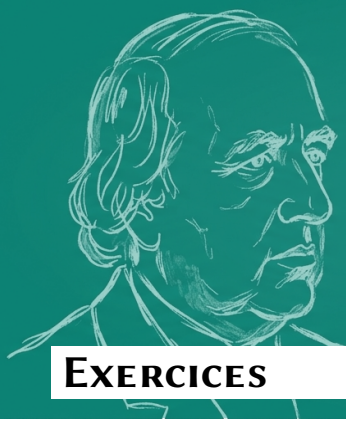


6 Suites et séries de fonctions

Exercices

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 6.3 Convergence uniforme loin de 0
  - 6.5 Limite d'une suite d'intégrales
  - 6.9 Dérivée d'une somme de série
  - 6.27 Intégrale de $t \mapsto e^{t^2}$
- **Piste rouge**
  - 6.22 Somme de classe C^∞ et calcul
  - 6.30 Étude complète d'une somme
  - 6.37 Somme de $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$
  - 6.35 Équivalents d'une somme aux bornes
- **Piste bleue**
  - 6.31 Continuité d'une somme sur $\mathbb{R}_+^*$
  - 6.20 Dérivée d'une somme sur $\mathbb{R}_+^*$
  - 6.21 Régularité C^2 d'une somme
  - 6.11 Série alternée de fonctions
- **Piste noire**
  - 6.36 Fonctions ζ et η
  - 6.34 Suite des fonctions $x \mapsto f(x^n)$
  - 6.33 Intégrale de Poisson
  - 6.12 Suite d'approximations successives

Exercice 6.1 ○ Correction p. 15

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $\ell_n(x) = \sin\left(\frac{n}{n+1}x\right)$ sur $[0, 2\pi]$.
3. $\psi_n(x) = \sin(x)e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 6.2 ○ Correction p. 18

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[-1, 1]$;
2. $g_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 6.3 ○ Correction p. 18

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $h_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$.

1. Montrer que la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa limite h.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
3. Soit $a > 0$. Montrer que (h_n) converge uniformément vers h sur $[a, +\infty[$.

Exercice 6.4 ○ Correction p. 19

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. La suite $(f_n')_{n\geq 1}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6.5 ○ Correction p. 19

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$.

1. Déterminer la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $x \in [0,1]$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Retrouver ce résultat par un calcul direct de $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.6 • Correction p. 20

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse, en la démontrant ou en donnant un contre-exemple. Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1. Si (f_n) converge uniformément sur I, alors (f_n) converge simplement sur I.
2. Si (f_n) converge simplement sur I vers f et si toutes les fonctions f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.
3. Si (f_n) converge uniformément sur I vers f et si toutes les fonctions f_n sont bornées sur I, alors f est bornée sur I.
4. Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $]0,+\infty[$.
5. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I, si toutes les fonctions f_n sont continues sur I et si (x_n) est une suite d'éléments de I qui converge vers $x \in I$, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.
6. Si $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.
7. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors $\sum f_n$ converge normalement sur I.
8. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I et si (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur I, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Exercice 6.7 •• Correction p. 21

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $g_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$
2. $\phi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $k_n(x) = 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$ sur $[0,1]$

Exercice 6.8 ○ Correction p. 23

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$.
2. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme S est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 6.9 ○ Correction p. 24

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{n^4}$, et on note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En déduire que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{\sin(2nx)}{n^3}$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $S'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, comme la somme d'une série.

Exercice 6.10 • Correction p. 24

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, et on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est paire et 2π-périodique. Calculer $S(0)$, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
3. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Montrer que $\left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand. Le théorème de dérivation terme à terme permet-il de conclure que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.11 •• Correction p. 25

Similaire à un exo CCP 2017.
On pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

1. Montrer la convergence simple de cette série de fonctions.
2. Converge-t-elle normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$?
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ (*pensez au critère des séries alternées*). Qu'en déduire ?
4. Montrer que S est de classe C^1.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.
6. Donner un équivalent de S en 0 puis en $+\infty$ (*on pourra commencer par justifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$*).

Exercice 6.12 ••• Correction p. 28

On définit par récurrence sur $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ une suite de fonctions en posant $f_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad (\star)$$

1. Prouver que $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$ pour tout x de I.
2. Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$.
3. Qu'en déduire concernant la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$? On note f la somme de cette série de fonctions, prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
4. Prouver que f est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2$ satisfaisant à $f(0) = 0$ (*On pourra commencer par prouver que (f_n^2) converge uniformément vers f^2, puis passer à la limite dans $(\star)$*).

Exercice 6.13 • Correction p. 31

CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2.

La série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$? Normalement sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 6.14 ●●● Correction p. 32

CCP 2009 Officiel de la Taupe.
Soit $f \in C^0([a,b])$; on pose $f_0(x) = f(x)$ et $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f_n est de classe C^n sur $[a,b]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\|f\|_\infty$.
2. On pose $g_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$. Montrer que g_0 est C^0 sur $[a,b]$, que g_1 est C^1 sur $[a,b]$, puis que g_n est C^n sur $[a,b]$.
3. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 dont g_n est solution pour $n \geq 1$. En déduire que pour tout $x \in [a,b]$,

$$g_0(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6.15 ●● Correction p. 35

adapté de CCP 2016 PC.

1. Étudier les variations de $t \mapsto g_x(t) = t + \frac{x-t^2}{2}$, pour x et $t \in [0,1]$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$. Montrer que $u_n \in [0,1]$ pour tout entier n.
3. Montrer que (u_n) est croissante et converge vers une limite à déterminer.
4. Soit (P_n) une suite de fonctions définie par $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que P_n est un polynôme pour tout entier n.
5. Montrer par récurrence sur n l'inégalité $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$ pour tout $x \in [0,1]$
6. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{.}$ sur $[0,1]$.

Exercice 6.16 ● Correction p. 38

Oral Mines-Telecom 2016.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, on pose $u_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.
2. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme.

Exercice 6.17 ● Correction p. 42

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ définie par : $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de $]0, +\infty[$.
3. La convergence est-elle normale sur $[0, +\infty[$?
4. Montrer que la convergence est normale sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 6.18 • Correction p. 45

Montrer que la série de fonctions définie sur $[0,\pi]$ par $\sum_{n\geq 0}\sin(x)\cos^n(x)$ est simplement convergente sur $[0,\pi]$. Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur $[0,\pi]$, puis sur tout segment de $]0,\pi[$.

Exercice 6.19 • Correction p. 47

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0,1[$, où $f_n : x \in [0,1[\mapsto \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)}$.

Exercice 6.20 • Correction p. 48

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que la série numérique $\sum f_n(x)$ converge si et seulement si $x>0$. Pour $x>0$, on note $K(x)$ sa somme : calculer $K(x)$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer f_n', puis $\left\|f_n'\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$. La série $\sum f_n'$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Soit $a>0$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,+\infty[}=n\mathrm{e}^{-na}$, puis que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.
4. En déduire que K est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $K'(x)$, pour $x>0$, comme la somme d'une série.
5. En dérivant l'expression de K obtenue à la question 1, montrer que, pour tout $x>0$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}.$$
6. En déduire que, pour tout $q\in]0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n=\frac{q}{(1-q)^2}$, puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$.

Exercice 6.21 • Correction p. 50

On définit : $f : x\mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6.22 •• Correction p. 51

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$, où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x\mapsto\frac{e^{-nx}}{n}$.
   On notera f sa somme.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur son ensemble de définition.
4. Montrer que f est convexe.
5. Calculer f. *indication : on pourra commencer par calculer f'.*

Exercice 6.23 ●● Correction p. 53

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en donner un équivalent.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+ (*faire une comparaison série/intégrale puis montrer que* $\frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}$.)

Exercice 6.24 ● Correction p. 57

1. Déterminer l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^x e^{-nx}$.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Quelle est la limite de S en $+\infty$.

Exercice 6.25 ●● Correction p. 58

Soit $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{-x}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis écrire f' sous forme de la somme d'une série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que pour tout x, $f(x) = \ln(3) - \ln(2) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire une expression de f sous forme de la somme d'une série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.
3. À l'aide d'une majoration, montrer que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p2^p} e^{-px}$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 6.26 ● Correction p. 60

Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.27 ○ Correction p. 62

On rappelle que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} = \mathrm{e}^u$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{n!}$.

1. Soit $t \in [0,1]$. Justifier que la série numérique $\sum f_n(t)$ converge et donner sa somme.
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(2n+1)}.$$

Exercice 6.28 ● Correction p. 62

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$. Justifier que f est bien définie, puis calculer $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.29 ●●● Correction p. 63

Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 6.30 ●● Correction p. 66

Type CCINP.

Soit $u_n(t) = \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1}$, et $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ si convergence.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les variations de u_n' sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire $\left\|u_n'\right\|_\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
4. Donner les variations de f et l'allure de la courbe ; on prendra $f(0) \approx 2,07$ à 10^{-2} près.
5. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$.
6. Montrer que $\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1}$ est une approximation à 10^{-2} près de $f(0)$.

Exercice 6.31 ○ Correction p. 69

Type CCINP.

Soit $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+n^3x^2}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$.

Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$? Montrer que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.32 ●● Correction p. 69

Soit S la fonction définie par : $t \mapsto S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + e^{-nt}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition.
2. Donner le sens de variation de S.
3. Donner la limite de S en $+\infty$.
4. Donner un équivalent de S en 0 (*on pourra faire une comparaison série/intégrale*).

Exercice 6.33 ●●● Correction p. 73

Soit r un réel élément de $[0, 1[$ fixé.

1. Prouver que pour x réel élément de $]-1, 1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n}$ est convergente, et peut être dérivée terme à terme. En déduire la valeur de sa somme.
2. Prouver la convergence de la série de fonctions (de la variable θ) $\sum r^n \sin(n\theta)$, et calculer sa somme.
3. Prouver de même la convergence de la série $\sum r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$. Calculer la somme de cette série.
4. Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right) \mathrm{d}\theta$.
5. Prouver que pour $|r| > 1$, l'intégrale envisagée à la question précédente converge, et la calculer.

Exercice 6.34 ●●● Correction p. 77

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g_n : x \in [0, 1] \mapsto f(x^n) \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la suite (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$ et déterminer sa limite g.

2. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si f est constante.
3. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,a]$.
4. En déduire que
$$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).$$
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.35 ● ● ● Correction p. 78

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-n^2x} \in \mathbb{R}$. On note D l'ensemble des réels x pour lesquels la série numérique $\sum f_n(x)$ converge et, pour $x \in D$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. On admet que
$$\int_0^A \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Déterminer D.
2. Montrer que S est continue sur D.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$, puis un équivalent de S en $+\infty$.
4. Soient $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\int_1^{N+1} \mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-n^2x} \leq \int_0^N \mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t.$$
5. En déduire que, pour tout $x > 0$,
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - 1 \leq S(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}},$$
puis donner un équivalent de S en 0^+.

Exercice 6.36 ● ● ● Correction p. 80

On rappelle que la fonction ζ, définie sur $]1,+\infty[$ par
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$
est continue sur $]1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$g_n : s \in]0,+\infty[\mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\zeta(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 1$, puis que $\zeta(s) - 1 \underset{s\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^s}$.
2. Soient $s > 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$
En déduire que $\dfrac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \dfrac{1}{s-1}$, puis un équivalent de ζ en 1^+.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note η sa somme.
4. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. En déduire que η est continue sur $]0,+\infty[$.
5. Montrer que, pour tout $s > 1$, $\eta(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s)$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 6.37 ●● Correction p. 82

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n : x \in [0,1[\mapsto \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est de classe C^1 sur $[0,1[$ et calculer S'. En déduire S.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,1[$? Montrer qu'elle converge uniformément sur $[0,1[$.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et calculer sa somme.
5. La série $\sum u_n'$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1[$?

Exercice 6.38 ● Correction p. 84

On note B l'espace vectoriel des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, et C le sous-espace vectoriel de B formé des fonctions continues sur $[0,1]$, sur lequel on dispose aussi de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

1. Soient (f_n) une suite de B et $f \in B$. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$, alors $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soient (f_n) une suite de C et $f \in C$. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$, alors $\|f_n - f\|_1 \to 0$, puis que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \in [0,1] \mapsto nx^n(1-x)$. Montrer que $\|g_n\|_1 \to 0$, mais que la suite (g_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Que retrouve-t-on sur les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$?
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$. Montrer que la suite (h_n) est bornée dans $(B, \|\cdot\|_\infty)$, mais qu'aucune suite extraite de (h_n) ne converge uniformément sur $[0,1]$. Comparer avec les suites réelles bornées.



6 Suites et séries de fonctions

★ Pour aller plus loin

Exercice 6.39 ● ● ● Correction p. 85

Le théorème de Dini.
Le cours montre que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, et que la réciproque est fausse. Ce problème établit une situation où elle devient vraie : sur un segment, une suite *monotone* de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction *continue* converge uniformément. La **partie I** démontre ce théorème, dû à Ulisse Dini, et la **partie II** montre que chacune de ses hypothèses est indispensable, puis l'applique à des suites et à des séries de fonctions.
Dans la partie I, $[a,b]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles, qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue sur $[a,b]$. On suppose de plus la suite (f_n) croissante, c'est-à-dire que

$$\forall x \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f - f_n$.

Partie I — Le théorème

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue et positive sur $[a,b]$, que $g_{n+1} \leq g_n$, et que la suite (g_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle.
2. Justifier que $\|g_n\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)|$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite réelle $\left(\|g_n\|_\infty\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $g_n(x_n) \geq \ell$.
4. Justifier l'existence d'une extractrice φ telle que la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $c \in [a,b]$.
5. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $g_m\left(x_{\varphi(n)}\right) \geq \ell$ pour tout $n \geq m$, puis que $g_m(c) \geq \ell$.
6. En déduire que $\ell = 0$, puis que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
7. Énoncer le résultat correspondant pour une suite décroissante de fonctions.

Partie II — Hypothèses et applications

8. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n$. Vérifier que la suite (f_n) est décroissante, formée de fonctions continues, et qu'elle converge simplement sur $[0,1]$, mais pas uniformément. Quelle hypothèse du théorème n'est pas satisfaite ?
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$. Vérifier que la suite (f_n) est décroissante, formée de fonctions continues, qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue, mais pas uniformément. Quelle hypothèse du théorème n'est pas satisfaite ? Que peut-on dire sur un segment $[0,A]$, avec $A > 0$?

10. Pour $x \in [0,1]$, on pose $P_0(x) = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x - P_n(x)^2}{2}$ (suite déjà rencontrée à l'exercice 6.15). Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$,
$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x},$$
puis que la suite (P_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers $x \mapsto \sqrt{x}$. En déduire, sans aucune majoration supplémentaire, que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.
11. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues et positives sur un segment $[a,b]$, qui converge simplement sur $[a,b]$ et dont la somme S est continue sur $[a,b]$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)}{n}$. On rappelle que, pour $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$, calculer sa somme, et montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 6.40 ●● Correction p. 87

Limites uniformes sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Dans le cours, la convergence uniforme est presque toujours obtenue sur un segment, ou sur tout segment. Ce problème examine ce que signifie une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier : la **partie I** montre qu'une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions polynomiales est encore polynomiale, la **partie II** donne un exemple de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ vers une fonction non dérivable.

Partie I — Suites de fonctions polynomiales

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales à coefficients réels, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, la fonction $P_n - P_N$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.
3. En déduire qu'il existe une suite réelle $(c_n)_{n\geq N}$ telle que $P_n = P_N + c_n$ pour tout $n \geq N$, puis que $(c_n)_{n\geq N}$ converge. Conclure que f est une fonction polynomiale.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $E_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On rappelle que (E_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers exp. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? sur tout segment de $\mathbb{R}$?

Partie II — Un exemple de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f_n(x) - |x| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (*indication : utiliser la quantité conjuguée*). En déduire que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto |x|$.
6. Montrer que chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer la limite simple de la suite (f_n').
7. La suite (f_n') converge-t-elle uniformément sur $[-1,1]$? sur $[1,2]$? Quelle hypothèse du théorème de dérivation des suites de fonctions n'est pas satisfaite sur $[-1,1]$?

Exercice 6.41 ★ Correction p. 88

Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass.
Le théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme, sur ce segment, d'une suite de fonctions polynomiales. L'exercice 6.15 en donne un cas particulier pour la racine carrée. Ce problème le démontre en général, en suivant une construction explicite due à Bernstein : la **partie I** établit trois identités, la **partie II** en déduit la convergence uniforme, et la **partie III** en tire deux conséquences.
Dans tout le problème, f désigne une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0,n]\!]$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{et} \qquad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x).$$

La fonction $B_n(f)$ est polynomiale : c'est le n-ième *polynôme de Bernstein* de f.

Partie I — Trois identités

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = 1$. Que vaut $B_n(f)$ lorsque f est constante ?
2. Montrer que, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, b_{n,k}(x) = nx$.
3. Montrer de même que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$, puis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\, b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx$.
4. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\, b_{n,k}(x) = nx(1-x) \leq \frac{n}{4}.$$
5. Calculer $B_n(f)$ pour $f : x \mapsto x^2$, et en déduire $\|B_n(f) - f\|_\infty$ dans ce cas.

Partie II — Convergence uniforme

On rappelle le théorème de Heine : f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et un tel réel $\delta > 0$, et on note $M = \|f\|_\infty$.

6. Justifier l'existence de M. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,
$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{n,k}(x).$$
7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. On note A l'ensemble des $k \in [\![0,n]\!]$ tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta$, et B son complémentaire dans $[\![0,n]\!]$. Montrer que
$$\sum_{k \in A} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{n,k}(x) \leq \varepsilon.$$

8. Montrer que, pour $k \in B$, $1 \leq \dfrac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}$, puis que
$$\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| b_{n,k}(x) \leq \frac{M}{2n\delta^2}.$$

9. En déduire que $\|f-B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \dfrac{M}{2n\delta^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Partie III — Conséquences

Soient $a < b$ deux réels.

10. Soit g une fonction continue sur $[a,b]$. On pose, pour $t \in [0,1]$, $f(t) = g\left(a + t(b-a)\right)$. Montrer que g est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

11. Soit g une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,t^n\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b g(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour toute fonction polynomiale P, puis que $\displaystyle\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. En déduire que $g = 0$.

Exercice 6.42 ● ● ● Correction p. 91

Le lemme de Riemann-Lebesgue.
Soient $a < b$ deux réels. Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles, et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n(f) = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$
L'objet de ce problème est de montrer que $I_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, résultat connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue. La **partie I** traite le cas d'une fonction de classe C^1, la **partie II** celui d'une fonction continue, en s'appuyant sur le théorème de Weierstrass démontré à l'exercice 6.41, et la **partie III** en tire une application.

Partie I — Le cas d'une fonction de classe C^1

1. Dans cette question seulement, $[a,b] = [0,\pi]$. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n(t) = \sin(nt)$ ne converge pas simplement sur $[0,\pi]$ (*indication : considérer* $t = \frac{\pi}{2}$). Le théorème d'intégration sur un segment du cours permet-il d'obtenir la limite de $I_n(f)$ pour f constante égale à 1 ?

2. Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|I_n(f)| \leq \frac{2\|f\|_\infty + (b-a)\|f'\|_\infty}{n},$$
et en déduire que $I_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Partie II — Le cas d'une fonction continue

Soit f continue sur $[a,b]$ et soit $\varepsilon > 0$.

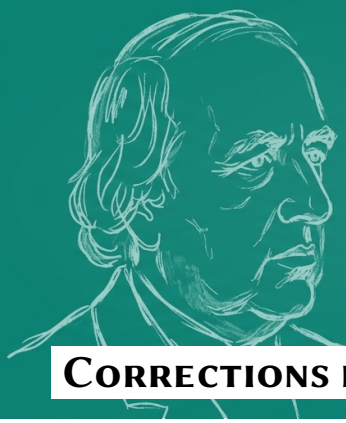
3. Justifier l'existence d'une fonction polynomiale P telle que $\|f-P\|_\infty \leq \varepsilon$, la norme étant prise sur $[a,b]$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 6.41, c'est-à-dire que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme, sur ce segment, d'une suite de fonctions polynomiales.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|I_n(f)| \leq |I_n(P)| + (b-a)\varepsilon$. En déduire que $I_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Montrer que l'on a de même $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Partie III — Applications

Soit f continue sur $[a,b]$.

6. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t$.
7. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que, pour $[a,b] = [0,\pi]$, la suite $\displaystyle\left(\int_a^b |f(t)\sin(nt)|\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 en général.



6 Suites et séries de fonctions

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 6.1 **Énoncé p. 1**

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 0$, alors

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et si $x = 0$,

$$f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
Méthode « évoluée » : puis, si on pose

$$g : x \mapsto \frac{x}{1+x^2},$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} = g(nx),$$

donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|g\|_\infty$$

ne tend pas vers 0 ($\|g\|_\infty > 0$, car g n'est pas la fonction nulle).
En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |g(y)| = \|g\|_\infty,$$

en posant $y = nx$, et car la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto y = nx \in \mathbb{R}$ est surjective (puisque $n \in \mathbb{N}^*$).
Méthode plus élémentaire : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'idée de calculer

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

donc la suite numérique $\left(\|f_n\|_\infty\right)_{n\geq 1}$ ne peut pas tendre vers 0.
Méthode basique : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait l'étude de variations de la fonction f_n. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions polynomiales, dont celle du dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = n\frac{1+n^2x^2 - x2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = n\frac{(1-nx)(1+nx)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$		∞
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

et donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \max\left(0, \left|-\frac{1}{2}\right|, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ne tend pas vers 0 si $n \to \infty$.
2) La suite de fonctions $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers sin (par continuité de sin sur $\mathbb{R}$) : pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{n}{n+1}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \qquad \text{donc} \qquad \ell_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin(x).$$

Puis, la fonction sin est de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}$, $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$, donc par inégalité des accroissements finis, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq 1 \times |a - b|.$$

Donc, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$|\ell_n(x) - \sin(x)| = \left|\sin\left(\frac{n}{n+1}x\right) - \sin(x)\right| \leq \left|\frac{n}{n+1}x - x\right| = \frac{1}{n+1}|x| \leq \frac{2\pi}{n+1}.$$

Donc, par définition de la borne supérieure, on a

$$0 \leq \|\ell_n - \sin\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |\ell_n(x) - \sin(x)| \leq \frac{2\pi}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème des gendarmes conclut :

$$\lim_{n\to\infty} \|\ell_n - \sin\|_\infty = 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction sin sur $[0, 2\pi]$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|\psi_n(x)| \leq e^{-nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car $|\sin| \leq 1$), donc la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in [a, \infty[$, on a

$$|\sin(x)e^{-nx}| \leq e^{-na},$$

soit

$$0 \leq \|\psi_n\|_{\infty,[a,\infty[} \leq e^{-na} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(la limite provient de $a > 0$), donc le théorème des gendarmes conclut :

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{\infty,[a,\infty[} = 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,\infty[$ vers la fonction nulle. C'est vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, en particulier pour $a=1$: la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[1,\infty[$.
Regardons sur $[0,1]$: soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

$$\psi_n'(x)=e^{-nx}\big(\cos(x)-n\sin(x)\big),$$

donc ψ_n' ne s'annule sur $[0,1]$ qu'en un unique point, $x_n=\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ (d'où la nécessité de prendre $n\neq 0$). D'où le tableau de variations :

x	0		x_n		1
$\psi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\sin(1)e^{-n}>0$

Donc la fonction ψ_n atteint son maximum (sur $[0,1]$, mais en fait sur $\mathbb{R}_+$) en x_n, et est positive. On a alors

$$\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]}=\psi_n(x_n).$$

Puis, $x_n=\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, donc $e^{-nx_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^{-1}$ (par continuité de exp en -1), et

$$\sin(x_n)\underset{n\to\infty}{\sim}x_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n},$$

donc

$$\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{e^{-1}}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

La suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$.
La suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ et sur $[1,\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$, puisque : pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, si $x\in[0,1]$, on a

$$|\psi_n(x)|\leq\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]}\leq\max\left(\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]},\|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[}\right)$$

et si $x\in[1,\infty[$, on a

$$|\psi_n(x)|\leq\|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[}\leq\max\left(\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]},\|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[}\right)$$

D'où

$$0\leq\|\psi_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}\leq\max\left(\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]},\|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

et le théorème des gendarmes conclut.
Autre idée : soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a

$$|\psi_n(x)|\leq xe^{-nx}$$

(car $|\sin(x)|\leq|x|=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$). Par conséquent,

$$0\leq\|\psi_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}\leq\|\theta_n\|_\infty,$$

en notant

$$\theta_n:x\in\mathbb{R}_+\mapsto xe^{-nx}\in\mathbb{R}.$$

Or, la fonction θ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $\theta_n'(x)=e^{-nx}(1-nx)$, d'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{n}$		∞
$\theta_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\theta_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

(car $\lim_{x\to\infty} \theta_n(x) = 0$ par croissance comparée, car $n > 0$).
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|\psi_n(x)| \leq \theta_n(x) \leq \theta_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^{-1},$$

soit

$$0 \leq \|\psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}e^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut bien (grâce au théorème des gendarmes) à la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle.

Correction de l'exercice 6.2 **Énoncé p. 1**

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f_n(x) = \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n - 0 = f_n$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, puisque $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$. On peut aussi le voir en remarquant que $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: si f_n est bornée, $\|f_n\|_\infty \geq 1$.
Sur $[-1, 1]$ en revanche, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n},$$

donc f_n est bornée sur $[-1, 1]$ et $\|f_n\|_{\infty,[-1,1]} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-1, 1]$. Le même argument donne la convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec $\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\max(|a|,|b|)}{n}$.
2) Soit $x \in [0, 1]$. Si $x \in [0, 1[$, alors $x^n \to 0$, donc $g_n(x) \to 0$. Si $x = 1$, alors $g_n(1) = 0$ pour tout n. La suite (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est dérivable sur $[0, 1]$ et, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$g_n'(x) = nx^{n-1}(1 - x) - x^n = x^{n-1}\big(n - (n + 1)x\big).$$

Ainsi g_n est croissante sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$. Comme $g_n \geq 0$ sur $[0, 1]$, on en déduit

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite (g_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

Correction de l'exercice 6.3 **Énoncé p. 1**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n(0) = 0$. Soit $x > 0$. Alors

$$h_n(x) = \frac{nx}{1 + nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{nx} = 1,$$

donc $h_n(x) \to 1$. La suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction h définie par $h(0) = 0$ et $h(x) = 1$ pour $x > 0$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (son dénominateur $1 + nx$ est supérieur ou égal à 1), alors que h n'est pas continue en 0. D'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

On peut aussi le voir directement : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et $h\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, donc $\|h_n - h\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \geq \frac{1}{2}$.
3) Soit $x \geq a$. Alors $h(x) = 1$ et

$$|h_n(x) - h(x)| = 1 - \frac{nx}{1+nx} = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}.$$

Donc $h_n - h$ est bornée sur $[a, +\infty[$ et $\|h_n - h\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{1+na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la suite (h_n) converge uniformément vers h sur $[a, +\infty[$.

Correction de l'exercice 6.4 Énoncé p. 1

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$. En particulier $f_n'(0) = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: la suite numérique $(f_n'(0))_{n\geq 1}$ diverge, donc la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
3) La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, qui est dérivable, mais la suite des dérivées ne converge même pas simplement. La convergence uniforme d'une suite de fonctions de classe C^1 ne donne donc aucune information sur la suite des dérivées : dans le théorème de dérivabilité de la limite, l'hypothèse de convergence uniforme porte sur (f_n') et ne peut pas être remplacée par la convergence uniforme de (f_n).

Correction de l'exercice 6.5 Énoncé p. 2

1) On a $f_n(0) = 0$ pour tout n. Pour $x \in]0, 1]$,

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} = \frac{x^2}{\frac{1}{n}+x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x^2}{x} = x.$$

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto x$ (la formule vaut aussi en 0).
2) Pour $x \in [0, 1]$,

$$f_n(x) - f(x) = \frac{nx^2 - x - nx^2}{1+nx} = -\frac{x}{1+nx}.$$

Si $x = 0$, cette quantité est nulle ; si $x > 0$, $0 \leq \frac{x}{1+nx} \leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$. Dans tous les cas $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$, donc $f_n - f$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. Les fonctions f_n sont continues sur le segment $[0, 1]$, donc d'après le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

3) D'après le calcul précédent, pour $x \in [0, 1]$,

$$f_n(x) = x - \frac{x}{1+nx} = x - \frac{1}{n}\cdot\frac{nx}{1+nx} = x - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(1+nx)}.$$

Donc

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\ln(1+nx)}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{\ln(1+n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

puisque $\frac{\ln(1+n)}{n^2} \to 0$ par croissances comparées.

Correction de l'exercice 6.6 **Énoncé p. 2**

1) Vrai. Notons f la limite uniforme. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N_0$, $f_n - f$ soit bornée, et alors pour tout $x \in I$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $f_n(x) \to f(x)$.
2) Faux. Sur $I = [0,1]$, les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ sont continues et convergent simplement vers la fonction f nulle sur $[0,1[$ et valant 1 en 1, qui n'est pas continue en 1.
3) Vrai. Par définition de la convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_N - f$ soit bornée sur I. Alors $f = f_N - (f_N - f)$ est bornée sur I, comme différence de deux fonctions bornées : pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq \|f_N\|_\infty + \|f_N - f\|_\infty$.
4) Faux. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, posons $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Pour tout $x > 0$, $f_n(x) \to 0$, et pour $a > 0$ et $x \geq a$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+na}$, donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{1+na} \to 0$: la suite converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a,+\infty[$. Mais pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, donc $\|f_n\|_{\infty,]0,+\infty[} \geq \frac{1}{2}$: la convergence n'est pas uniforme sur $]0,+\infty[$.
5) Vrai. D'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, f est continue sur I, donc $f(x_n) \to f(x)$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_n - f$ soit bornée pour $n \geq N_0$. Pour $n \geq N_0$,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|,$$

et les deux termes du majorant tendent vers 0. Donc $f_n(x_n) \to f(x)$.
6) Vrai. Soit $x \in I$. Pour tout n, $0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$, et la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge par hypothèse. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |f_n(x)|$ converge.
7) Faux. Sur $I = \mathbb{R}$, prenons pour $n \geq 1$ la fonction constante $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$. La série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées ; notons ℓ sa somme et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ son reste d'ordre n. La somme partielle S_n de $\sum f_n$ est la fonction constante égale à $\ell - R_n$, donc $\|S_n - \ell\|_\infty = |R_n| \to 0$: la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Mais $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge : la convergence n'est pas normale.
8) Faux. Sur $I = [0,1]$, posons $f_n(x) = x^n(1-x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est positive sur $[0,1]$, de dérivée $f_n'(x) = x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big)$, donc croissante sur $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$. Ainsi $\|f_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ (même étude que celle de $x \mapsto x^n(1-x)$ dans un exercice précédent), donc (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Pour $x \in [0,1[$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x) = 1 - x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et $S_n(1) = 0$ pour tout n : la série converge simplement vers la fonction S égale à 1 sur $[0,1[$ et à 0 en 1. Mais pour $x \in [0,1[$, $|S_n(x) - S(x)| = x^{n+1}$, dont la borne supérieure sur $[0,1[$ vaut 1. Donc $\|S_n - S\|_\infty \geq 1$ pour tout n : la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$. (On peut aussi invoquer le théorème de continuité : les f_n sont continues et S ne l'est pas.)

Correction de l'exercice 6.7 **Énoncé p. 2**

1) Si $\alpha > 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est définie sur $\mathbb{R}_+$.
On a

$$g_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et si $x > 0$, par croissance comparée,

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n'(x) = e^{-nx}x^{\alpha-1}(\alpha - nx).$$

D'où le tableau de variations pour $n \geq 1$ (en utilisant que g_n est continue en 0) :

x	0		$\frac{\alpha}{n}$		∞
$g_n'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Donc

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
Si $\alpha = 0$, la fonction g_n est la fonction

$$g_n : x \mapsto e^{-nx}.$$

Puis, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x) = e^{-nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et

$$g_n(0) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, car la fonction g n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$, alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n l'est (on applique donc la contraposée du théorème de continuité des suites de fonctions), ou bien car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|g_n - g\|_\infty \geq \left|g_n\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right| = e^{-1},$$

ce qui empêche la suite $\left(\|g_n - g\|_\infty\right)_{n\geq 1}$ de tendre vers 0.
Si $\alpha < 0$, la fonction g_n n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle.

Puis,

$$\|g_n\|_\infty \geq \left|g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{e^{-1}}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

Pour ceux qui préfèrent, on peut faire le tableau de variations : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n'(x) = e^{-nx}x^{\alpha-1}(\alpha - nx) < 0$$

(car $\alpha < 0$). D'où le tableau de variations :

x	0		∞
$g_n'(x)$	$\|\|$	$-$	
$g_n(x)$	∞	$\searrow$	0

donc la fonction g_n n'est pas bornée, donc $\|g_n\|_\infty = +\infty$. Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Comme $|\sin| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$0 \leq |\phi_n(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc le théorème des gendarmes donne :

$$\phi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $e > 0$, pour tout $x \in [e, \infty[$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{x\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{e\sqrt{n}},$$

donc

$$0 \leq \|\phi_n\|_{\infty,[e,\infty[} \leq \frac{1}{e\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[e, \infty[$. Donc, s'il y a un problème sur la convergence uniforme, c'est vers 0.
Première idée : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si la fonction ϕ_n est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x \in]0, \infty[$ on a

$$\|\phi_n\|_\infty \geq |\phi_n(x)|.$$

En particulier,

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \lim_{x\to 0^+} |\phi_n(x)|$$

si cette limite existe. Or,

$$\phi_n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{nx}{x\sqrt{n}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{n}.$$

Donc

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \left|\sqrt{n}\right| = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

donc la suite numérique $\left(\|\phi_n\|_\infty\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (si elle existe) ne tend pas vers 0. Donc la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Deuxième idée : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si la fonction ϕ_n est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \left|\phi_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sqrt{n}\sin(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

(car $\sin(1) > 0$), et on conclut de même.
3) La suite de fonctions $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$: si $x \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(x) = 0$ par croissance comparée, car

$$3^n x^{2^n} = \exp\left(n\ln(3) + 2^n\ln(x)\right) = \exp\left(2^n\ln(x) + \underset{n\to\infty}{o}(2^n)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car $\ln(x) < 0$), et car

$$k_n(0) = k_n(1) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, $k_n(x) = f_n\left(x^{2^n}\right)$ avec

$$f_n : y \in [0,1] \mapsto 3^n(y - y^2).$$

Donc

$$\|k_n\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |k_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n\left(x^{2^n}\right)\right| = \sup_{y\in[0,1]} |f_n(y)| = \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{3^n}{4}$$

car (pour justifier la troisième égalité) la fonction

$$x \in [0,1] \mapsto y = x^{2^n} \in [0,1]$$

est surjective.

Remarque

Une étude de fonction toute simple donne que $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \left|f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{3^n}{4}$

Et comme $\frac{3^n}{4} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, la suite de fonctions $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 6.8 **Énoncé p. 2**

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme $\left(1 - \sqrt{n}\,|x|\right)^2 \geq 0$, on a $1 + nx^2 \geq 2\sqrt{n}\,|x|$. Si $x \neq 0$, on en déduit

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n(1+nx^2)} \leq \frac{|x|}{2n\sqrt{n}\,|x|} = \frac{1}{2n\sqrt{n}},$$

et l'inégalité est évidente si $x = 0$ puisque $f_n(0) = 0$. (Une étude de variations montre que la borne est atteinte en $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$.)
2) D'après la question précédente, chaque f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n^{3/2}}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Elle

converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et sa somme S est bien définie. Comme chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur $n(1+nx^2)$ ne s'annule pas), le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions donne que S est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}$, donc $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la double limite, la série $\sum 0$ converge (ce qui est clair) et

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Correction de l'exercice 6.9 **Énoncé p. 2**

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sin^2(nx) \leq 1$, donc $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$. Ce majorant ne dépend pas de x. Donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^4}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente ($4 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Elle converge donc simplement sur $\mathbb{R}$, ce qui définit S sur $\mathbb{R}$, et uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, S est continue sur $\mathbb{R}$.
2) La fonction $x \mapsto \sin(nx)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc son carré aussi, et f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{2\sin(nx)\cdot n\cos(nx)}{n^4} = \frac{2\sin(nx)\cos(nx)}{n^3} = \frac{\sin(2nx)}{n^3},$$

puisque $2\sin(u)\cos(u) = \sin(2u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n'(x)\right| = \frac{|\sin(2nx)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$. Ce majorant ne dépend pas de x. Donc f_n' est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\left\|f_n'\right\|_\infty \leq \frac{1}{n^3}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente ($3 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \left\|f_n'\right\|_\infty$ converge : la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
4) Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (question 2) ;
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (question 1) ;
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (question 3), donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

D'après ce théorème, S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^3}.$$

Correction de l'exercice 6.10 **Énoncé p. 3**

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Elle converge donc simplement, ce qui définit S sur $\mathbb{R}$, et uniformément. Les fonctions f_n étant continues sur $\mathbb{R}$, le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions donne que S est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est paire et 2π-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. En sommant les égalités $f_n(-x) = f_n(x)$ et $f_n(x+2\pi) = f_n(x)$ pour n allant de 1 à $+\infty$ (les séries convergent), on obtient $S(-x) = S(x)$ et $S(x+2\pi) = S(x)$. Enfin

$$S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = -\frac{\sin(nx)}{n}$, donc $\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq \frac{2\pi}{b-a}$. L'intervalle $[na, nb]$ est de longueur $n(b-a) \geq 2\pi$, donc il contient un réel u tel que $\sin u = 1$. En posant $x_0 = \frac{u}{n} \in [a,b]$, on a $\left|f_n'(x_0)\right| = \frac{1}{n}$, d'où $\left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n}$.
La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum f_n'$ ne converge normalement sur aucun segment de $\mathbb{R}$. La convergence normale est le seul outil dont nous disposons pour établir la convergence uniforme de $\sum f_n'$, et il échoue : le théorème de dérivation terme à terme ne s'applique pas. Il ne permet donc pas de conclure, ni dans un sens ni dans l'autre. On peut d'ailleurs montrer que S coïncide sur $[0, 2\pi]$ avec $x \mapsto \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}$, et qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 6.11

Énoncé p. 3

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
   La suite numérique $\left(\frac{1}{n+x_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (bien définie car $x_0 > 0$) est positive (donc la série considérée est alternée), décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $|f_n|$ étant décroissante et positive sur $[a,b]$, on a
   $$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n+a},$$
   et c'est le terme général d'une série divergente (par critère d'équivalence des séries à termes positifs, car $\frac{1}{n+a} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, avec la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ qui est divergente et à termes positifs).

   Remarque

   En fait, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$|f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$
   avec la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ qui est divergente et à termes positifs, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ ne converge pas absolument, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne peut pas converger normalement sur un ensemble contenant x...
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, le critère des séries alternés (puisqu'il s'applique) donne, à $x \in \mathbb{R}_+^*$

fixé,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

(majoration **indépendante de** x **!**). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right\|_{\infty} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par le théorème de continuité des séries de fonctions que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. **Méthode 1 :**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. question 1).
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\left|f_n'(x)\right| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n+a)^2},$$

donc

$$0 \leq \left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{(n+a)^2}$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+a)^2}$ converge (*car* $a > 0$*, sinon il y a un problème pour* $n = 0$) par critère d'équivalence des séries à termes positifs, car $\frac{1}{(n+a)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, avec la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ qui est convergente et à termes positifs.
Donc le critère de comparaison des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,b]}$ converge, autrement dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction S est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (par « caractère local » de la propriété « être de classe C^1 »). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Méthode 2 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (conséquence directe de la question 1).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|f_n'(x)\right| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

(c'est là qu'on utilise $n > 0$), donc

$$0 \leq \left\|f_n'\right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left\|f_n'\right\|_\infty$ converge, autrement dit que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction

$$S - f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(S - f_0)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Enfin, comme la fonction f_0 est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, la fonction

$$S = (S - f_0) + f_0$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S'(x) = (S - f_0)'(x) + f_0'(x) = f_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Remarque

La fonction f_0' n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on ne peut pas avoir que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$...

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{array}{rcl} S(x) + S(x+1) & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} \\ & \underset{p=n+1}{=} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p+x} \\ & = & \frac{(-1)^0}{0+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} \end{array}$$

6. Comme la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1, d'après la question 3, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x+1) = S(1).$$

Or, d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 0} \big(xS(x) + xS(x+1)\big) = 1.$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0} xS(x) = 1, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

Or, la suite numérique $\left(\frac{1}{(x+n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (donc la série précédente est alternée), décroissante et tend vers 0. Donc le critère des séries alternées s'applique, et donne que $S'(x)$ est du signe de son premier terme, à savoir $\frac{(-1)^{0+1}}{(x+0)^2} = -\frac{1}{x^2}$, donc

$$S'(x) \leq 0.$$

Donc la fonction S' est négative sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction S est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
On a donc : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S(x+1) \leq S(x),$$

ce qui donne en additionnant $S(x+1)$ ou $S(x)$ (et par la question précédente) :

$$2S(x+1) \leq S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \leq 2S(x).$$

Puis, pour $y \in]1, \infty[$, en posant $x = y - 1$ (avec $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $y > 1$), on a

$$2S(y) = 2S(x+1) \leq S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} = \frac{1}{y-1}.$$

Donc, pour tout $x \in]1, \infty[$,

$$\frac{1}{2x} \leq S(x) \leq \frac{1}{2(x-1)} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Donc, le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{S(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}.$$

Correction de l'exercice 6.12 **Énoncé p. 3**

On peut commencer par remarquer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car par récurrence sur n, on a f_n continue sur I (et même de classe C^∞) :
Initialisation : pour $n = 0$, f_0 est la fonction nulle, donc est continue sur I.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la fonction f_n définie et continue sur I. Alors la fonction f_n^2 est aussi continue sur I, I est un intervalle, et $0 \in I$. Donc, le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$x \in I \mapsto \int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f_n^2 sur I, donc est de classe C^1 sur I. Enfin, la fonction

$$x \mapsto \frac{x^3}{3}$$

est polynomiale, donc de classe C^1 sur I. Par addition, on a alors la fonction f_{n+1} définie et de classe C^1 sur I. Donc la fonction f_{n+1} est définie et continue sur I. D'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie et continue sur I.
1) Montrons le résultat demandé par récurrence sur n :
Initialisation : pour $n = 0$, on a

$$|f_0(x)| = |0| = 0 \leq \frac{5}{6}$$

pour tout $x \in I$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$.
Alors, pour tout $x \in I$, par inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale (**car** « les bornes sont dans le bon sens », c'est-à-dire $x \geq 0$) :

$$|f_{n+1}(x)| \leq \left|\frac{x^3}{3}\right| + \left|\int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{x^3}{3} + \int_0^x |f_n|^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \int_0^x \left(\frac{5}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{24} + \frac{25}{36}x \leq \frac{1}{24} + \frac{25}{36}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{18} < \frac{5}{6}.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : on a donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in I$, linéarité de l'intégrale, puis (puisque $x \geq 0$) par inégalité triangulaire généralisée et croissance de l'intégrale, on a :

$$\begin{array}{rcl} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| & = & \left|\int_0^x \left(f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\ & \leq & \int_0^x \left|f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)\right|\mathrm{d}t = \int_0^x |f_n(t) - f_{n-1}(t)|\,|f_n(t) + f_{n-1}(t)|\,\mathrm{d}t \\ & \leq & \int_0^x |f_n(t) - f_{n-1}(t)|\left(|f_n(t)| + |f_{n-1}(t)|\right)\mathrm{d}t \\ & \leq & \int_0^x \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \left(\|f_n\|_\infty + \|f_{n-1}\|_\infty\right)\mathrm{d}t \\ & \leq & \int_0^x \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \frac{5}{6}\times 2\,\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\times 2\,\|f_n - f_{n-1}\|_\infty x \leq \frac{5}{6}\,\|f_n - f_{n-1}\|_\infty \end{array}$$

(car $x \leq \frac{1}{2}$).
On a donc bien

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6}\,\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty .$$

Initialisation : pour $n = 0$, $\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1$, il y a donc égalité (ce qui est plus fort que l'inégalité voulue).
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$. Alors, en prenant l'inégalité de la question précédente en $n+1$ au lieu de n (c'est possible car $n+1 \in \mathbb{N}^*$), on a

$$\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{5}{6}\,\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \underset{\text{H.R.}}{\leq} \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \|f_1 - f_0\|_\infty ,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty .$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$ est une série géométrique de raison $\frac{5}{6}$, convergente car $\frac{5}{6} \in]-1,1[$. Donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_{n+1} - f_n\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement, donc uniformément, sur I.
Or la somme partielle d'indice $n-1$ de cette série est $f_n - f_0 = f_n$ (car c'est une série télescopique) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et comme la série de fonctions converge uniformément, la suite des sommes partielles converge uniformément vers la somme de la série.
D'où la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f, somme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f_{n+1} - f_n)$.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$,

$$\left|f(x)^2 - f_n(x)^2\right| = |f(x) - f_n(x)|\,|f(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)|\left(|f(x)| + |f_n(x)|\right) \leq \|f - f_n\|_\infty \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\right)$$

(car, pour tout $x \in I$, comme $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, donc simplement, vers la fonction f, on a en passant à la limite, $|f(x)| \leq \frac{5}{6}$. Autrement dit, $\|f\|_\infty \leq \frac{5}{6}$).
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|f^2 - f_n^2\right\|_\infty \leq \frac{5}{3}\|f - f_n\|_\infty,$$

et comme $\|f - f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit

$$\left\|f^2 - f_n^2\right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f^2.
Soit $x \in I$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n^2 est continue sur I, donc sur $[0,x]$.
La suite de fonctions (f_n^2) converge uniformément sur I vers f^2, donc converge uniformément sur $[0,x]$ vers f^2, et $[0,x]$ est un segment. Le théorème d'interversion limite/intégrale donne alors

$$\int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc, pour tout $x \in I$, l'égalité

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t$$

donne, en passant à la limite pour $n \to \infty$,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la fonction f est continue sur l'intervalle I (limite uniforme de fonctions continues sur I), et que $0 \in I$, le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f^2 sur I.
Donc, par somme de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = x^2 + f^2(x).$$

Puis, $f(0) = 0$ est direct.

Correction de l'exercice 6.13 **Énoncé p. 3**

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{n(1+x)}$ existe et $\frac{x}{n(1+x)} \geq 0$, donc $1 + \frac{x}{n(1+x)} > 0$ et $u_n(x)$ existe.
On a $\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{O}(u^2)$, et $\frac{x}{n(1+x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs. Donc, par critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.
Puis, la suite numérique $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante positive de limite nulle, donc par le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, et, pour $x \geq 0$, en multipliant par la constante $\frac{x}{1+x}$ (qui existe car $1 + x \neq 0$), la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x)}$ converge.
Par addition, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Autre façon : on peut appliquer directement le critère des séries alternées, mais la vérification est moins directe.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la suite numérique $\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (car $\frac{x}{1+x} \geq 0$) et minorée par 1 (idem). En composant par ln qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la suite numérique $\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\ln(1) = 0$, donc positive (donc la série de terme général $u_n(x)$ est alternée). Un calcul direct montre qu'elle tend vers 0 si $n \to \infty$. Alors on peut appliquer le critère des séries alternées, et la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n|$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|u_n|'(x) = \frac{\frac{(1+x)-x}{n(1+x)^2}}{1 + \frac{x}{n(1+x)}} = \frac{1}{n(1+x)^2 + x(1+x)} \geq 0.$$

Donc la fonction $|u_n|$ est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $|u_n|(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} |u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Donc

$$\|u_n\|_\infty = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_\infty = \sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge. Or, c'est une série à termes positifs,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

(car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, et que $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$), et comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque

Autre façon : on remarque, pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, que

$$0 \leq |u_n(x_0)| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x_0}{1+x_0}\frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, et $\frac{x_0}{1+x_0} \neq 0$, donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{x_0}{1+x_0}\frac{1}{n}$ diverge. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\geq 1} |u_n(x_0)|$ diverge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas absolument en x_0. Alors, en contraposant un résultat du cours, pour tout intervalle I contenant x_0 (donc en particulier pour $\mathbb{R}_+$), la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne peut pas converger normalement sur I.

Le critère des séries alternées nous donne aussi que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, pour $n \in \mathbb{N}$, si l'on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ le reste d'ordre n de la série de fonctions considérée, alors

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \|u_{n+1}\|_\infty .$$

C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \|u_{n+1}\|_\infty = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Correction de l'exercice 6.14 **Énoncé p. 4**

1) On montre que la fonction f_n est de classe C^n sur $I = [a, b]$ par récurrence sur n.
Initialisation : pour $n = 0$, il faut montrer que $f_0 = f$ est continue sur I, ce qui est vrai par hypothèse.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la fonction f_n de classe C^n sur I, alors la fonction f_n est au moins continue sur I, I est un intervalle, et $a \in I$, donc le théorème fondamental de l'analyse s'applique, et donne que la fonction f_{n+1} est bien définie sur I et est la primitive de la fonction f_n qui s'annule en a (donc $f'_{n+1} = f_n$).
Donc la fonction f_{n+1} est dérivable sur I, et

$$f'_{n+1} = f_n$$

est de classe C^n sur I par hypothèse de récurrence, donc la fonction f_{n+1} est de classe C^{n+1} sur I. D'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la fonction f_n est de classe C^n sur I.
On montre par récurrence sur n la propriété P_n :

« pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!} \|f\|_\infty$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, comme $0! = 1$ et $(x-a)^0 = 1$, cela revient à dire que pour tout $x \in I$,

$$|f_0(x)| = |f(x)| \leq \frac{1}{1}\|f\|_\infty ,$$

ce qui est vrai par définition de la norme infinie (*remarquons qu'elle existe, car la fonction f est continue sur le segment I, donc est bien bornée*).
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie, alors pour $x \in I$, par inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale (car $x \geq a$, donc « les bornes sont dans le bon sens »), on a

$$|f_{n+1}(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{n!}\left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{\|f\|_\infty}{n!}\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

D'où P_{n+1}.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\|f\|_\infty.$$

On en déduit en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^n}{n!}\|f\|_\infty$$

(car, pour tout $x \in [a,b]$, $0 \leq x-a \leq b-a$, et car la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
2) La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge car $\frac{(b-a)^n}{n!}$ est le terme général d'une série exponentielle, donc convergente. Donc la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge normalement, donc uniformément, sur I. Comme de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est continue sur I, on en déduit (par le théorème de continuité des séries de fonctions) que la fonction g_0 (la somme de la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$) est continue sur I.
Par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_k est de classe C^1 sur I, et

$$f_k' = f_{k-1}.$$

De plus, on a vu que la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} f_n \underset{k=n+1}{=} \sum_{k\geq 1} f_{k-1} = \sum_{k\geq 1} f_k'$$

converge normalement, donc uniformément, sur I.
Donc par application du théorème de dérivation terme à terme, la fonction g_1 est de classe C^1 sur I, et pour tout $x \in I$,

$$g_1'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = g_0(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k avec $k \geq n$, la fonction f_k est de classe C^n sur I.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, pour tout entier k avec $k \geq n$,

$$f_k^{(i)} = f_{k-i}$$

(récurrence immédiate), et la série de fonctions

$$\sum_{k\geq n} f_{k-i} \underset{j=k-i}{=} \sum_{j\geq n-i} f_j$$

converge normalement, donc uniformément, sur I (puisque $n-i \geq 0$ et que la série de fonctions $\sum_{j\geq 0} f_j$ converge normalement sur I), donc par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction g_n est de classe C^n sur I.
3) De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in I$,

$$g_n'(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_{k-1}(x) \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=n-1}^{\infty} f_j(x) = g_{n-1}(x).$$

Donc

$$g_n' = g_{n-1} = g_n + f_{n-1}$$

(et par récurrence immédiate, $g_n^{(n)} = g_0$).
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(a) = 0$$

car $f_k(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, cela donne

$$\boxed{g_1' = g_1 + f},$$

que l'on résout par la variation de la constante : l'équation homogène est $y' = y$ dont les fonctions solutions sont les fonctions

$$y : x \in I \mapsto Ke^x$$

pour $K \in \mathbb{R}$.
Posons alors la fonction

$$K : x \in I \mapsto g_1(x)e^{-x}.$$

Par produit de fonctions de classe C^1, la fonction K est de classe C^1 sur I, et pour tout $x \in I$, on a $g_1(x) = K(x)e^x$, soit pour tout $x \in I$,

$$g_1'(x) = K'(x)e^x + K(x)e^x.$$

On reporte dans l'équation différentielle vérifiée par g_1, et on a, pour tout $x \in I$,

$$K'(x) = e^{-x}f(x),$$

donc

$$K : x \in I \mapsto K(a) + \int_a^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

(car la fonction K est de classe C^1 sur I). Or,

$$K(a) = g_1(a)e^{-a} = 0$$

(car $g_1(a) = 0$), et donc pour tout $x \in I$,

$$K(x) = \int_a^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{puis} \qquad g_1(x) = e^x \int_a^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On conclut en remarquant que $g_1 = g_0 - f$, donc pour tout $x \in I$,

$$g_0(x) - f(x) = e^x \int_a^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Correction de l'exercice 6.15 **Énoncé p. 4**

1) À $x \in [0,1]$ fixé, la fonction g_x est un polynôme, donc dérivable sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$g_x'(t) = 1 - t \geq 0,$$

donc la fonction g_x est croissante sur l'intervalle $[0,1]$, et même strictement croissante, car $g_x' > 0$ sur $[0,1[$. Remarquons que $g_x(0) = \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (pour $x \in [0,1]$) et $g_x(1) = \frac{1+x}{2} \in [0,1]$ (pour $x \in [0,1]$).

t	0		1
$g_x'(t)$	+		
$g_x(t)$	$\frac{x}{2}$	↗	$\frac{x+1}{2}$

2) Soit $x \in [0,1]$. Tout d'abord, remarquons que, pour tout $t \in [0,1]$, comme la fonction g_x est croissante, on a

$$0 \leq g_x(0) \leq g_x(t) \leq g_x(1) \leq 1.$$

On montre alors le résultat voulu sur u_n par récurrence sur n.
Initialisation : si $n = 0$, $u_0 = 0 \in [0,1]$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Si u_n existe et $u_n \in [0,1]$, alors u_n est dans le domaine de définition de g_x, donc $u_{n+1} = g_x(u_n)$ existe, et de plus $u_{n+1} \in [0,1]$ d'après la remarque faite au début de cette question. D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a u_n qui existe et $u_n \in [0,1]$.

Remarque

Le même résultat subsiste pour $u_0 \in [0,1]$ quelconque !

3) Soit $x \in [0,1]$. Montrons par récurrence sur n que $u_n \leq u_{n+1}$.
Initialisation : comme $x \in [0,1]$, on a

$$u_1 - u_0 = \frac{x}{2} \geq 0, \qquad \text{donc} \qquad u_0 \leq u_1.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \leq u_{n+1}$, alors comme $u_n \in [0,1]$, $u_{n+1} \in [0,1]$ et la fonction g_x est croissante sur $[0,1]$, on a

$$u_{n+1} = g_x(u_n) \leq g_x(u_{n+1}) = u_{n+2}.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : donc, par récurrence sur n, on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Remarque

$u_1 - u_0 = \frac{x-u_0^2}{2}$. Donc, si $u_0 \leq \sqrt{x}$, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et si $u_0 \geq \sqrt{x}$, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Cela se montre de même que ci-dessus.

La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1 donc (par le théorème de la limite monotone) converge vers un réel ℓ (avec $\ell \leq 1$), et comme la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, on a $\ell \geq 0$.

Mais alors, par opérations algébriques sur les limites, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ donne

$$u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell + \frac{x-\ell^2}{2}.$$

Mais

$$u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

(car la suite numérique $\left(u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), donc par unicité de la limite,

$$\ell = \ell + \frac{x-\ell^2}{2}, \qquad \text{soit} \qquad \ell^2 = x.$$

Comme $\ell \geq 0$, on a alors

$$\ell = \boxed{\sqrt{x}}.$$

Remarque

Le résultat subsiste pour la même raison pour $u_0 \in [0,1]$ quelconque.

4) Montrons par récurrence sur n que P_n est un polynôme sur $[0,1]$.
Initialisation : pour $n = 0$, $P_0 = 0$ qui est bien un polynôme (le polynôme nul).
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Si P_n est un polynôme sur $[0,1]$, alors P_n^2 aussi, puis par combinaison linéaire de polynômes réels, P_{n+1} aussi. D'où l'hérédité.
Conclusion : donc on a bien, par récurrence sur n, que P_n est un polynôme sur $[0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) Montrons par récurrence sur n : pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

Initialisation : pour $n = 0$, comme pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sqrt{x} - P_0(x) = \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^0 = 1,$$

l'initialisation est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

On a déjà vu $0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x)$ (en effet, la suite $\left(P_n(x)\right)$ est la suite (u_n) du début de l'exercice, donc est croissante et tend vers $\sqrt{x}$, donc est majorée par $\sqrt{x}$). Puis,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{\sqrt{x}^2 - P_n(x)^2}{2} \\
&= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{\left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)}{2} \\
&= \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right) \\
&\leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)
\end{aligned}$$

(par application de l'hypothèse de récurrence, et car $\sqrt{x} \leq 1$, $P_n(x) \leq 1$, donc $1 - \frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2} \geq 0$).

Or, $P_n(x) \geq 0$, donc

$$\frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2} \geq \frac{\sqrt{x}}{2}, \qquad \text{puis} \qquad 1-\frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2} \leq 1-\frac{\sqrt{x}}{2},$$

et donc (en multipliant des inégalités **positives** et **dans le même sens**), on a bien

$$\sqrt{x}-P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1},$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : donc, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \sqrt{x}-P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n}.$$

6) La convergence uniforme sur $[0,1]$ se montre alors par simple étude de fonction. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto x\left(1-\frac{x}{2}\right)^n,$$

alors la fonction f_n est polynomiale, donc dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n'(x) = \left(1-\frac{x}{2}\right)^n + nx\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{nx}{2}\right) = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

Donc, pour $x \in [0,1]$, $f_n'(x)$ est du signe de $1-\frac{(n+1)x}{2}$. Donc f_n est croissante sur $\left[0, \frac{2}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{n+1}, 1\right]$:

x	0		$\frac{2}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2^n}$

Donc f_n admet un maximum en $\frac{2}{n+1}$. On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Or, pour tout $x \in [0,1]$, $\sqrt{x} \in [0,1]$, donc

$$\sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = f_n(\sqrt{x}) \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1-\frac{2}{2(n+1)}\right)^n,$$

soit, grâce à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sqrt{\cdot}-P_n\right\|_\infty \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1-\frac{2}{2(n+1)}\right)^n.$$

Or,

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -n\frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1,$$

donc

$$\left(1-\frac{2}{2(n+1)}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$$

(car la fonction exp est continue en -1), donc

$$f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes, que

$$\left\|\sqrt{\cdot} - P_n\right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{\cdot}$ sur $[0,1]$, ce qui conclut.

Correction de l'exercice 6.16 **Énoncé p. 4**

1) Pour $x \in]-1,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq |u_n(x)| \leq |x|^n.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x|$, convergente car $|x| \in]-1,1[$, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
Si $|x| > 1$, alors

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

(par croissance comparée), donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(1) = \frac{(-1)^n}{n}$$

est le terme général d'une série convergente par le critère des séries alternées, puisque $(u_n(1))$ est bien alternée ($\frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), et la suite $\left(|u_n(1)|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et tend vers 0.
Si $x = -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n(-1) = \frac{1}{n}$$

est le terme général d'une série divergente (série harmonique).
Donc le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est

$$\boxed{]-1,1]}.$$

2) Étude de la convergence normale
Soit $a \in [0,1[$. Pour tout $x \in [-a,a]$, on a

$$|x| \leq a < 1,$$

donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{a^n}{n} \leq a^n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leq a^n.$$

Or la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^n$ est une série géométrique de raison a, convergente car $a \in]-1,1[$, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|u_n\|_{\infty,[-a,a]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.
La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne peut pas converger normalement sur un intervalle contenant 1, car la convergence normale implique la convergence absolue en tout point, mais la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(1)$ est une série convergente qui n'est pas absolument convergente (car $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n(1)| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, donc divergente).
Regardons sur $]-1,a]$ avec $a \in]-1,1[$: soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]-1,a]$,

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

car $|x| \leq 1$, et

$$|u_n(x)| \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \frac{1}{n},$$

donc

$$\|u_n\|_{\infty,]-1,a]} = \frac{1}{n},$$

terme général d'une série divergente. Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas normalement sur $]-1,a]$.

Remarque

En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$.

Regardons sur $[a,1[$ avec $a \in]-1,1[$: soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [a,1[$,

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

car $|x| \leq 1$, et

$$|u_n(x)| \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{n},$$

donc

$$\|u_n\|_{\infty,[a,1[} = \frac{1}{n},$$

terme général d'une série divergente. Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas normalement sur $[a,1[$.
De là, on sait dire s'il y a convergence normale ou non, sur tout intervalle inclus dans $]-1,1]$, ce qui doit normalement largement suffire pour répondre à la question.
Étude de la convergence uniforme
Pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive (donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ est alternée) et tend vers 0 par le théorème des gendarmes, puisque

$$0 \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, la suite numérique $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante : comme $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n,$$

et bien sûr,

$$0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Or, des inégalités **positives** et **dans le même sens** se multiplient, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{x^n}{n},$$

d'où la décroissance annoncée.
Le critère des séries alternées s'applique donc, et donne en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or, cette majoration du reste ne dépend pas de x, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème des gendarmes donne alors

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n\|_{\infty,[0,1]} = 0,$$

autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Pour $a \in]-1,0[$, on sait que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,0]$. Donc

pour tout $a \in]-1,1]$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge uniformément sur $[a,1]$.

En effet, pour tout $x \in [a,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- si $x \in [a,0]$, alors

$$|R_n(x)| \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} + \|R_n\|_{\infty,[0,1]},$$

- et si $x \in [0,1]$, alors

$$|R_n(x)| \leq \|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} + \|R_n\|_{\infty,[0,1]}.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty,[a,1]} \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} + \|R_n\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0,$$

et le théorème des gendarmes conclut.
Puis, pour tout $a \in]-1,0]$, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$. En effet,
Méthode 1 : on raisonne par l'absurde avec le théorème de la double limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x\to-1^+} u_n(x) = \frac{1}{n},$$

et « -1 est une borne de l'intervalle $]-1,a]$ ».
Si de plus l'on suppose que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge uniformément sur $]-1,a]$, alors le théorème de la double limite s'applique, et donne que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ a une limite **finie** en -1^+, qui vaut

$$\lim_{x\to -1^+} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to -1^+} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ce qui est absurde car la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$.
Méthode 2 : plus « élémentaire ».
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme la série à termes positifs $\sum\limits_{k\geq n+1} \frac{1}{k}$ diverge, il existe $N\in\mathbb{N}$ avec $\sum\limits_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} \geq 2$. Donc, pour tout $x\in]-1,a]$, comme pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $u_k(x)\geq 0$ (car $x\leq 0$), on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} \geq 2.$$

Donc il existe $x_n\in]-1,a]$ avec

$$\|R_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x_n) \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} - 1 \geq 2-1 = 1$$

(la norme infinie valant ∞ par convention si la fonction R_n n'est pas bornée sur $]-1,a]$).
Donc la suite numérique $\left(\|R_n\|_{\infty,]-1,a]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$.
Méthode 3 : Toujours de façon « élémentaire », basée sur la même idée que la méthode 2, mais présentée différemment :
pour $a\in]-1,0]$, pour $x\in]-1,a]$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $u_k(x)\geq 0$. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $N\in\mathbb{N}$ avec $N>n$, pour tout $x\in]-1,a]$, on a

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x)$$

(la norme infinie valant ∞ par convention si la fonction R_n n'est pas bornée sur $]-1,a]$). Comme c'est vrai pour tout $x\in]-1,a]$, en faisant tendre $x\to -1^+$, on obtient (en passant à la limite dans une somme **finie**)

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \sum_{k=n+1}^{N} \lim_{x\to -1^+} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}$$

Ceci étant vrai pour tout $N\in\mathbb{N}$ avec $N>n$, on peut faire tendre $N\to\infty$, et donc

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}$$

Or, cette dernière limite vaut ∞, car la série numérique $\sum\limits_{k\geq n} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique) et est à termes positifs. Par conséquent, le reste de notre série de fonctions n'est pas borné sur $]-1,a]$, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$.

Correction de l'exercice 6.17 **Énoncé p. 4**

1. **Méthode 1 :** soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{(-1)^n x_0}{(1+x_0^2)^n} = 0$$

(si $x_0 = 0$, c'est toujours nul, et si $x_0 \neq 0$, alors $1 + x_0^2 > 1$, donc c'est par croissance comparée). Donc

$$f_n(x_0) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs. Donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x_0)$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 : par le critère de D'Alembert : si $x \neq 0$, $f_n(x) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{1}{1+x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x^2} < 1$$

(car $x \neq 0$), donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge. Et pour $x = 0$, on a la série nulle, qui converge.

Remarque

Si on veut appliquer le critère de D'Alembert, il faut calculer une **limite**. Même si le quotient $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|$ ne dépend pas de n, il ne faut pas oublier de passer à la limite !

Méthode 3 : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \geq 0,$$

donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$ est alternée. Puis, la suite numérique $\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, de limite nulle pour $x \neq 0$ (car c'est alors une suite géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2}$ avec $\frac{1}{1+x^2} \in [0,1[$), donc on peut appliquer le critère des séries alternées, et donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$ est convergente. On multiplie alors par x, et on a le résultat voulu pour $x \neq 0$. Et pour $x = 0$, on a la série nulle, qui converge.

Calcul de la somme : pour $x \neq 0$, c'est une série géométrique de raison $\frac{-1}{1+x^2}$ (qui est bien dans $]-1,1[$ car $x \neq 0$), donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} = x\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}} - 1\right) = \boxed{\frac{-x}{2+x^2}}$$

(en faisant attention que la somme part de 1 et pas de 0...). On peut remarquer que cette formule reste valable pour $x = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $0 < a < b$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $0 < a \leq x \leq b$, donc

$$0 < 1 + a^2 \leq 1 + x^2 \leq 1 + b^2,$$

et comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $n > 0$),

$$0 < \frac{1}{(1+b^2)^n} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$

Enfin, des inégalités positives dans le même sens se multiplient, ce qui donne

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(1+x^2)^n} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Cette majoration ne dépendant pas de x, on peut affirmer

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ est convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{1+a^2}$ avec $\frac{1}{1+a^2} \in]-1, 1[$ **car** $a > 0$). Donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]0, +\infty[$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions le sens de variation de la fonction

$$|f_n| : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

(qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, comme quotient de deux polynômes, dont celui du dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$).
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|f_n|'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1+x^2-2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\left(1-\sqrt{2n-1}x\right)\left(1+\sqrt{2n-1}x\right)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Donc la fonction $|f_n|$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$. Puis,

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \geq \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\sqrt{2n}},$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\sqrt{2n}}$ est divergente (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$) et à termes positifs. Donc, par critère de comparaison puis d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ diverge, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque

(a) Justifions l'équivalent :

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right],$$

or

$$n\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc par continuité de la fonction exp en $\frac{1}{2}$,

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{2}},$$

c'est un grand classique.

(b) Une autre façon pour le voir : on évalue en $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, et on a directement le terme d'une série divergente, encore faut-il le remarquer...

(c) Si la somme partait de $n = 0$, alors comme f_0 n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$ (f_0 est la fonction $x \mapsto x$), on aurait pu directement conclure à la non convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Comme $|f_n|(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} |f_n|(x) = 0$ (car $n \geq 1$), du tableau de variations, on a même

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \| |f_n| \|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\right|.$$

Mais ici, on a seulement utilisé une inégalité, ce qui a suffi pour conclure.

4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} < a$. Comme la fonction $|f_n|$ est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$ (d'après l'étude faite précédemment), pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors la fonction $|f_n|$ restreint à $[a, +\infty[$ est décroissante positive, donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \| |f_n| \|_{\infty,[a,+\infty[} = |f_n(a)|.$$

De plus, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(a)|$ est convergente (vu à la première question), donc la série numérique

$$\sum_{n\geq N} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$$

converge. Donc la série de fonctions

$$\sum_{n\geq N} f_n$$

est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. *il reste à rajouter les premiers termes...*

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[a, +\infty[$, on en déduit que la somme

$$\sum_{n=1}^{N-1} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$$

est finie, et donc la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$$

converge, autrement dit la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} f_n$$

est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

Autre méthode : une autre façon de montrer ceci, est d'utiliser l'inégalité classique $\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ (une retraduction de $\left(1 - |x|\right)^2 \geq 0$), ce qui donne pour $x \geq a$ et $n \geq 1$:

$$\left|\frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}\right| \leq \frac{1}{2(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}.$$

C'est vrai pour tout $x \in [a, +\infty[$, donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}},$$

et on conclut car la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}$ est une série géométrique convergente, car de raison $\frac{1}{1+a^2}$, avec $\frac{1}{1+a^2} \in]0, 1[$ (car $a > 0$).

Remarque

On n'a fait l'étude que sur $[0, +\infty[$, car f_n est impaire pour tout entier n, donc la somme de la série aussi.

Correction de l'exercice 6.18 **Énoncé p. 5**

Convergence simple :
Soit $x_0 \in [0, \pi]$, si $0 < x_0 < \pi$, on a

$$0 \leq |\sin(x_0)\ \cos^n(x_0)| \leq |\cos(x_0)|^n$$

et la série numérique $\sum_{n\geq 0} |\cos(x_0)|^n$ est convergente (série géométrique de raison $|\cos(x_0)|$ avec $|\cos(x_0)| < 1$ puisque $x_0 \in]0, \pi[$). Donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(x_0)\cos^n(x_0)$ converge absolument, donc converge.
Si $x_0 = 0$ ou π alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(x_0)\cos^n(x_0) = 0$. Donc la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(x_0)\cos^n(x_0)$ converge.
La série de fonctions converge donc simplement sur $[0, \pi]$.

Convergence normale sur $[0,\pi]$?
Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il y a convergence normale sur $[0,\pi]$. Essayons de nier un théorème du cours.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \in [0,\pi] \mapsto \sin(x)\ \cos^n(x).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,\pi]$ (*par produit de fonctions usuelles continues*).
- Supposons que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$.

Alors, par le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

serait continue sur $[0,\pi]$.
Or

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0,$$

et pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(x)\cos^n(x) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

(somme d'une série géométrique convergente de raison $\cos(x)$, avec $\cos(x) \in]-1,1[$ car $x \in]0,\pi[$). Or,

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{et} \qquad 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2},$$

donc

$$\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x}, \qquad \text{en particulier} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \neq 0 = f(0),$$

donc la somme de la série de fonctions n'est pas continue en 0. Absurde.
Donc la série de fonctions étudiée ne converge pas normalement sur $[0,\pi]$.

Remarque

On a le même problème en π.

Convergence normale sur tous les segments de $]0,\pi[$.
Soit $0 < a < b < \pi$, alors, comme la fonction cos est décroissante sur $[0,\pi]$, on a, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\cos(a) \geq \cos(x) \geq \cos(b), \qquad \text{et donc} \qquad 0 \leq |\cos(x)| \leq \max\Big(|\cos(a)|, |\cos(b)|\Big).$$

Remarque

En effet, $\alpha \geq y \geq \beta$ donne $|y| \leq \max\big(|\alpha|, |\beta|\big)$, et cela se voit en distinguant trois cas :

- si $\beta \geq 0$, alors $|\alpha| = \alpha$, $|\beta| = \beta$ et $|y| = y$, et $\max(\alpha, \beta) = \alpha$, et l'inégalité est directe.
- si $\alpha \leq 0$, $|\alpha| = -\alpha$, $|\beta| = -\beta$ et $|y| = -y$, donc on a $-\beta \geq -y = |y| \geq -\alpha \geq 0$ et $\max(-\alpha, -\beta) = -\beta$, et l'inégalité est directe.
- si $\beta \leq 0 \leq \alpha$, alors $|\alpha| = \alpha$, $|\beta| = -\beta$, et deux cas sont possibles : si $y \in [0, \alpha]$, alors $|y| = y \leq \alpha = |\alpha| \leq \max\big(|\alpha|, |\beta|\big)$, et si $y \in [\beta, 0]$, alors $\beta \leq y \leq 0$, soit $-\beta = |\beta| \geq -y = |y| \geq 0$, et donc $|y| \leq |\beta| \leq \max\big(|\alpha|, |\beta|\big)$.

Dans tous les cas, on a bien l'inégalité annoncée.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f_n(x)| \leq |\cos(x)|^n \leq \max\Big(|\cos(a)|, |\cos(b)|\Big)^n$$

(car la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
Alors, avec les notations précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \max\Big(|\cos(a)|, |\cos(b)|\Big)^n$$

et la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \max\Big(|\cos(a)|, |\cos(b)|\Big)^n$$

est une série géométrique convergente car de raison $\max\Big(|\cos(a)|, |\cos(b)|\Big)$ avec $0 \leq \max\Big(|\cos(a)|, |\cos(b)|\Big) < 1$ (puisque l'on a $0 \leq |\cos(a)| < 1$ et $0 \leq |\cos(b)| < 1$, puisque a et b sont dans $]0, \pi[$). Donc la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$$

converge (par critère de comparaison des séries à termes positifs), autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]0, \pi[$.

Correction de l'exercice 6.19 **Énoncé p. 5**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Notons

$$f_n : x \in [0, 1[\mapsto \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)},$$

alors la fonction f_n est dérivable sur $[0, 1[$ (comme quotient de deux polynômes, dont celui du dénominateur qui ne s'annule pas sur $[0, 1[$, puisque $1 - x^n > 0$ pour tout

$x \in [0,1[$), et pour tout $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{\left(nx^{n-1}-(n+1)x^n\right)(1-x^n)+nx^{n-1}(x^n-x^{n+1})}{n(1-x^n)^2} \\ &= \frac{x^{n-1}}{n(1-x^n)^2}\left(n-nx^n-(n+1)x+(n+1)x^{n+1}+nx^n-nx^{n+1}\right) \\ &= \frac{x^{n-1}}{n(1-x^n)^2}\left(n-(n+1)x+x^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Notons alors $P : x \in [0,1[\mapsto n-(n+1)x+x^{n+1}$. Alors, P est une fonction polynomiale, donc dérivable, et pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$P'(x) = (n+1)(x^n-1) < 0,$$

donc la fonction P est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,1[$. Comme

$$\lim_{x\to 1^-} P(x) = n-(n+1)+1 = 0,$$

on en déduit $P > 0$ sur $[0,1[$.
Donc $f_n' > 0$ sur $[0,1[$, et donc la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1[$.
Comme, pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$f_n(x) = \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)} = \frac{x^n}{n}\frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{n^2},$$

(en reconnaissant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x avec $x \neq 1$), et $f_n(0) = 0$ (car $n \geq 1$), on en déduit que, pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ (et en fait, la limite $\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = \frac{1}{n^2}$ donne même qu'il y a égalité). Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0,1[$.

Correction de l'exercice 6.20 **Énoncé p. 5**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (\mathrm{e}^{-x})^n$: la série $\sum f_n(x)$ est une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Elle converge si et seulement si $\mathrm{e}^{-x} < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$. Pour $x > 0$,

$$K(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

2) La fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx}$, donc $\left|f_n'(x)\right| = n\mathrm{e}^{-nx}$.
Si $n = 0$, f_0' est nulle et $\left\|f_0'\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = 0$. Supposons $n \geq 1$. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{-nx} \leq 1$, donc $\left|f_n'(x)\right| \leq n$: la fonction f_n' est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par définition de la borne supérieure, $\left\|f_n'\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leq n$. De plus, pour tout $x > 0$, $n\mathrm{e}^{-nx} \leq \left\|f_n'\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$; en faisant tendre x vers 0, on obtient $n \leq \left\|f_n'\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|f_n'\right\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = n.$$

La série $\sum n$ diverge grossièrement : la série $\sum f_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \geq a$, on a $-nx \leq -na$, donc $\left|f_n'(x)\right| = n\mathrm{e}^{-nx} \leq n\mathrm{e}^{-na}$, avec égalité en $x = a$. Donc f_n' est bornée sur $[a, +\infty[$ et $\left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,+\infty[} = n\mathrm{e}^{-na}$.

Par croissances comparées, comme $a > 0$, $n^2 \cdot n\mathrm{e}^{-na} = n^3\mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $n\mathrm{e}^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum n\mathrm{e}^{-na}$ converge, c'est-à-dire que $\sum \left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge : la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

4) Soit $[c, d]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$, avec $0 < c < d$. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions sur $[c, d]$:

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur $[c, d]$ (question 2) ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[c, d]$ (question 1, car $[c, d] \subset \mathbb{R}_+^*$) ;
- la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[c, +\infty[$ (question 3 avec $a = c$), donc normalement sur $[c, d]$, donc uniformément sur $[c, d]$.

D'après ce théorème, K est de classe C^1 sur $[c, d]$ et $K' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ sur $[c, d]$.

Ainsi K est de classe C^1 sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Par caractère local, K est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$K'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx},$$

le terme d'indice 0 étant nul.

5) Pour tout $x > 0$, $K(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ avec $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0$. La dérivée de $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, donc

$$K'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

En comparant avec l'expression de la question 4, on obtient, pour tout $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

6) Soit $q \in]0, 1[$. Posons $x = -\ln q$. Alors $x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} = q$, donc $n\mathrm{e}^{-nx} = nq^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La question 5 donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Avec $q = \dfrac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Correction de l'exercice 6.21 **Énoncé p. 5**

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq \left| \frac{e^{-nx_0^2}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$
et la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs. Donc, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ converge absolument, donc converge.
Donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$, autrement dit, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \in \mathbb{R}.$$
Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Donc
$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2},$$
or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$). Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction f est alors continue sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus comme la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que $+\infty$ « est une borne de $\mathbb{R}$ », le théorème de la double limite s'applique, et donne
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f_n'(x) = \frac{-2xe^{-nx^2}}{n} \qquad \text{et} \qquad f_n''(x) = \frac{-2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2}.$$
La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, alors pour tout $x \in [a, b]$, on a :
$$\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{2be^{-na^2}}{n} \leq 2be^{-na^2} \qquad \text{et (par inégalité triangulaire)} \qquad \left|f_n''(x)\right| \leq \frac{(2+4nb^2)e^{-na^2}}{n} \leq (2+4b^2)e^{-na}$$

Ces majorations ne dépendent pas de x, donc

$$\left\|f_n'\right\|_{\infty,[a,b]} \leq 2be^{-na^2} \qquad \text{et} \qquad \left\|f_n''\right\|_{\infty,[a,b]} \leq (2+4b^2)e^{-na^2}.$$

Or, les séries numériques $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2be^{-na^2}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (2+4b^2)e^{-na^2}$ sont des séries géométriques convergentes (car de raison e^{-a^2}, avec $e^{-a^2} \in]-1,1[$ car $a>0$). Donc les séries de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n''$ convergent normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.
Donc, par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction f est de classe C^2 sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (par caractère « local » de la propriété « être de classe C^2 »). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2xe^{-nx^2}}{n} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2}\right).$$

Enfin, la fonction f est paire et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$.

Correction de l'exercice 6.22 **Énoncé p. 5**

1. Si $x=0$, la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} f_n(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge (série de Riemann divergente).
Si $x \leq 0$ alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{e^{-nx}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0,$$

or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Donc d'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ est divergente.
Si $x>0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{e^{-nx}}{n} = 0$$

par croissance comparée, donc

$$\frac{e^{-nx}}{n} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$) et est à termes positifs. Donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ est (absolument) convergente, donc $f(x)$ existe.
Ainsi

$$\boxed{D_f =]0,+\infty[}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ (car $n > 0$). De plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{-n}}{n} \leq e^{-n},$$
donc $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq e^{-n}$. De plus, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-n}$ est une série géométrique de raison e^{-1}, avec $e^{-1} \in]-1, 1[$, donc est convergente. Donc la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$. Comme $+\infty$ « est une borne de $[1, +\infty[$ », le théorème de la double limite s'applique, et donne
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$
Autre méthode : pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 0$,
$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-nx},$$
donc (puisque les séries convergent bien car $x > 0$), par croissance de la somme, on a
$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par théorème des gendarmes, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > 0$, on
$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^{k-1} e^{-nx}.$$
La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme exp est une fonction croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [a, b]$,
$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| = n^{k-1}e^{-nx} \leq n^{k-1}e^{-na},$$
par conséquent
$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_{\infty,[a,b]} \leq n^{k-1}e^{-na}$$
(en fait, il y a même égalité, car $a \in [a, b]$).
De plus, par croissance comparée, on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 n^{k-1} e^{-na} = 0$, donc
$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_{\infty,[a,b]} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs, donc par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \left\|f_n^{(k)}\right\|_{\infty,[a,b]}$ converge, autrement dit la série de fonctions

$\sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.
Donc le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction f est de classe C^∞ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (par « caractère local » de la propriété « être de classe C^∞ »).
De plus, pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k n^{k-1} e^{-nx}.$$

4. De la question précédente (pour $k = 2$), on déduit : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} \geq 0.$$

Donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

5. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

(somme d'une série géométrique de raison e^{-x}, convergente car $e^{-x} \in]-1,1[$ puisque $x > 0$). En intégrant (c'est de la forme $-\frac{u'}{u}$), on a :

les fonctions f et $x \mapsto -\ln\left(1-e^{-x}\right)$ sont deux primitives de f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe $K \in \mathbb{R}$ avec, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = -\ln\left(1-e^{-x}\right) + K$$

(**on n'oublie pas la constante quand on primitive !**).
Cherchons K : en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = 0 + K$. Donc $K = 0$.
Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\boxed{f(x) = -\ln\left(1-e^{-x}\right)}.$$

Correction de l'exercice 6.23 **Énoncé p. 6**

1. Soit $x_0 > 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{n+n^2x_0} = \frac{1}{x_0}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{n+n^2x_0} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs. Donc le théorème de convergence absolue par comparaison donne que la série définissant $f(x)$ est (absolument) convergente. Donc $f(x)$ existe pour $x > 0$.

Remarque

(a) On peut aussi utiliser le critère d'équivalence, puisque $\frac{1}{n+n^2x_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x_0}$ d'après la limite précédente...

(b) $f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ existe pour tout $x < 0$ dès que $n+n^2x \neq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$f_n : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{n + n^2x} \in \mathbb{R}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $0 < a$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{n + n^2a} \leq \frac{1}{n^2a},$$

(car $a > 0$), donc

$$0 \leq \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2a}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2a}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.
Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction f est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc par « caractère local » de la continuité, sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

3. **Calcul de la limite :**
Méthode 1 : Pour tout $n \geq 1$, on a $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Or, à la question précédente, on a montré (en prenant $a = 1$) que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$. De plus, « $+\infty$ est une borne de $[1, +\infty[$ ». Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

Méthode 2 : Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n + n^2x} \leq \frac{1}{n^2x}.$$

Donc, pour tout $x > 0$, en sommant des inégalités dans le même sens (par croissance de la somme),

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(car cette dernière série converge (Riemann, $2 > 1$)), et donc si $x \to +\infty$, le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

Calcul de l'équivalent :

Méthode 1 : Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xf_n(x) = \frac{1}{n^2}$.

Or, pour tout $x \in [1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|xf_n(x)| = \frac{x}{n + n^2x} \leq \frac{1}{n^2},$$

donc si on note $g_n : x \mapsto xf_n(x)$, on a montré

$$\|g_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \|g_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.

De plus, « $+\infty$ est une borne de $[1, +\infty[$ ». Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > 0$, on en déduit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{s}{x}}.$$

Méthode 2 : Notons $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (on sait (?) que $s = \frac{\pi^2}{6}$). Alors, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \frac{s}{x} - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2x} - \frac{1}{n + n^2x} \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + n^2x)} \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(car cette dernière série converge (Riemann, $3 > 1$), et car, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+n^2x)} \leq \frac{1}{xn^3}$). Donc

$$\frac{s}{x} - f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right),$$

soit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{s}{x}}.$$

4. Soit $x > 0$. On pose $h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{t+t^2x} = \frac{1}{t(1+tx)} \end{array} \right.$
La fonction h est continue (par morceaux), positive, décroissante (car dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, avec pour tout $t > 0$, $h'(t) = -\frac{1+2tx}{(t+t^2x)^2} \leq 0$).
Pour tout $t > 0$ et $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx} = \frac{1+tx}{t(1+tx)} - \frac{tx}{t(1+tx)} = \frac{1}{t(1+tx)}$$

en réduisant au même dénominateur.
Pour tout $n \geq 2$, par décroissante de h :

$$\text{pour tout } t \in [n-1, n], \text{ on a } n-1 \leq t \leq n \text{ donc } h(t) \geq h(n),$$

et

$$\text{pour tout } t \in [n, n+1], \text{ on a } n \leq t \leq n+1 \text{ donc } h(n) \geq h(t).$$

Donc, par croissance de l'intégrale (qui s'applique ici sur $[n-1, n]$ ou $[n, n+1]$ **car on a** $n \geq 2$ (h n'est pas continue en 0, c'est pour cela qu'on ne prend pas le terme $n = 1$...)),

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t \geq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n(1+nx)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n(1+nx)} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n(1+nx)} = \int_{n}^{n+1} \frac{1}{n(1+nx)}\,\mathrm{d}t \geq \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t(1+tx)}$$

Ainsi en sommant pour $n \in [\![2, N]\!]$ (avec $N \geq 2$), on a :

$$\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(1+nx)} \geq \sum_{n=2}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t$$

Donc, si $N \to +\infty$ (et en utilisant la relation de Chasles), **sous réserve d'existence de la limite**,

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{1}^{N} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx)} \geq \lim_{N\to+\infty} \int_{2}^{N} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t$$

soit en additionnant $\frac{1}{1+x}$ (qui est le terme $n = 1$ de la somme) :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{1}^{N} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+x} \geq f(x) \geq \lim_{N\to+\infty} \int_{2}^{N} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+x}$$

Calculons $\lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t$ (c'est-à-dire $\int_1^\infty \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t$). On a :

$$\begin{array}{rcl} \int_1^N \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t & = & \int_1^N \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^N \frac{x}{1+tx}\,\mathrm{d}t \\ & = & \ln(N) - \ln(1+Nx) + \ln(1+x) \\ & = & -\ln\left(\frac{1+Nx}{N}\right) + \ln(1+x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(x) + \ln(1+x) \end{array}$$

donc la limite existe bien.
Par la même méthode de calcul, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{2}^{N} \frac{1}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t = -\ln(x) - \ln(2) + \ln(1+2x)$$

(et la limite existe bien là aussi). On a donc : pour tout $x > 0$,

$$-\ln(x) + \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \geq f(x) \geq -\ln(x) - \ln(2) + \ln(1+2x) + \frac{1}{1+x}.$$

Donc par double encadrement, on a $\boxed{f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)}$ (on divise par $-\ln(x)$ les inégalités précédentes et on applique le théorème des gendarmes).

Correction de l'exercice 6.24 **Énoncé p. 6**

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   Si $x_0 > 0$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} n^2 n^{x_0} e^{-nx_0} = 0$$
   par croissance comparée (car $x_0 > 0$). On a donc :
   $$n^{x_0} e^{-nx_0} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
   or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (Riemann, $2 > 1$) à termes positifs. Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 1} n^{x_0} e^{-nx_0}$ converge, autrement dit $S(x_0)$ est bien défini.
   Si $x_0 < 0$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} n^{x_0} e^{-nx_0} = +\infty \neq 0$$
   par croissance comparée, donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} n^{x_0} e^{-nx_0}$ diverge grossièrement, en particulier $S(x_0)$ n'existe pas.
   Si $x_0 = 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^0 e^{-n\cdot 0} = 1$ qui ne tend pas vers 0, donc de même, il y a divergence grossière, et $S(0)$ n'existe pas.
   Ainsi
   $$\boxed{D_S =]0, +\infty[}.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons
   $$f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto n^x e^{-nx} \in \mathbb{R}.$$
   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$|f_n(x)| \leq n^b e^{-na}.$$
   On a donc
   $$0 \leq \|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq n^b e^{-na},$$
   et la série numérique $\sum_{n\geq 1} n^b e^{-na}$ converge (car $a > 0$, idem qu'à la première question), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.
   Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$.
   Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction S est continue sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc par « caractère local » de la continuité, sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(n)-nx} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\ln(n)-n\right)} = 0$$

car $\ln(n) - n < 0$ (en effet, $\ln(u) \leq u - 1 < u$ pour tout $u > 0$).

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations de f_n : la fonction $f_n : x \mapsto e^{x\ln(n)-nx}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, et pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$f_n'(x) = \big(\ln(n) - n\big)e^{x\ln(n)-xn} \leq 0.$$

Donc la fonction f_n est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Le tableau de variations de la fonction f_n donne alors

$$\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = f_n(1).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(1)$ converge (cf. question 1), donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge, d'où la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.
Enfin, $+\infty$ est « une borne de $[1, +\infty[$ », donc le théorème de la double limite s'applique :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

Correction de l'exercice 6.25 **Énoncé p. 6**

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \frac{1}{2}e^{-x} > 1 > 0,$$

donc $f(x)$ existe. Puis, par composition de fonctions de classe C^∞, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2\left(1 + \frac{1}{2}e^{-x}\right)},$$

et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{2^{n+1}} \underset{p=n+1}{=} \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p e^{-px}}{2^p},$$

car on a reconnu la somme d'une série géométrique de raison $-\frac{1}{2}e^{-x}$, avec $-\frac{1}{2}e^{-x} \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right] \subset]-1, 1[$ pour $x \geq 0$ (car $x \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$).

Remarque

C'est même valable tant que $\frac{1}{2}e^{-x} < 1$, soit pour $x > -\ln(2)$.

2) La fonction f' est **continue** sur $\mathbb{R}$, et la fonction f est une primitive de f' sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = f(x) - \ln(3) + \ln(2).$$

Puis, fixons $x \in \mathbb{R}_+$. Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f_p : t \in [0,x] \mapsto \frac{(-1)^p e^{-pt}}{2^p},$$

alors la fonction f_p est continue sur $[0,x]$.
Montrons que la série de fonctions $\sum_{p\geq 1} f_p$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,x]$: pour tout $t \in [0,x]$, on a

$$0 \leq \left|f_p(t)\right| = \frac{e^{-pt}}{2^p} \leq \frac{1}{2^p}$$

(car $t \geq 0$, car $x \geq 0$), donc

$$0 \leq \left\|f_p\right\|_{\infty,[0,x]} \leq \frac{1}{2^p}.$$

Or la série numérique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^p}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \left\|f_p\right\|_{\infty,[0,x]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} f_p$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,x]$.
On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(3) - \ln(2) + \int_0^x \sum_{p=1}^{\infty} f_p(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^x f_p(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \int_0^x e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^x \\
&= \boxed{\ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1-e^{-px}}{p}}
\end{aligned}$$

3) Pour tout $x > 0$, par inégalité triangulaire (et car les séries suivantes convergent), on a

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px}\right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p2^p} e^{-px} \leq \sum_{p=1}^{\infty} e^{-px} = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison e^{-x}, avec $e^{-x} \in]0,1[$ pour $x > 0$) (*on fait attention : la somme de la série géométrique part de $p = 1$, et pas $p = 0$...*). Donc le théorème des gendarmes conclut.

Remarque

1. On peut aussi majorer ainsi : pour tout $x \geq 1$,
$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px}\right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p2^p} e^{-x} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} e^{-x} = e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. On peut aussi utiliser le théorème de la double limite, car la série de fonctions $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$, mais c'est plus long à rédiger que la simple majoration ci-dessus...

On en déduit que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1}{p}.$$
Or, de la définition de f, on a
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{-x}\right) = 0.$$
Donc, par unicité de la limite, on a $\ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1}{p} = 0$, et donc pour tout $x \geq 0$,
$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{-e^{-px}}{p} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2^p} \frac{e^{-px}}{p}$$
d'après la question précédente.

Correction de l'exercice 6.26 **Énoncé p. 6**

Pour tout $n \geq 0$, on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{array} \right.$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 |f_n(x_0)| = \frac{1}{x_0^2} \qquad \text{donc} \qquad |f_n(x_0)| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs.
Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison (car $x_0 > 0$), la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ est absolument convergente, donc convergente.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étudions la continuité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, alors pour tout $x \in [a, b]$,
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 + a^2}$$

(même pour $n = 0$, car on suppose $a > 0$), donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

De plus, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2 + a^2}$ est convergente (car $\frac{1}{n^2+a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$...), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.

Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique : la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par « caractère local » de la continuité.

Autre façon :

On a $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et pas juste $\mathbb{R}_+^*$), et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},$$

puis

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$), par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne alors que la fonction

$$T : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par addition, la fonction

$$S : x \mapsto T(x) + \frac{1}{x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

1. On constate ainsi que le problème en 0 provient uniquement de f_0.
2. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne peut pas converger normalement sur $\mathbb{R}_+^*$, car la fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 6.27 **Énoncé p. 6**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \dfrac{\left(t^2\right)^n}{n!}$. D'après le rappel avec $u = t^2$, la série $\sum f_n(t)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{t^2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t^{2n} \leq 1$, donc $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n!}$. Ce majorant ne dépend pas de t. Donc f_n est bornée sur $[0,1]$ et $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$. Or la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge (rappel avec $u = 1$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge : la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

3) On a

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n!\,(2n+1)}.$$

4) Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est polynomiale, donc continue sur le segment $[0,1]$;
- la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ (question 2), donc uniformément sur $[0,1]$.

D'après ce théorème, la série numérique $\sum \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question 1, le membre de droite vaut $\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$; d'après la question 3, le membre de gauche vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(2n+1)}$. Donc

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(2n+1)}.$$

Correction de l'exercice 6.28 **Énoncé p. 6**

Pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in [0,1]$, on a

$$n - x \geq 2 - 1 = 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad n + x \geq 2 + 0 = 2 > 0,$$

donc

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

existe.

Puis, à $x \in]0,1]$ fixé,

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{2x}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), est à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge, donc $f(x)$ existe.

Enfin, $f(0)$ existe, car c'est la somme de la série nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, notons

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2-x^2}.$$

Alors la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ (comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$), et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{n^2-1},$$

donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2-1}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2-1}$ converge (série à terme positif, $\frac{2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$...), donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.
Donc, par le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction f est continue sur $[0,1]$ (donc l'intégrale de l'énoncé existe), et par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{n-t} - \frac{1}{n+t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\ln(n-t) - \ln(n+t)\right]_0^1 = \sum_{n=2}^{\infty} \big(2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big).$$

Or, pour tout entier $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \big(2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big) = \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n) - \ln(n-1)\big) + \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n) - \ln(n+1)\big) = \ln(N) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(N+1)$$

(en reconnaissant des sommes télescopiques). Et donc

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \big(2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big) = \lim_{N\to+\infty} \left(\ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right) = \boxed{\ln(2)}.$$

Correction de l'exercice 6.29 **Énoncé p. 7**

Notons

$$f : x \mapsto x^{-x} = e^{-x\ln(x)}.$$

Alors la fonction f est définie et continue sur $]0,1]$, par composition de fonctions usuelles. Puis,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

car par croissance comparée, $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (et car exp est continue en 0). Donc on prolonge la fonction f par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$ (d'où la célèbre convention $0^0 = 1$). Donc la fonction f ainsi définie est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
Pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-x\ln(x)\big)^n}{n!}$$

(car $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour tout réel $u \in \mathbb{R}$).

Notons alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \in]0,1] \mapsto \big(-x\ln(x)\big)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n continue sur $]0,1]$ par produit de fonctions continues, et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

(car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$), et donc on prolonge la fonction f_n par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$. Pour $n = 0$, on a $f_0 : x \mapsto 1$ qui se prolonge naturellement par continuité en 0 en posant $f_0(0) = 1$.
On a alors, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!}.$$

En effet, pour $x \in]0,1]$, c'est l'égalité vue précédemment :

$$x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-x\ln(x)\big)^n}{n!},$$

et pour $x = 0$, c'est car

$$1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n!}.$$

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.
En effet, la fonction f_0 (constante égale à 1) est bornée sur $[0,1]$ par 1, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = (f_1)^n$$

(en distinguant $x = 0$ et $x \in]0,1]$). Or, f_1 est une fonction continue sur le segment $[0,1]$, donc est bornée par un réel $M > 0$: pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|f_1(x)| \leq M.$$

Donc, par élévation à la puissance n, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f_n(x)| \leq M^n.$$

Cela reste vrai pour $n = 0$ avec la convention usuelle $M^0 = 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{M^n}{n!}.$$

Comme la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!}$ converge (c'est une série exponentielle), par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge, autrement dit, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.

Remarque

Si on fait une étude de fonction, on constate que la fonction f_1 est positive, et prend son maximum en $x = e^{-1}$, donc $M = f_1(e^{-1}) = e^{-1}$ convient. Mais on n'a pas besoin d'être aussi précis.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, et donc on a

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\big(-x\ln(x)\big)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, notons

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p(x)\,\mathrm{d}x$$

(c'est une intégrale convergente, par le théorème de convergence absolue par comparaison, car la fonction $x \mapsto x^n \ln^p(x)$ est continue sur $]0,1]$, et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 par croissance comparée, alors que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$)).
Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$u : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \ln^p(x)$$

sont de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivées respectives

$$u' : x \mapsto x^n \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto \frac{p}{x}\ln^{p-1}(x).$$

Enfin,

$$u(x)v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln^p(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, car $n+1 > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$), donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et comme on sait que l'intégrale

$$I_{n,p} = \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{p}{x}\ln^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, et de plus on a

$$I_{n,p} = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln^p(x)\right]_0^1}_{=0-0} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{p}{x}\ln^{p-1}(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}.$$

Par récurrence directe sur $p \in \mathbb{N}$ (à $n \in \mathbb{N}$ fixé), on en déduit

$$I_{n,p} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} I_{n,0}$$

pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Or, $I_{n,0} = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Donc

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_{n,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}.$$

Correction de l'exercice 6.30 **Énoncé p. 7**

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t)$ existe (car n^2+1 ne s'annule pas), et $|u_n(t)| \leq \frac{1}{n^2+1}$ car $e^{-nt^2} \leq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1}\cdot$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ converge (par critère de comparaison des séries à termes positifs, car on a $0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$ et la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui converge (Riemann, $2>1$)), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
En particulier, cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
Comme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue (composition de la fonction exponentielle avec un polynôme, puis multiplication avec une constante), et que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction f (la somme de cette série de fonctions) est continue sur $\mathbb{R}$.
2) $u_0 = 1$, donc la fonction u_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $u_0' = 0$, donc $\|u_0'\|_\infty = 0$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ (à une constante près, c'est une exponentielle), et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$u_n'(t) = \frac{-2nt}{n^2+1} e^{-nt^2} \qquad \text{et} \qquad u_n''(t) = -\frac{2n}{n^2+1}\left(1-2nt^2\right)e^{-nt^2},$$

donc $u_n''(t)$ est du signe de $2nt^2-1$.
Donc la fonction u_n' est décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty\right[$.
Or, $\lim_{t\to+\infty} u_n'(t) = 0$ (par croissance comparée, car $n \geq 1$) et $u_n'(0) = 0$, d'où le tableau de variations :

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$u_n''(t)$		$-$	0	$+$	
$u_n'(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc, pour $n \geq 1$,

$$\|u_n'\|_\infty = -u_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2n}}{n^2+1} e^{-\frac{1}{2}}}.$$

Remarque

Cette formule reste vraie pour $n = 0$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Puis,

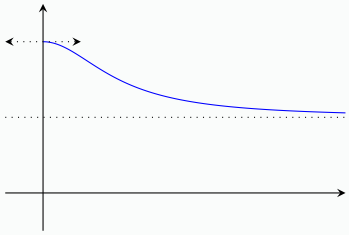
$$\|u_n'\|_\infty = \frac{\sqrt{2n}}{n^2+1} e^{-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

pour $n \geq 1$ (et $\|u_0'\|_\infty = 0$, l'important est que u_0' soit bornée), et la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$), donc le critère d'équivalence des séries à termes

positifs conclut : la série numérique $\sum_{n\geq 0} \left\|u_n'\right\|_\infty$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.
Comme enfin la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2nt}{n^2+1} e^{-nt^2}.$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, $f'(t) < 0$ pour $t > 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. De plus, $f'(0) = 0$, d'où une tangente horizontale à la courbe représentative de f en 0. Enfin, la fonction f est décroissante et positive, donc minorée par 0, donc admet une limite finie en $+\infty$ (par le théorème de la limite monotone), d'où une allure de courbe :



5)
Méthode 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

De plus, on a vu que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$ (cf. question 1). Comme « $+\infty$ est une borne de $\mathbb{R}$ », le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to+\infty} u_n(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1.$$

Méthode 2 : le terme en $n = 0$ vaut 1 (ne dépend pas de t), et sinon on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq u_n(t) \leq e^{-nt^2}$$

(car $n^2 + 1 \geq 1$), ce qui donne (en sommant des inégalités dans le même sens, et car les séries convergent), pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$1 = u_0(t) \leq u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = f(t) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-t^2}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-t^2}}$$

(car on reconnaît une série géométrique convergente, puisque de raison e^{-t^2}, et qu'on a toujours $e^{-t^2} \in]0,1[$ pour $t \neq 0$). Si on fait tendre $t \to +\infty$, le théorème des gendarmes donne la limite voulue.
Autre majoration possible : pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-nt^2} \leq e^{-t^2}$, et donc

$$0 \leq f(t) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{n^2+1} = Ke^{-t^2},$$

en notant $K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (qui est un réel, car la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ converge). Comme $\lim_{t\to+\infty} Ke^{-t^2} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{t\to+\infty} \big(f(t) - 1\big) = 0$.

6) Pour l'approximation, on veut encadrer $R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (puisque $f(0) - \sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1} = R_{100}$). Pour cela, on utilise une comparaison série/intégrale : pour $n \in \mathbb{N}$, pour $t \in [n, n+1]$, on a (car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+$) les inégalités :

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Par croissance de l'intégrale (« les bornes sont dans le bon sens »), on a alors

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2+1}$$

En sommant l'inégalité de gauche de 100 à N (pour $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 100$), on a par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=101}^{N+1} \frac{1}{k^2+1} \underset{k=n+1}{=} \sum_{n=100}^{N} \frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \sum_{n=100}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_{100}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1},$$

et si $N \to +\infty$ (comme la série et l'intégrale considérée convergent), on a

$$R_{100} \leq \int_{100}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

Or, cette intégrale se calcule :

$$\int_{100}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\arctan(t)]_{100}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(100) = \arctan\left(\frac{1}{100}\right)$$

(car il est bien connu que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$...).
Or, arctan est de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, donc par inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\arctan(x) = \arctan(x) - \arctan(0) \leq 1 \times (x - 0) = x.$$

Donc

$$\arctan\left(\frac{1}{100}\right) \leq \frac{1}{100}, \qquad \text{puis} \qquad R_{100} \leq \frac{1}{100},$$

qui est bien ce que l'on voulait ($R_{100} \geq 0$ est direct).

Remarque

Ici, il y a une astuce qui permet d'aller beaucoup plus vite : pour tout $n \geq 101$, on a $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2-n}$, donc

$$0 \leq R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=101}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{101-1} - \frac{1}{N}\right) =$$

par somme télescopique. Ce n'est évidemment pas exigible de trouver cette astuce.

Correction de l'exercice 6.31 **Énoncé p. 7**

Remarquons déjà que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + n^3x^2 \geq n > 0$, donc $f_n(x)$ existe.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3x^2}$ est une série de Riemann convergente, car $3 > 1$, à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge. D'où la convergence simple sur $\mathbb{R}^*$.
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = \frac{-2n^3x}{(n + n^3x^2)^2},$$

donc $f_n' < 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f_n est décroissante (strictement) sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \frac{1}{n},$$

on en déduit

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ **ne** converge **pas** normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit ensuite $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on a $0 < a \leq x \leq b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme la fonction f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$f_n(a) \geq f_n(x) \geq 0.$$

Donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq f_n(a)$$

(*en fait, il y a égalité*). Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ converge (vu au début de l'exercice, **car** $a > 0$), la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par « caractère local » de la continuité.

Correction de l'exercice 6.32 **Énoncé p. 7**

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n : t \mapsto \ln\left(1 + e^{-nt}\right).$$

La fonction u_n est bien définie sur $\mathbb{R}$, car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   Si $t = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(1 + e^{-n\cdot 0}) = \ln(2)$ qui ne tend pas vers 0 si $n \to +\infty$, donc qui est le terme d'une série grossièrement divergente.
   Si $t < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln\left(1 + e^{-nt}\right) \geq \ln(2) > 0$$

donc là encore, on a divergence grossière (*l'expression* $\ln(1+e^{-nt})$ *ne peut pas tendre vers* 0 *si* $n \to +\infty$).
Si $t > 0$, on a

$$\ln(1+e^{-nt}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nt} = (e^{-t})^n$$

(car $e^{-nt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (e^{-t})^n$ est une série géométrique de raison e^{-t}, convergente car $e^{-t} \in]-1,1[$ (car $t > 0$), et à termes positifs. Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1+e^{-nt}\right)$ converge, autrement dit $S(t)$ existe.
On a donc

$$\boxed{D_S = \mathbb{R}_+^*}.$$

2. **Méthode 1 : Une approche directe.**
Soit $(t_0, t_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, supposons $t_0 > t_1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-nt_0 < -nt_1$, et donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$e^{-nt_0} < e^{-nt_1},$$

puis par stricte croissance du logarithme

$$u_n(t_0) = \ln\left(1+e^{-nt_0}\right) < \ln\left(1+e^{-nt_1}\right) = u_n(t_1)$$

(*ce que l'on aurait pu obtenir en étudiant les variations de* u_n *grâce au signe de sa dérivée...*). Donc (par sommation d'inégalités dans le même sens), pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} u_n(t_0) < \sum_{n=2}^{N} u_n(t_1).$$

En faisant tendre $N \to +\infty$ (les séries considérées convergent, grâce à la question 1 et car $t_0 > 0$, $t_1 > 0$), on en déduit

$$S(t_0) - u_1(t_0) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(t_0) \leq \sum_{n=2}^{\infty} u_n(t_1) = S(t_1) - u_1(t_1)$$

(en effet, à la limite une inégalité stricte devient large). Enfin, $u_1(t_0) < u_1(t_1)$, donc par addition d'inégalités dans le même sens,

$$S(t_0) = \big(S(t_0) - u_1(t_0)\big) + u_1(t_0) < \big(S(t_1) - u_1(t_1)\big) + u_1(t_1) = S(t_1).$$

Donc la fonction S est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Méthode 2 : On cherche les variations de S par l'étude de S'.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u_n'(t) = \frac{-ne^{-nt}}{1+e^{-nt}}.$$

Pour tout $a > 0$, pour tout $t \in [a, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|u_n'(t)\right| = \frac{ne^{-nt}}{1+e^{-nt}} \leq ne^{-nt} \leq ne^{-na}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \left\|u_n'\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq ne^{-na},$$

puis

$$0 \leq n^2 \left\|u_n'\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq n^3 e^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (**car** $a > 0$), donc le théorème des gendarmes donne

$$\left\|u_n'\right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs, donc par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \left\|u_n'\right\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors et donne que la fonction S est de classe C^1 sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc par caractère local de la propriété « être de classe C^1 », sur $\bigcup_{a>0}[a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$, et de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nt}}{1+e^{-nt}} < 0.$$

Donc la fonction S est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

3. **Méthode 1 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{t\to+\infty} u_n(t) = \ln(1) = 0$ par continuité de la fonction ln en 1.

   Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $-nt \leq -n$, donc par croissance et positivité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

   $$0 \leq e^{-nt} \leq e^{-n} \qquad \text{puis} \qquad 1 \leq 1 + e^{-nt} \leq 1 + e^{-n}.$$

   Enfin, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit

   $$0 = \ln(1) \leq \ln\left(1+e^{-nt}\right) = u_n(t) \leq \ln\left(1+e^{-n}\right) = u_n(1)$$

   (en fait, on a directement ceci en exploitant que la fonction u_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $u_n' \leq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$). Donc

   $$0 \leq \|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq u_n(1).$$

   Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n(1)$ converge (cf. question 1, car $1 > 0$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.

   Enfin, « $+\infty$ est une borne de $[1, +\infty[$ ».

   Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

   $$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to+\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

   Méthode 2 : par inégalité.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \ln\left(1 + e^{-nt}\right) \leq e^{-nt}$$

(car $e^{-nt} > 0 > -1$, et que l'on sait, pour tout $u > -1$, que $\ln(1+u) \leq u$), alors en sommant des inégalités dans le même sens (et car les séries qui interviennent convergent), on a

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \leq S(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc le théorème des gendarmes conclut :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0}.$$

4. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\phi_t : u \mapsto \ln\left(1 + e^{-ut}\right)$$

qui est une fonction continue et décroissante (comme à la question 2) sur $\mathbb{R}_+$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in [k, k+1]$:

$$\phi_t(u) \leq \phi_t(k),$$

et pour tout $u \in [k-1, k]$,

$$\phi_t(k) \leq \phi_t(u).$$

Alors, par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$ pour la première inégalité, sur $[k-1, k]$ pour la seconde (les bornes « étant bien dans le bon sens »), on a :

$$\int_k^{k+1} \phi_t(u)\,\mathrm{d}u \leq \int_k^{k+1} \phi_t(k)\,\mathrm{d}u = \phi_t(k) = u_k(t) = \phi_t(k) = \int_{k-1}^{k} \phi_t(k)\,\mathrm{d}u \leq \int_{k-1}^{k} \phi_t(u)\,\mathrm{d}u$$

En sommant les inégalités (et par la relation de Chasles) pour k variant de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\int_1^{n+1} \phi_t(u)\,\mathrm{d}u \underset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \phi_t(u)\,\mathrm{d}u \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \phi_t(u)\,\mathrm{d}u \underset{\text{Chasles}}{=} \int_0^n \phi_t(u)\,\mathrm{d}u$$

Calcul de $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \phi_t(u)\,\mathrm{d}u$:
On effectue le changement de variable $v = e^{-tu}$: la fonction

$$u \mapsto e^{-tu}$$

est de classe C^1 sur $[0, n]$, on a « $\mathrm{d}v = -te^{-tu}\,\mathrm{d}u$ » donc « $\frac{-\,\mathrm{d}v}{tv} = \mathrm{d}u$ ». D'où le théorème de changement de variable donne :

$$\int_0^n \phi_t(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^{e^{-tn}} \frac{\ln(1+v)}{tv}(-1)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{t}\int_{e^{-tn}}^{1} \frac{\ln(1+v)}{v}\,\mathrm{d}v.$$

Notons h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(0) = 1$ et $h(v) = \frac{\ln(1+v)}{v}$ pour $v \in]0,1]$. Elle est continue sur $]0,1]$, et continue en 0 car $\ln(1+v) \underset{v \to 0}{\sim} v$, donc continue sur le segment $[0,1]$. La fonction $y \mapsto \int_y^1 h(v)\,\mathrm{d}v$ est alors continue

sur $[0,1]$ (c'est l'opposée d'une primitive de h, à une constante près), et comme $e^{-tn} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient

$$\int_0^n \phi_t(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{C}{t} \qquad \text{en notant} \qquad C = \int_0^1 h(v)\,\mathrm{d}v.$$

De même, par la relation de Chasles,

$$\int_1^{n+1} \phi_t(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{n+1} \phi_t(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \phi_t(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{C}{t} - \int_0^1 \phi_t(u)\,\mathrm{d}u,$$

et

$$0 \leq \int_0^1 \phi_t(u)\,\mathrm{d}u \leq \ln(2)$$

par croissance de l'intégrale (car $0 \leq \ln\left(1+e^{-ut}\right) \leq \ln(2)$ pour tout $u \in [0,1]$).
Enfin, $\sum_{k=1}^{n} u_k(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(t)$ d'après la question 1. En passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'encadrement des sommes partielles, on a donc

$$\frac{C}{t} - \ln(2) \leq S(t) \leq \frac{C}{t}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction h est continue, positive et non nulle sur $[0,1]$ (car $h(0)=1$), donc par stricte positivité de l'intégrale, $C > 0$. En divisant l'encadrement par $\frac{C}{t} > 0$, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 - \frac{t\ln(2)}{C} \leq \frac{S(t)}{C/t} \leq 1,$$

et le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{S(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{C}{t}}.$$

Correction de l'exercice 6.33 **Énoncé p. 7**

On peut supposer $r \in]-1,1[$ au lieu de $0 \leq r < 1$ pour les quatre premières questions, ce qu'on va faire dans la correction (il y aura juste $|r|$ au lieu de r à certaines majorations...).
1) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n : x \in]-1,1[\mapsto \frac{x^n}{n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x|$, convergente car $|x| \in]-1,1[$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la

série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $]-1,1[$, et pour tout $x\in]-1,1[$,

$$u_n'(x) = x^{n-1}.$$

Soit $a\in[0,1[$. Pour tout $x\in[-a,a]$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $|x|\leq a$, puis

$$\left|u_n'(x)\right| = \left|x^{n-1}\right| = |x|^{n-1} \leq a^{n-1},$$

et donc

$$0 \leq \left\|u_n'\right\|_{\infty,[-a,a]} \leq a^{n-1}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^{n-1}$ est une série géométrique de raison a, convergente car $a\in]-1,1[$, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left\|u_n'\right\|_{\infty,[-a,a]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors, et donne que la fonction $f=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $[-a,a]$, pour tout $a\in[0,1[$, donc par caractère local de la propriété « être de classe C^1 », sur $\bigcup_{a\in[0,1[}[-a,a] =]-1,1[$. De plus, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Donc les fonctions f et $x\mapsto -\ln(1-x)$ sont deux primitives de f' sur l'intervalle $]-1,1[$, donc il existe $K\in\mathbb{R}$ avec

$$f : x \mapsto -\ln(1-x) + K.$$

Or, $f(0)=0$, donc $K=0$, et donc pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\boxed{f(x) = -\ln(1-x)}.$$

2) Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |r^n \sin(n\theta)| \leq |r|^n$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |r|^n$ est une série géométrique de raison $|r|$, convergente car $|r|\in]-1,1[$. Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n\sin(n\theta)$ converge absolument, donc converge.
On peut donc définir

$$g : \theta\in\mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta) \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \left|r^n e^{in\theta}\right| \leq |r|^n,$$

donc de même, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{in\theta}$ converge absolument, donc converge.
Puis, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(re^{i\theta}\right)^n\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right)$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $re^{i\theta}$, (absolument) convergente car $\left|re^{i\theta}\right| = |r| < 1$.
Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, en multipliant/divisant par le conjugué du dénominateur,

$$g(\theta) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-re^{-i\theta}}{\left(1-r\cos(\theta)\right)^2 + r^2\sin^2(\theta)}\right) = \boxed{\frac{r\sin(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta)}}.$$

3) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \left|r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}\right| \leq |r|^n,$$

donc de même qu'à la question 2, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge absolument, donc converge.
On peut donc définir

$$\phi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \in \mathbb{R}.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n : \theta \in \mathbb{R} \mapsto r^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$v_n'(\theta) = -r^n \sin(n\theta).$$

On a vu, au début de la correction de cette question, que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|v_n'(\theta)\right| = \left|-r^n \sin(n\theta)\right| \leq |r|^n,$$

donc

$$0 \leq \left\|v_n'\right\|_\infty \leq |r|^n.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |r|^n$ converge (déjà vu), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left\|v_n'\right\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors : la fonction ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -r^n \sin(n\theta) = 0 - g(\theta) = -\frac{r\sin(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta)}$$

(le 0 correspond au terme $n = 0$ de la somme définissant g).
Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ avec

$$\phi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right) + K$$

(*on a reconnu une forme du type* $\frac{u'}{u}$ *à constante près, que l'on sait donc primitiver directement*).
Comme $\phi(0) = -\ln(1-r)$ par la question 1 (car $r \in]-1, 1[$), on a

$$K = \frac{1}{2}\ln\left((1-r)^2\right) - \ln(1-r) = 0.$$

Donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\phi(\theta) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right)}.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est continue sur $[0, 2\pi]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a

$$|v_n(\theta)| \leq \frac{|r|^n}{n} \leq |r|^n,$$

donc

$$\|v_n\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq |r|^n.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |r|^n$ converge (déjà vu), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|v_n\|_{\infty,[0,2\pi]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$.
Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment s'applique alors :

$$\int_0^{2\pi} \phi(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} v_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r^n}{n}\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\left[\frac{\sin(n\theta)}{n}\right]_0^{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} -2\phi(\theta)\,\mathrm{d}\theta = -2 \times 0 = \boxed{0}.$$

5) Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| > 1$. L'idée est de mettre r^2 en facteur dans le ln : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right) = \ln(r^2) + \ln\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos(\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right)$$

(donc l'expression de gauche existe et a une intégrale convergente sur $[0, 2\pi]$, puisque c'est le cas pour celle de droite par ce qui précède, puisque $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$), puis la linéarité de l'intégrale donne alors

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right)\mathrm{d}\theta = \ln(r^2)2\pi + \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos(\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right)\mathrm{d}\theta = \ln(r^2)2\pi = \boxed{4\pi\ln|r|}.$$

Correction de l'exercice 6.34 **Énoncé p. 7**

1) Soit $x \in [0,1]$. Si $x \in [0,1[$, alors $x^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, et comme f est continue en 0, $g_n(x) = f(x^n) \to f(0)$. Si $x = 1$, alors $g_n(1) = f(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (g_n) converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction g définie par

$$g(x) = f(0) \text{ si } x \in [0,1[\qquad \text{et} \qquad g(1) = f(1).$$

2) Si f est constante, égale à c, alors $g_n = c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction constante c.
Réciproquement, supposons que (g_n) converge uniformément sur $[0,1]$. Sa limite uniforme est alors sa limite simple g : pour n assez grand, $g_n - g$ est bornée sur $[0,1]$ et $\|g_n - g\|_{\infty,[0,1]} \to 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est une bijection de $[0,1[$ sur $[0,1[$, de réciproque $t \mapsto t^{1/n}$. Donc, quand x décrit $[0,1[$, $t = x^n$ décrit $[0,1[$, et

$$\sup_{x\in[0,1[} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |f(x^n) - f(0)| = \sup_{t\in[0,1[} |f(t) - f(0)|.$$

Notons M cette dernière quantité, qui ne dépend pas de n et qui est finie car f est bornée sur $[0,1]$. On a donc, pour n assez grand, $0 \leq M \leq \|g_n - g\|_{\infty,[0,1]}$, et en passant à la limite, $M = 0$. Ainsi $f(t) = f(0)$ pour tout $t \in [0,1[$, puis $f(1) = f(0)$ par continuité de f en 1 : la fonction f est constante.
3) Soit $a \in]0,1[$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [0,\delta]$, $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$. Comme $a \in]0,1[$, $a^n \to 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $a^n \leq \delta$.
Soient $n \geq N$ et $x \in [0,a]$. Alors $0 \leq x^n \leq a^n \leq \delta$, donc $|g_n(x) - f(0)| = |f(x^n) - f(0)| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, la fonction $g_n - f(0)$ est bornée sur $[0,a]$ et

$$\|g_n - f(0)\|_{\infty,[0,a]} \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que $\|g_n - f(0)\|_{\infty,[0,a]} \to 0$: la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction constante $f(0)$, qui est bien la restriction de g à $[0,a]$.
4) La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée : notons $M = \|f\|_{\infty,[0,1]}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $[0,1]$ (composée de fonctions continues) et, pour tout $x \in [0,1]$, $|g_n(x) - f(0)| \leq 2M$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $2M(1-a) \to 0$ quand $a \to 1^-$, on peut fixer $a \in]0,1[$ tel que $2M(1-a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
D'après la question 3, la suite (g_n) de fonctions continues converge uniformément sur le segment $[0,a]$ vers la constante $f(0)$. Par le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions,

$$\int_0^a g_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^a f(0)\,\mathrm{d}x = af(0).$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\left|\int_0^a g_n(x)\,\mathrm{d}x - af(0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $n \geq N$. Par la relation de Chasles,

$$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x - f(0) = \left(\int_0^a g_n(x)\,\mathrm{d}x - af(0)\right) + \int_a^1 (g_n(x) - f(0))\,\mathrm{d}x,$$

et par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x - f(0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^1 |g_n(x) - f(0)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M(1-a) \leq \varepsilon.$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut :

$$\boxed{\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0).}$$

5) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$ et $f(0) = 1$, donc, d'après la question 4,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}.$$

De même, la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur $[0,1]$ et $f(0) = 0$, donc

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{0}.$$

Correction de l'exercice 6.35

Énoncé p. 8

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \leq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-n^2x \geq 0$ donc $f_n(x) \geq 1$: le terme général de la série $\sum f_n(x)$ ne tend pas vers 0, et la série diverge grossièrement.
Si $x > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2x \geq nx$, donc

$$0 \leq f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x} \leq \mathrm{e}^{-nx} = (\mathrm{e}^{-x})^n.$$

Or la série géométrique $\sum (\mathrm{e}^{-x})^n$ converge car $\mathrm{e}^{-x} \in]0,1[$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ converge.
Ainsi $\boxed{D =]0,+\infty[}$.
2) Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[a,+\infty[$, et pour tout $x \geq a$,

$$0 \leq f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x} \leq \mathrm{e}^{-n^2a} \leq \mathrm{e}^{-na},$$

donc f_n est bornée sur $[a,+\infty[$ et $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq (\mathrm{e}^{-a})^n$. La série géométrique $\sum (\mathrm{e}^{-a})^n$ converge car $\mathrm{e}^{-a} \in]0,1[$, donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge : la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,+\infty[$.
Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, S est continue sur $[a,+\infty[$, et ce pour tout $a > 0$. Par caractère local de la continuité, S est continue sur $]0,+\infty[$.
3) D'après la question 2 (avec $a = 1$), la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$, dont $+\infty$ est une borne. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Par le théorème de la double limite, la série $\sum 0$ converge (ce qui est clair) et

$$S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = \boxed{0}.$$

Pour l'équivalent, isolons le premier terme : pour tout $x > 0$,

$$S(x) = \mathrm{e}^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x}.$$

Pour tout $n \geq 2$, $n^2 \geq 2n$, donc $0 \leq \mathrm{e}^{-n^2x} \leq \mathrm{e}^{-2nx}$. En sommant ces inégalités (les deux séries convergent, la seconde étant géométrique de raison $\mathrm{e}^{-2x} \in]0,1[$),

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^n = \frac{\mathrm{e}^{-4x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}},$$

puis

$$0 \leq \mathrm{e}^{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x} \leq \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x} \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-x})$, et donc

$$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}.}$$

4) Soit $x > 0$. La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2 x}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, car $t \mapsto -t^2 x$ y est décroissante et exp est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $\varphi(t) \leq \varphi(n)$, et pour tout $t \in [n-1, n]$, $\varphi(n) \leq \varphi(t)$. En intégrant sur ces segments de longueur 1 (croissance de l'intégrale),

$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-n^2 x} \leq \int_{n-1}^{n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités pour n allant de 1 à N, la relation de Chasles donne

$$\int_1^{N+1} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-n^2 x} \leq \int_0^{N} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t.$$

5) Soit $x > 0$. Calculons les intégrales de la question 4 à l'aide du changement de variable affine $u = t\sqrt{x}$: pour tout $A > 0$,

$$\int_0^{A} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{A\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $A\sqrt{x} \to +\infty$ quand $A \to +\infty$, la limite admise dans l'énoncé donne, par composition des limites,

$$\int_0^{A} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

En particulier, quand $N \to +\infty$, le majorant de la question 4 tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$. Pour le minorant, par la relation de Chasles,

$$\int_1^{N+1} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{N+1} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t - \int_0^{1} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{N+1} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t - 1,$$

car $0 \leq \mathrm{e}^{-t^2 x} \leq 1$ sur $[0,1]$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{N+1} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t - 1 \leq \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-n^2 x} \leq \int_0^{N} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t.$$

Les trois membres ont une limite quand $N \to +\infty$ (la série converge d'après la question 1), et le passage à la limite dans les inégalités donne

$$\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - 1 \leq S(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

En multipliant par $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} > 0$, on obtient, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} S(x) \leq 1,$$

et le théorème des gendarmes donne $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} S(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

En particulier, $S(x) \to +\infty$ quand $x \to 0^+$.

Correction de l'exercice 6.36 **Énoncé p. 8**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : s \mapsto \frac{1}{n^s}$. Pour tout $s \geq 2$, comme $\ln n \geq 0$,

$$0 \leq f_n(s) = \mathrm{e}^{-s \ln n} \leq \mathrm{e}^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2},$$

donc f_n est bornée sur $[2, +\infty[$ et $\|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$), donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2, +\infty[$, dont $+\infty$ est une borne.
De plus, $f_1 = 1$ tend vers 1 en $+\infty$, et pour tout $n \geq 2$, $f_n(s) = \mathrm{e}^{-s \ln n} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$ car $\ln n > 0$. Par le théorème de la double limite,

$$\zeta(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = \boxed{1}.$$

Pour l'équivalent, écrivons, pour tout $s > 1$ (par linéarité de la somme d'une série convergente),

$$2^s (\zeta(s) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^s}{n^s} = \sum_{n=2}^{+\infty} h_n(s) \qquad \text{où} \qquad h_n : s \mapsto \left(\frac{2}{n}\right)^s.$$

Pour tout $n \geq 2$ et tout $s \geq 2$, comme $0 < \frac{2}{n} \leq 1$,

$$0 \leq h_n(s) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2},$$

donc $\|h_n\|_{\infty,[2,+\infty[} \leq \frac{4}{n^2}$ et, comme ci-dessus, la série $\sum_{n\geq 2} h_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[2, +\infty[$. Par ailleurs, $h_2 = 1$ tend vers 1 en $+\infty$, et pour tout $n \geq 3$, $h_n(s) = \mathrm{e}^{s \ln(2/n)} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$ car $\ln \frac{2}{n} < 0$. Par le théorème de la double limite,

$$2^s (\zeta(s) - 1) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} 0 = 1,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\zeta(s) - 1 \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^s}.}$$

2) Soit $s > 1$. La fonction $\psi : t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $\psi(t) \leq \psi(n)$, donc, en intégrant sur ce segment de longueur 1, $\displaystyle\int_n^{n+1} \psi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^s}$. Si de plus $n \geq 2$, pour tout $t \in [n-1, n]$, $\psi(n) \leq \psi(t)$, donc $\frac{1}{n^s} \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} \psi(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant la première inégalité pour n allant de 1 à N, et la seconde pour n allant de 2 à N (en ajoutant le terme $n = 1$, égal à 1), la relation de Chasles donne

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

Or, comme $s \neq 1$, pour tout $A \geq 1$,

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^A = \frac{1 - A^{1-s}}{s-1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{s-1},$$

car $1-s < 0$. Les trois membres de l'encadrement ont donc une limite quand $N \to +\infty$ (la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$ converge car $s > 1$), et le passage à la limite donne

$$\boxed{\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.}$$

En multipliant par $s - 1 > 0$, on obtient $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$ pour tout $s > 1$, et le théorème des gendarmes donne $(s-1)\zeta(s) \xrightarrow[s\to1^+]{} 1$, c'est-à-dire

$$\boxed{\zeta(s) \underset{s\to1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}.}$$

En particulier, $\zeta(s) \to +\infty$ quand $s \to 1^+$.
3) Soit $s > 0$. La suite $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\geq1}$ est à termes positifs, décroissante (car $s > 0$) et de limite nulle (car $s > 0$). Par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum g_n(s) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ converge. La série de fonctions $\sum g_n$ converge donc simplement sur $]0, +\infty[$.
4) Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons R_n le reste d'ordre n de la série $\sum g_n$: pour tout $s > 0$, $R_n(s) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$. Par le théorème spécial des séries alternées, le reste est majoré en valeur absolue par son premier terme : pour tout $s \geq a$,

$$|R_n(s)| \leq \frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{1}{(n+1)^a},$$

car $\ln(n+1) \geq 0$. Donc R_n est bornée sur $[a, +\infty[$ et

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $a > 0$. Ainsi $\|R_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \to 0$: la série $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : s \mapsto (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-s\ln n}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, η est continue sur $[a, +\infty[$, et ce pour tout $a > 0$. Par caractère local de la continuité, η est continue sur $]0, +\infty[$.
5) Soit $s > 1$. Les séries $\sum \frac{1}{n^s}$ (Riemann, $s > 1$) et $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ convergent, donc, par linéarité,

$$\zeta(s) - \eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Le terme général de cette série vaut 0 si n est impair, et $\frac{2}{n^s}$ si n est pair. Pour tout $P \in \mathbb{N}^*$, sa somme partielle d'ordre $2P$ vaut donc

$$\sum_{n=1}^{2P} \frac{1-(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{p=1}^{P} \frac{2}{(2p)^s} = 2^{1-s} \sum_{p=1}^{P} \frac{1}{p^s}.$$

Quand $P \to +\infty$, le membre de gauche tend vers $\zeta(s) - \eta(s)$ (suite extraite de la suite convergente des sommes partielles) et le membre de droite tend vers $2^{1-s}\zeta(s)$. Donc $\zeta(s) - \eta(s) = 2^{1-s}\zeta(s)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\eta(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s).}$$

6) D'après la question 4, η est continue en 1, donc

$$\eta(1) = \lim_{s \to 1^+} \eta(s) = \lim_{s \to 1^+} \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s).$$

Or $1 - 2^{1-s} = 1 - \mathrm{e}^{(1-s)\ln 2}$, et comme $\mathrm{e}^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$,

$$1 - 2^{1-s} \underset{s \to 1^+}{\sim} (s-1)\ln 2.$$

Avec l'équivalent $\zeta(s) \underset{s \to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$ de la question 2, le produit des équivalents donne $\left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s) \underset{s \to 1^+}{\sim} \ln 2$, donc $\left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s) \xrightarrow[s \to 1^+]{} \ln 2$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \eta(1) = \ln 2.}$$

Correction de l'exercice 6.37 **Énoncé p. 9**

1) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(x)| = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq x^{2n} = \left(x^2\right)^n.$$

Or la série géométrique $\sum \left(x^2\right)^n$ converge car $x^2 \in [0,1[$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge. La série $\sum u_n$ converge donc simplement sur $[0,1[$.
2) Soit $a \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $[0,1[$, et pour tout $x \in [0,1[$,

$$u_n'(x) = (-1)^n x^{2n}.$$

Pour tout $x \in [0,a]$, $\left|u_n'(x)\right| = x^{2n} \leq a^{2n}$, donc u_n' est bornée sur $[0,a]$ et $\left\|u_n'\right\|_{\infty,[0,a]} \leq \left(a^2\right)^n$. La série géométrique $\sum \left(a^2\right)^n$ converge car $a^2 \in [0,1[$, donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,a]$. Enfin, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,a]$ d'après la question 1.
Par le théorème de dérivation terme à terme, S est de classe C^1 sur $[0,a]$ et, pour tout $x \in [0,a]$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2},$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $-x^2 \in]-1,1[$. Ceci valant pour tout $a \in [0,1[$, par caractère local, S est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $S'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in [0,1[$.
La fonction $S - \arctan$ est donc dérivable, de dérivée nulle, sur l'intervalle $[0,1[$: elle y est constante. Comme $S(0) = 0 = \arctan(0)$, cette constante est nulle et

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, \quad S(x) = \arctan(x).}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est croissante sur $[0,1[$ et tend vers $\frac{1}{2n+1}$ en 1^-, donc

$$\|u_n\|_{\infty,[0,1[} = \sup_{x\in[0,1[} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Or $\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ et la série harmonique diverge, donc la série $\sum \|u_n\|_{\infty,[0,1[}$ diverge : la série $\sum u_n$ **ne** converge **pas** normalement sur $[0,1[$.
Soit $x \in [0,1[$. La suite $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, décroissante (car $x^{2n+3} \leq x^{2n+1}$ et $2n+3 \geq 2n+1$) et de limite nulle. Par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ converge et son reste d'ordre n, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est bornée sur $[0,1[$ et $0 \leq \|R_n\|_{\infty,[0,1[} \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La série $\sum u_n$ converge donc uniformément sur $[0,1[$.
4) Le réel 1 est une borne de $[0,1[$, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Par le théorème de la double limite, la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et

$$S(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Or, d'après la question 2, $S(x) = \arctan(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Par unicité de la limite,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, $\left|u_n'(x)\right| = x^{2n}$, et $x^{2n} \to 1$ quand $x \to 1^-$, donc $\left\|u_n'\right\|_{\infty,[0,1[} = 1$.
Supposons que la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[0,1[$, et notons T sa somme et (T_n) la suite de ses sommes partielles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n' = T_n - T_{n-1} = (T_n - T) - (T_{n-1} - T)$, donc, par inégalité triangulaire,

$$1 = \left\|u_n'\right\|_{\infty,[0,1[} \leq \|T_n - T\|_{\infty,[0,1[} + \|T_{n-1} - T\|_{\infty,[0,1[} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui est absurde. La série $\sum u_n'$ **ne** converge **pas** uniformément sur $[0,1[$: le théorème de dérivation terme à terme ne s'applique pas directement sur $[0,1[$, d'où le passage par les segments $[0,a]$ à la question 2.

Correction de l'exercice 6.38 **Énoncé p. 9**

1) Par la seconde inégalité triangulaire dans l'espace vectoriel normé $(B, \|\cdot\|_\infty)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\|f_n\|_\infty - \|f\|_\infty\right| \leq \|f_n - f\|_\infty .$$

Comme (f_n) converge uniformément vers f, on a $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, donc $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$.
La réciproque est fausse : pour f_n la fonction constante égale à $(-1)^n$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n, donc $\|f_n\|_\infty \to 1 = \|f\|_\infty$ avec f la fonction constante égale à 1, mais (f_n) ne converge pas vers f, ni même simplement, puisque $f_n(0) = (-1)^n$ n'a pas de limite.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$. En intégrant sur $[0,1]$, segment de longueur 1, la croissance de l'intégrale donne

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puis, par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

C'est le théorème d'intégration sur un segment de la limite d'une suite de fonctions.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est continue et positive sur $[0,1]$, donc

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 nx^n(1-x)\,\mathrm{d}x = n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit $x \in [0,1]$. Si $x \in [0,1[$, alors $nx^n = n\mathrm{e}^{n\ln x} \to 0$ par croissances comparées, car $\ln x < 0$, donc $g_n(x) \to 0$. Si $x = 1$, alors $g_n(1) = 0$ pour tout n. La suite (g_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
Si (g_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, sa limite uniforme serait sa limite simple, la fonction nulle. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en évaluant en $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0,1]$,

$$\|g_n\|_\infty \geq g_n(x_n) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1},$$

car $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \to 1$. Donc $\|g_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 : la suite (g_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
Ainsi, la suite (g_n) converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais ne converge pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Une suite n'a pas la même nature pour les deux normes : on retrouve que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur C, alors même que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$ d'après la question 2.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est bornée sur $[0,1]$ et $\|h_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} x^n = 1$. La suite (h_n) est donc bornée dans $(B, \|\cdot\|_\infty)$.
Soit $(h_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (h_n), où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. Comme $\varphi(n) \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1[$, $h_{\varphi(n)}(x) = x^{\varphi(n)} \to 0$, et $h_{\varphi(n)}(1) = 1$ pour tout n. La suite $(h_{\varphi(n)})$ converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction h définie par $h(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $h(1) = 1$.
Si $(h_{\varphi(n)})$ convergeait uniformément sur $[0,1]$, sa limite uniforme serait sa limite simple h. Or les fonctions $h_{\varphi(n)}$ sont continues sur $[0,1]$: par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, h serait continue sur $[0,1]$, ce qui est faux en 1. Aucune suite extraite de (h_n) ne converge donc uniformément sur $[0,1]$.
Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass). Cette propriété tombe en défaut dans $(B, \|\cdot\|_\infty)$.

Correction de l'exercice 6.39 **Énoncé p. 10**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g_n = f - f_n$ est continue sur $[a,b]$ comme différence de deux fonctions continues. Soit $x \in [a,b]$: la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $f(x)$, donc elle est majorée par sa limite : $f_n(x) \leq f(x)$, c'est-à-dire $g_n(x) \geq 0$. De plus $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ donne $g_{n+1}(x) = f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x) = g_n(x)$. Enfin, $g_n(x) = f(x) - f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par convergence simple de (f_n) vers f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle y est bornée : $\|g_n\|_\infty$ existe. Pour tout $x \in [a,b]$, la question 1 donne
$$|g_{n+1}(x)| = g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \leq \|g_n\|_\infty,$$
donc, par définition de la borne supérieure, $\|g_{n+1}\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$. La suite $\left(\|g_n\|_\infty\right)$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle y atteint sa borne supérieure : il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $g_n(x_n) = \|g_n\|_\infty$. Par ailleurs, une suite décroissante est minorée par sa limite, donc $\|g_n\|_\infty \geq \ell$. Ainsi $g_n(x_n) \geq \ell$.
4. La suite (x_n) est à valeurs dans $[a,b]$, donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ qui converge vers un réel c. Comme $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$ pour tout n, le passage à la limite dans ces inégalités larges donne $c \in [a,b]$.
5. Soit $n \geq m$. Comme φ est strictement croissante, $\varphi(n) \geq n \geq m$, et la question 1 donne alors $g_m \geq g_{\varphi(n)}$ sur $[a,b]$. Donc, avec la question 3,
$$g_m\left(x_{\varphi(n)}\right) \geq g_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \geq \ell.$$
La fonction g_m est continue en c et $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, donc $g_m\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g_m(c)$. En passant à la limite dans l'inégalité large précédente, valable pour tout $n \geq m$, on obtient $g_m(c) \geq \ell$.
6. L'inégalité $g_m(c) \geq \ell$ vaut pour tout $m \in \mathbb{N}$. Or $g_m(c) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ d'après la question 1, donc $0 \geq \ell$. Avec $\ell \geq 0$, il vient $\ell = 0$, c'est-à-dire $\|f - f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
7. *Si (f_n) est une suite décroissante de fonctions continues sur un segment $[a,b]$, qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f continue, alors la convergence est uniforme sur $[a,b]$.* En effet, la suite $(-f_n)$ est croissante, formée de fonctions continues, et converge simplement vers $-f$, qui est continue : d'après la question 6, $(-f_n)$ converge uniformément vers $-f$, et comme $\|(-f_n) - (-f)\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$, la suite (f_n) converge uniformément vers f.
8. Pour $x \in [0,1]$, $x^{n+1} = x \cdot x^n \leq x^n$, donc la suite (f_n) est décroissante, et chaque f_n est continue. Pour $x \in [0,1[$, $x^n \to 0$, et $f_n(1) = 1$ pour tout n : la suite converge simplement vers la fonction f nulle sur $[0,1[$ et valant 1 en 1. Cette limite n'est pas continue en 1, alors que les f_n le sont : par contraposée du théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$. L'hypothèse manquante est la continuité de la limite.
9. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n + x \leq n + 1 + x$ donne $f_{n+1}(x) = \dfrac{x}{n+1+x} \leq \dfrac{x}{n+x} = f_n(x)$, donc la suite est décroissante, et chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pour

x fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la limite simple est la fonction nulle, qui est continue. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc $\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x) \geq 1$ (et en fait cette borne vaut 1, car $0 \leq f_n < 1$) : la suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$. L'hypothèse manquante est que $\mathbb{R}_+$ n'est pas un segment.

Sur un segment $[0, A]$, toutes les hypothèses de la question 7 sont satisfaites, donc la convergence est uniforme sur $[0, A]$. On peut aussi le voir directement : f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\sup_{x\in[0,A]} f_n(x) = f_n(A) = \dfrac{A}{n+A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

10. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n la propriété : « pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ ».

Initialisation. $P_0 = 0$ et $P_1(x) = \dfrac{x}{2}$. Pour $x \in [0,1]$, on a $x \leq \sqrt{x}$ (car $x^2 \leq x$), donc $0 \leq 0 \leq \dfrac{x}{2} \leq \sqrt{x}$: H_0 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n. Soit $x \in [0,1]$. D'abord $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$. Ensuite, $0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ donne $P_{n+1}(x)^2 \leq x$, donc $P_{n+2}(x) - P_{n+1}(x) = \dfrac{x - P_{n+1}(x)^2}{2} \geq 0$. Enfin,

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+2}(x) &= \Big(\sqrt{x} - P_{n+1}(x)\Big) - \frac{\big(\sqrt{x} - P_{n+1}(x)\big)\big(\sqrt{x} + P_{n+1}(x)\big)}{2} \\ &= \Big(\sqrt{x} - P_{n+1}(x)\Big)\left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_{n+1}(x)}{2}\right),\end{aligned}$$

et les deux facteurs sont positifs, car $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$ et $\sqrt{x} + P_{n+1}(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$. Ainsi H_{n+1} est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

Soit $x \in [0,1]$. La suite $(P_n(x))$ est croissante et majorée par $\sqrt{x}$, donc elle converge vers un réel $\lambda \in \big[0, \sqrt{x}\big]$. En passant à la limite dans la relation $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \dfrac{x - P_n(x)^2}{2}$, on obtient $\lambda = \lambda + \dfrac{x - \lambda^2}{2}$, soit $\lambda^2 = x$, et comme $\lambda \geq 0$, $\lambda = \sqrt{x}$. La suite (P_n) converge donc simplement sur $[0,1]$ vers $x \mapsto \sqrt{x}$.

Une récurrence immédiate montre que chaque P_n est une fonction polynomiale, donc continue sur $[0,1]$. La limite $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$, la suite (P_n) est croissante et $[0,1]$ est un segment : d'après la question 6, la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

11. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle. Chaque S_n est continue sur $[a,b]$ comme somme finie de fonctions continues, et $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, donc la suite (S_n) est croissante. Par hypothèse, (S_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers S, qui est continue. D'après la question 6, (S_n) converge uniformément vers S sur $[a,b]$, ce qui est exactement la convergence uniforme de la série $\sum u_n$ sur $[a,b]$.

12. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 1$, alors $u_n(1) = 0$ pour tout n, et la série converge, de somme 0. Si $x \in [0,1[$, alors $0 \leq u_n(x) \leq x^n$, terme général d'une série géométrique convergente, donc $\sum u_n(x)$ converge, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -(1-x)\ln(1-x).$$

La somme S est donc définie sur $[0,1]$ par $S(x) = -(1-x)\ln(1-x)$ si $x \in [0,1[$ et $S(1) = 0$.

Les fonctions u_n sont continues et positives sur $[0,1]$. La somme S est continue sur $[0,1[$ comme produit de fonctions continues, et continue en 1 car, en posant $h = 1-x$, $S(x) = -h\ln h \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0 = S(1)$ par croissances comparées. D'après la question 11, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 6.40 **Énoncé p. 11**

1. Comme $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|P_n - f\|_\infty \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Soit $n \geq N$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}|P_n(x) - P_N(x)| &\leq |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_N(x)| \\ &\leq \|P_n - f\|_\infty + \|P_N - f\|_\infty \leq 2,\end{aligned}$$
donc $P_n - P_N$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit P une fonction polynomiale non constante, de degré $d \geq 1$ et de coefficient dominant $a_d \neq 0$. Alors $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_d x^d$, donc $|P(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et P n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Par contraposée, une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ est constante.
3. Soit $n \geq N$. La fonction $P_n - P_N$ est polynomiale et bornée sur $\mathbb{R}$ (question 1), donc constante d'après la question 2 : il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n = P_N + c_n$. En évaluant en 0, $c_n = P_n(0) - P_N(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) - P_N(0)$ par convergence simple en 0 ; notons c cette limite. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (P_N(x) + c_n) = P_N(x) + c,$$
donc $f = P_N + c$ est une fonction polynomiale.
4. Si (E_n) convergeait uniformément sur $\mathbb{R}$, sa limite exp serait polynomiale d'après la question 3. Or une fonction polynomiale P de degré au plus d vérifie $P^{(d+1)} = 0$, alors que $\exp^{(d+1)} = \exp$ n'est pas nulle : exp n'est pas polynomiale, et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

   Soit $A > 0$. Pour $x \in [-A, A]$ et $k \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{A^k}{k!}$, terme général d'une série numérique convergente (série exponentielle) : la série $\sum \dfrac{x^k}{k!}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-A, A]$, ce qui signifie que (E_n) converge uniformément sur $[-A, A]$. Tout segment étant inclus dans un tel $[-A, A]$, la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.
5. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} > 0$ et $\sqrt{x^2} = |x|$,
$$f_n(x) - |x| = \frac{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}.$$
   Ce quotient est positif, et comme $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$, il est majoré par $\dfrac{1/n}{1/\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi $\|f_n - |\cdot|\|_\infty \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto |x|$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et $\sqrt{\cdot}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$: par composition, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec
$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}.$$
Pour $x > 0$, $f_n'(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{|x|} = 1$; pour $x < 0$, $f_n'(x) \to -1$; et $f_n'(0) = 0$ pour tout n. La suite (f_n') converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par $g(x) = 1$ si $x > 0$, $g(x) = -1$ si $x < 0$ et $g(0) = 0$.
7. Les fonctions f_n' sont continues sur $[-1, 1]$, mais leur limite simple g n'est pas continue en 0 : par contraposée du théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions, la convergence n'est pas uniforme sur $[-1, 1]$.
Sur $[1, 2]$, pour tout $x \in [1, 2]$,
$$0 \leq 1 - f_n'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x\right)}$$
$$\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2n},$$
car $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \geq x \geq 1$. Donc $\sup_{x\in[1,2]} \left|f_n'(x) - g(x)\right| \leq \frac{1}{2n} \to 0$: la convergence est uniforme sur $[1, 2]$.
Sur $[-1, 1]$, la suite (f_n) converge simplement (et même uniformément) vers $x \mapsto |x|$, chaque f_n est de classe C^1, mais la suite des dérivées (f_n') ne converge pas uniformément : c'est cette hypothèse du théorème de dérivation qui fait défaut. On constate d'ailleurs que la limite $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 6.41 **Énoncé p. 12**

1. D'après la formule du binôme,
$$\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$
Si f est constante égale à c, alors $B_n(f)(x) = c \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = c : B_n(f) = f$.
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$,
$$k\binom{n}{k} = \frac{k\,n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$
$$= n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
Le terme d'indice $k = 0$ de la somme est nul, donc, en posant $j = k - 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\,b_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx\,(x + (1-x))^{n-1} = nx.$$

3. Si $n = 1$, les termes d'indices $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls et la somme vaut $0 = n(n-1)x^2$. Si $n \geq 2$, le même calcul qu'à la question 2 donne, pour $k \in [\![2, n]\!]$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, donc, en posant $j = k-2$,

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} = n(n-1)x^2.$$

Comme $k^2 = k(k-1) + k$, on en déduit avec la question 2 que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\, b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx$.

4. En développant $(k - nx)^2 = k^2 - 2nx\,k + n^2x^2$ et en utilisant les questions 1 à 3,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\, b_{n,k}(x) &= \big(n(n-1)x^2 + nx\big) - 2nx \cdot nx + n^2x^2 \cdot 1 \\ &= nx - nx^2 = nx(1-x).\end{aligned}$$

Enfin, $\dfrac{1}{4} - x(1-x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $nx(1-x) \leq \dfrac{n}{4}$.

5. Pour $f : x \mapsto x^2$, la question 3 donne

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\, b_{n,k}(x) = \frac{n(n-1)x^2 + nx}{n^2} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Ainsi $B_n(f)(x) - f(x) = \dfrac{x(1-x)}{n}$, et d'après la question 4, $\|B_n(f) - f\|_\infty = \dfrac{1}{4n}$, valeur atteinte en $x = \frac{1}{2}$. On observe que $B_n(f) \neq f$, mais que $\|B_n(f) - f\|_\infty \to 0$.

6. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée : M existe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. D'après la question 1, $f(x) = f(x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x)$, donc

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) b_{n,k}(x).$$

Comme $x \in [0,1]$, chaque $b_{n,k}(x)$ est positif, et l'inégalité triangulaire donne la majoration demandée.

7. Pour $k \in A$, $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \delta$, donc $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$ par définition de δ. Les $b_{n,k}(x)$ étant positifs,

$$\sum_{k \in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| b_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k \in A} b_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = \varepsilon.$$

8. Pour $k \in B$, $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \delta$, donc $(k - nx)^2 = n^2\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 > n^2\delta^2$, d'où $1 \leq \dfrac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}$. Par ailleurs, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq |f(x)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2M$. Donc, avec la

question 4,

$$\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| b_{n,k}(x) \leq \sum_{k\in B} 2M\,\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}\,b_{n,k}(x)$$
$$\leq \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\,b_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{n^2\delta^2}\cdot\frac{n}{4} = \frac{M}{2n\delta^2}.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, en découpant la somme de la question 6 selon A et B, les questions 7 et 8 donnent

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x, donc $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$.
Comme $\frac{M}{2n\delta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{M}{2n\delta^2} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, et alors $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Le réel $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, cela signifie que $\|f - B_n(f)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

10. La fonction $t \mapsto a + t(b-a)$ est continue et envoie $[0,1]$ sur $[a,b]$, donc f est continue sur $[0,1]$ par composition. D'après la question 9, la suite $(P_n) = (B_n(f))$ de fonctions polynomiales converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [a,b]$, posons $Q_n(s) = P_n\left(\frac{s-a}{b-a}\right)$: Q_n est une fonction polynomiale de s. Pour $s \in [a,b]$, le réel $t = \frac{s-a}{b-a}$ appartient à $[0,1]$ et $g(s) = f(t)$, donc

$$|g(s) - Q_n(s)| = |f(t) - P_n(t)| \leq \|f - P_n\|_\infty .$$

Ainsi $\sup_{s\in[a,b]} |g(s) - Q_n(s)| \leq \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite (Q_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

11. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} c_k t^k$ une fonction polynomiale. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b g(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{d} c_k \int_a^b g(t)\,t^k\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'après la question 10, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$. Pour tout $t \in [a,b]$,

$$\left|g(t)Q_n(t) - g(t)^2\right| = |g(t)|\,|Q_n(t) - g(t)| \leq \|g\|_\infty\,\|Q_n - g\|_\infty ,$$

donc la suite (gQ_n), formée de fonctions continues, converge uniformément vers g^2 sur $[a,b]$. D'après le théorème d'intégration sur un segment,

$$\int_a^b g(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Or le membre de gauche est nul pour tout n, donc $\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction g^2 est continue et positive sur $[a,b]$, d'intégrale nulle : elle est nulle sur $[a,b]$, et donc $g = 0$.

Correction de l'exercice 6.42 **Énoncé p. 13**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ vaut 0 si n est pair, 1 si $n \equiv 1\ [4]$ et -1 si $n \equiv 3\ [4]$. La suite $\left(g_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ prend une infinité de fois les valeurs 1 et -1, donc elle ne converge pas : la suite (g_n) ne converge pas simplement sur $[0, \pi]$.
   Pour $f = 1$, on a $I_n(f) = \displaystyle\int_0^\pi g_n(t)\,\mathrm{d}t$. Le théorème d'intégration sur un segment demande la convergence uniforme, donc au moins simple, de la suite (g_n) : il ne s'applique pas ici.
2. Les fonctions f et $t \mapsto -\dfrac{\cos(nt)}{n}$ sont de classe C^1 sur $[a, b]$, et la seconde a pour dérivée $t \mapsto \sin(nt)$. Par intégration par parties,
$$I_n(f) = \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$
   Comme $|\cos| \leq 1$, il vient
$$|I_n(f)| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{2\,\|f\|_\infty + (b-a)\,\|f'\|_\infty}{n},$$
   où $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ existent car f et f' sont continues sur le segment $[a, b]$. Le majorant tend vers 0, donc $I_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_k) de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$, c'est-à-dire que $\|f - Q_k\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Il existe donc un entier k tel que $\|f - Q_k\|_\infty \leq \varepsilon$, et $P = Q_k$ convient.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, $I_n(f) - I_n(P) = \displaystyle\int_a^b (f(t) - P(t))\sin(nt)\,\mathrm{d}t$, donc
$$|I_n(f) - I_n(P)| \leq \int_a^b |f(t) - P(t)|\ |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\,\|f - P\|_\infty \leq (b-a)\varepsilon,$$
   et l'inégalité triangulaire donne $|I_n(f)| \leq |I_n(P)| + (b-a)\varepsilon$.
   La fonction P est de classe C^1 sur $[a, b]$, donc $I_n(P) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après la question 2 : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|I_n(P)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, et alors $|I_n(f)| \leq (1 + b - a)\varepsilon$. Le réel $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, cela signifie que $I_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Pour f de classe C^1, l'intégration par parties avec $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t,$$
   et la même majoration qu'à la question 2 montre que cette intégrale tend vers 0. Pour f continue, les questions 3 et 4 se reproduisent mot pour mot, la seule propriété utilisée étant $|\cos| \leq 1$.
6. Pour tout t, $\sin^2(nt) = \dfrac{1 - \cos(2nt)}{2}$, donc
$$\int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t.$$

La suite $\left(\int_a^b f(t)\cos(2nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite de la question 5, donc elle tend vers 0. Ainsi

$$\int_a^b f(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u = nt$ donne

$$\int_0^\pi |\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\sin u|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u|\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $|\sin|$ est π-périodique, donc chacune de ces n intégrales vaut $\int_0^\pi |\sin u|\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = 2$, et l'intégrale cherchée vaut $\frac{1}{n}\cdot 2n = 2$.

Pour f constante égale à 1 sur $[0,\pi]$, on obtient $\int_0^\pi |f(t)\sin(nt)|\,\mathrm{d}t = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors que $I_n(f) = \int_0^\pi \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(n\pi)}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La convergence de $I_n(f)$ vers 0 ne provient donc pas de la petitesse de $\sin(nt)$, mais des compensations entre les valeurs positives et négatives de $\sin(nt)$, dont les oscillations sont de plus en plus rapides.