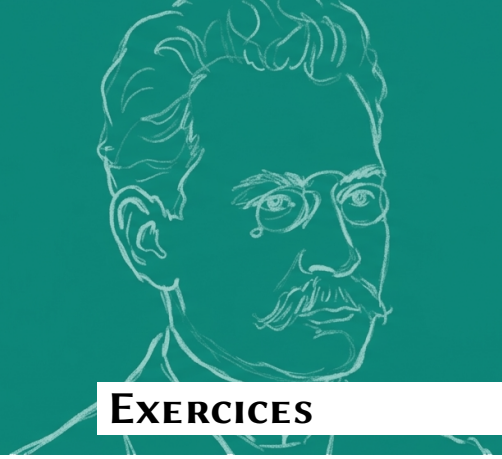


5 Normes

Exercices

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 5.1 Calculs de normes usuelles
  - 5.2 Une norme sur $\mathbb{R}^2$ et sa boule unité
  - 5.3 Boules, parties bornées et convexes
  - 5.4 Suites de vecteurs et de fonctions
- **Piste rouge**
  - 5.6 Norme matricielle sous-multiplicative
  - 5.11 Suite de vecteurs $X_{n+1} = AX_n + B$
  - 5.23 Convergence de la suite (A^n)
  - 5.19 Normes intégrales à poids
- **Piste bleue**
  - 5.7 Une norme sur les polynômes
  - 5.10 Suite récurrente et point fixe
  - 5.13 Convergence de la norme d'une suite
  - 5.17 Comparaison des normes usuelles
- **Piste noire**
  - 5.8 Norme infinie de matrices (CCP 2017)
  - 5.24 Moyennes de Cesàro d'une suite
  - 5.30 Limite d'un produit de matrices
  - 5.32 Normes subordonnées, inverse de $I_n - A$

Exercice 5.1 ○ Correction p. 13

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x = (1, -2, 2)$ et $y = (3, 0, -4)$. Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$, puis les mêmes normes de y et de $x + y$. Vérifier sur ces valeurs l'inégalité triangulaire pour chacune des trois normes.
2. Calculer la distance de x à y pour chacune de ces trois normes.
3. Dans $\mathbb{C}^2$, calculer $\|z\|_1$, $\|z\|_2$ et $\|z\|_\infty$ pour $z = (1 + \mathrm{i},\ -2\mathrm{i})$.
4. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soit $x \in E$ non nul. Montrer que $N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = 1$. Expliciter ce vecteur pour le vecteur x de la question 1 et chacune des trois normes.
5. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, et soient $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto t^2$. Calculer $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$, puis les mêmes normes de g et de $f - g$.

Exercice 5.2 • Correction p. 14

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max(|x|, |x + y|)$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter la boule unité fermée de centre 0 pour N. Montrer qu'elle contient celle de $\|\cdot\|_1$, mais qu'elle n'est pas contenue dans celle de $\|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que $N \leq 2\|\cdot\|_\infty$ et que $\|\cdot\|_\infty \leq 2N$.
4. En déduire que N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, puis qu'une suite de $\mathbb{R}^2$ converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5.3 ○ Correction p. 15

1. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ la boule fermée de centre $(1, -1)$ et de rayon 2, d'abord pour $\|\cdot\|_1$, puis pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$, déterminer lesquelles sont bornées et lesquelles sont convexes :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ |x| + |y| \leq 3\right\}, \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ xy = 1\right\},$$
$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}, \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \geq x^2\right\}.$$

3. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, soit $f \in E$ et soit $r > 0$. Décrire géométriquement la boule fermée de centre f et de rayon r.
4. Mêmes questions qu'en 2 pour les parties suivantes de E :

$$\mathcal{F} = \left\{f \in E \ : \ \|f\|_\infty \leq 2\right\}, \quad \mathcal{G} = \left\{f \in E \ : \ \|f\|_\infty = 1\right\},$$
$$\mathcal{H} = \left\{f \in E \ : \ f(0) = 0\right\}, \quad \mathcal{I} = \left\{f \in E \ : \ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1\right\}.$$

Exercice 5.4 • Correction p. 16

1. Étudier la convergence, dans $\mathbb{R}^3$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \left(\frac{2n+1}{n+3}, \ \frac{(-1)^n}{n}, \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

2. Étudier la convergence, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^4$ et muni de $\|\cdot\|_\infty$, de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{\sin n}{n} \\ \frac{1}{2^n} & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que la suite de $\mathbb{R}^2$ définie par $v_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$ diverge.
4. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la suite de fonctions $f_n : t \mapsto \frac{nt}{n+1}$ converge vers $f : t \mapsto t$.
5. Soit $g_n : t \mapsto t^n$. Calculer $\|g_n\|_1$ et $\|g_n\|_\infty$. La suite (g_n) converge-t-elle vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$? pour $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 5.5 •• Correction p. 17

Soit E l'espace des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées et telles que $u_0 = 0$. On définit $\|\cdot\|_\infty$ et N par : pour tout $u \in E$, $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1. Montrer que ce sont des normes sur E.
2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N \leq k\,\|\cdot\|_\infty$. Quel est le plus petit k possible ?
3. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 5.6 • Correction p. 20

Montrer que $A \mapsto \|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'elle vérifie

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

Exercice 5.7 • Correction p. 22

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $N : P \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ définit une norme sur E.

Exercice 5.8 ••• Correction p. 23

CCP 2017 PC exo 1 extrait.
Pour $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\|M\|_\infty = \max_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}} |m_{i,j}|$.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) On note $N = A - I_3$, déterminer N^k pour $k \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$, et déterminer $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_\infty$.

2. (a) Montrer que $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \mapsto \|M\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que pour $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, on a $\|MN\|_\infty \leq q\,\|M\|_\infty\,\|N\|_\infty$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) une matrice ayant une valeur propre[1] λ telle que $|\lambda| > 1$. De b, déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n\to\infty} \|M^n\|_\infty$.
4. Soit $N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) telle que $N^p = 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})}$ et $N^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda I_d + N)^n\|_\infty$.

Exercice 5.9 ●● Correction p. 27

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_1$ (vers 0) et diverge pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 5.10 ● Correction p. 28

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne, c'est-à-dire telle que $\forall (x,y) \in E^2, \quad N(f(x) - f(y)) \leq k\,N(x-y)$.

1. Montrer que f admet au plus un point fixe si $k < 1$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f admet un point fixe $\ell \in E$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$.
   (b) Si $k < 1$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Exercice 5.11 ●● Correction p. 29

On considère, dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite (X_n) définie par :

$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, avec $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{3}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (X_n) vérifie une relation matricielle de la forme $X_{n+1} = AX_n + B$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|_\infty \leq k\,\|X\|_\infty$ où k est un réel de $]0,1[$.
3. Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. En déduire que la suite (X_n) est convergente, de limite L.

Exercice 5.12 ●● Correction p. 31

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|$ de l'exercice 5.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour cette norme. Montrer alors que $P^2 = P$ et $AP = P = PA$.

Exercice 5.13 ● Correction p. 32

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit (x_n) une suite d'éléments de E.

1. On suppose que (x_n) converge vers $\ell \in E$. Montrer que la suite réelle $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.

1. M admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'il existe $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

2. Réciproquement, soit $a \in E$ tel que $\|x_n\| \to \|a\|$. La suite (x_n) converge-t-elle nécessairement vers a ?
3. Montrer que si $\|x_n\| \to 0$, alors (x_n) converge vers 0_E.

Exercice 5.14 ●● Correction p. 32

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\|,\ a \in A\}.$$

1. Justifier que $d(x, A)$ est bien défini pour tout $x \in E$.
2. Montrer que, pour tous $x, y \in E$,

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A),$$

puis en déduire que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.

3. On prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $A = \mathbb{R} \times \{0\}$. Calculer $d(x, A)$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $d(x, A) = 0$ si $x \in A$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5.15 ●● Correction p. 33

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, b_{i,j}.$$

2. En déduire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que la norme qui lui est associée est la norme $\|\cdot\|_2$ du cours.
3. En déduire que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{tr}(A^\top B)| \leq \|A\|_2 \, \|B\|_2$.
4. Montrer que toute norme associée à un produit scalaire vérifie l'identité

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.$$

En déduire que ni $\|\cdot\|_1$ ni $\|\cdot\|_\infty$ n'est associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5.16 ● Correction p. 34

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N_1(x, y) = \sqrt{|xy|}, \qquad N_2(x, y) = |x| + y^2, \qquad N_3(x, y) = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2.$$

Pour chacune de ces trois applications, déterminer lesquels des trois axiomes d'une norme sont vérifiés, et donner un contre-exemple pour les autres.

Exercice 5.17 ● Correction p. 35

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

1. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.
2. Montrer que $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_2$ (*indication : appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans* $\mathbb{R}^n$ *aux vecteurs* $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ *et* $(1, \ldots, 1)$), puis que $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$.
3. En déduire que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

4. Pour chacune des quatre inégalités des questions 1 et 2, donner un vecteur pour lequel il y a égalité.

Exercice 5.18 • Correction p. 36

On reprend la norme N de l'exercice 5.6, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $N(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$, et on note $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} \left|a_{i,j}\right|$.

1. Montrer que, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\|_\infty \leq N(A) \leq n\,\|A\|_\infty$.
2. En déduire qu'une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$, et que les limites sont alors les mêmes.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que chacun des n^2 coefficients de A^p converge lorsque $p \longrightarrow +\infty$, et on note P la matrice de ces limites. Montrer que $P^2 = P$.

Exercice 5.19 •• Correction p. 36

Soit $E = C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$. Pour $w \in E$ et $f \in E$, on pose

$$N_w(f) = \int_0^1 w(t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. On suppose w strictement positive sur $[0,1]$. Montrer que N_w et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes.
2. On prend désormais $w : t \mapsto t$, qui s'annule en 0. Montrer que N_w est encore une norme sur E.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \mapsto \max(0, 1-nt)$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $N_w(f_n)$.
4. En déduire que N_w et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 5.20 •• Correction p. 38

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on note B_1, B_2 et B_∞ les boules unité fermées de centre 0 associées respectivement à $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$.
2. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et soit $\alpha > 0$. On note B' la boule unité fermée de centre 0_E pour N', et B_α la boule fermée de centre 0_E et de rayon α pour N. Montrer que $N \leq \alpha N'$ si et seulement si $B' \subset B_\alpha$.
3. Retrouver, à l'aide de la question 2, les inégalités de comparaison correspondant aux inclusions de la question 1.

Exercice 5.21 • Correction p. 38

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que l'intersection d'une famille non vide de parties convexes de E est convexe. Montrer, par un exemple dans $\mathbb{R}^2$, que la réunion de deux parties convexes n'est pas toujours convexe.
2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé avec $E \neq \{0_E\}$, soit $a \in E$ et soit $r > 0$. Montrer que la sphère $S(a,r)$ n'est pas convexe.
3. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F et C une partie convexe de E. Montrer que $u(C)$ est convexe.
4. Montrer que $C = \left\{f \in C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right) \;:\; \forall t \in [0,1],\ f(t) \geq 0\right\}$ est une partie convexe de $C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

Exercice 5.22 • Correction p. 39

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soient A et B deux parties bornées de E et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $A + B = \{a+b,\ (a,b) \in A \times B\}$ et $\lambda A = \{\lambda a,\ a \in A\}$ sont bornées.

2. Donner une suite $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties bornées de $\mathbb{R}$ dont la réunion n'est pas bornée.
3. Soit D un ensemble non vide. Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$, alors fg est bornée et $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Exercice 5.23 ●● Correction p. 40

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, identifié à $\mathbb{C}^4$, de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b) pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et préciser alors sa limite.
3. La limite obtenue est-elle la matrice d'un projecteur ?

Exercice 5.24 ●●● Correction p. 40

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. Montrer que la suite (y_n) converge vers ℓ.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5.25 ●● Correction p. 41

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit (x_n) une suite d'éléments de E.

1. On suppose que les suites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent. Montrer que (x_n) converge.
2. Montrer que l'hypothèse portant sur (x_{3n}) ne peut pas être supprimée.

Exercice 5.26 ●●● Correction p. 42

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients, nuls à partir d'un certain rang. On pose

$$N_c(P) = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|, \qquad N_s(P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|, \qquad N_\infty(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|,$$

cette dernière application étant une norme sur $\mathbb{R}[X]$ d'après l'exercice 5.7.

1. Montrer que N_c et N_s sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $N_\infty \leq N_s$ et que $N_c \leq N_s$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ et $R_n = (2X-1)^n$. Calculer $N_c(Q_n)$, $N_s(Q_n)$ et $N_\infty(Q_n)$, puis $N_\infty(R_n)$ et $N_s(R_n)$.
4. En déduire que N_c, N_s et N_∞ sont deux à deux non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $N_s \leq (n+1)N_c$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t_0 < \cdots < t_n$ des éléments de $[0, 1]$, et soient $L_0, \ldots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$N_s(P) \leq \left(\sum_{j=0}^{n} N_s(L_j)\right) N_\infty(P).$$

7. En déduire que N_c, N_s et N_∞ sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5.27 ● ● ● Correction p. 43

Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et soit $E_0 = \{f \in E \ : \ f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \qquad \text{et} \qquad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

1. Montrer que $f \mapsto \|f'\|_\infty$ n'est pas une norme sur E, mais en est une sur E_0.
2. Montrer que N est une norme sur E.
3. Montrer que $\|f\|_\infty \leq N(f)$ pour toute $f \in E$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{n}$. Majorer $\|f_n\|_\infty$ et calculer $N(f_n)$.
5. En déduire que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.
6. Montrer que N et N' sont équivalentes.

Exercice 5.28 ● ● ● Correction p. 44

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soient $x, y \in E$.

1. Montrer que si $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.
2. Montrer que la réciproque est fausse : donner deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ réalisant l'égalité pour $\|\cdot\|_\infty$, puis deux autres pour $\|\cdot\|_1$.
3. On suppose dans cette question que la norme de E est associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que

$$\|\|y\| \, x - \|x\| \, y\|^2 = 2 \|x\| \, \|y\| \, (\|x\| \, \|y\| - \langle x, \, y \rangle) ,$$

   puis que l'égalité $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ entraîne que x et y sont colinéaires.
4. On revient à une norme quelconque. On suppose $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x + y\| = 2$. Montrer que $\|tx + (1-t)y\| = 1$ pour tout $t \in [0,1]$.
5. En déduire que la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_2$ ne contient aucun segment non réduit à un point, et exhiber un tel segment contenu dans la sphère unité pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5.29 ● ● Correction p. 45

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $N_1 + N_2$ et $\max(N_1, N_2)$ sont des normes sur E, et qu'elles sont équivalentes.
2. Sur $E = \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x,y) = 3|x| + |y|$ et $N_2(x,y) = |x| + 3|y|$. Montrer que ce sont des normes, mais que $\min(N_1, N_2)$ n'en est pas une.
3. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $x \mapsto \|u(x)\|_F$ est une norme sur E si et seulement si u est injective.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $N_A : X \mapsto \|AX\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est inversible.
5. On suppose A inversible et on note N la norme de l'exercice 5.6. Montrer que $\|AX\|_\infty \leq N(A) \, \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis que N_A et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 5.30 ● ● ● Correction p. 46

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme N de l'exercice 5.6, qui vérifie $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

1. Soient $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant respectivement vers A et vers B. Montrer que la suite (A_pB_p) converge vers AB.
2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(A_p^k)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A^k.

3. Soit (A_p) une suite convergeant vers A et telle que $A_p^2 = A_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $A^2 = A$. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour une suite de matrices vérifiant $A_p^n = 0$.
4. Soit (A_p) une suite de matrices inversibles convergeant vers A et telle que (A_p^{-1}) converge vers une matrice B. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.
5. Donner une suite de matrices inversibles convergeant vers une matrice non inversible. L'hypothèse portant sur (A_p^{-1}) dans la question 4 peut-elle être supprimée ?



5 Normes

★ Pour aller plus loin

Exercice 5.31 ★ Correction p. 47

Les inégalités de Young, Hölder et Minkowski.
Le cours définit les normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{K}^n$ mais admet l'inégalité triangulaire, qui porte le nom d'inégalité de Minkowski. L'objet de ce problème est de la démontrer. La **partie I** établit une inégalité entre deux réels positifs, la **partie II** en tire une inégalité entre deux vecteurs, et la **partie III** conclut. La **partie IV** compare enfin les normes $\|\cdot\|_p$ entre elles.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. Deux réels p et q strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ sont dits *conjugués*; p et q désignent dans tout le problème deux tels réels.

Partie I — L'inégalité de Young

1. Montrer que $q=\dfrac{p}{p-1}$, puis que $(p-1)q=p$ et $\dfrac{p}{q}=p-1$.
2. Soient $a>0$ et $b>0$. En appliquant la concavité de ln aux réels a^p et b^q affectés des coefficients $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$, montrer que
$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$
Vérifier que l'inégalité vaut encore pour $a\geq 0$ et $b\geq 0$.

Partie II — L'inégalité de Hölder

3. Soient $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|\leq\|x\|_p\,\|y\|_q$$
(*indication : traiter d'abord le cas où $x=0$ ou $y=0$, puis appliquer la partie I à $a_k=\frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b_k=\frac{|y_k|}{\|y\|_q}$ et sommer*).
4. Quel cas particulier retrouve-t-on pour $p=q=2$?

Partie III — L'inégalité de Minkowski

Soient x et y dans $\mathbb{K}^n$.

5. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\leq\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k|+\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k|\,.$$
6. En appliquant l'inégalité de Hölder à chacune des deux sommes du membre de droite, montrer que
$$\|x+y\|_p^p\leq\|x+y\|_p^{p-1}\left(\|x\|_p+\|y\|_p\right).$$

7. En déduire que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, puis que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Partie IV — Comparaison des normes $\|\cdot\|_p$

Soient r et s deux réels tels que $1 \leq r \leq s$, et soit $x \in \mathbb{K}^n$.

8. Montrer que $\|x\|_s \leq \|x\|_r$ (*indication : se ramener au cas* $\|x\|_r = 1$).
9. On suppose $r < s$. En appliquant l'inégalité de Hölder aux vecteurs $(|x_1|^r, \dots, |x_n|^r)$ et $(1, \dots, 1)$ avec les exposants conjugués $\frac{s}{r}$ et $\frac{s}{s-r}$, montrer que
$$\|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|x\|_s .$$
10. En déduire que les normes $\|\cdot\|_r$, pour $r \geq 1$, sont deux à deux équivalentes sur $\mathbb{K}^n$. Retrouver les inégalités de l'exercice 5.17.

Exercice 5.32 ● ● ● Correction p. 49

Normes subordonnées et séries de matrices.

Plusieurs exercices de ce chapitre utilisent la norme $N(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ de l'exercice 5.6 sans dire d'où elle vient. La **partie I** l'identifie comme la norme *subordonnée* à $\|\cdot\|_\infty$, la **partie II** en déduit ses propriétés sans calcul, et la **partie III** l'applique à l'inversion de $I_n - A$.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. L'espace $\mathbb{K}^n$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$, et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est vue comme l'application $x \mapsto Ax$ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$, les vecteurs étant identifiés à des colonnes.

Partie I — La norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
$$\|Ax\|_\infty \leq N(A) \|x\|_\infty .$$
2. En déduire que l'ensemble $\left\{ \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty},\ x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\}$ admet une borne supérieure. On la note $\|A\|_{\text{sub}}$; montrer que $\|A\|_{\text{sub}} \leq N(A)$.
3. Soit i_0 un indice réalisant le maximum qui définit $N(A)$. On suppose $N(A) \neq 0$ et on pose, pour $j \in [\![1, n]\!]$,
$$x_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer $\|x\|_\infty$ et la i_0-ième coordonnée de Ax. En déduire que $\|A\|_{\text{sub}} = N(A)$, et que la borne supérieure est atteinte.

Partie II — Propriétés de la norme subordonnée

4. Montrer, directement à partir de la définition de $\|\cdot\|_{\text{sub}}$, qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Montrer que $\|I_n\|_{\text{sub}} = 1$ et que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\|AB\|_{\text{sub}} \leq \|A\|_{\text{sub}} \|B\|_{\text{sub}} .$$
Comparer avec l'exercice 5.6.
6. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer J^2, puis $\|J\|_\infty$ et $\left\|J^2\right\|_\infty$. Qu'en déduit-on sur l'inégalité $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$, et sur la constante n de l'exercice 5.8 ?

Partie III — Inversion de $I_n - A$

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\|_{\text{sub}} < 1$.

7. Montrer que $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ pour $\|\cdot\|_{\text{sub}}$, puis pour $\|\cdot\|_\infty$.
8. Montrer que $I_n - A$ est inversible (*indication : si* $(I_n - A)X = 0$, *calculer* A^pX).
9. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} A^k$. Vérifier que $(I_n - A)S_p = I_n - A^{p+1}$, puis montrer que $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $(I_n - A)^{-1}$.
10. Montrer que $\left\|S_p\right\|_{\text{sub}} \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, puis que

$$\left\|(I_n - A)^{-1}\right\|_{\text{sub}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}$$

(*indication : utiliser la question 1 de l'exercice 5.13*).

11. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par X_0 quelconque et $X_{p+1} = AX_p + B$. Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution L et que (X_p) converge vers L. Vérifier que la matrice A de l'exercice 5.11 satisfait bien $\|A\|_{\text{sub}} < 1$.

Exercice 5.33 ★ Correction p. 51

La jauge de Minkowski.
Le cours établit que les boules d'un espace vectoriel normé sont convexes. Ce problème démontre la réciproque : une partie convexe, symétrique et bornée, qui contient une boule, est la boule unité d'une norme. La **partie I** construit cette norme, la **partie II** l'identifie sur un exemple du plan.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé non nul et soit C une partie de E vérifiant les trois hypothèses suivantes :

— C est convexe ;
— C est symétrique, c'est-à-dire que $-x \in C$ pour tout $x \in C$;
— il existe deux réels $0 < r \leq R$ tels que $\overline{B}(0_E, r) \subset C \subset \overline{B}(0_E, R)$.

Pour $x \in E$, on pose

$$T_x = \left\{t \in \mathbb{R}_+^* \ : \ \tfrac{1}{t}x \in C\right\} \qquad \text{et} \qquad j_C(x) = \inf T_x.$$

Partie I — La jauge est une norme

1. Montrer que $0_E \in C$, puis que T_x est non vide pour tout $x \in E$. En déduire que $j_C(x)$ est bien défini et que $j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.
2. Montrer que tout $t \in T_x$ vérifie $t \geq \frac{\|x\|}{R}$, et en déduire l'encadrement

$$\frac{\|x\|}{R} \leq j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $T_{\lambda x} = |\lambda|\, T_x$ (la symétrie de C sert pour $\lambda < 0$), puis que $j_C(\lambda x) = |\lambda|\, j_C(x)$. Traiter le cas $\lambda = 0$ à part.
4. Soient $x, y \in E$, soit $s \in T_x$ et soit $t \in T_y$. Montrer que

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t} \cdot \frac{x}{s} + \frac{t}{s+t} \cdot \frac{y}{t}$$

appartient à C, puis que $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.

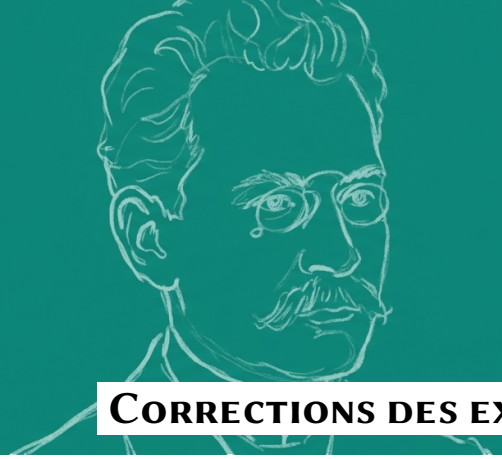
5. Conclure que j_C est une norme sur E, équivalente à $\|\cdot\|$.
6. On note $\mathring{B}_j(0_E, 1)$ et $\overline{B}_j(0_E, 1)$ les boules unité de centre 0_E pour la norme j_C. Montrer que
$$\mathring{B}_j(0_E, 1) \subset C \subset \overline{B}_j(0_E, 1).$$

Partie II — Un hexagone du plan

On prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1, \ |x - y| \leq 1\right\}.$$

7. Représenter C et vérifier qu'il s'agit de l'hexagone de sommets $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.
8. Vérifier que C satisfait les hypothèses de la partie I avec $r = \frac{1}{2}$ et $R = 1$.
9. Montrer que $M : (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|, |x - y|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et que C est sa boule unité fermée de centre $(0, 0)$.
10. En déduire que $j_C = M$. Vérifier enfin, à l'aide des vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$, que M n'est aucune des trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$.



5 Normes

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 5.1

Énoncé p. 1

1) On a $x + y = (4, -2, -2)$. Pour x, par exemple,

$$\|x\|_1 = 1 + 2 + 2 = 5, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \qquad \|x\|_\infty = 2.$$

Les mêmes calculs donnent

$$\|y\|_1 = 7, \qquad \|y\|_2 = 5, \qquad \|y\|_\infty = 4,$$
$$\|x + y\|_1 = 8, \qquad \|x + y\|_2 = 2\sqrt{6}, \qquad \|x + y\|_\infty = 4.$$

L'inégalité triangulaire est bien vérifiée dans les trois cas :

$$8 \leq 5 + 7 = 12, \qquad 2\sqrt{6} \simeq 4{,}90 \leq 3 + 5 = 8, \qquad 4 \leq 2 + 4 = 6.$$

2) La distance associée à une norme est $d(x, y) = \|x - y\|$. Ici $x - y = (-2, -2, 6)$, donc

$$d_1(x, y) = 2 + 2 + 6 = 10, \qquad d_\infty(x, y) = \max(2, 2, 6) = 6,$$
$$d_2(x, y) = \sqrt{4 + 4 + 36} = 2\sqrt{11}.$$

3) Les normes font intervenir les modules des coordonnées, et non leurs parties réelles et imaginaires : $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $|-2\mathrm{i}| = 2$. Donc

$$\|z\|_1 = 2 + \sqrt{2}, \qquad \|z\|_2 = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}, \qquad \|z\|_\infty = \max\left(\sqrt{2}, 2\right) = 2.$$

4) Comme $x \neq 0_E$, on a $N(x) > 0$ par séparation, et le vecteur $\frac{x}{N(x)}$ est bien défini. Par homogénéité,

$$N\left(\frac{x}{N(x)}\right) = \left|\frac{1}{N(x)}\right| N(x) = \frac{1}{N(x)} N(x) = 1.$$

Pour $x = (1, -2, 2)$, les trois vecteurs unitaires obtenus sont

$$\frac{1}{5}(1, -2, 2), \qquad \frac{1}{3}(1, -2, 2), \qquad \frac{1}{2}(1, -2, 2),$$

respectivement pour $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

5) Les fonctions f, g et $f - g : t \mapsto t(1 - t)$ sont positives sur $[0, 1]$, ce qui permet de supprimer les valeurs absolues. La fonction f est croissante sur $[0, 1]$, de même que g, donc leur maximum est atteint en 1 ; celui de $f - g$ est atteint en $\frac{1}{2}$ d'après l'étude du trinôme. On obtient

$$\|f\|_1 = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\|g\|_1 = \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}, \qquad \|g\|_2 = \left(\int_0^1 t^4 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

et $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. Enfin

$$\|f-g\|_1 = \int_0^1 \left(t-t^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \qquad \|f-g\|_\infty = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

et, comme $\int_0^1 \left(t-t^2\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 - 2t^3 + t^4\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$,

$$\|f-g\|_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Correction de l'exercice 5.2 **Énoncé p. 1**

1) L'application N est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, comme maximum de deux réels positifs. Soient $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Homogénéité. On a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$, donc

$$N(\lambda u) = \max\left(|\lambda x|, |\lambda x + \lambda y|\right) = \max\left(|\lambda|\,|x|, |\lambda|\,|x+y|\right) = |\lambda|\,N(u),$$

le facteur positif $|\lambda|$ pouvant être sorti du maximum.
Inégalité triangulaire. D'une part

$$|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N(u) + N(u'),$$

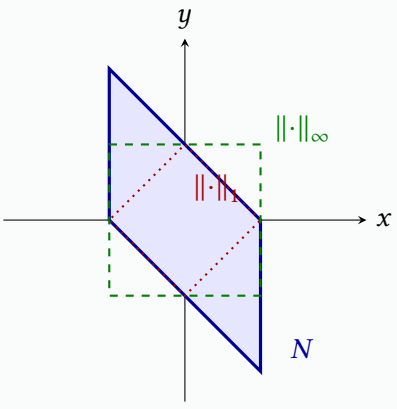
et d'autre part

$$|(x+x') + (y+y')| \leq |x+y| + |x'+y'| \leq N(u) + N(u').$$

Le réel $N(u) + N(u')$ majore donc les deux quantités dont $N(u+u')$ est le maximum, d'où $N(u+u') \leq N(u) + N(u')$.
Séparation. Si $N(u) = 0$, alors $|x| \leq 0$ et $|x+y| \leq 0$, donc $x = 0$ puis $y = (x+y) - x = 0$, c'est-à-dire $u = (0,0)$.
Ainsi $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^2.}$
2) La condition $N(x,y) \leq 1$ s'écrit $|x| \leq 1$ et $|x+y| \leq 1$, c'est-à-dire

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \text{et} \qquad -1 - x \leq y \leq 1 - x.$$

C'est le parallélogramme de sommets $(1,0)$, $(1,-2)$, $(-1,0)$ et $(-1,2)$, représenté ci-dessous en trait plein. Les boules unité fermées de $\|\cdot\|_1$ (en pointillés) et de $\|\cdot\|_\infty$ (en tirets) y sont superposées.



Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x| \leq |x| + |y|$ et $|x + y| \leq |x| + |y|$, donc

$$N \leq \|\cdot\|_1 .$$

Si $\|(x, y)\|_1 \leq 1$, il vient donc $N(x, y) \leq 1$: la boule unité de $\|\cdot\|_1$ est incluse dans celle de N. En revanche, le point $(1, 1)$ vérifie $\|(1, 1)\|_\infty = 1$ et $N(1, 1) = \max(1, 2) = 2 > 1$: il appartient à la boule unité de $\|\cdot\|_\infty$ mais pas à celle de N.
3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $|x| \leq \|(x, y)\|_\infty$ et

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\,\|(x, y)\|_\infty ,$$

donc $N(x, y) \leq 2\,\|(x, y)\|_\infty$ en passant au maximum.
Réciproquement, $|x| \leq N(x, y)$ et, en écrivant $y = (x + y) - x$,

$$|y| \leq |x + y| + |x| \leq 2N(x, y),$$

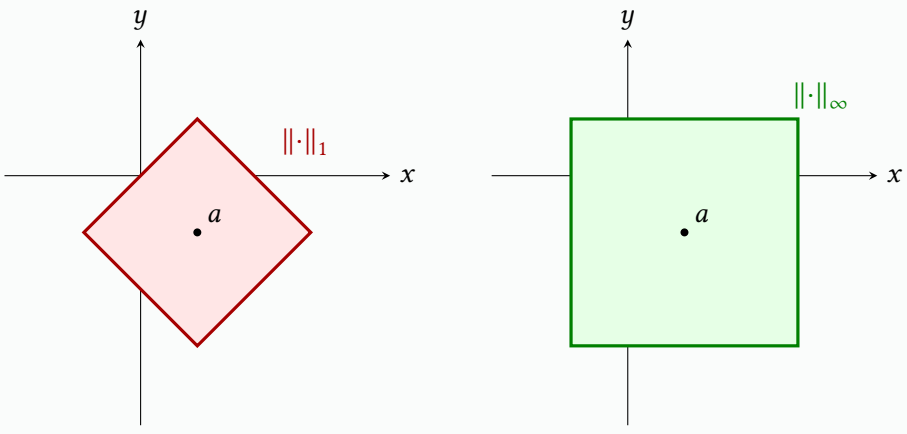
donc $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \leq 2N(x, y)$.
4) Les deux inégalités de la question 3 s'écrivent

$$\frac{1}{2}\,\|\cdot\|_\infty \leq N \leq 2\,\|\cdot\|_\infty ,$$

ce qui est exactement la définition de l'équivalence, avec les constantes $\frac{1}{2} > 0$ et $2 > 0$. D'après la proposition d'invariance de la convergence par passage à une norme équivalente, une suite de $\mathbb{R}^2$ converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$, et les limites sont alors les mêmes.

Correction de l'exercice 5.3 **Énoncé p. 1**

1) La boule fermée de centre $a = (1, -1)$ et de rayon 2 est l'ensemble des (x, y) tels que $\|(x, y) - a\| \leq 2$. Pour $\|\cdot\|_1$, la condition s'écrit $|x - 1| + |y + 1| \leq 2$: c'est le carré de sommets $(3, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -3)$, dont les côtés font un angle de 45 degrés avec les axes. Pour $\|\cdot\|_\infty$, elle s'écrit $|x - 1| \leq 2$ et $|y + 1| \leq 2$: c'est le carré $[-1, 3] \times [-3, 1]$, de côtés parallèles aux axes.



2) La partie A est la boule fermée de centre 0 et de rayon 3 pour $\|\cdot\|_1$: elle est bornée, et convexe puisque toute boule l'est.
La partie B est l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Elle n'est pas bornée, car elle contient les points $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, dont la norme infinie vaut n. Elle n'est pas convexe :

les points $(1,1)$ et $(-1,-1)$ lui appartiennent, mais le milieu du segment qu'ils déterminent est $(0,0)$, qui vérifie $xy = 0 \neq 1$.
La partie C est une couronne. Elle est bornée : si $(x,y) \in C$, alors $x^2 + y^2 \leq 4$, donc $\|(x,y)\|_2 \leq 2$. Elle n'est pas convexe : les points $(1,0)$ et $(-1,0)$ lui appartiennent, mais leur milieu $(0,0)$ vérifie $x^2 + y^2 = 0 < 1$.
La partie D n'est pas bornée, car elle contient les points $(0,n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est convexe : soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) dans D et soit $t \in [0,1]$. L'identité

$$(1-t)x_1^2 + tx_2^2 - ((1-t)x_1 + tx_2)^2 = t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

donne $((1-t)x_1 + tx_2)^2 \leq (1-t)x_1^2 + tx_2^2$, donc

$$(1-t)y_1 + ty_2 \geq (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \geq ((1-t)x_1 + tx_2)^2,$$

et le point $(1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2)$ appartient à D.
3) Une fonction $g \in E$ appartient à $\overline{B}(f,r)$ si et seulement si $\|g - f\|_\infty \leq r$, c'est-à-dire

$$\forall t \in [0,1], \quad f(t) - r \leq g(t) \leq f(t) + r.$$

C'est l'ensemble des fonctions continues dont le graphe reste dans le tube de demi-largeur r tracé autour du graphe de f.
4) La partie $\mathcal{F}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon 2 : elle est bornée et convexe.
La partie $\mathcal{G}$ est la sphère unité : elle est bornée, puisque $\|f\|_\infty = 1$ pour tout $f \in \mathcal{G}$. Elle n'est pas convexe : les fonctions constantes $f = 1$ et $g = -1$ lui appartiennent, mais leur milieu est la fonction nulle, de norme 0.
La partie $\mathcal{H}$ n'est pas bornée : elle contient les fonctions $t \mapsto nt$, de norme infinie n. Elle est convexe : c'est un sous-espace vectoriel de E, donc si $f(0) = g(0) = 0$ et $t \in [0,1]$, la fonction $(1-t)f + tg$ s'annule encore en 0.
La partie $\mathcal{I}$ n'est pas bornée : les fonctions $f_n : s \mapsto 1 + n\left(s - \frac{1}{2}\right)$ vérifient $\int_0^1 f_n = 1$ et $\|f_n\|_\infty = 1 + \frac{n}{2}$. Elle est convexe : si $\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1$ et $t \in [0,1]$, la linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^1 ((1-t)f + tg) = (1-t) + t = 1.$$

Correction de l'exercice 5.4 **Énoncé p. 2**

1) D'après la proposition sur la convergence composante par composante, il suffit d'étudier chacune des trois coordonnées. On a

$$\frac{2n+1}{n+3} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2, \qquad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et, comme $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$ par équivalent usuel,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}.$$

Les trois coordonnées convergent, donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (2,0,\mathrm{e}).}$$

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ étant équivalentes sur $\mathbb{R}^3$, cette convergence a lieu pour les trois.

2) Les quatre coefficients sont des suites numériques convergentes :

$$\frac{n}{n+1} \to 1, \qquad \frac{\sin n}{n} \to 0, \qquad \frac{1}{2^n} \to 0, \qquad 3 \to 3,$$

la deuxième par encadrement, puisque $|\sin n| \leq 1$ donne $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. D'après la même proposition,

$$\boxed{A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

3) Supposons que (v_n) converge vers $\ell = (\ell_1, \ell_2)$. D'après la proposition sur la convergence composante par composante, la suite réelle $((-1)^n)$ converge vers ℓ_1. Or les suites extraites d'indices pairs et impairs sont constantes, égales à 1 et à -1 : comme toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite, il viendrait $\ell_1 = 1$ et $\ell_1 = -1$, ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ diverge.}}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$,

$$f_n(t) - f(t) = t\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = -\frac{t}{n+1},$$

donc $|f_n(t) - f(t)| = \frac{t}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, avec égalité en $t = 1$. Ainsi

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et la suite (f_n) converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$.

5) La fonction g_n est positive et croissante sur $[0,1]$, donc son maximum est atteint en 1 :

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \|g_n\|_\infty = g_n(1) = 1.$$

Comme $\|g_n - 0\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$, la suite (g_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$. En revanche $\|g_n - 0\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0 : elle ne converge pas vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 5.5

Énoncé p. 2

1) Soit $u \in E$, alors la suite u est bornée, autrement dit, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M.$$

Donc les ensembles

$$\{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{et} \qquad \{|u_{n+1} - u_n|,\ n \in \mathbb{N}\}$$

sont des ensembles de réels (non vides et) bornés (puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M$), donc ont une borne supérieure, autrement dit les normes

$$\|u\|_\infty \qquad \text{et} \qquad N(u)$$

existent bien. Puis, pour tout $u \in E$,

$$N(u) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \|u\|_\infty \geq 0,$$

comme borne supérieure d'ensembles non vides de réels positifs.
Soit $u \in E$. Par définition, une borne supérieure est un majorant, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |u_n| \leq \|u\|_\infty \qquad \text{et} \qquad 0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq N(u).$$

Si $\|u\|_\infty = 0$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |u_n| \leq \|u\|_\infty = 0, \qquad \text{donc} \qquad u_n = 0.$$

Donc $u = 0$ (la suite nulle). Si $N(u) = 0$ alors de même on a

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc u est une suite constante, et comme $u_0 = 0$ (car $u \in E$), on a $u = 0$ (la suite nulle).
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in E$. Alors

$$\|\lambda u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(\lambda u)_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda u_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|u_n| \underset{(\star)}{=} |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = |\lambda|\,\|u\|_\infty$$

(où l'égalité $(\star)$ se justifie car $|\lambda| \geq 0$).

Remarque

Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in E$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(\lambda u)_n| = |\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leq |\lambda|\,\|u\|_\infty,$$

donc $|\lambda|\,\|u\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(\lambda u)_n|,\ n \in \mathbb{N}\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|\lambda u\|_\infty \leq |\lambda|\,\|u\|_\infty.$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\dfrac{1}{\lambda}$ au lieu de λ, et λu au lieu de u) donne :

$$\|u\|_\infty = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda u\right\|_\infty \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda u\|_\infty, \qquad \text{soit} \qquad |\lambda|\,\|u\|_\infty \leq \|\lambda u\|_\infty.$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la suite nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$\|\lambda u\|_\infty = |\lambda|\,\|u\|_\infty.$$

Puis, en utilisant ce qui précède (qui est valable pour toute suite bornée, et pas seulement pour celles de E) :

$$\begin{aligned} N(\lambda u) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |(\lambda u)_{n+1} - (\lambda u)_n| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda u_{n+1} - \lambda u_n| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda(u_{n+1} - u_n)| \\ &= \|\lambda(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = |\lambda| \, \|(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \\ &= |\lambda| \, N(u) \end{aligned}$$

Soit enfin $u \in E$ et $v \in E$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|(u+v)_n| = |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty ,$$

donc $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(u+v)_n| \, , \, n \in \mathbb{N}\} ,$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|u+v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty .$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n| = |u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n| \leq |u_{n+1} - u_n| + |v_{n+1} - v_n| \leq N(u) + N(v),$$

donc $N(u) + N(v)$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n| \, , \, n \in \mathbb{N}\} ,$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(u+v) \leq N(u) + N(v).$$

Conclusion : $\|\cdot\|_\infty$ et N sont bien des normes.
2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2 \, \|u\|_\infty ,$$

et comme une borne supérieure est le plus petit des majorants, on a alors

$$\boxed{N(u) \leq 2 \, \|u\|_\infty}.$$

Remarque

Pour u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, il y a égalité. Donc, 2 est la meilleure valeur possible pour k.

3) Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in E$,

$$\|u\|_\infty \leq \alpha N(u).$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $u^{(p)}$ la suite définie par

$$u_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \frac{1}{k}$$

(la somme vide valant 0, de sorte que $u_0^{(p)} = 0$).
Cette suite est croissante et stationnaire à partir du rang p, où elle vaut $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$: elle est donc bornée, et $u_0^{(p)} = 0$, donc $u^{(p)} \in E$. Ses accroissements valent

$$u_{n+1}^{(p)} - u_n^{(p)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n+1 \leq p \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ils sont donc tous compris entre 0 et 1, et la valeur 1 est atteinte pour $n = 0$ (car $p \geq 1$). Ainsi

$$N(u^{(p)}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left\|u^{(p)}\right\|_\infty = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k},$$

et l'inégalité supposée donne

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \leq \alpha.$$

Cela doit être vrai pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui est impossible, puisque

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(la série harmonique est une série divergente à termes positifs).
Il n'existe donc aucun réel α tel que $\|\cdot\|_\infty \leq \alpha N$. La question 2 fournissant l'autre inégalité, on conclut :

les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

Remarque

Pour tout $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (par somme télescopique)

$$u_n = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k),$$

donc on a néanmoins

$$|u_n| \leq nN(u)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 5.6 **Énoncé p. 2**

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut définir $\|A\| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ (on prend le maximum d'un nombre fini de réels, donc il existe) et c'est un réel positif.
Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

— si $\|A\| = 0$, comme pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$0 \leq |a_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq \|A\| = 0,$$

alors on a

$$a_{i,j} = 0.$$

C'est vrai pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, donc

$$A = 0_n.$$

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda A\| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\lambda| \left|a_{i,j}\right| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda| \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = |\lambda| \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = |\lambda| \, \|A\|$$

par propriété du max car $|\lambda| \geq 0$.

— Pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$,

$$\left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \leq \left|a_{i,j}\right| + \left|b_{i,j}\right|.$$

On en déduit que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|b_{i,j}\right| \quad \text{puis}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| + \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|b_{i,j}\right| = \|A\| + \|B\|$$

C'est vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ donc c'est vrai pour le max, d'où

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Conclusion :

$$\boxed{A \mapsto \|A\| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \text{ est bien une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Notons $C = AB$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la formule du produit matriciel, puis l'inégalité triangulaire, donnent :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left|c_{i,j}\right| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \, b_{k,j} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{i,k}\right| \left|b_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left(\left|a_{i,k}\right| \sum_{j=1}^{n} \left|b_{k,j}\right| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\left|a_{i,k}\right| \, \|B\| \right) = \|B\| \sum_{k=1}^{n} \left|a_{i,k}\right| \\
&\leq \|B\| \, \|A\|
\end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc c'est vrai pour le max, et donc

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|}.$$

Correction de l'exercice 5.7 **Énoncé p. 2**

Soit $P \in E$. $N(P)$ existe car P est continue sur le segment $[0,1]$, donc borné (théorème des bornes atteintes). Puis,

$$N(P) \geq 0$$

comme borne supérieure d'un ensemble non vide de réels positifs.
Si $N(P) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq |P(x)| \leq N(P) = 0, \qquad \text{donc} \qquad P(x) = 0.$$

Donc P a une infinité de racines (tout élément de $[0,1]$), donc $P = 0$ (le polynôme nul).
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors

$$N(\lambda P) = \sup_{x\in[0,1]} |(\lambda P)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda P(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|P(x)| \underset{(\star)}{=} |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| = |\lambda|\,N(P),$$

où l'égalité $(\star)$ provient de ce que $|\lambda| \geq 0$.

Remarque

Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$|(\lambda P)(x)| = |\lambda P(x)| = |\lambda|\,|P(x)| \leq |\lambda|\,N(P),$$

donc $|\lambda|\,N(P)$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(\lambda P)(x)|,\ x \in [0,1]\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(\lambda P) \leq |\lambda|\,N(P).$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\dfrac{1}{\lambda}$ au lieu de λ, et λP au lieu de P) donne :

$$N(P) = N\left(\frac{1}{\lambda}\lambda P\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda P), \qquad \text{soit} \qquad |\lambda|\,N(P) \leq N(\lambda P).$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la fonction nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$N(\lambda P) = |\lambda|\,N(P).$$

Soit P et $Q \in E$, alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$|(P+Q)(x)| = |P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq N(P) + N(Q).$$

Donc $N(P) + N(Q)$ est un majorant de l'ensemble

$$\{|(P+Q)(x)|,\ x \in [0,1]\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(P+Q) \leq N(P) + N(Q).$$

Correction de l'exercice 5.8 **Énoncé p. 2**

1a) Par calculs matriciels directs,

$$\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad N^3 = 0_3,$$

puis pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$ (pour que $k - 3 \in \mathbb{N}$),

$$N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0_3 = \boxed{0_3}.$$

1b) On a

$$A = I_3 + N,$$

et les matrices I_3 et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k + \sum_{k=3}^{n} 0_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k$$

(car $N^k = 0_3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$), ce qui donne

$$A^n = I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2 + 4n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Remarque

On vérifie alors directement que cette dernière égalité reste vraie pour $n = 1$ et $n = 0$.

On a alors directement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 6$,

$$\boxed{\|A^n\|_\infty = n^2 - 4n}$$

(car

$$n^2 - 4n \geq 2n \qquad \Leftrightarrow \qquad n^2 \geq 6n \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq 6,$$

puisque $n > 0$), et donc

$$\lim_{n \to \infty} \|A^n\|_\infty = +\infty.$$

Remarque

En fait, on n'a pas besoin de déterminer précisément $\|A^n\|_\infty$. En effet, par définition, on a

$$\|A^n\|_\infty \geq \left|(A^n)_{2,3}\right| = |-n| = n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n \to \infty} \|A^n\|_\infty = +\infty.$$

2a) Remarquons que $\|\cdot\|_\infty$ est bien défini et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (on prend le maximum d'un nombre fini de modules, qui sont des réels positifs).

Séparation : soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On a alors par définition du maximum, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$0 \leq \left|m_{i,j}\right| \leq \|M\|_\infty .$$

Donc, si $\|M\|_\infty = 0$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$0 \leq \left|m_{i,j}\right| \leq 0, \qquad \text{soit} \qquad m_{i,j} = 0.$$

Donc

$$M = 0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})}.$$

Homogénéité : soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\|\lambda M\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \left|(\lambda M)_{i,j}\right| = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \left|\lambda m_{i,j}\right| = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} |\lambda| \left|m_{i,j}\right| \underset{(\star)}{=} |\lambda| \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \left|m_{i,j}\right| = |\lambda|$$

où l'égalité $(\star)$ se justifie car $|\lambda| \geq 0$.

Remarque

Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$\left|(\lambda M)_{i,j}\right| = \left|\lambda M_{i,j}\right| = |\lambda| \left|M_{i,j}\right| \leq |\lambda| \, \|M\|_\infty ,$$

donc $|\lambda| \, \|M\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\left\{\left|(\lambda M)_{i,j}\right|, \ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]\right\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|\lambda M\|_\infty \leq |\lambda| \, \|M\|_\infty .$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\dfrac{1}{\lambda}$ au lieu de λ, et λM au lieu de M) donne :

$$\|M\|_\infty = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda M\right\|_\infty \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda M\|_\infty , \qquad \text{soit} \qquad |\lambda| \, \|M\|_\infty \leq \|\lambda M\|_\infty .$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la matrice nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$\|\lambda M\|_\infty = |\lambda| \, \|M\|_\infty .$$

Inégalité triangulaire : soit M et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a

$$\left|M_{i,j}\right| \leq \|M\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \left|N_{i,j}\right| \leq \|N\|_\infty .$$

Or, par inégalité triangulaire classique (pour le module complexe), on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$\left|(M+N)_{i,j}\right| = \left|M_{i,j} + N_{i,j}\right| \leq \left|M_{i,j}\right| + \left|N_{i,j}\right| \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty .$$

Donc $\|M\|_\infty + \|N\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\left\{\left|(M+N)_{i,j}\right|, \ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]\right\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|M+N\|_\infty \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty .$$

D'où l'inégalité triangulaire.
Donc $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme.
2b) Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, on a alors $MN \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$,

$$(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} M_{i,k}N_{k,j}.$$

Fixons $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$, alors par inégalité triangulaire classique (pour le module complexe), on a

$$\left|(MN)_{i,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{q} \left|M_{i,k}N_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{q} \left|M_{i,k}\right|\left|N_{k,j}\right| .$$

Or, pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, on a

$$\left|M_{i,k}\right| \leq \|M\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \left|N_{k,j}\right| \leq \|N\|_\infty .$$

Alors par produit d'inégalités positives dans le même sens, puis addition d'inégalités dans le même sens,

$$\left|(MN)_{i,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{q} \|M\|_\infty \|N\|_\infty = q\,\|M\|_\infty \|N\|_\infty .$$

Donc $q\,\|M\|_\infty \|N\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\left\{\left|(MN)_{i,j}\right|,\ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]\right\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|MN\|_\infty \leq q\,\|M\|_\infty \|N\|_\infty .$$

3) λ est une valeur propre de M, donc il existe $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ **non nul** avec $MX = \lambda X$.
Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^nX = \lambda^n X$.
Initialisation : pour $n = 0$, $M^0 = I_d$ et $\lambda^0 = 1$, donc

$$M^0X = I_dX = X = 1.X = \lambda^0 X.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $M^nX = \lambda^n X$. Alors

$$M^{n+1}X = M \times M^nX \underset{\text{H.R.}}{=} M \times \lambda^n X = \lambda^n MX = \lambda^n.\lambda X = \lambda^{n+1}X,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^nX = \lambda^n X.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par homogénéité de la norme,

$$\|M^nX\|_\infty = \|\lambda^n X\|_\infty = |\lambda|^n \|X\|_\infty .$$

Or, le résultat de la question précédente donne

$$\|M^n X\|_\infty \leq d \, \|M^n\|_\infty \, \|X\|_\infty .$$

De plus, X est non nul (puisque c'est un vecteur propre), donc par séparation, on a $\|X\|_\infty \neq 0$, et comme une norme est toujours positive, on a même $\|X\|_\infty > 0$.
Donc l'inégalité

$$|\lambda|^n \, \|X\|_\infty \leq d \, \|M^n\|_\infty \, \|X\|_\infty \qquad \text{donne} \qquad |\lambda|^n \leq d \, \|M^n\|_\infty$$

(en divisant par $\|X\|_\infty > 0$), soit encore

$$\frac{1}{d} \, |\lambda|^n \leq \|M^n\|_\infty .$$

Or, $|\lambda| > 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda|^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{d} \, |\lambda|^n = +\infty$ (car $d > 0$), puis par inégalité,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|M^n\|_\infty = +\infty}.$$

4) Remarquons que λI_d et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (\lambda I_d)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geq p$ (pour que $k - p \in \mathbb{N}$), alors

$$N^k = N^{k-p} N^p = N^{k-p} 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})} = 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p - 1$, on a

$$(\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k + \sum_{k=p}^{n} 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Par inégalité triangulaire puis homogénéité, on a

$$0 \leq \|(\lambda I_d + N)^n\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \left\| N^k \right\|_\infty .$$

Or, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

(à k **fixé**). Donc

$$\binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \, |\lambda|^{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, car $|\lambda| < 1$).
On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \left\| N^k \right\|_\infty = 0$$

car la somme se fait sur un nombre constant (qui ne dépend pas de n) de termes qui tendent vers 0. Le théorème des gendarmes conclut alors :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|(\lambda I_d + N)^n\|_\infty = 0}.$$

Correction de l'exercice 5.9 **Énoncé p. 3**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant 0_E la fonction nulle sur $[0,1]$,

$$\|f_n - 0_E\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 \left|\sqrt{n}x^n\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{n}x^n \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0_E$$

pour $\|\cdot\|_1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(1)| = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(en fait, $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n}$), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, donc diverge pour $\|\cdot\|_\infty$ (on sait que toute suite convergente pour une norme est bornée pour cette norme).
Pour $\|\cdot\|_2$, c'est plus subtil. Rappelons que l'on a un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, et que, pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Donc, pour $f \in E$, si on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $|f|$ (qui est bien dans E) et 1 (la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$), on a

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \langle |f|, 1\rangle \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 1\,\mathrm{d}t} = \|f\|_2.$$

Si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ pour $\|\cdot\|_2$, alors on a

$$0 \leq \|f - f_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par théorème d'encadrement,

$$\|f - f_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

soit

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

pour $\|\cdot\|_1$.
Or (f_n) converge aussi vers 0_E pour $\|\cdot\|_1$ (début de l'exercice) ; par unicité de la limite pour $\|\cdot\|_1$, on obtient $f = 0_E$. Mais

$$\|f_n - 0_E\|_2 = \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{n}x^n\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

contradiction. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas pour $\|\cdot\|_2$.

Remarque

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n : x \mapsto n^{\frac{1}{4}} x^n$$

converge vers 0_E pour $\|\cdot\|_2$, car

$$\|f_n - 0_E\|_2 = \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(n^{\frac{1}{4}} x^n\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 \sqrt{n} x^{2n} \,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(donc converge aussi pour $\|\cdot\|_1$ vers 0_E, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme vu précédemment), mais

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(1)| = n^{\frac{1}{4}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

(en fait, $\|f_n\|_\infty = |f_n(1)| = n^{\frac{1}{4}}$), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge pour $\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 5.10 **Énoncé p. 3**

1) Soit x et y deux points fixes de f. Alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$, donc

$$N(x-y) = N\left(f(x) - f(y)\right) \leq kN(x-y).$$

Si $N(x-y) > 0$, alors on peut diviser par $N(x-y)$, et on obtient

$$1 \leq k.$$

Mais l'énoncé dit $k < 1$, contradiction. Donc $N(x-y) \leq 0$, puis

$$N(x-y) = 0$$

(car une norme est positive), donc

$$x = y$$

(par axiome de séparation d'une norme), d'où l'unicité de (l'éventuel) point fixe de f.
2a) Remarquons : pour $n \in \mathbb{N}$, comme $f(\ell) = \ell$ (car ℓ est un point fixe), on a

$$N(u_{n+1} - \ell) = N\left(f(u_n) - f(\ell)\right) \leq kN(u_n - \ell).$$

On montre alors l'inégalité demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $n = 0$, $k^0 = 1$, donc

$$N(u_0 - \ell) \leq 1 \cdot N(u_0 - \ell) = k^0 N(u_0 - \ell).$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$, alors avec l'inégalité que l'on a remarquée au début de la question,

$$N(u_{n+1} - \ell) \leq kN(u_n - \ell) \underset{\text{H.R.}}{\leq} k \cdot k^n N(u_0 - \ell) = k^{n+1} N(u_0 - \ell).$$

D'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell).$$

2b) Comme $0 \leq k < 1$, on a

$$k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puis, une norme est positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc par le théorème d'encadrement, on a

$$N(u_n - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit la suite de vecteurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Correction de l'exercice 5.11 **Énoncé p. 3**

1) Les matrices

$$\boxed{A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}}$$

conviennent.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, commençons par remarquer que, par définition de la norme infinie,

$$|x| \leq \|X\|_\infty, \qquad |y| \leq \|X\|_\infty \qquad \text{et} \qquad |z| \leq \|X\|_\infty.$$

Puis, on a

$$AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(2x - z) \\ \frac{1}{6}(2x + y + 2z) \\ \frac{1}{6}(2x + 2y + z) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$|(AX)_1| = \left|\frac{1}{6}(2x - z)\right| \leq \frac{1}{6}\left(2|x| + |z|\right) \leq \frac{1}{6}\left(2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty\right) = \frac{1}{2}\|X\|_\infty,$$

et

$$|(AX)_2| = \left|\frac{1}{6}(2x + y + 2z)\right| \leq \frac{1}{6}\left(2|x| + |y| + 2|z|\right) \leq \frac{1}{6}\left(2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty + 2\|X\|_\infty\right) = \frac{5}{6}\|X\|_\infty,$$

et enfin

$$|(AX)_3| = \left|\frac{1}{6}(2x + 2y + z)\right| \leq \frac{1}{6}\left(2|x| + 2|y| + |z|\right) \leq \frac{1}{6}\left(2\|X\|_\infty + 2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty\right) = \frac{5}{6}\|X\|_\infty.$$

Donc

$$\|AX\|_\infty = \max\left(|(AX)_1|, |(AX)_2|, |(AX)_3|\right) \leq \max\left(\frac{1}{2}\|X\|_\infty, \frac{5}{6}\|X\|_\infty, \frac{5}{6}\|X\|_\infty\right) = \frac{5}{6}\|X\|_\infty,$$

et donc

$$\boxed{k = \frac{5}{6}} \in]0, 1[$$

convient.

3) Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X = AX + B \qquad \Leftrightarrow \qquad (I_3 - A)X = B,$$

or

$$\det(I_3 - A) = \frac{49}{108} \neq 0,$$

donc $I_3 - A$ est inversible, donc

$$(I_3 - A)X = B \qquad \Leftrightarrow \qquad X = (I_3 - A)^{-1}B,$$

il y a donc bien une et une seule solution, qui est

$$\boxed{L = (I_3 - A)^{-1}B}.$$

Remarque

Rappelons que le système $MX = Y$ avec $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de paramètre $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ a soit

1. aucune solution (lorsque $Y \notin \mathrm{Im}(M)$)
2. une et une seule solution (si $Y \in \mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{p,1}\}$ - dans le cas $n = p$, $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{p,1}\}$ est équivalent à l'inversibilité de M, et donc $Y \in \mathrm{Im}(M)$ sera automatiquement vérifié),
3. une infinité de solutions (si $Y \in \mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0_{p,1}\}$).

Ceci dit, il y a ici une méthode plus en lien avec l'exercice pour établir l'inversibilité de $I_3 - A$: déterminons son noyau. Soit $X \in \mathrm{Ker}(I_3 - A)$, c'est-à-dire $AX = X$. Alors

$$\|X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \frac{5}{6} \|X\|_\infty ,$$

soit

$$\frac{1}{6} \|X\|_\infty \leq 0,$$

et comme une norme est positive, cela donne

$$\|X\|_\infty = 0, \qquad \text{puis} \qquad X = 0_{3,1}$$

(par l'axiome de séparation). Donc

$$\mathrm{Ker}(I_3 - A) = \{0_{3,1}\},$$

et la matrice carrée $I_3 - A$ est donc inversible.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} - L = (AX_n + B) - (AL + B) = A(X_n - L),$$

donc

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty = \|A(X_n - L)\|_\infty \leq k \|X_n - L\|_\infty$$

par la question 2 (appliqué en remplaçant X par $X_n - L$).
Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty .$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $k^n = k^0 = 1$, donc

$$\|X_0 - L\|_\infty \leq 1 \cdot \|X_0 - L\|_\infty = k^0 \|X_0 - L\|_\infty .$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty$. Alors, avec l'inégalité que l'on a remarquée au début de cette question,

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty \leq k \|X_n - L\|_\infty \underset{\text{H.R.}}{\leq} k \cdot k^n \|X_0 - L\|_\infty = k^{n+1} \|X_0 - L\|_\infty ,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty .$$

Puis, comme $0 \leq k < 1$, on a

$$k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et comme une norme est positive,

$$0 \leq \|X_n - L\|_\infty \leq k^n \|X_0 - L\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc le théorème d'encadrement donne

$$\|X_n - L\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit, la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Correction de l'exercice 5.12 **Énoncé p. 3**

Commençons par remarquer que :

$$A^{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} P$$

en tant que suite extraite. Montrons que cette limite est également P^2.
En effet, la norme $\|\cdot\|$ vérifie $\|MM'\| \leq \|M\| \|M'\|$ pour toutes matrices M et M', ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\left\|A^{2p} - P^2\right\| &= \left\|A^{2p} - A^pP + A^pP - P^2\right\| \\
&\leqslant \left\|A^{2p} - A^pP\right\| + \left\|A^pP - P^2\right\| \\
&\leqslant \left\|A^p(A^p - P)\right\| + \left\|(A^p - P)P\right\| \\
&\leqslant \underbrace{\left\|A^p\right\|}_{\substack{\text{borné car } (A^p) \\ \text{converge}}} \underbrace{\left\|A^p - P\right\|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0} + \underbrace{\left\|A^p - P\right\|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0} \underbrace{\|P\|}_{\text{constante}} .
\end{aligned}$$

Donc par encadrement, on a $\left\|A^{2p} - P^2\right\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire :

$$A^{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} P^2.$$

Puis, par unicité de la limite, on a :

$$\boxed{P^2 = P.}$$

Les autres égalités se montrent de même. Par exemple :

$$A^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} P$$

comme suite extraite. De plus :

$$\left\|A^{p+1} - AP\right\| = \underbrace{\|A\|}_{\text{constante}} \underbrace{\left\|A^p - P\right\|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}.$$

D'où $A^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} AP$. Et par unicité de la limite :

$$\boxed{AP = P.}$$

Correction de l'exercice 5.13 **Énoncé p. 3**

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La seconde inégalité triangulaire, appliquée à x_n et ℓ, donne

$$0 \leq \left|\|x_n\| - \|\ell\|\right| \leq \|x_n - \ell\|.$$

Or $\|x_n - \ell\| \to 0$ par hypothèse, donc par le théorème d'encadrement,

$$\left|\|x_n\| - \|\ell\|\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|\ell\|}.$$

2) Non. Prenons $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $x_n = (-1)^n$ et $a = 1$. Alors $|x_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = |a|.$$

Pourtant, la suite (x_n) ne converge pas : les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont constantes égales à 1 et à -1, donc convergent vers 1 et vers -1. Si (x_n) convergeait, ces deux limites seraient toutes deux égales à la limite de (x_n), donc égales entre elles, ce qui est faux.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - 0_E\| = \|x_n\|,$$

donc l'hypothèse $\|x_n\| \to 0$ s'écrit exactement $\|x_n - 0_E\| \to 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0_E}.$$

Correction de l'exercice 5.14 **Énoncé p. 4**

1) Soit $x \in E$. L'ensemble $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide car A l'est, et minorée par 0 car une norme est à valeurs positives. Elle admet donc une borne inférieure : $d(x, A)$ est bien défini, et $d(x, A) \geq 0$.

2) Soient $x, y \in E$ et soit $a \in A$. Par inégalité triangulaire,

$$\|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

Or une borne inférieure est un minorant, donc $d(x,A) \leq \|x-a\|$, d'où

$$d(x,A) - \|x-y\| \leq \|y-a\|\,.$$

Cette inégalité vaut pour tout $a \in A$, donc le réel $d(x,A) - \|x-y\|$ minore l'ensemble $\{\|y-a\|\,,\ a \in A\}$; il est donc inférieur ou égal à sa borne inférieure, qui en est le plus grand minorant :

$$d(x,A) - \|x-y\| \leq d(y,A), \qquad \text{soit} \qquad d(x,A) \leq \|x-y\| + d(y,A).$$

En échangeant les rôles de x et de y, et comme $\|y-x\| = \|x-y\|$ par homogénéité, on obtient aussi

$$d(y,A) \leq \|x-y\| + d(x,A).$$

Le réel $\|x-y\|$ majore donc $d(x,A) - d(y,A)$ et son opposé : il majore leur valeur absolue, soit

$$\boxed{|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|}.$$

3) Les éléments de A sont les $(t,0)$ avec $t \in \mathbb{R}$, et pour un tel élément,

$$\|x-(t,0)\|_\infty = \max\left(|x_1-t|\,,|x_2|\right) \geq |x_2|\,.$$

Ainsi $|x_2|$ minore l'ensemble $\{\|x-a\|\,,\ a \in A\}$. De plus, le choix $t = x_1$ donne

$$\|x-(x_1,0)\|_\infty = \max(0,|x_2|) = |x_2|\,,$$

donc $|x_2|$ appartient à cet ensemble : c'est son plus petit élément, donc sa borne inférieure. D'où

$$\boxed{d(x,A) = |x_2|}.$$

4) Si $x \in A$, alors $\|x-x\| = 0$ appartient à l'ensemble $\{\|x-a\|\,,\ a \in A\}$, donc $d(x,A) \leq 0$; avec la question 1, $d(x,A) = 0$.
La réciproque est fausse. Prenons $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue et $A =]0,1[$. Alors $0 \notin A$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \in A$, donc

$$0 \leq d(0,A) \leq \left|0 - \tfrac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

et en faisant tendre n vers l'infini, $d(0,A) = 0$.

Correction de l'exercice 5.15

Énoncé p. 4

1) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, le coefficient diagonal d'indice (j,j) de $A^\top B$ vaut

$$\left(A^\top B\right)_{j,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(A^\top\right)_{j,i} b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, b_{i,j}.$$

En sommant sur j,

$$\boxed{\langle A,\ B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, b_{i,j}}.$$

2) La formule de la question 1 rend les quatre vérifications immédiates.
Bilinéarité. À B fixée, l'application $A \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$ est linéaire, car les coefficients de $\lambda A + \mu A'$ sont les $\lambda a_{i,j} + \mu a'_{i,j}$. À A fixée, de même pour $B \mapsto \langle A,\ B\rangle$.

Symétrie. Le produit $a_{i,j}b_{i,j}$ est commutatif, donc $\langle B,\, A\rangle = \langle A,\, B\rangle$.
Positivité. On a

$$\langle A,\, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geq 0$$

comme somme de carrés.
Caractère défini. Si $\langle A,\, A\rangle = 0$, c'est une somme nulle de termes positifs : tous ses termes sont nuls, donc $a_{i,j} = 0$ pour tout couple (i, j), soit $A = 0_n$.
C'est donc un produit scalaire. La norme associée vaut, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\sqrt{\langle A,\, A\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2 .$$

3) L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ s'écrit $|\langle A,\, B\rangle| \leq \sqrt{\langle A,\, A\rangle}\sqrt{\langle B,\, B\rangle}$, soit

$$\boxed{\left|\operatorname{tr}(A^\top B)\right| \leq \|A\|_2\, \|B\|_2}.$$

4) Soit $\|\cdot\|$ la norme associée à un produit scalaire $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ sur un espace préhilbertien réel, et soient x et y dans cet espace. En développant par bilinéarité et symétrie,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 ,$$

et en additionnant ces deux égalités,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 .$$

Prenons maintenant $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, de sorte que $x + y = (1, 1)$ et $x - y = (1, -1)$.
Pour $\|\cdot\|_1$: $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ et $\|x+y\|_1 = \|x-y\|_1 = 2$, donc le membre de gauche vaut $4 + 4 = 8$ et celui de droite $2 + 2 = 4$.
Pour $\|\cdot\|_\infty$: $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 1$, donc le membre de gauche vaut $1 + 1 = 2$ et celui de droite $2 + 2 = 4$.
Dans les deux cas l'identité est mise en défaut, donc

$$\boxed{\text{ni } \|\cdot\|_1 \text{ ni } \|\cdot\|_\infty \text{ n'est associée à un produit scalaire sur } \mathbb{R}^2.}$$

Correction de l'exercice 5.16 **Énoncé p. 4**

Cas de N_1. L'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Elle est homogène : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$N_1(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{|\lambda^2 xy|} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{|xy|} = |\lambda|\, N_1(x, y).$$

Elle ne vérifie pas l'axiome de séparation : $N_1(1, 0) = 0$ alors que $(1, 0) \neq (0, 0)$.
Elle ne vérifie pas non plus l'inégalité triangulaire : avec $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$,

$$N_1(u + v) = N_1(1, 1) = 1 \qquad \text{et} \qquad N_1(u) + N_1(v) = 0 + 0 = 0.$$

Cas de N_2. L'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Elle vérifie l'axiome de séparation : si $|x| + y^2 = 0$, c'est une somme nulle de termes positifs, donc $|x| = 0$ et $y^2 = 0$, soit $(x, y) = (0, 0)$.
Elle n'est pas homogène : $N_2(0, 1) = 1$, tandis que

$$N_2(2 \cdot (0, 1)) = N_2(0, 2) = 4 \neq 2 = |2|\, N_2(0, 1).$$

Elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire : avec $u = v = (0,1)$,

$$N_2(u+v) = N_2(0,2) = 4 \qquad \text{et} \qquad N_2(u) + N_2(v) = 1 + 1 = 2.$$

Cas de N_3. L'application est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Elle est homogène : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$N_3(\lambda x, \lambda y) = \left(\sqrt{|\lambda|}\sqrt{|x|} + \sqrt{|\lambda|}\sqrt{|y|}\right)^2 = |\lambda| \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 = |\lambda|\, N_3(x,y).$$

Elle vérifie l'axiome de séparation : si $N_3(x,y) = 0$, alors $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 0$, somme nulle de termes positifs, donc $|x| = |y| = 0$.
Elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire : avec $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$,

$$N_3(u+v) = N_3(1,1) = (1+1)^2 = 4 \qquad \text{et} \qquad N_3(u) + N_3(v) = 1 + 1 = 2.$$

On reconnaît $N_3 = \|\cdot\|_p$ pour $p = \frac{1}{2}$: c'est le cas $0 < p < 1$ évoqué dans le cours.

Correction de l'exercice 5.17

Énoncé p. 4

1) Le maximum étant atteint, fixons $k_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|x\|_\infty = |x_{k_0}|$. Tous les termes de la somme $\sum_{k=1}^n |x_k|^2$ sont positifs, et $|x_{k_0}|^2$ est l'un d'eux, donc

$$\|x\|_\infty^2 = |x_{k_0}|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2,$$

et la croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ donne $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.
Ensuite, en développant le carré de la somme,

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 + \sum_{\substack{1\leq k,l\leq n \\ k\neq l}} |x_k|\,|x_l| \geq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2,$$

les termes croisés étant positifs. La croissance de la racine carrée donne $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.
2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, appliquée aux vecteurs $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ et $(1, \ldots, 1)$, donne

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \times 1 \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n 1\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\, \|x\|_2 .$$

Par ailleurs, $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, donc en sommant les carrés,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq n\, \|x\|_\infty^2,$$

puis $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$.
3) Les questions 1 et 2 donnent, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2 \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty,$$

ce sont exactement les deux inégalités de la définition, avec les constantes 1 et $\sqrt{n}$: les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ le sont aussi. Enfin, le cours a établi $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\, \|x\|_\infty$. Donc

$$\boxed{\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_2 \text{ et } \|\cdot\|_\infty \text{ sont deux à deux équivalentes sur } \mathbb{K}^n.}$$

4) Pour $x = (1, 0, \dots, 0)$, on a $\|x\|_\infty = \|x\|_2 = \|x\|_1 = 1$: il y a égalité dans les deux inégalités de la question 1.
Pour $x = (1, 1, \dots, 1)$, on a $\|x\|_\infty = 1$, $\|x\|_2 = \sqrt{n}$ et $\|x\|_1 = n$: il y a égalité dans les deux inégalités de la question 2.

Correction de l'exercice 5.18

Énoncé p. 5

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Fixons (i_0, j_0) tel que $\|A\|_\infty = \left|a_{i_0,j_0}\right|$. Tous les termes de la somme $\sum_{j=1}^n \left|a_{i_0,j}\right|$ sont positifs, et $\left|a_{i_0,j_0}\right|$ est l'un d'eux, donc

$$\|A\|_\infty = \left|a_{i_0,j_0}\right| \leq \sum_{j=1}^n \left|a_{i_0,j}\right| \leq N(A),$$

la dernière inégalité parce que $N(A)$ est le maximum de ces sommes.
Réciproquement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, chacun des n termes de $\sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right|$ est majoré par $\|A\|_\infty$, donc

$$\sum_{j=1}^n \left|a_{i,j}\right| \leq n \|A\|_\infty .$$

Le réel $n\|A\|_\infty$ majore ainsi toutes ces sommes, donc majore leur maximum : $N(A) \leq n\|A\|_\infty$.
2) La question 1 s'écrit

$$\|\cdot\|_\infty \leq N \qquad \text{et} \qquad N \leq n\|\cdot\|_\infty ,$$

avec $1 > 0$ et $n > 0$: les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La proposition d'invariance de la convergence donne alors le résultat : une suite converge pour N si et seulement si elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$, avec la même limite.
3) Identifions $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^{n^2}$ en rangeant les coefficients en une seule liste : la norme $\|\cdot\|_\infty$ de l'énoncé est alors la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{C}^{n^2}$.
Par hypothèse, les n^2 suites de coefficients de $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, et les limites sont les coefficients de P. La proposition de convergence composante par composante donne alors

$$A^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} P \qquad \text{pour } \|\cdot\|_\infty .$$

La question 2 transporte cette convergence à la norme N : la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers P pour N. La suite (A^{2p}), extraite de (A^p), converge donc vers P. Par ailleurs, la norme N vérifie $N(MM') \leq N(M)N(M')$, donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$N(A^{2p} - P^2) \leq N\left(A^p(A^p - P)\right) + N\left((A^p - P)P\right) \leq \left(N(A^p) + N(P)\right) N(A^p - P),$$

où la suite $(N(A^p))$ est bornée car (A^p) converge pour N, et où $N(A^p - P) \to 0$. Par encadrement, $A^{2p} \to P^2$ pour N (cf. l'exercice 5.12). Par unicité de la limite,

$$\boxed{P^2 = P}.$$

Correction de l'exercice 5.19

Énoncé p. 5

1) La fonction w est continue sur le segment $[0, 1]$, donc le théorème des bornes atteintes lui donne un minimum m et un maximum M, et $m > 0$ puisque w est

strictement positive. Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$m\,|f(t)| \leq w(t)\,|f(t)| \leq M\,|f(t)|\,,$$

donc, par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$,

$$m\,\|f\|_1 \leq N_w(f) \leq M\,\|f\|_1\,.$$

En divisant la première inégalité par $m > 0$, il vient

$$\|f\|_1 \leq \frac{1}{m} N_w(f) \qquad \text{et} \qquad N_w(f) \leq M\,\|f\|_1\,,$$

avec $\frac{1}{m} > 0$ et $M > 0$ (car $M \geq m > 0$) : les deux normes sont équivalentes.
2) Pour $f \in E$, la fonction $t \mapsto t\,|f(t)|$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc $N_w(f)$ est bien définie, et positive par positivité de l'intégrale. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Homogénéité. Par linéarité de l'intégrale et positivité de $|\lambda|$,

$$N_w(\lambda f) = \int_0^1 t\,|\lambda|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|\,N_w(f).$$

Inégalité triangulaire. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$t\,|f(t)+g(t)| \leq t\,|f(t)| + t\,|g(t)|\,,$$

et la croissance de l'intégrale donne $N_w(f+g) \leq N_w(f) + N_w(g)$.
Séparation. Supposons $N_w(f) = 0$. La fonction $t \mapsto t\,|f(t)|$ est continue et positive sur $[0,1]$, et d'intégrale nulle : elle est donc identiquement nulle. Ainsi $tf(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0,1]$. Enfin, f est continue en 0, donc

$$f(0) = \lim_{t \to 0^+} f(t) = 0.$$

D'où $f = 0$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$, vaut $1 - nt$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et 0 sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, et elle est positive. Donc

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{1/n} (1-nt)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{nt^2}{2}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \boxed{\frac{1}{2n}},$$

et

$$N_w(f_n) = \int_0^{1/n} t(1-nt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{nt^3}{3}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^2} = \boxed{\frac{1}{6n^2}}.$$

4) Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|f\|_1 \leq \alpha N_w(f)$ pour tout $f \in E$. En appliquant cette inégalité à f_n, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{\alpha}{6n^2}, \qquad \text{soit} \qquad 3n \leq \alpha.$$

C'est impossible, car $3n \to +\infty$. Il n'existe donc aucune telle constante, et

$$\boxed{N_w \text{ et } \|\cdot\|_1 \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

L'autre inégalité est pourtant vérifiée : comme $t \leq 1$ sur $[0,1]$, on a $N_w(f) \leq \|f\|_1$ pour tout $f \in E$.

Correction de l'exercice 5.20 **Énoncé p. 5**

1) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le réel $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2$ majore x_1^2 et x_2^2, et il est majoré par $(|x_1| + |x_2|)^2 = \|x\|_1^2$; ces normes étant positives, la croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ donne

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

(question 1 de l'exercice 5.17). Si $x \in B_1$, c'est-à-dire $\|x\|_1 \leq 1$, alors $\|x\|_2 \leq 1$, donc $x \in B_2$: d'où $B_1 \subset B_2$. Si $x \in B_2$, alors $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq 1$, donc $x \in B_\infty$: d'où $B_2 \subset B_\infty$.
2) Supposons $N \leq \alpha N'$ et soit $x \in B'$, donc $N'(x) \leq 1$. Alors

$$N(x) \leq \alpha N'(x) \leq \alpha,$$

donc $x \in B_\alpha$. D'où $B' \subset B_\alpha$.
Réciproquement, supposons $B' \subset B_\alpha$ et soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, les deux membres de $N(x) \leq \alpha N'(x)$ sont nuls. Sinon, $N'(x) \neq 0$ par l'axiome de séparation, donc $N'(x) > 0$, et on peut poser

$$y = \frac{1}{N'(x)}\, x, \qquad \text{qui vérifie} \qquad N'(y) = \frac{1}{N'(x)} N'(x) = 1$$

par homogénéité. Donc $y \in B'$, puis $y \in B_\alpha$, c'est-à-dire $N(y) \leq \alpha$. Or $N(y) = \frac{N(x)}{N'(x)}$, toujours par homogénéité, d'où

$$N(x) \leq \alpha N'(x).$$

3) L'inclusion $B_1 \subset B_2$ est le cas $\alpha = 1$ de la question 2 avec $N' = \|\cdot\|_1$ et $N = \|\cdot\|_2$: elle équivaut donc à $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$.
De même, $B_2 \subset B_\infty$ est le cas $\alpha = 1$ avec $N' = \|\cdot\|_2$ et $N = \|\cdot\|_\infty$: elle équivaut à $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$.
On retrouve bien les deux inégalités de la question 1.

Correction de l'exercice 5.21 **Énoncé p. 5**

1) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties convexes de E et soit $C = \bigcap_{i\in I} C_i$. Soient $x, y \in C$ et $t \in [0, 1]$. Pour tout $i \in I$, on a $x \in C_i$ et $y \in C_i$, et C_i est convexe, donc $(1 - t)x + ty \in C_i$. C'est vrai pour tout $i \in I$, donc $(1 - t)x + ty \in C$: la partie C est convexe.
Pour la réunion, prenons dans $\mathbb{R}^2$

$$C_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \qquad \text{et} \qquad C_2 = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, donc deux parties convexes : si x, y appartiennent à un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire de x et y y appartient aussi. Or $(1, 0) \in C_1 \cup C_2$ et $(0, 1) \in C_1 \cup C_2$, tandis que pour $t = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin C_1 \cup C_2.$$

La réunion $C_1 \cup C_2$ n'est donc pas convexe.
2) Comme $E \neq \{0_E\}$, il existe $v \in E$ non nul, donc $\|v\| > 0$ par l'axiome de séparation. Posons $u = \frac{1}{\|v\|} v$, de sorte que $\|u\| = 1$ par homogénéité, puis

$$x = a + ru \qquad \text{et} \qquad y = a - ru.$$

Alors $\|x-a\| = r\|u\| = r$ et $\|y-a\| = r$, donc x et y appartiennent à $S(a,r)$. Pourtant, pour $t = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = a, \qquad \text{et} \qquad \|a-a\| = 0 \neq r$$

puisque $r > 0$: le point a n'appartient pas à $S(a,r)$. La sphère n'est donc pas convexe.
3) Soient $x', y' \in u(C)$ et $t \in [0,1]$. Il existe $x, y \in C$ tels que $x' = u(x)$ et $y' = u(y)$. Par linéarité de u,

$$(1-t)x' + ty' = (1-t)u(x) + tu(y) = u\left((1-t)x + ty\right).$$

Or C est convexe, donc $(1-t)x + ty \in C$, et le vecteur ci-dessus appartient à $u(C)$. Donc $u(C)$ est convexe.
4) Soient $f, g \in C$ et $t \in [0,1]$. La fonction $(1-t)f + tg$ est continue sur $[0,1]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues. De plus, pour tout $s \in [0,1]$,

$$(1-t)f(s) + tg(s) \geq 0$$

comme somme de produits de réels positifs, puisque $1-t \geq 0$, $t \geq 0$, $f(s) \geq 0$ et $g(s) \geq 0$. Donc $(1-t)f + tg \in C$, et C est convexe.

Correction de l'exercice 5.22 **Énoncé p. 5**

1) Par la caractérisation des parties bornées, il existe $M_A > 0$ et $M_B > 0$ tels que $\|a\| \leq M_A$ pour tout $a \in A$ et $\|b\| \leq M_B$ pour tout $b \in B$.
Soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$, et l'inégalité triangulaire donne

$$\|x\| = \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq M_A + M_B.$$

Comme $M_A + M_B > 0$, la partie $A + B$ est bornée.
Soit $x \in \lambda A$. Il existe $a \in A$ tel que $x = \lambda a$, et l'homogénéité donne

$$\|x\| = |\lambda|\,\|a\| \leq |\lambda|\,M_A \leq |\lambda|\,M_A + 1.$$

Comme $|\lambda|\,M_A + 1 > 0$, la partie λA est bornée.
2) Posons $D_k = [-k, k]$ pour $k \in \mathbb{N}$. Chaque D_k est bornée, puisque $|x| \leq k \leq k+1$ pour tout $x \in D_k$. Pourtant

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k = \mathbb{R},$$

car tout réel x appartient à D_k dès que $k \geq |x|$. Et $\mathbb{R}$ n'est pas borné : pour tout $M > 0$, le réel $M+1$ vérifie $|M+1| > M$. L'hypothèse « famille finie » de la proposition du cours est donc nécessaire.
3) Pour tout $t \in D$,

$$|f(t)| \leq \|f\|_\infty \qquad \text{et} \qquad |g(t)| \leq \|g\|_\infty,$$

et ces quatre quantités sont positives, donc par produit d'inégalités entre réels positifs,

$$|(fg)(t)| = |f(t)|\,|g(t)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

La fonction fg est donc bornée, et $\|f\|_\infty \|g\|_\infty$ majore l'ensemble $\{|(fg)(t)|,\ t \in D\}$, donc est supérieur ou égal à sa borne supérieure :

$$\boxed{\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty}.$$

Correction de l'exercice 5.23

Énoncé p. 6

1) Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $A = aI_2 + bN$. Un calcul direct donne $N^2 = 0_2$, donc $N^k = 0_2$ pour tout $k \geq 2$. Les matrices aI_2 et bN commutent, donc la formule du binôme de Newton donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (bN)^k (aI_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\min(n,1)} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} N^k.$$

Pour $n = 0$, cela donne $A^0 = I_2$, et pour $n \geq 1$,

$$A^n = a^n I_2 + n a^{n-1} bN = \boxed{\begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}.$$

2) D'après la proposition de convergence composante par composante, la suite (A^n) converge pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si chacun de ses quatre coefficients converge, c'est-à-dire si et seulement si les suites (a^n) et $\left(na^{n-1}b\right)$ convergent.
Étudions d'abord (a^n). Si $|a| < 1$, alors $|a^n| = |a|^n \to 0$, donc $a^n \to 0$. Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1. Si $|a| > 1$, alors $|a^n| \to +\infty$: la suite n'est pas bornée, donc diverge. Enfin, si $|a| = 1$ avec $a \neq 1$: si (a^n) convergeait vers ℓ, alors, en passant à la limite dans $a^{n+1} = a \times a^n$, on aurait $\ell = a\ell$, soit $\ell(a-1) = 0$ et donc $\ell = 0$; mais $|a^n| = 1$ pour tout n, donc $|\ell| = 1$, ce qui est contradictoire. La suite (a^n) converge donc si et seulement si $|a| < 1$ ou $a = 1$.
Si $|a| < 1$, alors $\left|na^{n-1}b\right| = n\,|a|^{n-1}\,|b| \to 0$ par croissance comparée, donc $na^{n-1}b \to 0$, et

$$A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0_2.$$

Si $a = 1$, alors $A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la suite (nb) converge si et seulement si $b = 0$ (sinon $|nb| \to +\infty$). Dans ce cas $A = I_2$ et $A^n \to I_2$.
Finalement,

$$\boxed{(A^n) \text{ converge } \iff |a| < 1 \text{ ou } (a = 1 \text{ et } b = 0),}$$

la limite valant 0_2 dans le premier cas et I_2 dans le second.
3) Oui : $0_2^2 = 0_2$ et $I_2^2 = I_2$, ce qui est conforme à la conclusion de l'exercice 5.12.

Correction de l'exercice 5.24

Énoncé p. 6

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell = \ell$, donc

$$y_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \ell),$$

puis, par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$\|y_n - \ell\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \|x_k - \ell\|.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\|x_k - \ell\| \to 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq N$,

$$\|x_k - \ell\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $C = \sum_{k=1}^{N-1} \|x_k - \ell\|$: c'est un réel positif fixé, qui ne dépend pas de n. Alors, pour tout $n \geq N$, en coupant la somme au rang N,

$$\|y_n - \ell\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} \|x_k - \ell\| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} \|x_k - \ell\| \leq \frac{C}{n} + \frac{n-N+1}{n} \times \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{C}{n} + \frac{\epsilon}{2},$$

puisque $n - N + 1 \leq n$. Enfin $\frac{C}{n} \to 0$, donc il existe $N' \geq N$ tel que $\frac{C}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour tout $n \geq N'$. Pour un tel n,

$$\|y_n - \ell\| \leq \epsilon.$$

Ceci valant pour tout $\epsilon > 0$, on a $\|y_n - \ell\| \to 0$, soit

$$\boxed{y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell}.$$

2) Non. Soit $a \in E$ non nul et posons $x_n = (-1)^n a$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \begin{cases} 0_E & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -a & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

car les termes se regroupent deux à deux. Dans les deux cas,

$$0 \leq \|y_n\| \leq \frac{\|a\|}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc (y_n) converge vers 0_E. Pourtant (x_n) diverge : les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont constantes égales à a et à $-a$, et $a \neq -a$ puisque $a \neq 0_E$; si (x_n) convergeait, ces deux limites seraient égales.

Correction de l'exercice 5.25 **Énoncé p. 6**

1) Notons ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2 les limites respectives de (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}).
La suite (x_{6n}) est extraite de (x_{2n}), par $n \mapsto 3n$ qui est strictement croissante, donc elle converge vers ℓ_0. Elle est aussi extraite de (x_{3n}), par $n \mapsto 2n$, donc elle converge vers ℓ_2. Par unicité de la limite, $\ell_0 = \ell_2$.
La suite (x_{6n+3}) est extraite de (x_{2n+1}), par $n \mapsto 3n + 1$, donc elle converge vers ℓ_1. Elle est aussi extraite de (x_{3n}), par $n \mapsto 2n + 1$, donc elle converge vers ℓ_2. Par unicité de la limite, $\ell_1 = \ell_2$.
Ainsi $\ell_0 = \ell_1$; notons ℓ cette valeur commune et montrons que $x_n \to \ell$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_{2n} - \ell\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N_0$, et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_{2n+1} - \ell\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N_1$. Posons $N = 2\max(N_0, N_1) + 1$ et soit $m \geq N$.
Si m est pair, écrivons $m = 2n$; alors $2n \geq 2\max(N_0, N_1) + 1$, donc $n > \max(N_0, N_1)$, et en particulier $n \geq N_0$, d'où $\|x_m - \ell\| \leq \epsilon$.
Si m est impair, écrivons $m = 2n + 1$; alors $2n + 1 \geq 2\max(N_0, N_1) + 1$, donc $n \geq \max(N_0, N_1) \geq N_1$, d'où $\|x_m - \ell\| \leq \epsilon$.
Dans les deux cas $\|x_m - \ell\| \leq \epsilon$, donc

$$\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell}.$$

2) Soit $a \in E$ non nul et posons $x_n = (-1)^n a$. Les suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont constantes égales à a et à $-a$, donc convergent. Pourtant (x_n) diverge : si elle convergeait, ces deux limites seraient égales, or $a \neq -a$ puisque $a \neq 0_E$.

Les deux premières hypothèses ne suffisent donc pas. On vérifie au passage que la troisième est bien en défaut ici : $x_{3n} = (-1)^{3n}a = (-1)^n a$, et cette suite diverge pour la même raison.

Correction de l'exercice 5.26 **Énoncé p. 6**

1) Si P et Q ont pour coefficients (a_k) et (b_k) et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P+Q$ a pour coefficients $(a_k + b_k)$ et λP a pour coefficients (λa_k). Dans les deux cas, les sommes et les maxima écrits ci-dessous ne portent que sur un nombre fini de termes non nuls, donc N_c et N_s sont bien définies et positives.
Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N_s(\lambda P) = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| = |\lambda|\, N_s(P),$$

et de même $N_c(\lambda P) = \max_{k\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|a_k| = |\lambda|\, N_c(P)$.
Inégalité triangulaire. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|$. En sommant, $N_s(P + Q) \leq N_s(P) + N_s(Q)$; en majorant chaque terme par $N_c(P) + N_c(Q)$ puis en passant au maximum, $N_c(P + Q) \leq N_c(P) + N_c(Q)$.
Séparation. Si $N_s(P) = 0$, tous les $|a_k|$ sont nuls car ce sont des réels positifs de somme nulle, donc $P = 0$. Si $N_c(P) = 0$, alors $|a_k| \leq 0$ pour tout k, donc $P = 0$.
2) Soit $t \in [0, 1]$. Comme $0 \leq t^k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|P(t)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k t^k\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|\, t^k \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k| = N_s(P).$$

Ce majorant ne dépend pas de t, donc $N_\infty(P) \leq N_s(P)$.
Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j| = N_s(P)$, donc $N_c(P) \leq N_s(P)$.
3) Tous les coefficients de Q_n valent 1, et il y en a $n+1$ de non nuls, donc $N_c(Q_n) = 1$ et $N_s(Q_n) = n + 1$. De plus, Q_n est à coefficients positifs, donc $t \mapsto Q_n(t)$ est croissante sur $[0, 1]$ et

$$N_\infty(Q_n) = Q_n(1) = n + 1.$$

Pour R_n : si $t \in [0, 1]$, alors $2t - 1 \in [-1, 1]$, donc $|R_n(t)| = |2t - 1|^n \leq 1$, avec égalité en $t = 0$. Ainsi $N_\infty(R_n) = 1$. La formule du binôme donne

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2X)^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} X^k,$$

d'où

$$N_s(R_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1 + 2)^n = 3^n.$$

4) *N_c et N_s.* S'il existait $\beta > 0$ tel que $N_s \leq \beta N_c$, on aurait $n + 1 \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en appliquant l'inégalité à Q_n, ce qui est absurde. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.
N_c et N_∞. De même, $N_\infty \leq \beta N_c$ donnerait $n + 1 \leq \beta$ pour tout n.
N_s et N_∞. Si $N_s \leq \beta N_\infty$, alors en appliquant l'inégalité à R_n on obtient $3^n \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde.
Les trois normes sont donc deux à deux non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$, alors même que la question 2 fournit une comparaison dans un sens pour chacune des trois paires.
5) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficients $a_0, \ldots, a_n$. Chacun des $n + 1$ termes de la somme est majoré par le maximum,

$$N_s(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq (n + 1) \max_{0\leq k\leq n} |a_k| = (n + 1) N_c(P).$$

6) Les réels $t_0, \dots, t_n$ étant deux à deux distincts, tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit

$$P = \sum_{j=0}^{n} P(t_j) L_j.$$

L'application N_s étant une norme, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité donnent

$$N_s(P) \leq \sum_{j=0}^{n} \left|P(t_j)\right| N_s(L_j).$$

Or $t_j \in [0,1]$, donc $\left|P(t_j)\right| \leq N_\infty(P)$ pour tout j, d'où

$$N_s(P) \leq \left(\sum_{j=0}^{n} N_s(L_j)\right) N_\infty(P).$$

7) Posons $C_n = \sum_{j=0}^{n} N_s(L_j) > 0$. Les questions 2 et 6 donnent, sur $\mathbb{R}_n[X]$,

$$N_\infty \leq N_s \leq C_n N_\infty,$$

donc N_s et N_∞ sont équivalentes. Les questions 2 et 5 donnent de même

$$N_c \leq N_s \leq (n+1) N_c,$$

donc N_c et N_s sont équivalentes. La symétrie et la transitivité de l'équivalence des normes donnent alors l'équivalence de N_c et de N_∞ :

$$\boxed{N_c,\ N_s \text{ et } N_\infty \text{ sont deux à deux équivalentes sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Les constantes obtenues dépendent de n, ce qui est cohérent avec la question 4 : elles ne peuvent pas être choisies uniformément en n.

Correction de l'exercice 5.27 **Énoncé p. 7**

1) Pour $f \in E$, la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée : $\|f'\|_\infty$ est bien définie. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire résultent de celles de $\|\cdot\|_\infty$ et de la linéarité de la dérivation : $\|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda| \, \|f'\|_\infty$ et $\|(f+g)'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$. En revanche, la séparation tombe en défaut : la fonction constante égale à 1 appartient à E, elle n'est pas nulle, et sa dérivée est nulle, donc $\|f'\|_\infty = 0$. Ce n'est donc pas une norme sur E.
L'ensemble E_0 est un sous-espace vectoriel de E : il contient la fonction nulle et est stable par combinaison linéaire. Sur E_0, la séparation est vérifiée : si $\|f'\|_\infty = 0$, alors f' est nulle sur l'intervalle $[0,1]$, donc f y est constante, égale à $f(0) = 0$. Ainsi $f \mapsto \|f'\|_\infty$ est une norme sur E_0.
2) L'application N est bien définie et positive. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| \left(|f(0)| + \|f'\|_\infty\right) = |\lambda| \, N(f).$$

Pour $f, g \in E$, en ajoutant $|f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$ et $\|f' + g'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$, on obtient $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$. Enfin, si $N(f) = 0$, alors $|f(0)| = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $f \in E_0$ et $f' = 0$: la question 1 donne $f = 0$.

3) Soit $f \in E$ et soit $t \in [0,1]$. Comme f est de classe C^1,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\,\mathrm{d}u,$$

donc

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\,\mathrm{d}u \leq |f(0)| + t\,\|f'\|_\infty \leq N(f),$$

puisque $t \leq 1$. Ce majorant ne dépend pas de t, d'où $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
4) Pour tout $t \in [0,1]$, $|f_n(t)| = \frac{|\sin(nt)|}{n} \leq \frac{1}{n}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.
Par ailleurs $f_n(0) = 0$ et $f_n'(t) = \cos(nt)$, donc $\|f_n'\|_\infty \geq |f_n'(0)| = 1$, et $\|f_n'\|_\infty \leq 1$ puisque $|\cos| \leq 1$. Ainsi

$$N(f_n) = 0 + 1 = 1.$$

5) S'il existait $\beta > 0$ tel que $N \leq \beta\,\|\cdot\|_\infty$, on aurait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 = N(f_n) \leq \beta\,\|f_n\|_\infty \leq \frac{\beta}{n},$$

donc $n \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes, bien que la question 3 fournisse la comparaison $\|\cdot\|_\infty \leq N$.
6) Pour toute $f \in E$, on a $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$, donc $N(f) \leq N'(f)$. Réciproquement, la question 3 donne

$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq N(f) + \|f'\|_\infty \leq 2N(f),$$

car $\|f'\|_\infty \leq N(f)$. Ainsi $N \leq N' \leq 2N$: les deux normes sont équivalentes.

Correction de l'exercice 5.28 **Énoncé p. 7**

1) Supposons $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$. Alors $x + y = (1+\lambda)x$ et $1 + \lambda \geq 0$, donc, par homogénéité,

$$\|x + y\| = (1+\lambda)\,\|x\| = \|x\| + \lambda\,\|x\| = \|x\| + \|y\|\,.$$

2) Pour $\|\cdot\|_\infty$, prenons $x = (1,1)$ et $y = (1,-1)$: ils ne sont pas colinéaires, $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $x + y = (2,0)$, donc $\|x+y\|_\infty = 2 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.
Pour $\|\cdot\|_1$, prenons $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$: ils ne sont pas colinéaires, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ et $x + y = (1,1)$, donc $\|x+y\|_1 = 2 = \|x\|_1 + \|y\|_1$.
3) En développant par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\|\|y\|\,x - \|x\|\,y\|^2 &= \|y\|^2\,\|x\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\|\,\langle x, y\rangle + \|x\|^2\,\|y\|^2 \\ &= 2\,\|x\|\,\|y\|\,(\|x\|\,\|y\| - \langle x, y\rangle)\,.\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. En élevant au carré,

$$\|x\|^2 + 2\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2\,,$$

donc $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$. L'identité précédente donne alors $\|\|y\|\,x - \|x\|\,y\|^2 = 0$, c'est-à-dire

$$\|y\|\,x = \|x\|\,y.$$

Si $y = 0$, les vecteurs x et y sont colinéaires. Sinon $\|y\| > 0$ et $x = \frac{\|x\|}{\|y\|}y$: ils le sont encore, avec un coefficient positif.

4) Soit $t \in [0,1]$ et posons $z_t = tx + (1-t)y$. On remarque que

$$z_t + z_{1-t} = tx + (1-t)y + (1-t)x + ty = x + y.$$

D'une part, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité donnent

$$\|z_t\| \leq t\,\|x\| + (1-t)\,\|y\| = 1,$$

et de même $\|z_{1-t}\| \leq 1$. D'autre part,

$$2 = \|x+y\| = \|z_t + z_{1-t}\| \leq \|z_t\| + \|z_{1-t}\| \leq 2.$$

Les inégalités sont donc toutes des égalités. En particulier $\|z_t\| + \|z_{1-t}\| = 2$ avec $\|z_t\| \leq 1$ et $\|z_{1-t}\| \leq 1$, ce qui impose $\|z_t\| = 1$.
5) Supposons que la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ pour $\|\cdot\|_2$ contienne le segment $[x,y]$ avec $x \neq y$. Alors $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ et le milieu $\frac{x+y}{2}$ appartient au segment, donc $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 = 1$, c'est-à-dire $\|x+y\|_2 = 2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$. La norme $\|\cdot\|_2$ étant associée au produit scalaire canonique, la question 3 donne $\|y\|_2\, x = \|x\|_2\, y$, soit $x = y$: c'est exclu. La sphère unité euclidienne ne contient donc aucun segment non réduit à un point.
Pour $\|\cdot\|_\infty$, reprenons $x = (1,1)$ et $y = (1,-1)$ de la question 2. Ils vérifient $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ et $\|x+y\|_\infty = 2$, donc la question 4 montre que tout point du segment $[x,y]$, c'est-à-dire $\{1\} \times [-1,1]$, est de norme 1. Ce côté du carré est contenu dans la sphère unité.

Correction de l'exercice 5.29 **Énoncé p. 7**

1) Notons $S = N_1 + N_2$ et $M = \max(N_1, N_2)$. Ces deux applications sont positives. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,

$$S(\lambda x) = |\lambda|\, N_1(x) + |\lambda|\, N_2(x) = |\lambda|\, S(x), \qquad M(\lambda x) = \max\left(|\lambda|\, N_1(x), |\lambda|\, N_2(x)\right) = |\lambda|\, M(x),$$

la dernière égalité car $|\lambda| \geq 0$. Pour $x, y \in E$, en ajoutant les deux inégalités triangulaires, $S(x+y) \leq S(x) + S(y)$; et pour $i \in \{1,2\}$,

$$N_i(x+y) \leq N_i(x) + N_i(y) \leq M(x) + M(y),$$

donc $M(x+y) \leq M(x) + M(y)$ en passant au maximum. Enfin, si $S(x) = 0$ ou si $M(x) = 0$, alors $N_1(x) = 0$, donc $x = 0_E$.
Comme N_1 et N_2 sont positives, on a $M \leq S \leq 2M$: les normes S et M sont équivalentes.
2) Les applications N_1 et N_2 sont des normes : ce sont les cas particuliers de la norme à poids $(x,y) \mapsto w_1\,|x| + w_2\,|y|$ avec $w_1, w_2 > 0$, dont les trois axiomes se vérifient comme pour $\|\cdot\|_1$.
Posons $m = \min(N_1, N_2)$, $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$. Alors

$$m(u) = \min(3,1) = 1, \qquad m(v) = \min(1,3) = 1, \qquad m(u+v) = \min(4,4) = 4.$$

Ainsi $m(u+v) = 4 > 2 = m(u) + m(v)$: l'inégalité triangulaire est en défaut, donc m n'est pas une norme.
3) Posons $N_u(x) = \|u(x)\|_F$. Par linéarité de u,

$$N_u(\lambda x) = \|\lambda u(x)\|_F = |\lambda|\, N_u(x), \qquad N_u(x+y) = \|u(x) + u(y)\|_F \leq N_u(x) + N_u(y),$$

donc l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont toujours vérifiées.

Si u est injective et si $N_u(x) = 0$, alors $u(x) = 0_F$ par séparation de $\|\cdot\|_F$, donc $x \in \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$: la séparation est vérifiée et N_u est une norme.
Réciproquement, si u n'est pas injective, il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = 0_F$, donc $N_u(x) = 0$ avec $x \neq 0_E$: la séparation est en défaut.
4) L'application $X \mapsto AX$ est linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même, et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après la question 3, N_A est une norme si et seulement si cette application est injective, c'est-à-dire si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$. Comme A est carrée, cela équivaut à l'inversibilité de A.
5) Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|(AX)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \|X\|_\infty \leq N(A)\,\|X\|_\infty,$$

et en passant au maximum sur i, $\|AX\|_\infty \leq N(A)\,\|X\|_\infty$, c'est-à-dire $N_A \leq N(A)\,\|\cdot\|_\infty$.
En appliquant cette inégalité à A^{-1} et au vecteur AX,

$$\|X\|_\infty = \left\|A^{-1}(AX)\right\|_\infty \leq N(A^{-1})\,\|AX\|_\infty = N(A^{-1})N_A(X).$$

Les deux inégalités

$$N_A \leq N(A)\,\|\cdot\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \|\cdot\|_\infty \leq N(A^{-1})N_A$$

sont exactement celles de la définition, avec les constantes $N(A) > 0$ et $N(A^{-1}) > 0$: les normes N_A et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Correction de l'exercice 5.30 **Énoncé p. 7**

1) Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A_pB_p - AB = A_p(B_p - B) + (A_p - A)B,$$

donc, par inégalité triangulaire puis par sous-multiplicativité de N,

$$N(A_pB_p - AB) \leq N(A_p)N(B_p - B) + N(A_p - A)N(B).$$

La suite (A_p) étant convergente, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que $N(A_p) \leq M$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$0 \leq N(A_pB_p - AB) \leq MN(B_p - B) + N(B)N(A_p - A).$$

Les deux termes du majorant tendent vers 0, donc, par encadrement, $N(A_pB_p - AB) \to 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{A_pB_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} AB.}$$

2) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, la suite (A_p^0) est constante égale à I_n, qui converge vers $A^0 = I_n$. Supposons le résultat acquis au rang k. La question 1 appliquée aux suites (A_p^k), de limite A^k, et (A_p), de limite A, donne $A_p^{k+1} = A_p^kA_p \to A^kA = A^{k+1}$.
3) D'après la question 2, $A_p^2 \to A^2$. Mais $A_p^2 = A_p$ pour tout p, donc cette même suite converge vers A. Par unicité de la limite, $A^2 = A$.
De même, si $A_p^n = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors $A_p^n \to A^n$ d'après la question 2, et la suite constante nulle converge vers 0 : par unicité de la limite, $A^n = 0$. Une limite de matrices nilpotentes d'indice au plus n est donc nilpotente.

4) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p A_p^{-1} = I_n$. La question 1 appliquée aux suites (A_p) et (A_p^{-1}) donne $A_p A_p^{-1} \to AB$; or la suite constante égale à I_n converge vers I_n. Par unicité de la limite, $AB = I_n$. En échangeant les rôles des deux facteurs, la même méthode appliquée à $A_p^{-1} A_p = I_n$ donne $BA = I_n$. La matrice A est donc inversible, d'inverse B.
5) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $A_p = \frac{1}{p} I_n$. Chaque A_p est inversible, d'inverse pI_n, et $N(A_p) = \frac{1}{p} \to 0$, donc (A_p) converge vers la matrice nulle, qui n'est pas inversible. L'hypothèse ne peut donc pas être supprimée : ici $N(A_p^{-1}) = p$, la suite (A_p^{-1}) n'est pas bornée, donc ne converge pas, et la conclusion de la question 4 est fausse.

Correction de l'exercice 5.31

Énoncé p. 9

1. De $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on tire $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, et comme $p > 1$ le réel $\frac{p-1}{p}$ est strictement positif : en passant à l'inverse,

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

On en déduit $(p-1)q = p$ et $\frac{p}{q} = \frac{p(p-1)}{p} = p - 1$.

2. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont positifs et de somme 1, on obtient, pour les réels strictement positifs a^p et b^q :

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\ln\left(b^q\right) = \ln a + \ln b = \ln(ab).$$

La fonction exp étant croissante, il vient

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Si $a = 0$ ou $b = 0$, le membre de gauche est positif et le membre de droite est nul : l'inégalité subsiste.

3. Si $\|x\|_p = 0$, alors $x = 0$ et les deux membres sont nuls ; de même si $\|y\|_q = 0$. Supposons donc $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_q > 0$, et posons, pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$a_k = \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \qquad \text{et} \qquad b_k = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}.$$

La partie I donne $a_k b_k \leq \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}$ pour tout k. En sommant ces n inégalités :

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

car $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_p^p$ et $\sum_{k=1}^n |y_k|^q = \|y\|_q^q$. En multipliant par $\|x\|_p \|y\|_q > 0$, on obtient l'inégalité annoncée.

4. Les réels 2 et 2 sont conjugués, car $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. L'inégalité devient

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_2 \|y\|_2,$$

c'est-à-dire l'inégalité de Cauchy-Schwarz, déjà utilisée à l'exercice 5.17.

5. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ donne $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$, donc
$$|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leq |x_k + y_k|^{p-1} (|x_k| + |y_k|),$$
le facteur $|x_k + y_k|^{p-1}$ étant positif. En sommant sur k et en séparant les deux termes, on obtient l'inégalité voulue.
6. Posons
$$u = \left(|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1}\right).$$
L'inégalité de Hölder appliquée à u et x, avec les exposants conjugués q et p, donne
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| \leq \|u\|_q \|x\|_p.$$
Or $(p-1)q = p$ d'après la question 1, donc
$$\|u\|_q = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x + y\|_p^{p-1},$$
la dernière égalité provenant de $\frac{p}{q} = p - 1$. Le même calcul avec y donne $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \leq \|x + y\|_p^{p-1} \|y\|_p$. En reportant dans la question 5 :
$$\|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p-1} \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right).$$
7. Si $\|x + y\|_p = 0$, l'inégalité $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ est immédiate. Sinon, $\|x + y\|_p^{p-1} > 0$ et on peut diviser l'inégalité de la question 6 par ce réel, ce qui donne
$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$
Le cours a déjà établi l'homogénéité et la séparation : $\|\cdot\|_p$ est donc une norme sur $\mathbb{K}^n$.
8. Si $x = 0$, les deux membres sont nuls. Sinon, posons $u = \frac{1}{\|x\|_r} x$, de sorte que $\|u\|_r = 1$ par homogénéité. Pour tout k, $|u_k|^r \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j|^r = 1$, donc $|u_k| \leq 1$. Or, pour $t \in [0, 1]$ et $s \geq r$, on a $t^s \leq t^r$: il vient $|u_k|^s \leq |u_k|^r$ pour tout k. En sommant,
$$\|u\|_s^s = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^s \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k|^r = 1,$$
donc $\|u\|_s \leq 1$, c'est-à-dire $\|x\|_s \leq \|x\|_r$ après multiplication par $\|x\|_r$.
9. Les exposants $\frac{s}{r}$ et $\frac{s}{s-r}$ sont strictement supérieurs à 1 et conjugués, car
$$\frac{r}{s} + \frac{s-r}{s} = 1.$$
L'inégalité de Hölder appliquée aux vecteurs $(|x_1|^r, \ldots, |x_n|^r)$ et $(1, \ldots, 1)$ donne
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|^r \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{r \cdot \frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}} \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^{\frac{s-r}{s}} = \|x\|_s^r \, n^{\frac{s-r}{s}}.$$
En élevant à la puissance $\frac{1}{r}$, qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$:
$$\|x\|_r \leq \|x\|_s \, n^{\frac{s-r}{rs}} = n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|x\|_s.$$

10. Les questions 8 et 9 donnent, pour $1 \leq r \leq s$:

$$\|x\|_s \leq \|x\|_r \leq n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|x\|_s ,$$

soit exactement les deux inégalités de la définition : $\|\cdot\|_r$ et $\|\cdot\|_s$ sont équivalentes. Deux exposants quelconques se comparent en les rangeant dans cet ordre, donc toutes ces normes sont deux à deux équivalentes.
Pour $r = 1$ et $s = 2$, on retrouve $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$; la transitivité établie dans le cours permet alors de comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ à toute autre norme de la famille.

Correction de l'exercice 5.32 **Énoncé p. 10**

1. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|(Ax)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq N(A)\,\|x\|_\infty .$$

En prenant le maximum sur i, on obtient $\|Ax\|_\infty \leq N(A)\,\|x\|_\infty$.

2. Pour $x \neq 0$, on a $\|x\|_\infty > 0$ et la question 1 donne $\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq N(A)$: l'ensemble considéré est non vide (car $n \geq 1$) et majoré par $N(A)$, donc il admet une borne supérieure, et $\|A\|_{\text{sub}} \leq N(A)$.

3. Si $a_{i_0,j} \neq 0$, alors $|x_j| = 1$; sinon $x_j = 1$. Dans tous les cas $|x_j| = 1$, donc $\|x\|_\infty = 1$. Par ailleurs,

$$(Ax)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = \sum_{\substack{j \\ a_{i_0,j}\neq 0}} \frac{a_{i_0,j}\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} = \sum_{\substack{j \\ a_{i_0,j}\neq 0}} |a_{i_0,j}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = N(A),$$

car $a\overline{a} = |a|^2$ et les termes omis sont nuls. Donc $\|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_{i_0}| = N(A)$, puis

$$\|A\|_{\text{sub}} \geq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq N(A).$$

Avec la question 2, $\|A\|_{\text{sub}} = N(A)$, et ce vecteur x réalise la borne supérieure. Si $N(A) = 0$, alors $A = 0$ et les deux quantités sont nulles.

4. Notons d'abord que, par définition de la borne supérieure,

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \|Ax\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}}\,\|x\|_\infty ,$$

l'inégalité étant immédiate pour $x = 0$.
Homogénéité : pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \neq 0$, $\frac{\|\lambda Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = |\lambda|\,\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$; la borne supérieure d'un ensemble multiplié par $|\lambda| \geq 0$ est multipliée par $|\lambda|$, d'où $\|\lambda A\|_{\text{sub}} = |\lambda|\,\|A\|_{\text{sub}}$.
Inégalité triangulaire : pour $x \neq 0$,

$$\frac{\|(A+B)x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} + \frac{\|Bx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_{\text{sub}} + \|B\|_{\text{sub}} ,$$

donc, par définition de la borne supérieure, $\|A + B\|_{\text{sub}} \leq \|A\|_{\text{sub}} + \|B\|_{\text{sub}}$.
Séparation : si $\|A\|_{\text{sub}} = 0$, alors $Ax = 0$ pour tout x ; en particulier $Ae_j = 0$ pour tout vecteur de la base canonique, c'est-à-dire que toutes les colonnes de A sont nulles, donc $A = 0$.

5. Pour tout $x \neq 0$, $\|I_n x\|_\infty = \|x\|_\infty$, donc le quotient vaut 1 et $\|I_n\|_{\text{sub}} = 1$. Pour la sous-multiplicativité, soit $x \in \mathbb{K}^n$: en appliquant deux fois l'inégalité rappelée à la question 4,

$$\|ABx\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}} \|Bx\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}} \|B\|_{\text{sub}} \|x\|_\infty .$$

Pour $x \neq 0$, on divise par $\|x\|_\infty$ et on passe à la borne supérieure. L'inégalité $N(AB) \leq N(A)N(B)$ de l'exercice 5.6, obtenue là-bas par un calcul sur les coefficients, n'est donc que la traduction de la composition des applications $x \mapsto Ax$.

6. Tous les coefficients de J^2 valent $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, donc $J^2 = nJ$. Ainsi $\|J\|_\infty = 1$ et $\left\|J^2\right\|_\infty = n$. Pour $n \geq 2$,

$$\left\|J^2\right\|_\infty = n > 1 = \|J\|_\infty \|J\|_\infty ,$$

donc $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'inégalité $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. De plus, l'exercice 5.8 donne $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$; le cas $A = B = J$ montre que la constante n ne peut pas être diminuée.

7. Par récurrence immédiate à partir de la question 5, $\|A^p\|_{\text{sub}} \leq \|A\|_{\text{sub}}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq \|A\|_{\text{sub}} < 1$, la suite géométrique $\left(\|A\|_{\text{sub}}^p\right)$ tend vers 0, donc $\|A^p\|_{\text{sub}} \to 0$ par encadrement : la suite (A^p) converge vers 0 pour $\|\cdot\|_{\text{sub}}$. Comme $\|\cdot\|_{\text{sub}} = N$ et que $\|\cdot\|_\infty \leq N \leq n \|\cdot\|_\infty$ (exercice 5.18), les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes : la convergence vaut aussi pour $\|\cdot\|_\infty$.

8. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $(I_n - A)X = 0$, soit $AX = X$. Une récurrence immédiate donne $A^p X = X$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc

$$\|X\|_\infty = \left\|A^p X\right\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}}^p \|X\|_\infty \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

La quantité $\|X\|_\infty$ ne dépendant pas de p, elle est nulle, donc $X = 0$. Le système $(I_n - A)X = 0$ n'a que la solution nulle : la matrice $I_n - A$ est inversible.

9. La somme est télescopique :

$$(I_n - A)S_p = \sum_{k=0}^{p} A^k - \sum_{k=0}^{p} A^{k+1} = I_n - A^{p+1}.$$

En multipliant à gauche par $(I_n - A)^{-1}$,

$$S_p = (I_n - A)^{-1} - (I_n - A)^{-1} A^{p+1},$$

et la question 5 donne

$$\left\|S_p - (I_n - A)^{-1}\right\|_{\text{sub}} \leq \left\|(I_n - A)^{-1}\right\|_{\text{sub}} \|A\|_{\text{sub}}^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

La suite (S_p) converge donc vers $(I_n - A)^{-1}$.

10. L'inégalité triangulaire et la question 5 donnent

$$\left\|S_p\right\|_{\text{sub}} \leq \sum_{k=0}^{p} \left\|A^k\right\|_{\text{sub}} \leq \sum_{k=0}^{p} \|A\|_{\text{sub}}^k = \frac{1 - \|A\|_{\text{sub}}^{p+1}}{1 - \|A\|_{\text{sub}}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}.$$

Par la seconde inégalité triangulaire,

$$\left|\left\|S_p\right\|_{\text{sub}} - \left\|(I_n - A)^{-1}\right\|_{\text{sub}}\right| \leq \left\|S_p - (I_n - A)^{-1}\right\|_{\text{sub}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

d'après la question 9, donc, par encadrement, la suite réelle $\left(\left\|S_p\right\|_{\text{sub}}\right)$ converge vers $\left\|(I_n - A)^{-1}\right\|_{\text{sub}}$ (question 1 de l'exercice 5.13). En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, qui est large,

$$\left\|(I_n - A)^{-1}\right\|_{\text{sub}} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\text{sub}}}.$$

11. L'équation $X = AX + B$ s'écrit $(I_n - A)X = B$; la matrice $I_n - A$ étant inversible d'après la question 8, elle admet l'unique solution $L = (I_n - A)^{-1}B$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$X_{p+1} - L = (AX_p + B) - (AL + B) = A(X_p - L),$$
d'où, par récurrence, $X_p - L = A^p(X_0 - L)$ et
$$\left\|X_p - L\right\|_\infty \leq \|A\|_{\text{sub}}^p \|X_0 - L\|_\infty \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$
La suite (X_p) converge donc vers L, quel que soit X_0.
Pour la matrice de l'exercice 5.11, les sommes des valeurs absolues des coefficients des trois lignes valent $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ et $\frac{5}{6}$, donc $\|A\|_{\text{sub}} = \frac{5}{6} < 1$: les questions 3 et 4 de cet exercice sont des cas particuliers de ce qui précède.

Correction de l'exercice 5.33 Énoncé p. 11

1. Le vecteur 0_E appartient à $\overline{B}(0_E, r)$, donc à C. Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, tout $t > 0$ convient et $T_x = \mathbb{R}_+^*$. Si $x \neq 0_E$, posons $t = \frac{\|x\|}{r}$: alors $t > 0$ et $\left\|\frac{1}{t}x\right\| = \frac{\|x\|}{t} = r$, donc $\frac{1}{t}x \in \overline{B}(0_E, r) \subset C$ et $t \in T_x$. Dans les deux cas, T_x est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 : sa borne inférieure existe, et $j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.
2. Soit $t \in T_x$. Alors $\frac{1}{t}x \in C \subset \overline{B}(0_E, R)$, donc $\frac{\|x\|}{t} \leq R$, soit $t \geq \frac{\|x\|}{R}$. Le réel $\frac{\|x\|}{R}$ minore donc T_x, et par définition de la borne inférieure $j_C(x) \geq \frac{\|x\|}{R}$. Avec la question 1, on obtient l'encadrement annoncé.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit $t > 0$. En posant $t = |\lambda|\, u$ avec $u > 0$,
$$\frac{1}{t}(\lambda x) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{u}x = \pm\frac{1}{u}x,$$
le signe étant celui de λ. Comme C est symétrique, $\frac{1}{u}x \in C$ si et seulement si $-\frac{1}{u}x \in C$: dans les deux cas, $t \in T_{\lambda x}$ équivaut à $u \in T_x$. Ainsi $T_{\lambda x} = |\lambda|\, T_x$, et la borne inférieure d'un ensemble multiplié par $|\lambda| > 0$ est multipliée par $|\lambda|$: $j_C(\lambda x) = |\lambda|\, j_C(x)$. Enfin, $j_C(0_E) = 0$ d'après la question 1, donc l'égalité vaut encore pour $\lambda = 0$.
4. Les coefficients $\frac{s}{s+t}$ et $\frac{t}{s+t}$ sont positifs et de somme 1, et $\frac{x}{s}$ et $\frac{y}{t}$ appartiennent à C : la convexité de C donne $\frac{1}{s+t}(x + y) \in C$, c'est-à-dire $s + t \in T_{x+y}$. Donc $j_C(x + y) \leq s + t$.
Cette inégalité vaut pour tout $s \in T_x$ et tout $t \in T_y$. À t fixé, en passant à la borne inférieure sur s, il vient $j_C(x + y) \leq j_C(x) + t$; puis, en passant à la borne inférieure sur t, $j_C(x + y) \leq j_C(x) + j_C(y)$.
5. L'application j_C est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, homogène d'après la question 3 et vérifie l'inégalité triangulaire d'après la question 4. Enfin, si $j_C(x) = 0$, la question 2 donne $\|x\| \leq R\, j_C(x) = 0$, donc $x = 0_E$: l'axiome de séparation est

vérifié. C'est donc une norme, et l'encadrement de la question 2 s'écrit

$$\frac{1}{R}\|x\| \leq j_C(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|,$$

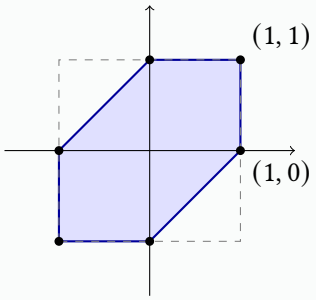
ce qui est exactement la définition de l'équivalence des normes j_C et $\|\cdot\|$.

6. Soit x tel que $j_C(x) < 1$. Par définition de la borne inférieure, il existe $t \in T_x$ tel que $t < 1$. Alors $\frac{x}{t} \in C$, $0_E \in C$, et

$$x = t \cdot \frac{x}{t} + (1-t) \cdot 0_E$$

est un point du segment joignant ces deux éléments de C : par convexité, $x \in C$. Réciproquement, si $x \in C$, alors $1 \in T_x$, donc $j_C(x) \leq 1$ et $x \in \overline{B}_j(0_E, 1)$.

7. L'ensemble C est l'intersection du carré $[-1,1]^2$, défini par $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$, avec la bande $|x-y| \leq 1$. Cette bande contient les sommets $(1,1)$ et $(-1,-1)$ du carré, mais pas $(1,-1)$ ni $(-1,1)$, pour lesquels $|x-y| = 2$. La droite $x - y = 1$ coupe le carré en $(1,0)$ et $(0,-1)$, et la droite $x - y = -1$ en $(-1,0)$ et $(0,1)$: les deux sommets exclus sont remplacés par ces quatre points.



8. L'ensemble C est convexe comme intersection de trois parties convexes (chacune est définie par une inégalité de la forme $|u| \leq 1$ où u est linéaire, donc chacune est convexe). Il est symétrique, car les trois conditions ne changent pas quand on remplace (x,y) par $(-x,-y)$. Enfin, si $\|(x,y)\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, alors $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ et $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 1$, donc $(x,y) \in C$; et si $(x,y) \in C$, alors $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$. Ainsi

$$\overline{B}_\infty\left((0,0), \tfrac{1}{2}\right) \subset C \subset \overline{B}_\infty\left((0,0), 1\right).$$

9. Les applications $(x,y) \mapsto |x|$, $(x,y) \mapsto |y|$ et $(x,y) \mapsto |x-y|$ sont positives, homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire, car x, y et $x-y$ dépendent linéairement de (x,y). Leur maximum M hérite de ces trois propriétés : pour l'inégalité triangulaire, chacune des trois quantités évaluées en $(x,y)+(x',y')$ est majorée par la somme des quantités correspondantes, donc par $M(x,y) + M(x',y')$, et il en va de même de leur maximum. Enfin, si $M(x,y) = 0$, alors $|x| = 0$ et $|y| = 0$, donc $(x,y) = (0,0)$: M est une norme. Par définition,

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ M(x,y) \leq 1\right\} = \overline{B}_M\left((0,0), 1\right).$$

10. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et soit $t > 0$. Par homogénéité de M,

$$\frac{1}{t}(x,y) \in C \iff M\left(\tfrac{1}{t}(x,y)\right) \leq 1 \iff M(x,y) \leq t.$$

Ainsi $T_{(x,y)} = [M(x,y), +\infty[\cap \mathbb{R}_+^*$, dont la borne inférieure vaut $M(x,y)$: on a bien $j_C = M$.
Enfin, $M(1,1) = \max(1,1,0) = 1$ alors que $\|(1,1)\|_1 = 2$ et $\|(1,1)\|_2 = \sqrt{2}$, et $M(1,-1) = \max(1,1,2) = 2$ alors que $\|(1,-1)\|_\infty = 1$. La norme M n'est donc ni $\|\cdot\|_1$, ni $\|\cdot\|_2$, ni $\|\cdot\|_\infty$.