum_j x_j$ et $y = \sum_j y_j$. Alors $\lambda x + y = \sum_j \left(\lambda x_j + y_j\right)$ avec $\lambda x_j + y_j \in F_j$: c'est la décomposition de $\lambda x + y$, donc $p_i(\lambda x + y) = \lambda p_i(x) + p_i(y)$ et $p_i \in \mathcal{L}(E)$.

   Par construction $p_i(x) \in F_i$, donc $\operatorname{Im} p_i \subseteq F_i$. Réciproquement, si $x \in F_i$, sa décomposition est $x = 0 + \cdots + x + \cdots + 0$, donc $p_i(x) = x$. Ainsi $F_i \subseteq \operatorname{Im} p_i$, d'où $\operatorname{Im} p_i = F_i$, et comme $p_i(x) \in F_i$ pour tout x, on a $p_i\left(p_i(x)\right) = p_i(x)$: p_i est un projecteur.

   Enfin, pour tout $x \in E$, $\sum_i p_i(x) = \sum_i x_i = x$, c'est-à-dire $p_1 + \cdots + p_k = \mathrm{Id}_E$.

2. C'est l'exemple du cours : la trace d'un projecteur est son rang. On le redémontre en une ligne : si $r = \operatorname{rg}(p_i)$, alors $E = \operatorname{Im} p_i \oplus \operatorname{Ker} p_i$ et p_i est l'identité sur $\operatorname{Im} p_i$, donc sa matrice dans une base adaptée est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de trace r.

3. La trace est linéaire, donc

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr}(p_i) = \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) = \operatorname{tr}(\mathrm{Id}_E) = n.$$

   La question 2 permet de remplacer chaque trace par le rang correspondant.

4. Soit $x \in E$. Alors

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x),$$

   et $p_i(x) \in \operatorname{Im} p_i$: donc $x \in \operatorname{Im} p_1 + \cdots + \operatorname{Im} p_k$. L'inclusion réciproque est immédiate.

5. La dimension d'une somme de sous-espaces est au plus la somme de leurs dimensions (proposition du cours sur la dimension d'une somme) :

$$\dim\left(\operatorname{Im} p_1 + \cdots + \operatorname{Im} p_k\right) \leq \dim \operatorname{Im} p_1 + \cdots + \dim \operatorname{Im} p_k = \operatorname{rg}(p_1) + \cdots + \operatorname{rg}(p_k),$$

   avec égalité si et seulement si la somme est directe. Or le membre de gauche vaut $\dim E = n$ d'après la question 4, et celui de droite vaut n d'après la question 3. Il y a donc égalité, et la somme est directe.

6. Soient $i \neq j$ et $y \in E$. Posons $x = p_j(y) \in \operatorname{Im} p_j$; comme p_j est un projecteur, $p_j(x) = p_j\left(p_j(y)\right) = x$. En appliquant $\mathrm{Id}_E = \sum_l p_l$ à x :

$$x = \sum_{l=1}^{k} p_l(x) = x + \sum_{l \neq j} p_l(x), \qquad \text{donc} \qquad \sum_{l \neq j} p_l(x) = 0.$$

   Chaque terme $p_l(x)$ appartient à $\operatorname{Im} p_l$, et la somme des $\operatorname{Im} p_l$ est directe d'après la question 5 : tous les termes sont nuls. En particulier $p_i(x) = 0$, c'est-à-dire $p_i\left(p_j(y)\right) = 0$. Ceci valant pour tout y, $p_i \circ p_j = 0$.

7. D'après les questions 4 et 5, $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} p_k$. Notons q_i le projecteur associé à cette décomposition au sens de la partie I. Soit $x \in E$: l'écriture $x = \sum_l p_l(x)$ de la question 4 est une décomposition de x selon les $\operatorname{Im} p_l$, donc *la* décomposition de x, puisque la somme est directe. Sa i-ième composante est par définition $q_i(x)$, d'où $q_i(x) = p_i(x)$ pour tout x, soit $p_i = q_i$.
   Posons $r_l = \operatorname{rg}(p_l)$ et concaténons une base de chaque $\operatorname{Im} p_l$ pour obtenir une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition. Comme p_i est l'identité sur $\operatorname{Im} p_i$ et nul sur les autres $\operatorname{Im} p_l$ (question 6), sa matrice dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_i) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{r_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

   le bloc I_{r_i} occupant la i-ième place diagonale.

8. Si tous les p_i sont de rang 1, la question 3 donne $k = 1 + \cdots + 1 = n$. Chaque $\operatorname{Im} p_i$ est alors une droite : si $e_i \in \operatorname{Im} p_i$ est non nul, la famille (e_i) est une base de $\operatorname{Im} p_i$. La concaténation $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc une base adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} p_n$, en particulier une base de E.

9. Supposons $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q,$$

   donc $p + q$ est un projecteur.
   Réciproquement, supposons $p + q$ projecteur et posons $r = \operatorname{Id}_E - (p+q)$. Alors

$$r \circ r = \operatorname{Id}_E - 2(p+q) + (p+q) \circ (p+q) = \operatorname{Id}_E - (p+q) = r,$$

   donc r est un projecteur, et $p + q + r = \operatorname{Id}_E$. Les trois projecteurs p, q, r relèvent donc de la partie II avec $k = 3$, et la question 6 donne $p \circ q = q \circ p = 0$.
   Supposons enfin ces deux relations vérifiées. Pour $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$ et $q(x) = q(p(x)) = 0$, donc $(p+q)(x) = x$ et $x \in \operatorname{Im}(p+q)$; de même $\operatorname{Im} q \subseteq \operatorname{Im}(p+q)$. L'inclusion $\operatorname{Im}(p+q) \subseteq \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ étant claire, on obtient $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Enfin, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $x = p(x)$ et $x = q(x)$, donc

$$x = p(x) = p\,(q(x)) = 0,$$

   et la somme est directe.

Correction de l'exercice 4.51 **Énoncé p. 15**

1. Multiplions d'abord les deux dernières matrices :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AA^{-1}B \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

   Puis multiplions à gauche :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ CA^{-1} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ CA^{-1}A & CA^{-1}B + S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

   puisque $CA^{-1}A = C$ et $CA^{-1}B + S = D$ par définition de S. C'est bien M.

Tous les produits écrits ont un sens : on vérifie au passage que les tailles se correspondent, par exemple $CA^{-1}B$ est de taille $q \times q$, comme D.

2. Les deux matrices extrêmes sont triangulaires par blocs, avec des blocs diagonaux égaux à I_p et I_q : leur déterminant vaut $\det I_p \cdot \det I_q = 1$. Celui de la matrice centrale, diagonale par blocs, vaut $\det A \cdot \det S$. Le déterminant étant multiplicatif,

$$\det M = 1 \times \det A \cdot \det S \times 1 = \det A \cdot \det S.$$

3. La matrice A étant inversible, $\det A \neq 0$. Donc $\det M \neq 0$ si et seulement si $\det S \neq 0$, c'est-à-dire M est inversible si et seulement si S l'est.

   On peut aussi le lire directement sur la factorisation : les deux matrices extrêmes sont inversibles, puisque leur déterminant vaut 1 ; donc M est inversible si et seulement si la matrice centrale l'est.

4. Multiplions d'abord les deux dernières matrices :

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ D^{-1}C & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ DD^{-1}C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

   puis multiplions à gauche :

$$\begin{pmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T + BD^{-1}C & BD^{-1}D \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

   puisque $T + BD^{-1}C = A$ par définition de T. C'est bien M.

   Les deux matrices extrêmes sont triangulaires par blocs, de blocs diagonaux I_p et I_q, donc de déterminant 1 ; celui de la matrice centrale, diagonale par blocs, vaut $\det T \cdot \det D$. Donc $\det M = \det D \cdot \det T$.

   On peut aussi ramener cette identité à la question 2. La matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & I_q \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_q & 0 \end{pmatrix}$, et

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} :$$

   c'est la même situation, les rôles de A et D étant échangés, et le complément de Schur de son bloc supérieur gauche vaut $A - BD^{-1}C = T$. La question 2 donne alors $\det M = \det\left(PMP^{-1}\right) = \det D \cdot \det T$.

5. D'après la question 3, S est inversible. Les deux matrices extrêmes de la factorisation le sont aussi, et leurs inverses s'obtiennent en changeant le signe du bloc hors diagonale :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ CA^{-1} & I_q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

   comme on le vérifie en effectuant le produit. En inversant le produit de trois matrices, l'ordre des facteurs se renverse :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & -A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{pmatrix}.$$

Les deux premiers facteurs donnent

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix},$$

puis le produit par le troisième donne

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}.$$

6. Découpons en blocs 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = 1$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad CA^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

d'où

$$S = D - CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\det M = \det A \cdot \det S = 1 \times (-5) = -5$.

On a ainsi calculé un déterminant 4×4 au prix de deux déterminants 2×2 et de quelques produits de matrices 2×2.

7. Découpons M selon les notations de la partie I : ici $A = I_p$, $B = -U$, $C = V$ et $D = I_q$. Le bloc $A = I_p$ est inversible, et son complément de Schur vaut

$$S = D - CA^{-1}B = I_q - VI_p^{-1}(-U) = I_q + VU.$$

La question 2 donne donc $\det M = \det I_p \cdot \det S = \det(I_q + VU)$.

8. Le bloc $D = I_q$ est lui aussi inversible, et son complément de Schur vaut

$$T = A - BD^{-1}C = I_p - (-U)I_q^{-1}V = I_p + UV.$$

La question 4 donne donc $\det M = \det I_q \cdot \det T = \det(I_p + UV)$.

9. Les deux questions précédentes calculent le même déterminant :

$$\det(I_p + UV) = \det M = \det(I_q + VU).$$

10. Si $p = q$, les matrices U et V sont carrées de même taille, et la multiplicativité du déterminant donne

$$\det(UV) = \det U \cdot \det V = \det V \cdot \det U = \det(VU).$$

Supposons maintenant $p < q$. La matrice VU est de taille q, et

$$\operatorname{rg}(VU) \leq \operatorname{rg}(U) \leq \min(p, q) = p < q,$$

donc VU n'est pas inversible et $\det(VU) = 0$. Prenons par exemple $p = 1$, $q = 2$ et

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $UV = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, de déterminant 1, tandis que $VU = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, de déterminant 0. L'identité de Sylvester, elle, reste vraie : $\det(I_1 + UV) = 2$ et $\det(I_2 + VU) = \det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2$. Elle porte sur $I + UV$, non sur UV.

11. Appliquons la question 9 avec $p = n$, $q = 1$, $U = x$ et $V = y^\top$:

$$\det\left(I_n + xy^\top\right) = \det\left(I_1 + y^\top x\right) = 1 + y^\top x.$$

12. Notons $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1. Le coefficient d'indice (i, j) de $uu^\top$ vaut $u_i u_j = 1$, donc $J = uu^\top$. La question 11, avec $x = y = u$, donne

$$\det(I_n + J) = 1 + u^\top u = 1 + n,$$

puisque $u^\top u = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

13. Découpons M selon les notations de la partie I, avec $p = n$ et $q = 1$: le bloc supérieur gauche est A, inversible, et $B = -x$, $C = y^\top$, $D = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$. Son complément de Schur vaut

$$D - CA^{-1}B = 1 - y^\top A^{-1}(-x) = 1 + y^\top A^{-1}x = s.$$

D'après la question 3, M est inversible si et seulement si son complément de Schur l'est, c'est-à-dire si et seulement si $s \neq 0$, une matrice 1×1 étant inversible exactement quand son unique coefficient est non nul.

14. Le bloc $D = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ est inversible, égal à son propre inverse. Son complément de Schur vaut

$$T = A - BD^{-1}C = A - (-x)y^\top = A + xy^\top.$$

La question 4 donne $\det M = \det D \cdot \det T = \det T$, et la question 2 donne $\det M = \det A \cdot s$. Comme A est inversible et $s \neq 0$, on obtient

$$\det\left(A + xy^\top\right) = s \cdot \det A \neq 0,$$

donc $A + xy^\top$ est inversible.

15. Reprenons la factorisation de la question 4, en notant $L = \begin{pmatrix}I_n & BD^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix}I_n & 0\\ D^{-1}C & 1\end{pmatrix}$, de sorte que $M = L\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}R$. Les matrices L et R sont inversibles, d'inverses obtenus en changeant le signe du bloc hors diagonale, et T est inversible par la question précédente ; donc

$$M^{-1} = R^{-1}\begin{pmatrix}T^{-1} & 0\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}L^{-1} = \begin{pmatrix}I_n & 0\\ -D^{-1}C & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T^{-1} & 0\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & -BD^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

La première ligne de blocs de R^{-1} est $\begin{pmatrix}I_n & 0\end{pmatrix}$ et la première colonne de blocs de L^{-1} est $\begin{pmatrix}I_n\\ 0\end{pmatrix}$: le bloc supérieur gauche de M^{-1} vaut donc $T^{-1} = (A + xy^\top)^{-1}$. D'autre part, la question 5 appliquée à M, dont le complément de Schur de A est s, donne pour bloc supérieur gauche de M^{-1} :

$$A^{-1} + A^{-1}Bs^{-1}CA^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(-x)\,s^{-1}y^\top A^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy^\top A^{-1}}{s},$$

où l'on a fait passer le scalaire s^{-1} devant. En identifiant les deux expressions, on obtient la formule annoncée.

16. Ici $A = I_2$, donc $A^{-1} = I_2$, et $s = 1 + e_2^\top e_1 = 1$ puisque $e_2^\top e_1 = 0$. Par ailleurs $e_1 e_2^\top = E_{1,2}$. La formule prédit

$$\left(I_2 + E_{1,2}\right)^{-1} = I_2 - E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce que confirme le calcul direct :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

17. Notons $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1, de sorte que $uu^\top$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Alors

$$B = (a-1)I_n + uu^\top,$$

car les coefficients diagonaux du membre de droite valent $(a-1)+1 = a$ et les autres $0+1 = 1$. Appliquons la formule avec $A = (a-1)I_n$, qui est inversible puisque $a \neq 1$, et $x = y = u$. On a $A^{-1} = \frac{1}{a-1} I_n$ et

$$s = 1 + u^\top \frac{1}{a-1} I_n \, u = 1 + \frac{n}{a-1} = \frac{a+n-1}{a-1},$$

qui est non nul puisque $a \neq 1-n$. La formule de Sherman–Morrison donne alors

$$B^{-1} = \frac{1}{a-1} I_n - \frac{1}{s} \cdot \frac{uu^\top}{(a-1)^2} = \frac{1}{a-1} I_n - \frac{uu^\top}{(a-1)(a+n-1)},$$

c'est-à-dire

$$B^{-1} = \frac{1}{a-1}\left(I_n - \frac{1}{a+n-1}\, uu^\top\right).$$

Pour $n = 2$ et $a = 2$, on retrouve bien

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4.52 **Énoncé p. 17**

1. **Initialisation :** pour $k = 1$, la relation s'écrit $AB - BA = A$, qui est l'hypothèse. **Hérédité :** supposons $A^k B - BA^k = kA^k$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$A^{k+1}B = A\left(A^k B\right) = A\left(BA^k + kA^k\right) = (AB)A^k + kA^{k+1}.$$

Or $AB = BA + A$, donc

$$A^{k+1}B = (BA + A)A^k + kA^{k+1} = BA^{k+1} + A^{k+1} + kA^{k+1} = BA^{k+1} + (k+1)A^{k+1},$$

ce qui est la relation au rang $k+1$.

2. Prenons la trace de l'égalité de la question 1. Le membre de gauche est de trace nulle, puisque $\operatorname{tr}(A^k B) = \operatorname{tr}(BA^k)$. Donc $k \operatorname{tr}(A^k) = 0$, et comme $k \neq 0$, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.
3. Supposons A inversible. En multipliant $AB - BA = A$ à gauche par A^{-1} :

$$B - A^{-1}BA = I_n.$$

Posons $C = A^{-1}B$: alors $B = AC$ et $A^{-1}BA = CA$, de sorte que $AC - CA = I_n$, ce que l'exercice 4.39 interdit. Donc A n'est pas inversible.

4. Posons $B' = \frac{1}{\lambda}B$. Alors

$$AB' - B'A = \frac{1}{\lambda}(AB - BA) = A,$$

et le couple (A, B') relève des questions 1 à 3 : on a encore $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et A n'est pas inversible.

5. La dérivation est linéaire et ne fait pas sortir de $\mathbb{K}[X]$; la multiplication par X aussi. Ce sont donc deux endomorphismes de E. Pour $P \in E$, la dérivée d'un produit donne

$$D\left(M(P)\right) = (XP)' = P + XP', \qquad M\left(D(P)\right) = XP',$$

d'où $D\left(M(P)\right) - M\left(D(P)\right) = P$, c'est-à-dire $D \circ M - M \circ D = \mathrm{Id}_E$.

6. **Initialisation :** pour $k = 1$, c'est la question 5, puisque $M^0 = \mathrm{Id}_E$.
Hérédité : supposons $D \circ M^k - M^k \circ D = kM^{k-1}$. Alors

$$D \circ M^{k+1} = \left(D \circ M^k\right) \circ M = \left(M^k \circ D + kM^{k-1}\right) \circ M = M^k \circ (D \circ M) + kM^k.$$

Or $D \circ M = M \circ D + \mathrm{Id}_E$ d'après la question 5, donc

$$D \circ M^{k+1} = M^k \circ (M \circ D + \mathrm{Id}_E) + kM^k = M^{k+1} \circ D + (k+1)M^k,$$

ce qui est la relation au rang $k + 1$.

7. La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre : une combinaison linéaire nulle d'un nombre fini de X^k est un polynôme nul, dont tous les coefficients sont nuls. Un espace de dimension finie d ne contient aucune famille libre de plus de d vecteurs : $\mathbb{K}[X]$ n'est donc pas de dimension finie.
L'exercice 4.39 ne repose pas sur la relation elle-même, mais sur l'existence de la trace, qui n'est définie que pour des matrices carrées de taille finie, c'est-à-dire pour des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Rien n'interdit donc à D et M de vérifier $D \circ M - M \circ D = \mathrm{Id}_E$.

8. Notons $d = \dim F$ et supposons $d \geq 1$. Comme F est stable par D et par M, ces deux endomorphismes induisent des endomorphismes $D|_F$ et $M|_F$ de F, et pour $P \in F$:

$$\left(D|_F \circ M|_F - M|_F \circ D|_F\right)(P) = (D \circ M - M \circ D)(P) = P.$$

Donc $D|_F \circ M|_F - M|_F \circ D|_F = \mathrm{Id}_F$. En écrivant les matrices de $D|_F$ et $M|_F$ dans une base de F, on obtient deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_d$, ce que l'exercice 4.39 interdit. Donc $d = 0$, c'est-à-dire $F = \{0\}$.
Directement : supposons $F \neq \{0\}$. Les degrés des éléments non nuls de F sont majorés par le plus grand des degrés des vecteurs d'une base de F, donc F contient un polynôme non nul P de degré maximal, disons δ. Mais $M(P) = XP$ appartient à F et est de degré $\delta + 1$, ce qui contredit la maximalité.

Correction de l'exercice 4.53 **Énoncé p. 18**

1. L'évaluation en un point et la dérivation sont linéaires, donc chaque composante de Φ l'est, et Φ aussi. L'espace de départ $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$ est de dimension $2n+2$, et l'espace d'arrivée $\mathbb{K}^{2n+2}$ également : ils ont même dimension, finie.

2. Par définition, $P \in \operatorname{Ker}\Phi$ si et seulement si $P(a_i) = P'(a_i) = 0$ pour tout i, c'est-à-dire si et seulement si chaque a_i est racine de P de multiplicité au moins 2, ou encore si et seulement si $(X-a_i)^2$ divise P pour tout i.
   Reste à voir que ces $n+1$ divisibilités équivalent à la seule divisibilité par A^2. Commençons par une remarque : si $P = RQ$ avec $R(a) \neq 0$, alors a est racine de P de multiplicité au moins 2 si et seulement s'il l'est de Q. En effet $P(a) = R(a)Q(a)$, donc $P(a) = 0$ équivaut à $Q(a) = 0$; et comme $P' = R'Q + RQ'$, cette condition étant acquise, $P'(a) = R(a)Q'(a)$ équivaut à $Q'(a) = 0$.
   Supposons chaque a_i racine au moins double de P, et montrons par récurrence sur $i \in \{0, \dots, n+1\}$ qu'il existe $Q_i \in \mathbb{K}[X]$ tel que
   $$P = (X-a_0)^2 \cdots (X-a_{i-1})^2 \, Q_i,$$
   les scalaires $a_i, \dots, a_n$ étant racines au moins doubles de Q_i.
   Initialisation : pour $i = 0$, le produit est vide et $Q_0 = P$ convient.
   Hérédité : supposons la propriété au rang $i \leq n$. Comme a_i est racine au moins double de Q_i, on peut écrire $Q_i = (X-a_i)^2 Q_{i+1}$, d'où $P = (X-a_0)^2 \cdots (X-a_i)^2 \, Q_{i+1}$. Les a_j étant deux à deux distincts, le facteur $(X-a_0)^2 \cdots (X-a_i)^2$ ne s'annule en aucun des $a_{i+1}, \dots, a_n$; or ceux-ci sont racines au moins doubles de P, donc de Q_{i+1} d'après la remarque.
   Au rang $i = n+1$, on obtient $P = A^2 \, Q_{n+1}$.
   Réciproquement, si A^2 divise P, chaque $(X-a_i)^2$ divise A^2, donc divise P.

3. Soit $P \in \operatorname{Ker}\Phi$ non nul. Alors A^2 divise P, donc
   $$\deg P \geq \deg A^2 = 2n+2 > 2n+1,$$
   ce qui contredit $P \in \mathbb{K}_{2n+1}[X]$. Donc $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, et Φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie : c'est un isomorphisme.

4. L'isomorphisme Φ signifie exactement ceci : pour toutes familles (α_i) et (β_i) de scalaires, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{2n+1}[X]$ tel que
   $$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \qquad P(a_i) = \alpha_i \quad \text{et} \quad P'(a_i) = \beta_i.$$
   C'est le *polynôme d'interpolation d'Hermite* associé à ces données.

5. Chaque L_i est de degré n, donc L_i^2 est de degré $2n$ et H_i, K_i sont de degré au plus $2n+1$.
   Rappelons que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$. Comme $L_i^2(a_j) = \delta_{ij}$ également :
   $$H_i(a_j) = \big(1 - 2L_i'(a_i)(a_j - a_i)\big)\,\delta_{ij} = \delta_{ij},$$
   car le facteur δ_{ij} annule tout pour $j \neq i$, tandis que pour $j = i$ le facteur $a_j - a_i$ est nul. De même $K_i(a_j) = (a_j - a_i)\delta_{ij} = 0$ pour tout j, nul dans les deux cas.
   Pour les dérivées, posons $c = L_i'(a_i)$. Alors
   $$H_i' = -2c\,L_i^2 + (1 - 2c(X-a_i)) \cdot 2L_iL_i', \qquad K_i' = L_i^2 + (X-a_i) \cdot 2L_iL_i'.$$

Si $j \neq i$, alors $L_i(a_j) = 0$ annule tous les termes : $H_i'(a_j) = K_i'(a_j) = 0$. Si $j = i$, alors $L_i(a_i) = 1$ et

$$H_i'(a_i) = -2c + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c = 0, \qquad K_i'(a_i) = 1 + 0 = 1.$$

En résumé, $H_i(a_j) = \delta_{ij}$, $H_i'(a_j) = 0$, $K_i(a_j) = 0$ et $K_i'(a_j) = \delta_{ij}$.

6. Les images par Φ des $2n+2$ polynômes $H_0, K_0, \ldots, H_n, K_n$ sont, d'après la question 5, les $2n+2$ vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^{2n+2}$. Comme Φ est un isomorphisme, la famille $(H_0, K_0, \ldots, H_n, K_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$.
   Le polynôme $Q = \sum_i \alpha_i H_i + \sum_i \beta_i K_i$ appartient à $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$ et vérifie, toujours d'après la question 5, $Q(a_j) = \alpha_j$ et $Q'(a_j) = \beta_j$ pour tout j. Par unicité, $Q = P$.
7. Le polynôme Λ est de degré au plus n, donc appartient à $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$. Il vérifie $\Lambda(a_i) = \alpha_i$ par définition de la base de Lagrange, et $\Lambda'(a_i) = \beta_i$ par choix des β_i. Ces $2n+2$ conditions caractérisent le polynôme d'Hermite d'après la question 4 : celui-ci vaut donc Λ.
8. Pour $n = 0$, on a $\mathbb{K}_{2n+1}[X] = \mathbb{K}_1[X]$, et un polynôme de degré au plus 1 s'écrit $P = \lambda + \mu(X - a_0)$. Les conditions $P(a_0) = \alpha_0$ et $P'(a_0) = \beta_0$ donnent $\lambda = \alpha_0$ et $\mu = \beta_0$, d'où
$$P = \alpha_0 + \beta_0(X - a_0).$$
9. Prenons $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc $n = 1$ et $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Les polynômes de Lagrange sont $L_0 = 1 - X$ et $L_1 = X$, de dérivées constantes -1 et 1. Les données sont $\alpha_0 = \beta_0 = \beta_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$, donc $P = H_1$ avec
$$H_1 = (1 - 2 \cdot 1 \cdot (X - 1))\, X^2 = (3 - 2X)X^2 = 3X^2 - 2X^3.$$
   Vérification : $P(0) = 0$, $P' = 6X - 6X^2$ donc $P'(0) = 0$, $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$.
10. Les deux points 0 et ε sont distincts, et les polynômes de Lagrange associés sont $\frac{X-\varepsilon}{-\varepsilon}$ et $\frac{X}{\varepsilon}$. Le polynôme cherché est donc
$$P_\varepsilon = \alpha \cdot \frac{X - \varepsilon}{-\varepsilon} + (\alpha + \varepsilon\beta) \cdot \frac{X}{\varepsilon} = \alpha - \frac{\alpha X}{\varepsilon} + \frac{\alpha X}{\varepsilon} + \beta X = \alpha + \beta X.$$
    Il ne dépend pas de ε : sa limite quand ε tend vers 0 est $\alpha + \beta X$.
    C'est exactement le polynôme d'Hermite de la question 8 pour $a_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha$ et $\beta_0 = \beta$. La condition de Lagrange en ε s'écrit
$$\frac{P_\varepsilon(\varepsilon) - P_\varepsilon(0)}{\varepsilon} = \beta,$$
    c'est-à-dire un taux d'accroissement égal à β : lorsque les deux points se confondent, cette condition devient $P'(0) = \beta$.

Correction de l'exercice 4.54 **Énoncé p. 19**

1. Le coefficient d'indice (i, j) de Ω vaut 1 si $j - i \equiv 1$ modulo n, et 0 sinon. Une récurrence immédiate donne alors, pour $k \in \mathbb{N}$: le coefficient d'indice (i, j) de Ω^k vaut 1 si $j - i \equiv k$ modulo n, et 0 sinon.
   En effet, le coefficient d'indice (i, j) de $\Omega^k\Omega$ vaut
$$\sum_{l=1}^{n} (\Omega^k)_{il}\, \Omega_{lj},$$

et le seul terme non nul est celui pour lequel $l - i \equiv k$ et $j - l \equiv 1$, c'est-à-dire $j - i \equiv k + 1$; il vaut alors 1.

Pour $k = n$, la condition $j - i \equiv n \equiv 0$ signifie $i = j$: donc $\Omega^n = I_n$. Au passage, Ω^k est la circulante $C(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ dont le 1 occupe la place d'indice k modulo n.

2. D'après la question 1, le coefficient d'indice (i, j) de $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Omega^k$ vaut a_k pour l'unique $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $j - i \equiv k$, soit a_{j-i}. C'est bien le coefficient d'indice (i, j) de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$, donc

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Omega^k = P(\Omega).$$

3. La question 2 dit que $\mathcal{C}_n$ est l'image de l'application linéaire $(a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto \sum_k a_k \Omega^k$: c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, engendré par $I_n, \Omega, \dots, \Omega^{n-1}$. Ces n matrices sont libres, car une combinaison linéaire nulle $\sum_k a_k \Omega^k = 0$ est une matrice circulante nulle, donc a tous ses a_k nuls. Ainsi $\dim \mathcal{C}_n = n$.

Si $C = P(\Omega)$ et $C' = Q(\Omega)$ sont circulantes, alors $CC' = (PQ)(\Omega)$ est un polynôme en Ω. En remplaçant PQ par son reste dans la division euclidienne par $X^n - 1$, ce qui ne change rien puisque $\Omega^n = I_n$, on obtient un polynôme de degré au plus $n - 1$: donc $CC' \in \mathcal{C}_n$. Enfin $CC' = (PQ)(\Omega) = (QP)(\Omega) = C'C$: deux circulantes commutent.

4. La i-ième coordonnée de v_k est $\omega^{(i-1)k}$. D'après la question 1, la i-ième coordonnée de $\Omega\, v_k$ est la coordonnée d'indice j de v_k pour le j tel que $j \equiv i + 1$, c'est-à-dire ω^{ik} si $i < n$, et $\omega^0 = 1$ si $i = n$. Or

$$\omega^{ik} = \omega^k \cdot \omega^{(i-1)k}, \qquad \text{et pour } i = n, \quad \omega^k \cdot \omega^{(n-1)k} = \omega^{nk} = 1,$$

puisque $\omega^n = 1$. Dans tous les cas, la i-ième coordonnée de $\Omega\, v_k$ vaut ω^k fois celle de v_k : donc $\Omega\, v_k = \omega^k v_k$.

Par récurrence, $\Omega^m v_k = \omega^{mk} v_k$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc

$$C v_k = P(\Omega) v_k = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \Omega^m v_k = \left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m \omega^{mk} \right) v_k = P(\omega^k)\, v_k.$$

5. Le coefficient d'indice $(i, k+1)$ de V est la i-ième coordonnée de v_k, soit $\omega^{(i-1)k} = \left(\omega^{i-1}\right)^k$. La i-ième ligne de V est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega^{i-1} & \left(\omega^{i-1}\right)^2 & \cdots & \left(\omega^{i-1}\right)^{n-1} \end{pmatrix},$$

et $V = V(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ est la matrice de Vandermonde associée aux n racines n-ièmes de l'unité. Celles-ci sont deux à deux distinctes, donc V est inversible (théorème du cours).

6. Posons $D = \operatorname{diag}\left(P(1), \dots, P(\omega^{n-1})\right)$. La $(k+1)$-ième colonne de CV est $C v_k = P(\omega^k) v_k$ d'après la question 4, et c'est aussi la $(k+1)$-ième colonne de VD. Donc $CV = VD$.

En passant au déterminant, $\det C \cdot \det V = \det V \cdot \det D$, et $\det V \neq 0$ permet de simplifier :

$$\det C = \det D = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

7. Les racines de $X^n - 1$ sont exactement les ω^k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, et elles sont simples. Donc P et $X^n - 1$ ont une racine commune si et seulement si $P(\omega^k) = 0$ pour un certain k, c'est-à-dire, d'après la question 6, si et seulement si $\det C = 0$. Autrement dit, C est inversible si et seulement si P et $X^n - 1$ n'ont aucune racine commune.
8. Les colonnes de V sont $v_0, \dots, v_{n-1}$ et V est inversible d'après la question 5 : la famille $(v_0, \dots, v_{n-1})$ est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, et
$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(v_0) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}(v_{n-1}).$$
Chaque droite $\mathrm{Vect}(v_k)$ est stable par toute circulante C, puisque $Cv_k = P(\omega^k)v_k \in \mathrm{Vect}(v_k)$ d'après la question 4.
9. La base $(v_0, \dots, v_{n-1})$ est adaptée à la décomposition précédente, et chaque droite est stable : la matrice de l'endomorphisme associé à C y est donc diagonale par blocs de taille 1, c'est-à-dire diagonale. Son $(k+1)$-ième coefficient diagonal est le scalaire λ tel que $Cv_k = \lambda v_k$, soit $P(\omega^k)$.
10. Pour $P = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$, on a $P(1) = n$ et, pour $k \neq 0$, $\omega^k \neq 1$ donne
$$P(\omega^k) = \frac{\omega^{nk} - 1}{\omega^k - 1} = 0.$$
Le produit de la question 6 contient donc un facteur nul, et le déterminant est nul. C'est cohérent : la circulante associée est la matrice dont tous les coefficients valent 1, dont toutes les lignes sont égales.
Pour $C(1,2,3,4)$, on a $n = 4$, $\omega = \mathrm{i}$ et $P = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3$. Alors
$$P(1) = 10, \qquad P(\mathrm{i}) = -2 - 2\mathrm{i}, \qquad P(-1) = -2, \qquad P(-\mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i},$$
et comme $(-2 - 2\mathrm{i})(-2 + 2\mathrm{i}) = 4 + 4 = 8$:
$$\det C(1,2,3,4) = 10 \times 8 \times (-2) = -160.$$

Correction de l'exercice 4.55 **Énoncé p. 20**

1. On a immédiatement $D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$. Pour $n = 2$:
$$D_2 = \frac{1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} - \frac{1}{(a_1 + b_2)(a_2 + b_1)} = \frac{(a_1 + b_2)(a_2 + b_1) - (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}{\prod_{1 \le i,j \le 2}(a_i + b_j)}.$$
Le numérateur vaut
$$(a_1a_2 + a_1b_1 + a_2b_2 + b_1b_2) - (a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1),$$
ce qui est bien la formule annoncée pour $n = 2$.
2. Pour $i \le n - 1$, le coefficient d'indice (i, j) devient
$$\frac{1}{a_i + b_j} - \frac{1}{a_n + b_j} = \frac{(a_n + b_j) - (a_i + b_j)}{(a_i + b_j)(a_n + b_j)} = \frac{a_n - a_i}{(a_i + b_j)(a_n + b_j)}.$$
Ces opérations ne changent pas le déterminant.
3. Le facteur $\frac{1}{a_n + b_j}$ apparaît dans tous les coefficients de la colonne j : dans ceux d'indice $i \le n - 1$ d'après la question 2, et dans le dernier, qui vaut $\frac{1}{a_n + b_j}$. En

le sortant de chaque colonne, on multiplie le déterminant par $\prod_j \frac{1}{a_n+b_j}$, et la matrice devient : coefficient $\frac{a_n-a_i}{a_i+b_j}$ pour $i \leq n-1$, et 1 sur la dernière ligne.
On sort ensuite $a_n - a_i$ de la ligne i, pour $i \leq n-1$: il reste exactement la matrice M, d'où la formule.

4. Effectuons $C_j \leftarrow C_j - C_n$ pour $1 \leq j \leq n-1$, ce qui ne change pas det M. Pour $i \leq n-1$ et $j \leq n-1$, le coefficient devient

$$\frac{1}{a_i+b_j} - \frac{1}{a_i+b_n} = \frac{b_n - b_j}{(a_i+b_j)(a_i+b_n)},$$

tandis que la dernière ligne devient $(0, \ldots, 0, 1)$.
Sortons $b_n - b_j$ de la colonne j pour $j \leq n-1$, puis $\frac{1}{a_i+b_n}$ de la ligne i pour $i \leq n-1$; ce dernier facteur transforme aussi le coefficient d'indice (i,n), qui valait $\frac{1}{a_i+b_n}$, en 1. La matrice obtenue est

$$N = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right),$$

et un développement par rapport à la dernière ligne donne $\det N = D_{n-1}$, puisque le bloc supérieur gauche est C_{n-1}. D'où la formule annoncée.

5. **Initialisation :** pour $n = 1$, la formule donne $\frac{1}{a_1+b_1}$, le produit sur $i < j$ étant vide et valant 1 : c'est bien D_1.
Hérédité : supposons la formule vraie au rang $n-1$, avec $n \geq 2$. Les questions 3 et 4 donnent

$$D_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)(b_n - b_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)} \cdot D_{n-1}.$$

Le dénominateur est exactement le quotient $\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j) \,/\, \prod_{1\leq i,j\leq n-1}(a_i+b_j)$: il rassemble les facteurs $a_i + b_j$ dont l'un au moins des indices vaut n, chacun une fois. Quant au numérateur, il rassemble les facteurs $(a_j-a_i)(b_j-b_i)$ pour $j = n$. En reportant l'hypothèse de récurrence, on obtient la formule au rang n.

6. Avec $a_i = i$ et $b_j = j-1$, on a $a_i + b_j = i + j - 1$, qui est non nul puisque $i, j \geq 1$: la matrice de Hilbert est bien de la forme C_n. Comme $a_j - a_i = j - i$ et $b_j - b_i = j - i$,

$$\det H_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i)^2}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(i+j-1)}.$$

Pour $n = 3$, le numérateur vaut $(1 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 4$ et le dénominateur

$$(1\cdot 2\cdot 3)(2\cdot 3\cdot 4)(3\cdot 4\cdot 5) = 6 \times 24 \times 60 = 8640,$$

d'où $\det H_3 = \frac{4}{8640} = \frac{1}{2160}$.