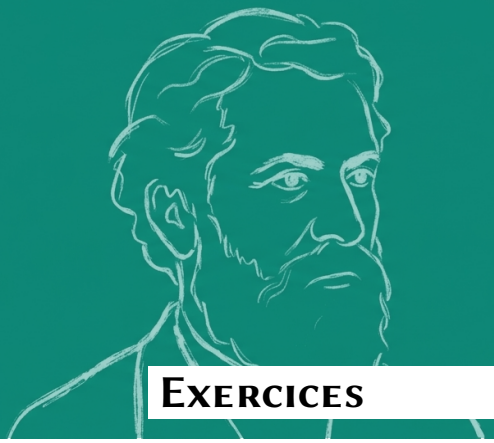


7 Réduction

Exercices

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 7.2 Polynôme annulateur et spectre
  - 7.6 Polynôme caractéristique et spectre
  - 7.9 Diagonalisation en taille 2, puissances
  - 7.10 Diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$?
- **Piste rouge**
  - 7.26 Éléments propres dans $\mathbb{R}[X]$
  - 7.35 Racines carrées d'une matrice
  - 7.34 Matrices de rang 1
  - 7.68 L'endomorphisme $M \mapsto AM$
- **Piste bleue**
  - 7.16 L'endomorphisme $P \mapsto P + P'$
  - 7.65 Diagonalisabilité selon un paramètre
  - 7.44 Relation polynomiale et puissances
  - 7.31 Matrice remplie de 1, puissances
- **Piste noire**
  - 7.67 Matrices circulantes
  - 7.64 Matrices stochastiques
  - 7.43 Limite de la suite (A^n)
  - 7.70 Diagonalisation simultanée

Exercice 7.1 ○ Correction p. 20

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 3X + 2$.

1. Calculer A^2, puis $P(A)$.
2. Vérifier que $P(A) = (A - I_2)(A - 2I_2) = (A - 2I_2)(A - I_2)$.

Exercice 7.2 ○ Correction p. 20

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$, puis déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 7.3 ○ Correction p. 21

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2. Vérifier le résultat pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.4 ○ Correction p. 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On rappelle que $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)(X - 2)$.
2. En déduire A^n en fonction de A et I_2, puis les coefficients de A^n.

Exercice 7.5 ○ Correction p. 21

On note $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \in E \mapsto f' \in E$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E.

2. Déterminer les valeurs propres de D et, pour chacune, le sous-espace propre associé.
3. En déduire que, pour $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, la famille de fonctions $(x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_p x})$ est libre.

Exercice 7.6 ○ Correction p. 22

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et vérifier que ses coefficients font intervenir $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et vérifier de même ses coefficients. Déterminer le spectre de B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3. Montrer que 0_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique sans être semblables.

Exercice 7.7 ○ Correction p. 22

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour chacune de ces deux matrices, donner le spectre, la multiplicité de chaque valeur propre et la dimension de chaque sous-espace propre. Ces matrices sont-elles diagonalisables ?

Exercice 7.8 ○ Correction p. 23

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A.
2. Vérifier par le calcul que $\chi_A(A) = 0_2$.
3. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2.

Exercice 7.9 ○ Correction p. 23

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
2. Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.10 ○ Correction p. 24

Sans déterminer de sous-espace propre, dire si chacune des matrices suivantes est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7.11 ○ Correction p. 25

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n \end{cases}$$

Exprimer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 7.12 ○ Correction p. 25

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. En écrivant cette relation sous forme matricielle, exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 7.13 • Correction p. 26

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A et en déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre, puis une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier le résultat pour $n = 2$ en calculant directement A^2.

Exercice 7.14 • Correction p. 27

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Discuter, selon la valeur de a, si A_a est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 7.15 • Correction p. 27

On note $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'unique matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que X_1 soit vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et X_2 vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.
2. Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de B associé à 2 et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur propre de B associé à 3 ?
3. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont X_1 et X_2 sont des vecteurs propres.

Exercice 7.16 • Correction p. 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P + P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.
2. Déterminer χ_u et $\mathrm{Sp}(u)$.
3. Déterminer le sous-espace propre associé à chaque valeur propre. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 7.17 • Correction p. 29

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$.

1. Calculer $\det(A)$, $\mathrm{tr}(A^2)$ et $\mathrm{tr}(A^3)$.
2. Calculer $\det(A^2 + I_3)$.
3. Montrer que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0_3$.

Exercice 7.18 • Correction p. 29

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres complexes de R_θ. Pour quelles valeurs de θ la matrice R_θ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
2. On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de R_θ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_\theta^n = R_{n\theta}$.

Exercice 7.19 • Correction p. 30

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, $u_2 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, on ait $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer χ_A et montrer que, pour toute valeur propre λ de A, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
3. Décomposer X_0 dans une base de vecteurs propres de A et en déduire u_n en fonction de n.

Exercice 7.20 • Correction p. 32

Soit $n \geq 2$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de l'antidiagonale qui valent 1 : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $J_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et $J_{i,j} = 0$ sinon. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer Je_i pour $i \in [\![1,n]\!]$, puis J^2. En déduire que $\mathrm{Sp}(J) \subset \{-1, 1\}$.
2. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, les vecteurs $e_i + e_{n+1-i}$ et $e_i - e_{n+1-i}$ sont, s'ils sont non nuls, des vecteurs propres de J.
3. En déduire que J est diagonalisable, et donner la dimension de chaque sous-espace propre. Retrouver la valeur de $\mathrm{tr}(J)$.

Exercice 7.21 ○ Correction p. 32

Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Établir : $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$.

Exercice 7.22 • Correction p. 33

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, exprimer pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\chi_{A^{-1}}(\lambda)$ en fonction de χ_A.

Exercice 7.23 ○ Correction p. 33

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(u^n)$, montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

Exercice 7.24 ○ Correction p. 34

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 7.25 ○ Correction p. 34

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha$. Trouver une valeur propre de cette matrice et un vecteur propre associé. A-t-on un résultat analogue si toutes les colonnes ont la même somme β ?

Exercice 7.26 ● Correction p. 36

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\phi(P) = (X-1)P' - P$.

1. Montrer que pour tout entier n, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ. On note alors ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ.
2. Déterminer les valeurs propres de ϕ_n, en déduire celles de ϕ.
3. Déterminer les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 7.27 ● Correction p. 38

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$ avec $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f) \Rightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.

Exercice 7.28 ●● Correction p. 38

Soit a et b deux réels distincts. Trouver l'ensemble S des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice A soit diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ 0 & b & z & -y \\ 0 & 0 & a & x \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Exercice 7.29 ● Correction p. 40

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose : $\phi_A : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire sa matrice dans la base canonique. Calculer $\mathrm{rg}(\phi_A)$ et en déduire une valeur propre de ϕ_A.
2. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

Exercice 7.30 ●● Correction p. 44

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $g \circ f - f \circ g = \alpha f$ avec $\alpha \neq 0$.

1. Montrer que : pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g \circ f^k - f^k \circ g = \alpha k f^k$.
2. En déduire que f est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$ (*Indication : considérer* $\phi : h \in \mathcal{L}(E) \mapsto g \circ h - h \circ g \in \mathcal{L}(E)$).

Exercice 7.31 ● Correction p. 45

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. U est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser. Calculer U^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice n'ayant que des a sur la diagonale, que des b partout ailleurs. Montrer que A est diagonalisable, en la diagonalisant. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.32 ●● Correction p. 48

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $p \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$.
On note $Q = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$ et $B = Q(A) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_p A^p = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k A^k$.

1. Montrer que B est diagonalisable. Décrire $\mathrm{Sp}(B)$ à l'aide de $\mathrm{Sp}(A)$.
2. Montrer que pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} E_\lambda(A) \subset E_\mu(B)$, puis à l'aide des dimensions, conclure à l'égalité.

Exercice 7.33 ● Correction p. 50

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Montrer que, si pour tout i, λ_i est le i-ème coefficient de la diagonale de $P^{-1}AP$ et C_i la i-ème colonne de P, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $(C_i)_{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda}$ est une base de $E_\lambda(A)$.

Exercice 7.34 ●● Correction p. 51

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1. Montrer que M est une matrice diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$ non nuls tels que $M = XY^\top$. Montrer qu'alors $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$.

Exercice 7.35 ●● Correction p. 53

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 8 & 1 & 8 \\ 9 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Soit $U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que U est un vecteur propre de A, puis diagonaliser A.
2. Résoudre l'équation matricielle $Y^2 = D$ où D est la matrice diagonale où les coefficients sur la diagonale sont 1, 2 et 3 (*On pourra commencer par montrer que si Y est solution alors Y et D commutent*).
3. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$.
4. Combien A a-t-elle de racines carrées ? Généraliser ce nombre si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et possède n valeurs propres distinctes non nulles.

Exercice 7.36 ● Correction p. 58

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Cette formule reste-t-elle vraie pour n négatif ?
3. Déterminer le commutant de A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7.37 • Correction p. 62

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'un endomorphisme v de E commute avec $u \Leftrightarrow$ il laisse stable chaque sous-espace propre de u.

Exercice 7.38 ○ Correction p. 63

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_n = 0_n$. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. En déduire les valeurs propres possibles de A.

Exercice 7.39 • Correction p. 63

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Exercice 7.40 ○ Correction p. 64

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ alors A admet une valeur propre (réelle).

Exercice 7.41 •• Correction p. 64

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrivant $A = \lambda I_n + N$, avec $|\lambda| < 1$ et N nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0_n$. Montrer que $A^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 7.42 • Correction p. 64

CCP 2016, RMS.
Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + M^\top$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Est-il diagonalisable ?

Exercice 7.43 ••• Correction p. 66

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose :

— $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim\left(E_1(A)\right) = 1$,
— pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, si $\lambda \neq 1$ alors $|\lambda| < 1$,
— A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Pourquoi est-ce que 1 est bien valeur propre de $A^\top$?
   On note désormais X un vecteur propre de A associé à 1, et Y un vecteur propre de $A^\top$ associé à 1.
2. Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice Q telle que $Q^2 = Q$.
3. Quel est le rang de Q ? Montrer que (X) est une base de $\mathrm{Im}(Q)$.
4. Montrer que $Y^\top Q = Y^\top$. En déduire que $Q = \dfrac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} XY^\top$.

Exercice 7.44 • Correction p. 71

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la matrice $B = A^2 + 2I_3$.

1. Montrer que $B^2 = B + 2I_3$.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.

4. En déduire l'expression de B^n en fonction des matrices I_3 et B.

Exercice 7.45 • Correction p. 72

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si A est inversible, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exercice 7.46 •• Correction p. 73

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, u et v deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et on note $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\mu_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$.
2. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.
3. En déduire que $v = P(u)$. Réciproque ?

Exercice 7.47 ○ Correction p. 74

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ le sont aussi.

Exercice 7.48 • Correction p. 75

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si A est diagonalisable, alors $P(A)$ l'est aussi. Que dire de la réciproque ?

Exercice 7.49 •• Correction p. 75

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de $P(A)$. Montrer qu'il existe une valeur propre μ de A telle que $P(\mu) = \lambda$.

Exercice 7.50 • Correction p. 76

CCP PC 2009, Officiel de la Taupe.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{tr}(A) = n$.

1. Donner le spectre de A.
2. Donner son polynôme caractéristique.
3. Prouver que $A = I_n$.

Exercice 7.51 • Correction p. 77

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - 2A$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 7.52 • Correction p. 77

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $P = X^3 + X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A et que -2 n'est pas valeur propre de A. Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

Exercice 7.53 ○ Correction p. 77

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(A) = 0_n$ si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.

Exercice 7.54 •• Correction p. 78

1. Soient M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.

2. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset.$$

Exercice 7.55 ●● Correction p. 79

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si Q est un polynôme non nul, scindé à racines simples, qui annule A, alors $Q'(A)$ est inversible.

Exercice 7.56 ● Correction p. 79

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $P(A)$ est inversible si et seulement si aucune racine de P n'est valeur propre de A.

Exercice 7.57 ○ Correction p. 80

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$, et P un polynôme annulateur de N. Montrer que $P(0) = 0$.

Exercice 7.58 ● Correction p. 80

CCP PC 2005, Officiel de la Taupe.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose $A^2 - 2A + I_n = 0_n$.
   (a) Donner $\mathrm{Sp}(A)$.
   (b) Calculer A^p en fonction de A et I_n pour $p \in \mathbb{Z}$.
2. Donner un exemple de matrice A non diagonalisable vérifiant $A^2 - 2A + I_n = 0_n$.

Exercice 7.59 ● Correction p. 82

CCP PC 2009, Officiel de la Taupe.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^2 = f^4$, et admettant 1 et -1 comme valeurs propres. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 7.60 ● Correction p. 82

CCP PC 2005, Officiel de la Taupe.
Que peut-on dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - A^3 - A^2 + I_n = 0_n$ et $A^2 - 3A + 2I_n = 0_n$?

Exercice 7.61 ○ Correction p. 83

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\chi_{A^\top} = \chi_A$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A)$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Comparer $\dim E_\lambda(A^\top)$ et $\dim E_\lambda(A)$.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^\top$ l'est.
4. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que A et $A^\top$ n'aient aucun vecteur propre commun.

Exercice 7.62 ●● Correction p. 83

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}\, P(u)$ et $\mathrm{Im}\, P(u)$ sont stables par u.

2. On suppose désormais que u possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in F$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $Q_i = \prod_{j \neq i}(X - \lambda_j)$. Calculer $Q_i(u)(x)$ et en déduire que $x_i e_i \in F$.
3. En déduire que les sous-espaces vectoriels de E stables par u sont exactement les $\mathrm{Vect}(e_i \ ; \ i \in I)$ pour $I \subset [\![1, n]\!]$, et les dénombrer.

Exercice 7.63 • Correction p. 84

Soit $n \geq 2$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que $\chi_C = P$ (*on pourra développer* $\det(XI_n - C)$ *par rapport à la première colonne et raisonner par récurrence sur* n).
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$. Montrer que $E_\lambda(C)$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.
3. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.
4. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + \cdots + a_0 u_k = 0$. On pose $X_k = (u_k, \dots, u_{k+n-1})^\top$. Exprimer X_{k+1} en fonction de X_k, puis u_k en fonction de k lorsque P est scindé à racines simples $r_1, \dots, r_n$.

Exercice 7.64 •• Correction p. 86

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients positifs ou nuls telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $U = (1, \dots, 1)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
3. On suppose de plus que tous les coefficients de A sont strictement positifs. Montrer que $E_1(A) = \mathrm{Vect}(U)$ et que 1 est la seule valeur propre complexe de A de module 1.

Exercice 7.65 • Correction p. 87

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_{A_a} et montrer que $\mathrm{Sp}(A_a)$ ne dépend pas de a.
2. Déterminer, selon la valeur de a, la dimension de chaque sous-espace propre de A_a.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice A_a est-elle diagonalisable ? Donner alors $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A_a = PDP^{-1}$.

Exercice 7.66 ●● Correction p. 88

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}[X])$

$$M = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & XI_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits NM et MN, puis leurs déterminants.
2. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. Les matrices AB et BA sont-elles toujours semblables ?

Exercice 7.67 ●● Correction p. 89

Soit $n \geq 2$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par $Je_i = e_{i+1}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $Je_n = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

1. Calculer J^n. En déduire que $\mathrm{Sp}(J) \subset \{\omega^k \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
2. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, calculer JV_k où $V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix}$. En déduire $\mathrm{Sp}(J)$ et que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Écrire la matrice $P(J)$. Montrer qu'elle est diagonalisable et que
$$\det\big(P(J)\big) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k).$$

Exercice 7.68 ●● Correction p. 90

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \mathrm{Sp}(A)$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre de Φ_A associé à λ. Que dire des colonnes de M ?
3. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 7.69 ●● Correction p. 91

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. On note $L_1, \dots, L_p$ les polynômes de Lagrange associés aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et $p_i = L_i(u)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.

1. Calculer $p_i(x)$ pour $x \in E_{\lambda_j}(u)$. En déduire que p_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\sum_{j \neq i} E_{\lambda_j}(u)$.
2. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}_E$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i = u$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer $P(u)$ à l'aide des p_i. Retrouver que $P(u) = 0$ si et seulement si P s'annule en chaque valeur propre de u.

Exercice 7.70 ●●● Correction p. 91

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que, pour tout $x \in F$, les composantes de x dans la décomposition $E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ appartiennent à F. En déduire que l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.
2. Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v.
3. En déduire que, si A et B sont deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A+B$ et AB sont diagonalisables. Que dire sans l'hypothèse de commutation ?

Exercice 7.71 ●● Correction p. 92

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $m_\lambda = \dim E_\lambda(A)$, et on note $C(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A.

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\dim C(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda^2$.
2. Montrer que $\dim C(A) \geq n$, avec égalité si et seulement si A possède n valeurs propres distinctes.
3. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes. Montrer que
$$C(A) = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}).$$

Exercice 7.72 ●● Correction p. 93

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que
$$E_\lambda(M) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ ; \ X \in E_\lambda(A),\ Y \in E_\lambda(B) \right\}$$
et en déduire $\dim E_\lambda(M)$.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M' = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. On suppose qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $AX - XB = -C$. Calculer $P^{-1}M'P$ pour $P = \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$, et conclure que M' est semblable à M.

Exercice 7.73 ●●● Correction p. 94

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX - XB$.

1. Soit $X \in \ker \Phi$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X = XP(B)$.
2. On suppose $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$. En choisissant $P = \chi_B$, montrer que Φ est bijective.
3. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$. Soit U un vecteur propre de A associé à λ et V un vecteur propre de $B^\top$ associé à λ. Montrer que $UV^\top \in \ker \Phi$ et conclure.

Exercice 7.74 ●●● Correction p. 95

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On note $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres non nulles de A, deux à deux distinctes, et $m_i = \dim E_{\mu_i}(A)$.

1. Exprimer $\mathrm{tr}(A^k)$ à l'aide des μ_i et des m_i.
2. En considérant une matrice de Vandermonde, montrer que $p = 0$.
3. En déduire que $A = 0_n$. Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse de diagonalisabilité ?

Exercice 7.75 ●● Correction p. 96

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^k = I_2$.

1. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont des racines k-ièmes de l'unité.
2. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$ et que $|\mathrm{tr}(A)| \leq 2$.
3. En déduire la liste des polynômes caractéristiques possibles pour A, puis que $A^{12} = I_2$.



7 Réduction

★ Pour aller plus loin

Exercice 7.76 ●●● Correction p. 97

Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.
Le cours admet le théorème de Cayley-Hamilton. L'objet de cet exercice est de le démontrer. La **partie I** étudie le plus petit sous-espace stable contenant un vecteur donné, et la **partie II** en déduit le théorème.
Dans tout l'exercice, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ un vecteur non nul. On pose

$$F_x = \mathrm{Vect}\big(u^k(x) \ ; \ k \in \mathbb{N}\big).$$

Partie I — Le sous-espace cyclique engendré par un vecteur

1. Montrer que F_x est stable par u, puis que tout sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x contient F_x.
2. Montrer qu'il existe un plus grand entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que la famille

   $$\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$$

   soit libre. Montrer que $u^p(x)$ appartient au sous-espace engendré par cette famille ; on note $a_0, \dots, a_{p-1}$ les scalaires tels que

   $$u^p(x) = -a_0 x - a_1 u(x) - \cdots - a_{p-1} u^{p-1}(x),$$

   et l'on pose $P_x = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) \in \mathrm{Vect}\big(x, \dots, u^{p-1}(x)\big)$. En déduire que $\mathcal{B}_x = \big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est une base de F_x, et que $\dim F_x = p$.
4. On note u_x l'endomorphisme de F_x induit par u. Écrire la matrice M_x de u_x dans la base $\mathcal{B}_x$. En déduire, à l'aide des exercices 7.61 et 7.63, que $\chi_{u_x} = P_x$.
5. Montrer que $P_x(u)(x) = 0$.

Partie II — Le théorème

6. Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en complétant $\mathcal{B}_x$. Décrire la forme de la matrice de u dans $\mathcal{B}$ et en déduire que P_x divise χ_u.
7. Montrer que $\chi_u(u)(x) = 0$. Conclure : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
8. En déduire que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0_n$.
9. Que vaut p lorsque x est un vecteur propre de u ? Retrouver ainsi que toute valeur propre de u est racine de χ_u.

Exercice 7.77 ●●● Correction p. 99

Le laplacien discret et la chaîne d'oscillateurs.

Pour $n \geq 1$, on note $T_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale

$$T_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que ses coefficients diagonaux valent 2, ceux situés juste au-dessus et juste au-dessous de la diagonale valent -1, et tous les autres sont nuls. La **partie I** détermine ses éléments propres sans calculer son polynôme caractéristique ; la **partie II** calcule ce polynôme et retrouve les valeurs propres ; la **partie III** applique ces résultats à une chaîne de masses reliées par des ressorts.

Partie I — Éléments propres

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$. Montrer que $T_n X = \lambda X$ si et seulement si, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,
$$x_{j-1} + x_{j+1} = (2 - \lambda)\, x_j.$$
2. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On pose $x_j = \sin(j\theta)$ pour $j \in [\![0, n+1]\!]$. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $x_{j-1} + x_{j+1} = 2\cos(\theta)\, x_j$.
3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$, $\lambda_k = 2 - 2\cos\theta_k$ et
$$X_k = \big(\sin\theta_k, \sin 2\theta_k, \dots, \sin n\theta_k\big)^\top.$$
Montrer que X_k est un vecteur propre de T_n associé à λ_k.
4. Montrer que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < 4$. En déduire que T_n est diagonalisable, que $\mathrm{Sp}(T_n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et que chaque sous-espace propre de T_n est une droite. Vérifier que $\lambda_k = 4\sin^2 \dfrac{k\pi}{2(n+1)}$.
5. Montrer par récurrence que $\det T_n = n + 1$. En déduire la valeur de
$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

Partie II — Le polynôme caractéristique

Pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(t) = \det(tI_n - T_n)$, et l'on convient que $D_0(t) = 1$.

6. Montrer que, pour $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$D_n(t) = (t - 2)\, D_{n-1}(t) - D_{n-2}(t).$$
7. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $t = 2 - 2\cos\theta$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$D_n(t) = (-1)^n \frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}.$$
Retrouver ainsi les valeurs propres de T_n.

Partie III — La chaîne d'oscillateurs

On considère n masses identiques m alignées, reliées de proche en proche par des ressorts identiques de raideur k, les deux masses extrêmes étant de plus reliées à des murs fixes par deux ressorts de même raideur. On note $y_j(t)$ l'écart de la j-ième masse à sa position d'équilibre. Les équations du mouvement s'écrivent, en posant $y_0 = y_{n+1} = 0$,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad m\, y_j'' = k\,(y_{j+1} - y_j) - k\,(y_j - y_{j-1}).$$

8. On pose $Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Montrer que $Y'' = -\omega_0^2\, T_n Y$.

9. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $\omega > 0$. Montrer que $Y : t \mapsto \cos(\omega t)\, X$ est solution si et seulement si X est un vecteur propre de T_n et $\omega^2 = \omega_0^2 \lambda$, où λ est la valeur propre associée. En déduire les *pulsations propres*

$$\omega_k = 2\omega_0 \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}, \qquad k \in [\![1, n]\!],$$

et décrire le mouvement des masses dans le *mode propre* correspondant à ω_k.

10. Montrer que toute solution s'écrit

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t)\big) X_k$$

avec $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$ (*on pourra décomposer* $Y(t)$ *dans la base* $(X_1, \dots, X_n)$).

11. Pour k fixé, donner un équivalent de ω_k lorsque $n \to +\infty$. Comparer aux pulsations propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités.

Exercice 7.78 • • • Correction p. 102

Les disques de Gershgorin.
Calculer exactement les valeurs propres d'une matrice de grande taille est en général hors de portée. Cet exercice établit un résultat de *localisation* : les valeurs propres complexes d'une matrice sont dans la réunion de n disques du plan complexe qui se lisent directement sur ses coefficients.
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$r_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad D_i(A) = \big\{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z - a_{i,i}| \leq r_i(A) \big\},$$

le i-ième *disque de Gershgorin* de A.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$ un vecteur propre associé. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Montrer que $\lambda \in D_{i_0}(A)$. En déduire que

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A).$$

2. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on pose $c_j(A) = \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$ (somme sur la j-ième colonne). Montrer, à l'aide de l'exercice 7.61, que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ est aussi contenu dans la réunion des disques de centre $a_{j,j}$ et de rayon $c_j(A)$.

3. On dit que A est *à diagonale strictement dominante* si $|a_{i,i}| > r_i(A)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'une telle matrice est inversible.

4. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$,

$$|\lambda| \leq \min\Big(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|,\ \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \Big).$$

Retrouver la question 2 de l'exercice 7.64.

5. Soit A une matrice stochastique au sens de l'exercice 7.64, dont on suppose seulement que les coefficients diagonaux sont strictement positifs. Montrer que 1 est la seule valeur propre complexe de A de module 1. Comparer avec la question 3 de l'exercice 7.64.

6. Que donne la première question pour la matrice T_n de l'exercice 7.77 ? Comparer au spectre exact.
7. Soit $d_1, \dots, d_n$ des réels strictement positifs et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D^{-1}AD) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et en déduire que

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - a_{i,i}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \ d_j \right\}.$$

Appliquer ce résultat, avec un choix judicieux de D, à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 10^{-4} & 2 \end{pmatrix},$$

et comparer la localisation obtenue à celle de la première question, puis aux valeurs propres exactes.

Exercice 7.79 ● ● ● Correction p. 104

Les polynômes de Legendre.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour $P \in E$,

$$L(P) = \left((X^2 - 1)P'\right)' = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

La **partie I** montre que L est un endomorphisme diagonalisable de E dont les sous-espaces propres sont des droites ; la **partie II** identifie les vecteurs propres, qui sont les *polynômes de Legendre*, et étudie leurs racines ; la **partie III** établit une propriété d'orthogonalité.

Partie I — Un endomorphisme diagonalisable

1. Montrer que L est un endomorphisme de E. Calculer $L(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et écrire la matrice de L dans la base canonique de E.
2. En déduire χ_L, puis que L est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(L) = \left\{k(k+1) \ ; \ k \in [\![0, n]\!]\right\}$.
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et P un vecteur propre de L associé à $k(k+1)$. En comparant les coefficients dominants de $L(P)$ et de $k(k+1)P$, montrer que $\deg P = k$. En déduire que $E_{k(k+1)}(L)$ est une droite, qui contient un unique polynôme unitaire ; on le note L_k.

Partie II — Formule de Rodrigues et racines

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $U_k = (X^2 - 1)^k$ et $R_k = U_k^{(k)}$, dérivée k-ième de U_k.

4. Montrer que $(X^2 - 1)\, U_k' = 2kX\, U_k$.
5. En dérivant $k+1$ fois cette relation à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que $L(R_k) = k(k+1)\, R_k$.
6. Déterminer le degré et le coefficient dominant de R_k. En déduire la *formule de Rodrigues*

$$L_k = \frac{k!}{(2k)!}\left((X^2 - 1)^k\right)^{(k)},$$

puis calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.
7. Montrer que $L_k(-X) = (-1)^k L_k(X)$.
8. Montrer par récurrence sur $j \in [\![0, k]\!]$ que $U_k^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans $]-1, 1[$, et que 1 et -1 en sont racines de multiplicité au moins $k - j$. En déduire que L_k possède k racines réelles distinctes, toutes dans $]-1, 1[$.

Partie III — Orthogonalité

Pour P et Q dans E, on pose $\langle P,\, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\ \mathrm{d}t$.

9. Montrer que, pour P et Q dans E,
$$\langle L(P),\, Q\rangle = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)\,P'(t)\,Q'(t)\ \mathrm{d}t = \langle P,\, L(Q)\rangle\,.$$
10. En déduire que $\langle L_j,\, L_k\rangle = 0$ pour $j \neq k$, puis que L_k est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à k : pour tout $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\langle L_k,\, Q\rangle = 0$.
11. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En utilisant la question précédente, montrer que L_k change de signe au moins k fois sur $]-1, 1[$ (*on pourra raisonner par l'absurde en considérant le produit de L_k par le polynôme dont les racines sont les points de changement de signe de L_k*). Retrouver ainsi le résultat de la question 8.

Exercice 7.80 ★ Correction p. 108

Endomorphismes cycliques.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On reprend les notations de l'exercice 7.76 : pour $x \in E$ non nul, F_x désigne le sous-espace vectoriel engendré par les $u^k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, et l'on a vu que, si $p = \dim F_x$, la famille
$$\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$$
est une base de F_x. On dit que u est *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $F_x = E$, c'est-à-dire tel que cette famille, avec $p = n$, soit une base de E ; un tel vecteur x est dit *cyclique* pour u.
Un endomorphisme cyclique a une propriété remarquable : ses sous-espaces stables sont en nombre fini, et ils se lisent sur les diviseurs de son polynôme caractéristique. C'est l'objet de la **partie III**, après des exemples (**partie I**) et l'étude des polynômes annulateurs et du commutant (**partie II**).

Partie I — Exemples

1. Soit x un vecteur cyclique pour u. Écrire la matrice de u dans la base
$$\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$$
et exprimer χ_u à l'aide des coordonnées de $u^n(x)$ dans cette base.
2. On suppose que u est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, et l'on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés. Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Écrire la matrice de la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et montrer que x est cyclique si et seulement si tous les x_i sont non nuls (*on pourra utiliser le déterminant de Vandermonde*).
3. On suppose u diagonalisable. Montrer que u est cyclique si et seulement si ses valeurs propres sont deux à deux distinctes (*pour le sens direct, on pourra exprimer $u^k(x)$ à l'aide des composantes de x sur les sous-espaces propres*).
4. On suppose que u est nilpotent avec $u^{n-1} \neq 0$. Montrer que u est cyclique. Que vaut alors χ_u ?

Partie II — Polynômes annulateurs et commutant

Dans cette partie et la suivante, on suppose u cyclique et l'on fixe un vecteur cyclique x.

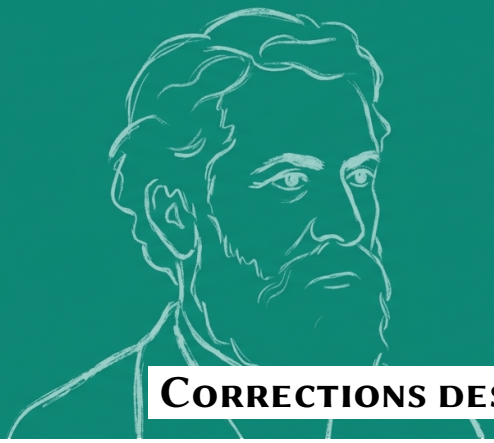
5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u) = 0$ si et seulement si $P(u)(x) = 0$.

6. En déduire qu'aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à n n'annule u, puis que les polynômes annulateurs de u sont exactement les multiples de χ_u.
7. On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \ ; \ u \circ v = v \circ u\}$. Soit $v \in C(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v(x) = P(u)(x)$. Montrer que $v = P(u)$. En déduire que
$$C(u) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}\big) \qquad \text{et} \qquad \dim C(u) = n.$$
8. Réciproquement, soit w un endomorphisme diagonalisable de E tel que $\dim C(w) = n$. Montrer que w est cyclique (*voir l'exercice 7.70*).

Partie III — Les sous-espaces stables

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On pose
$$I_F = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \ ; \ P(u)(x) \in F\big\}.$$

9. Montrer que I_F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ contenant χ_u, et que, pour $P \in I_F$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ \in I_F$.
10. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_F \in I_F$ de degré minimal, puis que $I_F = \{P_F Q \ ; \ Q \in \mathbb{K}[X]\}$. En déduire que P_F divise χ_u ; on note $Q_F = \chi_u / P_F$.
11. Montrer que $F = \big\{P(u)(x) \ ; \ P \in I_F\big\}$, puis que $F = \mathrm{Im}\, P_F(u)$.
12. Montrer que $\mathrm{Ker}\, Q_F(u) = \big\{R(u)(x) \ ; \ R \in \mathbb{K}[X], \ \chi_u \text{ divise } Q_F R\big\}$, et en déduire que $F = \mathrm{Ker}\, Q_F(u)$.
13. Montrer que la famille $\big(P_F(u)(x), u \circ P_F(u)(x), \dots, u^{d-1} \circ P_F(u)(x)\big)$, où $d = n - \deg P_F = \deg Q_F$, est une base de F. En déduire que $\dim F = \deg Q_F$.
14. Réciproquement, soit Q un diviseur unitaire de χ_u et $G = \mathrm{Ker}\, Q(u)$. Montrer que G est stable par u et que $Q_G = Q$.
15. Conclure : l'application $Q \mapsto \mathrm{Ker}\, Q(u)$ est une bijection de l'ensemble des diviseurs unitaires de χ_u sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E stables par u. En particulier, un endomorphisme cyclique n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables.
16. Retrouver le résultat de l'exercice 7.62 lorsque u possède n valeurs propres distinctes. Déterminer les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent u tel que $u^{n-1} \neq 0$.



7 Réduction

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 7.1

Énoncé p. 1

1. On calcule
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$
puis
$$P(A) = A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On a $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc
$$(A - I_2)(A - 2I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (A - 2I_2)(A - I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Les trois matrices sont donc égales à 0_2.
Ce n'est pas un hasard : $P = (X-1)(X-2)$, et comme l'application $Q \mapsto Q(A)$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,
$$P(A) = (A - I_2)(A - 2I_2) = (A - 2I_2)(A - I_2),$$
la dernière égalité venant de ce que $X - 1$ et $X - 2$ commutent dans $\mathbb{K}[X]$.

Correction de l'exercice 7.2

Énoncé p. 1

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, donc
$$A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 - 3 + 2 & 3 - 3 \\ 0 & 4 - 6 + 2 \end{pmatrix} = 0_2 :$$
le polynôme $X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A.
2. D'après le cours, toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A. Or $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ a pour racines 1 et 2, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.
Réciproquement, $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont de déterminant nul, donc non inversibles : 1 et 2 sont valeurs propres de A. Finalement
$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}}.$$

Correction de l'exercice 7.3 **Énoncé p. 1**

L'égalité $A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$ s'écrit $A(A - 3I_2) = -2I_2$, soit

$$A \times \frac{1}{2}(3I_2 - A) = I_2.$$

La matrice A est donc inversible (une matrice carrée qui admet un inverse à droite est inversible), et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_2 - A)}.$$

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et l'on vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2.$$

Correction de l'exercice 7.4 **Énoncé p. 1**

1. Le diviseur $(X-1)(X-2)$ est de degré 2, donc le reste est de la forme $R = aX+b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$: il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

   $$X^n = (X - 1)(X - 2)Q + aX + b.$$

   En évaluant en 1 puis en 2, on obtient $a + b = 1$ et $2a + b = 2^n$, d'où $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$. Le reste cherché est

   $$\boxed{R = (2^n - 1)X + (2 - 2^n)}.$$

2. En évaluant l'égalité précédente en A, et puisque $(A - I_2)(A - 2I_2) = A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2$,

   $$A^n = (A-I_2)(A-2I_2)Q(A) + (2^n-1)A + (2-2^n)I_2 = \boxed{(2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2}.$$

   En explicitant,

   $$A^n = (2^n - 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (2 - 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

   On vérifie que la formule redonne bien I_2 pour $n = 0$ et A pour $n = 1$.

Correction de l'exercice 7.5 **Énoncé p. 1**

1. Si f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors f' l'est aussi : D est bien une application de E dans E. Elle est linéaire par linéarité de la dérivation : pour $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$. Donc $D \in \mathcal{L}(E)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Une fonction $f \in E$ vérifie $D(f) = \lambda f$ si et seulement si $f' = \lambda f$, c'est-à-dire si et seulement si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire $y' = \lambda y$. D'après le cours de première année, ses solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\lambda x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Ainsi

   $$\ker(D - \lambda \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}(e_\lambda) \qquad \text{où} \qquad e_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

   Ce sous-espace n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $e_\lambda \neq 0$: tout réel λ est valeur

propre de D. Finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R} \qquad \text{et, pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \quad E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)}.$$

3. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la fonction e_{λ_i} est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ_i. Les λ_i étant deux à deux distincts, le cours assure que la famille $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_p})$, formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, est libre.

Correction de l'exercice 7.6 **Énoncé p. 2**

1. On calcule

$$\chi_A = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 1 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2)(X-4)+1 = X^2-6X+9 = (X-3)^2.$$

On a $\mathrm{tr}(A) = 6$ et $\det(A) = 8+1 = 9$, et l'on retrouve $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.

2. En développant selon la première ligne,

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} X & 0 \\ -1 & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = X^3 - 1.$$

On a $\mathrm{tr}(B) = 0$, ce qui est bien l'opposé du coefficient de X^2, et $\det(B) = 1$ (en développant selon la première ligne, $\det(B) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$), ce qui est bien $(-1)^3 \times (-1)$, l'opposé du coefficient constant.
Les valeurs propres de B sont les racines de $\chi_B = X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ dans le corps considéré. Le polynôme $X^2 + X + 1$ est de discriminant $-3 < 0$, donc sans racine réelle, et ses racines complexes sont $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $\bar{j} = \mathrm{e}^{-2i\pi/3}$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{1\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{1, j, \bar{j}\}}.$$

3. Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_{0_2} = X^2$ et

$$\chi_N = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} = X^2,$$

donc les deux matrices ont le même polynôme caractéristique. Si elles étaient semblables, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $N = P\,0_2\,P^{-1} = 0_2$, ce qui est faux : 0_2 et N ne sont pas semblables.

Correction de l'exercice 7.7 **Énoncé p. 2**

Les deux matrices sont triangulaires supérieures, donc

$$\chi_A = \chi_B = (X-2)^2(X-3).$$

Elles ont le même spectre, $\{2, 3\}$, et les mêmes multiplicités : 2 est valeur propre double et 3 valeur propre simple.

Pour A. On a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

toutes deux de rang 2 (deux colonnes non colinéaires, une colonne nulle). Par le théorème du rang, $\dim E_2(A) = \dim E_3(A) = 3 - 2 = 1$. Comme $\dim E_2(A) + \dim E_3(A) = 2 < 3$, la matrice A n'est pas diagonalisable. On peut aussi le voir sur la seule valeur propre 2 : $\dim E_2(A) = 1 < 2$, sa multiplicité.
Pour B. On a

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de rangs respectifs 1 et 2, donc $\dim E_2(B) = 2$ et $\dim E_3(B) = 1$: chaque sous-espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre, et $\dim E_2(B) + \dim E_3(B) = 3$. La matrice B est diagonalisable, ce qui n'est pas une surprise puisqu'elle est diagonale.

Correction de l'exercice 7.8

Énoncé p. 2

1. On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ -3 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)(X-4) - 6 = \boxed{X^2 - 5X - 2}.$$

   On retrouve $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$ avec $\operatorname{tr}(A) = 5$ et $\det(A) = -2$.

2. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$, puis

$$\chi_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 - 5 - 2 & 10 - 10 \\ 15 - 15 & 22 - 20 - 2 \end{pmatrix} = 0_2,$$

   conformément au théorème de Cayley-Hamilton.

3. L'égalité $A^2 - 5A - 2I_2 = 0_2$ s'écrit $A(A - 5I_2) = 2I_2$, soit

$$A \times \frac{1}{2}(A - 5I_2) = I_2.$$

   Donc A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}.$$

Correction de l'exercice 7.9

Énoncé p. 2

1. On a $\chi_A = (X-1)^2 - 4 = X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$, donc $\operatorname{Sp}(A) = \{3, -1\}$.
   Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = 3X \iff \begin{cases} x + 2y &= 3x \\ 2x + y &= 3y \end{cases} \iff y = x,$$

donc $E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. De même

$$AX = -X \iff \begin{cases} x+2y &= -x \\ 2x+y &= -y \end{cases} \iff y = -x,$$

donc $E_{-1}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

2. Les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc (X_1, X_2) est libre : c'est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. En notant

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},$$

la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$. Ici $\det(P) = -2$ et

$$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}P.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ (récurrence immédiate, les $P^{-1}P$ intermédiaires se simplifiant), avec $D^n = \begin{pmatrix}3^n & 0\\0 & (-1)^n\end{pmatrix}$. Donc

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n & (-1)^n\\3^n & -(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix},$$

soit

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n\\3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n\end{pmatrix}}.$$

On vérifie que l'on retrouve I_2 pour $n = 0$ et A pour $n = 1$.

Correction de l'exercice 7.10 **Énoncé p. 2**

Matrice A. Elle est triangulaire supérieure, donc $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3)$: elle admet trois valeurs propres réelles distinctes, 1, 2 et 3, en dimension 3. D'après le cours, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et donc aussi dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (une matrice P qui convient dans $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ convient dans $\text{GL}_3(\mathbb{C})$).
Matrice B. On a $\chi_B = (X-1)^2$, donc $\text{Sp}(B) = \{1\}$, que l'on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Si B était diagonalisable, elle serait semblable à la seule matrice diagonale ayant 1 pour unique coefficient diagonal, c'est-à-dire que l'on aurait $B = PI_2P^{-1} = I_2$, ce qui est faux. Donc B n'est diagonalisable ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Matrice C. On a

$$\chi_C = \begin{vmatrix}X & 1\\-1 & X\end{vmatrix} = X^2 + 1.$$

Ce polynôme n'a pas de racine réelle : C n'a aucune valeur propre réelle, donc n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (une matrice diagonalisable a un polynôme caractéristique scindé). Dans $\mathbb{C}$, $\chi_C = (X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples, donc C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Correction de l'exercice 7.11 **Énoncé p. 2**

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. La relation de récurrence s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, donc, par une récurrence immédiate, $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Diagonalisons A. On a $\chi_A = (X-2)^2 - 1 = (X-1)(X-3)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $AX = 3X$ si et seulement si $y = x$, et $AX = X$ si et seulement si $y = -x$, d'où

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs propres, associés à des valeurs propres distinctes, forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}.$$

En revenant à $X_n = A^n X_0$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{u_n = \frac{(3^n+1)u_0 + (3^n-1)v_0}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(3^n-1)u_0 + (3^n+1)v_0}{2}}.$$

On vérifie que ces formules redonnent u_0 et v_0 pour $n = 0$, et $2u_0 + v_0$ et $u_0 + 2v_0$ pour $n = 1$.

Correction de l'exercice 7.12 **Énoncé p. 3**

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. La relation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ s'écrit

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On a $\chi_A = X(X-1) - 2 = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, -1\}$. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $AX = 2X$ si et seulement si $y = 2x$, et $AX = -X$ si et seulement si $y = -x$, d'où

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}(X_1) \quad \text{et} \quad E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(X_2) \qquad \text{avec} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La famille (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes). Décomposons X_0 dans cette base : $X_0 = aX_1 + bX_2$ équivaut à $a + b = 0$ et $2a - b = 1$, soit $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque

$A^nX_1 = 2^nX_1$ et $A^nX_2 = (-1)^nX_2$,

$$X_n = A^nX_0 = \frac{1}{3}2^nX_1 - \frac{1}{3}(-1)^nX_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n - (-1)^n \\ 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

En lisant la première coordonnée,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

On vérifie que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 3$, conformément à la relation de récurrence. La seconde coordonnée, $\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}$, est bien u_{n+1}.

Correction de l'exercice 7.13 **Énoncé p. 3**

1. En développant selon la deuxième ligne,

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)\big((X-1)^2 - 1\big) = X(X-1)(X-2).$$

Le polynôme χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$.

2. Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad AX = X \iff \begin{cases} z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases},$$

puis

$$AX = 2X \iff \begin{cases} -x + z &= 0 \\ -y &= 0 \end{cases},$$

d'où

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs propres sont associés à des valeurs propres distinctes, donc forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base donne $A = PDP^{-1}$. On vérifie que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en calculant $PP^{-1} = I_3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ (c'est ici qu'on utilise $n \geq 1 : 0^n = 0$). Donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.}$$

Pour $n = 2$, la formule donne $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, et le calcul direct

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

confirme le résultat. Pour $n = 0$, la formule ne s'applique pas : elle donnerait une matrice de première ligne $(1/2, 0, 1/2)$, alors que $A^0 = I_3$.

Correction de l'exercice 7.14

Énoncé p. 3

On a $\chi_{A_a} = (X-1)^2 - a$. Trois cas se présentent.
Cas $a > 0$. Le polynôme χ_{A_a} a deux racines réelles distinctes, $1 - \sqrt{a}$ et $1 + \sqrt{a}$. Il est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc A_a est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et a fortiori dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Cas $a = 0$. Alors $\chi_{A_0} = (X-1)^2$ et $\mathrm{Sp}(A_0) = \{1\}$, sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$. Si A_0 était diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A_0 = PI_2P^{-1} = I_2$, ce qui est faux puisque $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc A_0 n'est diagonalisable ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Cas $a < 0$. Le polynôme χ_{A_a} n'a pas de racine réelle, puisque $(x-1)^2 \geq 0 > a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la matrice A_a n'a aucune valeur propre réelle, donc n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dans $\mathbb{C}$, il a deux racines distinctes, $1 - \mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $1 + \mathrm{i}\sqrt{-a}$, donc A_a est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
En résumé, A_a est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a > 0$, et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si $a \neq 0$.

Correction de l'exercice 7.15

Énoncé p. 3

1. Les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires, donc (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est déterminée par les images des vecteurs d'une base : il existe une et une seule matrice A telle que $AX_1 = 2X_1$ et $AX_2 = 3X_2$. En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

la matrice $A = PDP^{-1}$ convient : P est la matrice de passage de la base

canonique à (X_1, X_2), et A est la matrice, dans la base canonique, de l'endomorphisme dont la matrice dans (X_1, X_2) est D. Comme $\det(P) = 1$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

On vérifie que $AX_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2X_1$ et $AX_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3X_2$.

2. Non. Si une telle matrice B existait, on aurait, par linéarité,

$$B\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

alors que l'énoncé impose $B\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs proposés sont colinéaires : un même vecteur non nul ne peut être vecteur propre pour deux valeurs propres distinctes, puisque $E_2(B) \cap E_3(B) = \{0\}$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Les vecteurs X_1 et X_2 sont des vecteurs propres de M si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $MX_1 = \alpha X_1$ et $MX_2 = \beta X_2$, c'est-à-dire, par la formule de changement de base, si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & \beta - \alpha \\ 2\alpha - 2\beta & 2\beta - \alpha \end{pmatrix}.$$

L'ensemble cherché est donc

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & \beta - \alpha \\ 2\alpha - 2\beta & 2\beta - \alpha \end{pmatrix} \ ; \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right)}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2 (les deux matrices ne sont pas colinéaires). Il contient I_2 (pour $\alpha = \beta = 1$) et la matrice A de la première question (pour $\alpha = 2$, $\beta = 3$).

Correction de l'exercice 7.16 **Énoncé p. 3**

1. L'application u est linéaire, par linéarité de la dérivation. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P' \leq \deg P - 1$ donc $\deg(P + P') \leq n$: ainsi $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, et u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $u(X^k) = X^k + kX^{k-1}$ (avec la convention que ce second terme est nul pour $k = 0$). La matrice de u dans la base canonique est donc

$$\operatorname{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale et les coefficients $1, 2, \ldots, n$

juste au-dessus.

2. La matrice est triangulaire, donc
$$\chi_u = (X-1)^{n+1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(u) = \{1\}.$$
3. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P$ si et seulement si $P' = 0$, c'est-à-dire si et seulement si P est constant :
$$E_1(u) = \ker(u - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(1),$$
de dimension 1. Comme $n \geq 1$, $\dim E_1(u) = 1 < n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$: la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas la dimension de l'espace, donc u n'est pas diagonalisable. On peut aussi dire que, 1 étant la seule valeur propre, u diagonalisable signifierait $u = \mathrm{Id}$, ce qui est faux puisque $u(X) = X + 1 \neq X$.

Correction de l'exercice 7.17 **Énoncé p. 3**

La matrice A est de taille 3 et possède trois valeurs propres distinctes : chacune est simple, et, A étant diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$A = PDP^{-1} \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$, et plus généralement $Q(A) = PQ(D)P^{-1}$ pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, avec $Q(D)$ diagonale de coefficients $Q(-1)$, $Q(1)$, $Q(2)$.

1. Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant, donc
$$\det(A) = \det(D) = (-1) \times 1 \times 2 = \boxed{-2},$$
puis
$$\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2) = 1+1+4 = \boxed{6} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(A^3) = \mathrm{tr}(D^3) = -1+1+8 = \boxed{8}.$$
2. On a $A^2 + I_3 = P(D^2 + I_3)P^{-1}$, avec $D^2 + I_3$ diagonale de coefficients 2, 2 et 5, donc
$$\det(A^2 + I_3) = \det(D^2 + I_3) = 2 \times 2 \times 5 = \boxed{20}.$$
3. Posons $Q = X^3 - 2X^2 - X + 2$. On a $Q(-1) = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$, $Q(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ et $Q(2) = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$, donc $Q(D) = 0_3$ et
$$A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = Q(A) = PQ(D)P^{-1} = 0_3.$$
Ce n'est pas un hasard : $Q = (X+1)(X-1)(X-2) = \chi_A$, et le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $\chi_A(A) = 0_3$.

Correction de l'exercice 7.18 **Énoncé p. 4**

1. On a
$$\chi_{R_\theta} = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1,$$

dont les racines complexes sont $\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$, soit

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(R_\theta) = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\}.$$

Ces valeurs propres sont réelles si et seulement si $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, la matrice R_θ n'a aucune valeur propre réelle, donc n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors $R_\theta = \cos\theta\, I_2 = \pm I_2$ est diagonale. Ainsi, R_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, les deux valeurs propres $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ sont distinctes (leur différence vaut $2\mathrm{i}\sin\theta \neq 0$), donc χ_{R_θ} est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et R_θ est diagonalisable ; si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, $R_\theta = \pm I_2$ est diagonale. La matrice R_θ est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

2. On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $\sin\theta \neq 0$. Comme $\cos\theta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -\mathrm{i}\sin\theta$,

$$R_\theta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\mathrm{i}\sin\theta \end{pmatrix} = \sin\theta \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

et, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, $R_\theta X = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} X$ équivaut à $-\mathrm{i}x - y = 0$ et $x - \mathrm{i}y = 0$, deux équations proportionnelles (la seconde est la première multipliée par i) : $y = -\mathrm{i}x$. De même, $\cos\theta - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}\sin\theta$, et $R_\theta X = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} X$ équivaut à $\mathrm{i}x - y = 0$, soit $y = \mathrm{i}x$. Ainsi

$$E_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}(R_\theta) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}(R_\theta) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

3. Notons $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$. Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, un calcul direct donne

$$R_\varphi V_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \\ \sin\varphi - \mathrm{i}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} V_1,$$

et, de même, $R_\varphi V_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} V_2$: les vecteurs V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de toutes les matrices R_φ, avec des valeurs propres qui dépendent de φ. La famille (V_1, V_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ (vecteurs non colinéaires). Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, $R_\theta^n V_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} V_1$ et $R_\theta^n V_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} V_2$; d'autre part, en appliquant le calcul précédent à $\varphi = n\theta$, $R_{n\theta} V_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} V_1$ et $R_{n\theta} V_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} V_2$. Les matrices R_θ^n et $R_{n\theta}$ coïncident sur une base, donc sont égales :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_\theta^n = R_{n\theta}}.$$

Cette égalité, lue sur la première colonne, redonne la formule de Moivre : $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Correction de l'exercice 7.19 **Énoncé p. 4**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2} \end{pmatrix} = AX_n,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Par récurrence immédiate, $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. En développant selon la première colonne,

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X & -1 \end{vmatrix}$$
$$= X\big(X(X-2)-1\big) + 2 = X^3 - 2X^2 - X + 2.$$

On constate que 1, -1 et 2 sont racines, donc

$$\chi_A = (X-1)(X+1)(X-2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}.$$

Soit λ une valeur propre de A et $V_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, non nul. On a

$$AV_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -2 + \lambda + 2\lambda^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda V_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont égaux si et seulement si $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, c'est-à-dire $\chi_A(\lambda) = 0$, ce qui est le cas puisque λ est valeur propre. Donc V_λ est un vecteur propre de A associé à λ.

3. Les vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Écrivons $X_0 = aV_1 + bV_{-1} + cV_2$:

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a - b + 2c &= 3 \\ a + b + 4c &= 3 \end{cases}$$

La différence des première et troisième lignes donne $3c = 3$, soit $c = 1$; il reste $a + b = -1$ et $a - b = 1$, d'où $a = 0$ et $b = -1$. Ainsi $X_0 = -V_{-1} + V_2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = -A^n V_{-1} + A^n V_2 = -(-1)^n V_{-1} + 2^n V_2.$$

En lisant la première coordonnée,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2^n - (-1)^n}.$$

On vérifie que $u_0 = 0, u_1 = 3, u_2 = 3$, et que $u_3 = 9$ est bien égal à $2u_2 + u_1 - 2u_0 = 6 + 3 - 0$.

Correction de l'exercice 7.20 **Énoncé p. 4**

1. Le vecteur Je_i est la i-ième colonne de J, dont le seul coefficient non nul est en ligne $n+1-i$: $Je_i = e_{n+1-i}$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $J^2 e_i = Je_{n+1-i} = e_i$, donc $J^2 = I_n$. Le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de J, et toute valeur propre de J en est racine : $\mathrm{Sp}(J) \subset \{-1, 1\}$.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par linéarité,

$$J(e_i + e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} + e_i \quad \text{et} \quad J(e_i - e_{n+1-i}) = e_{n+1-i} - e_i = -(e_i - e_{n+1-i}).$$

   Donc $e_i + e_{n+1-i}$, qui n'est jamais nul, est un vecteur propre de J associé à 1, et $e_i - e_{n+1-i}$, lorsqu'il est non nul, c'est-à-dire lorsque $i \neq n+1-i$, est un vecteur propre de J associé à -1.

3. Notons $p = \lfloor n/2 \rfloor$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $2i \leq n < n+1$, donc $i < n+1-i$: les indices i et $n+1-i$ sont distincts. Posons $f_i = e_i + e_{n+1-i}$ et $g_i = e_i - e_{n+1-i}$. Les vecteurs $f_1, \dots, f_p$ appartiennent à $E_1(J)$ et sont libres (ils font intervenir des vecteurs de base deux à deux distincts) ; de même $g_1, \dots, g_p$ sont libres dans $E_{-1}(J)$. Si n est impair, $n = 2p+1$, l'indice $m = p+1$ vérifie $m = n+1-m$, et $Je_m = e_m$: $e_m \in E_1(J)$, et la famille $(f_1, \dots, f_p, e_m)$ est libre.
   On a donc $\dim E_1(J) \geq \lceil n/2 \rceil$ et $\dim E_{-1}(J) \geq \lfloor n/2 \rfloor$, d'où $\dim E_1(J) + \dim E_{-1}(J) \geq n$. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, cette somme est aussi majorée par n. Il y a donc égalité : J est diagonalisable, et

$$\dim E_1(J) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \qquad \dim E_{-1}(J) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

   Autrement dit, $\dim E_1(J) = \dim E_{-1}(J) = p$ si $n = 2p$ est pair, et $\dim E_1(J) = p+1$, $\dim E_{-1}(J) = p$ si $n = 2p+1$ est impair.
   La matrice J est semblable à la matrice diagonale ayant $\lceil n/2 \rceil$ coefficients égaux à 1 et $\lfloor n/2 \rfloor$ coefficients égaux à -1, donc

$$\mathrm{tr}(J) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   C'est bien ce que donne la lecture directe de la diagonale de J : le coefficient $J_{i,i}$ vaut 1 si et seulement si $2i = n+1$, ce qui n'arrive pour aucun i si n est pair, et pour le seul $i = \frac{n+1}{2}$ si n est impair.

Correction de l'exercice 7.21 **Énoncé p. 4**

Montrons l'égalité demandée par double inclusion.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors il existe $x \in E$ non nul avec $u(x) = \lambda x$, et comme u est bijectif (et u^{-1} linéaire),

$$x = u^{-1}\big(u(x)\big) = u^{-1}(\lambda x) = \lambda u^{-1}(x).$$

Enfin, $x \neq 0$, donc $\lambda \neq 0$, et donc

$$u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x.$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit bien $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(u^{-1})$.
D'où l'inclusion

$$\left\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\} \subset \mathrm{Sp}(u^{-1}).$$

Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(u^{-1})$, alors il existe $x \in E$ non nul avec $u^{-1}(x) = \mu x$, et en composant par u linéaire,

$$x = u\big(u^{-1}(x)\big) = u(\mu x) = \mu u(x).$$

Enfin, $x \neq 0$, donc $\mu \neq 0$, et donc

$$u(x) = \frac{1}{\mu} x.$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit que $\dfrac{1}{\mu} \in \mathrm{Sp}(u)$. En notant alors $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, on a bien

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1} \in \left\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}.$$

D'où l'inclusion

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) \subset \left\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}.$$

Par double inclusion, on a bien l'égalité voulue.

Remarque

Les deux calculs montrent aussi que

$$E_\lambda(u) = E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$$

pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Correction de l'exercice 7.22

Énoncé p. 4

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - A^{-1}\right) = \det\left(\lambda A^{-1} A - A^{-1} I_n\right) = \det\left(-\lambda A^{-1}\right) \det\left(\frac{1}{\lambda} I_n - A\right) = \boxed{\frac{(-\lambda)^n}{\det(A)} \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Correction de l'exercice 7.23

Énoncé p. 4

On suppose $0 \in \mathrm{Sp}(u^n)$, donc l'endomorphisme u^n est non injectif. Comme u^n est non injectif, u est non injectif (en effet, une composée d'injections est injective, donc si u est injectif alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ \cdots \circ u$ aussi). Donc $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de u, c'est-à-dire

$$0 \in \mathrm{Sp}(u).$$

Autre façon : si E est de dimension finie, on sait

$$\det(u^n) = \det(u)^n,$$

or, si $0 \in \mathrm{Sp}(u^n)$, alors

$$\det(u^n) = 0,$$

donc $\det(u)^n = 0$, donc

$$\det(u) = 0, \qquad \text{soit} \qquad 0 \in \mathrm{Sp}(u).$$

Correction de l'exercice 7.24 **Énoncé p. 4**

Soit $x \in E_\lambda(u)$, alors

$$u(x) = \lambda x,$$

et comme $\lambda \neq 0$,

$$x = \frac{1}{\lambda} u(x),$$

et comme u est linéaire,

$$x = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in \mathrm{Im}(u).$$

Correction de l'exercice 7.25 **Énoncé p. 4**

Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $U \neq 0_{n,1}$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, la formule du produit matriciel donne :

$$(AU)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{u_{j,1}}_{=1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha = (\alpha U)_{i,1},$$

donc

$$AU = \alpha U.$$

Ainsi α est une valeur propre de A, et U est un vecteur propre associé.
Autre méthode : on peut aussi justifier $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ par le polynôme caractéristique. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j}{=} \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -a_{3,2} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} & -a_{n,2} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Pour exploiter le fait que la somme de chaque ligne de A fait α, on a fait l'opération $C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j$ dans le calcul de χ_A (ainsi, sur chaque coefficient de la colonne 1, on se retrouve avec λ moins la somme des coefficients de la ligne correspondante). On en déduit donc

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ \lambda - \alpha & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -a_{3,2} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ \lambda - \alpha & -a_{n,2} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha) \begin{vmatrix} 1 & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ 1 & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -a_{3,2} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 1 & -a_{n,2} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

par multilinéarité du déterminant. On en déduit que $\chi_A(\alpha) = 0$, et donc $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$.

Remarque

Pour le calcul de χ_A, on ferait une étape supplémentaire : avec $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$, on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha) \begin{vmatrix} 1 & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & (*) & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

et en développant suivant la première colonne, on s'est ramené à un déterminant de taille $n-1$ au lieu de n (qui se trouve être aussi le polynôme caractéristique, mais d'une autre matrice), en ayant factorisé $(\lambda - \alpha)$ dans le calcul de $\chi_A(\lambda)$.

Les matrices A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, comme une matrice et sa transposée ont le même déterminant,

$$\chi_{A^\top}(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - A^\top\right) = \det\left((\lambda I_n - A)^\top\right) = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda).$$

Or, pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (A^\top)_{j,i},$$

c'est-à-dire que toutes les lignes de $A^\top$ ont pour somme β. D'après le premier point de l'exercice, β est une valeur propre de $A^\top$, donc de A.
On n'obtient pas ici de vecteur propre explicite.

Remarque

Ici aussi on peut utiliser une transformation de χ_A, ce coup-ci en faisant $L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i$, pour que, sur chaque coefficient de la ligne n, on se retrouve avec λ moins la somme des coefficients de la colonne correspondante :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \underset{L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i}{=} \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & \dots \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n-2} & \lambda - a_{n-1,n-1} \\ \lambda - \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \lambda - \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} & \dots & \dots \end{vmatrix} \lambda$$

ce qui donne, par hypothèse,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n-2} & \lambda - a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ \lambda - \beta & \lambda - \beta & \dots & \dots & \lambda - \beta \end{vmatrix} = (\lambda - \beta) \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & \dots \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n-2} & \lambda - a_{n-1} \\ 1 & 1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

et donc $\chi_A(\beta) = 0$, ce qui donne bien $\beta \in \mathrm{Sp}(A)$.

Correction de l'exercice 7.26 **Énoncé p. 5**

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$, car $\mathbb{R}[X]$ est stable par produit, dérivation et combinaison linéaire. Puis, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg\left((X-1)P'\right) = 1 + \deg(P') \leq \deg(P),$$

donc

$$\deg(\phi(P)) \leq \max\left(\deg\left((X-1)P'\right), \deg(-P)\right) \leq \deg(P) \leq n,$$

donc

$$\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons la matrice de ϕ_n dans la base canonique (comme $\deg\left(\phi(P)\right) \leq \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, cette matrice est triangulaire supérieure).
On calcule : pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\phi(X^k) = (X-1)kX^{k-1} - X^k = (k-1)X^k - kX^{k-1},$$

et

$$\phi(X^0) = \phi(1) = -1 = -X^0.$$

D'où en notant $B_n = (X^0, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$A_n := \mathrm{Mat}_{B_n}(\phi_n) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ & & & n-1 \end{pmatrix}$$

La matrice A_n est triangulaire supérieure, donc on lit ses valeurs propres sur sa diagonale, et donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_n) = \{-1, 0, \dots, n-1\} = [\![-1, n-1]\!]}.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, k sera une valeur propre de ϕ_{k+1}, donc il existera $P \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$ non nul avec

$$\phi(P) = \phi_{k+1}(P) = kP,$$

en particulier

$$\phi(P) = kP$$

avec $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Donc $k \in \mathrm{Sp}(\phi)$. Donc

$$\mathbb{N} \cup \{-1\} \subset \mathrm{Sp}(\phi).$$

Puis, si λ est valeur propre de ϕ, alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul avec $\phi(P) = \lambda P$. Si on note $n = \deg(P)$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\lambda P = \phi(P) = \phi_n(P).$$

Donc on a $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul avec $\phi_n(P) = \lambda P$, donc

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi_n) = \{-1, 0, \dots, n-1\} = [\![-1, n-1]\!],$$

en particulier

$$\lambda \in \mathbb{N} \cup \{-1\}.$$

Donc

$$\mathrm{Sp}(\phi) \subset \mathbb{N} \cup \{-1\}.$$

D'où, par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\phi) = \mathbb{N} \cup \{-1\}}.$$

3) On considère alors $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, et on cherche $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\phi(P) = kP$, soit

$$(X-1)P' = (k+1)P.$$

Donc P est solution de l'équation différentielle $(x-1)y' = (k+1)y$, et donc, si on la résout sur $]1, +\infty[$, il existe $K \in \mathbb{R}$ avec

$$P : x \in]1, +\infty[\mapsto K(x-1)^{k+1}.$$

Donc le polynôme $P - K(X-1)^{k+1}$ a une infinité de racines (tout $]1, +\infty[$), et donc $P - K(X-1)^{k+1} = 0$, donc

$$P = K(X-1)^{k+1} \in \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k+1}\right).$$

Donc

$$E_k \subset \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k+1}\right).$$

Comme

$$\dim(E_k) \geq 1 = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((X-1)^{k+1}\right)\right)$$

(car $k \in \mathrm{Sp}(\phi)$), on en déduit

$$\boxed{E_k = \mathrm{Vect}\left((X-1)^{k+1}\right)}.$$

Correction de l'exercice 7.27 **Énoncé p. 5**

1) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$, il existe donc $x \in E$ non nul avec $g\big(f(x)\big) = \lambda x$. Donc

$$f \circ g\big(f(x)\big) = f\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Si $f(x) \neq 0$, alors $f(x)$ est un vecteur propre de $f \circ g$ associé à λ, et on a le résultat voulu.
Si $f(x) = 0$, alors on a

$$\lambda x = g\big(f(x)\big) = g(0) = 0.$$

Or, comme on suppose $\lambda \neq 0$, cela donne $x = 0$, contradiction. Donc $f(x) \neq 0$, ce qui conclut.
2) Si $0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$, alors

$$0 = \det(g \circ f) = \det(g)\det(f) = \det(f)\det(g) = \det(f \circ g).$$

Donc $f \circ g$ n'est pas inversible, donc $0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.

Correction de l'exercice 7.28 **Énoncé p. 5**

A est une matrice triangulaire, donc on a directement

$$\chi_A = (X-a)^2(X-b)^2.$$

Comme $a \neq b$, a et b sont valeurs propres doubles de A. Donc

$$A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] \text{ (vrai)} \\ \dim(E_a) = 2 \\ \dim(E_b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] \text{ (vrai)} \\ \mathrm{rg}(A - aI_4) = 4-2 = 2 \\ \mathrm{rg}(A - bI_4) = 4-2 = 2 \end{cases}$$

(par le théorème du rang).
Méthode 1 :
La matrice

$$A - aI_4 = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ 0 & b-a & z & -y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

est au moins de rang 2 car les colonnes 2 et 4 ne sont pas colinéaires (car $b - a \neq 0$). Elle sera de rang exactement 2 si et seulement si la seconde et la troisième sont colinéaires, c'est-à-dire (puisque $b - a \neq 0$) s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et $z = \lambda(b-a)$.
La matrice

$$A - bI_4 = \begin{pmatrix} a-b & x & y & z \\ 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 0 & a-b & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est au moins de rang 2 car les lignes 1 et 3 ne sont pas colinéaires (car $a - b \neq 0$). Elle sera de rang exactement 2 si et seulement si la deuxième et la troisième ligne sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mu(a-b)$ et $y = -\mu x$ (ce qui est la même condition qu'avant avec $\lambda = -\mu$).
Donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow (x,y,z) \in S = \left\{\left(x, \lambda x, \lambda(b-a)\right),\ (\lambda, x) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

Méthode 2 :

Soit $X = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X \in E_a \Leftrightarrow \begin{cases} xt_2 + yt_3 + zt_4 = 0 \\ (b-a)t_2 + zt_3 - yt_4 = 0 \\ xt_4 = 0 \\ (b-a)t_4 = 0 \end{cases}.$$

Comme on suppose $b - a \neq 0$, L_4 devient $t_4 = 0$ et donc

$$X \in E_a \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t_3}{b-a}\left(y(b-a) - zx\right) = 0 \\ t_2 = -\dfrac{z}{b-a}t_3 \\ t_4 = 0 \end{cases}.$$

Si $y(b-a) - zx \neq 0$, alors $t_3 = 0$, donc $t_2 = 0$, donc $E_a = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, et donc

$$\dim\left(E_a\right) = 1 \neq 2,$$

donc A n'est pas diagonalisable.
Si $y(b-a) - zx = 0$, alors

$$X \in E_a \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -\dfrac{z}{b-a}t_3 \\ t_4 = 0 \end{cases},$$

donc

$$E_a = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ b-a \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

est bien de dimension 2 (car engendré par deux vecteurs clairement libres).

$$X = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \in E_b \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)t_1 + xt_2 + yt_3 + zt_4 = 0 \\ zt_3 - yt_4 = 0 \\ (a-b)t_3 + xt_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Comme on suppose $b - a \neq 0$, on a

$$X \in E_b \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{x}{b-a}t_2 + \dfrac{yx + z(b-a)}{(b-a)^2}t_4 \\ 0 = \left(zx - y(b-a)\right)\dfrac{t_4}{b-a} \\ t_3 = \dfrac{x}{b-a}t_4 \end{cases}.$$

Si $zx - y(b-a) \neq 0$, alors $t_4 = 0$, puis $t_3 = 0$ et donc $E_b = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} x \\ b-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, et donc

$$\dim\left(E_b\right) = 1 \neq 2,$$

donc A n'est pas diagonalisable.
Si $zx - y(b-a) = 0$, alors

$$X \in E_b \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{x}{b-a}t_2 + \dfrac{yx + z(b-a)}{(b-a)^2}t_4 \\ t_3 = \dfrac{x}{b-a}t_4 \end{cases},$$

donc

$$E_b = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} x \\ b-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} yx + z(b-a) \\ 0 \\ x(b-a) \\ (b-a)^2 \end{pmatrix}\right)$$

est bien de dimension 2 (car engendré par deux vecteurs clairement libres, puisque $b - a \neq 0$).
Donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow zx = (b-a)y}.$$

(c'est la même condition pour a et b).

Correction de l'exercice 7.29 **Énoncé p. 5**

1. On a
$$\phi_A\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
car $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est stable par produit et soustraction.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(M, N) \in \left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)^2$, par bilinéarité du produit matriciel, on a
$$\phi_A(\lambda M+N) = A(\lambda M+N)-(\lambda M+N)A = \lambda AM+AN-\lambda MA-NA = \lambda\phi_A(M)+\phi_A(N).$$
Donc ϕ_A est linéaire.
Donc ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Calculons la matrice de ϕ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de ϕ_A dans cette base est :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Comme les colonnes 1 et 4 de B sont opposées et de mêmes pour les colonnes 2 et 3,

$$\mathrm{rg}(\phi_A) = \mathrm{rg}(B) \leq 2.$$

Comme les colonnes 1 et 2 de B sont libres,

$$\mathrm{rg}(\phi_A) = \mathrm{rg}(B) \geq 2.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(\phi_A) = 2}.$$

Donc $\boxed{0}$ est valeur propre de ϕ_A, et

$$\boxed{\dim\left(E_0(\phi_A)\right) = 4 - 2 = 2}$$

(par le théorème du rang).

2. Calculons le polynôme caractéristique de B. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}}{=} \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à } L_4}{=} -\lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à } L_3}{=} -\lambda^2 \begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -\lambda & -2 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^2(4 - \lambda^2) \\
&= \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_B = X^2(X-2)(X+2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(B) = \{0, 2, -2\}.$$

De plus, 2 et -2 sont des valeurs propres simples, donc

$$\dim\left(E_2(B)\right) = \dim\left(E_{-2}(B)\right) = 1,$$

et 0 est une valeur propre double, donc on a seulement

$$1 \leq \dim\left(E_0(B)\right) \leq 2.$$

Mais, on a déjà calculé $\dim\left(E_0(B)\right) = \dim\left(E_0(\phi_A)\right)$, et on a trouvé 2.
Or, par le cours,

$$B \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_B \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] & \text{OK} \\ \dim\left(E_2(B)\right) = 1 & \text{OK} \\ \dim\left(E_{-2}(B)\right) = 1 & \text{OK} \\ \dim\left(E_0(B)\right) = 2 & \text{OK car } \mathrm{rg}(\phi_A) = 2 \end{cases}.$$

Donc B est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$), donc ϕ_A est diagonalisable.
Autre justification : $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et

$$\dim\left(E_0(B)\right) + \dim\left(E_{-2}(B)\right) + \dim\left(E_2(B)\right) = 2 + 1 + 1 = 4 = \text{taille de } B$$

(et 0, -2 et 2 sont trois éléments différents de $\mathbb{R}$), donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Espace propre associé à 0 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_0(B) \Leftrightarrow BX = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = t \end{cases}.$$

Donc

$$E_0(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Or, la matrice qui a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et

la matrice qui a $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Donc

$$\boxed{E_0(\phi_A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right).}$$

Espace propre associé à 2 : Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(B) \quad \Leftrightarrow \quad (B - 2I_4)X = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2&-1&1&0\\-1&-2&0&1\\1&0&-2&-1\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x - y + z &= 0\\ -x - 2y + t &= 0\\ x - 2z - t &= 0\\ y - z - 2t &= 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -2x - y + z &= 0\\ -x - 2y + t &= 0\\ -2z - 2y &= 0\\ -2x - 2t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x\\ t = -x\\ y = -x \end{cases}$$

Donc

$$E_2(B) = \left\{\begin{pmatrix}x\\-x\\x\\-x\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Puis, la matrice qui a $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{E_2(\phi_A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right).}$$

Espace propre associé à -2 : Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_{-2}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \big(B-(-2)I_4\big)X = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-y+z &= 0 \\ -x+2y+t &= 0 \\ x+2z-t &= 0 \\ y-z+2t &= 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x-y+z &= 0 \\ -x+2y+t &= 0 \\ 2z+2y &= 0 \\ 2x+2t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ t=-x \\ y=x \end{cases}$$

Donc

$$E_{-2}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Puis, la matrice qui a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{E_{-2}(\phi_A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right).}$$

Correction de l'exercice 7.30 **Énoncé p. 5**

1) Montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:
Initialisation : pour $k = 1$, c'est l'hypothèse.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $g \circ f^k - f^k \circ g = \alpha k f^k$. Alors en appliquant f à gauche, et en utilisant $f \circ g = g \circ f - \alpha f$ (retraduction de l'hypothèse), on a :

$$\begin{aligned} \alpha k f^{k+1} &= f \circ (\alpha k f^k) \\ &= f \circ \big(g \circ f^k - f^k \circ g\big) \\ &= f \circ g \circ f^k - f^{k+1} \circ g \\ &= (g \circ f - \alpha f) \circ f^k - f^{k+1} \circ g \\ &= g \circ f^{k+1} - \alpha f^{k+1} - f^{k+1} \circ g \end{aligned}$$

d'où, en regroupant les f^{k+1}, on a bien

$$g \circ f^{k+1} - f^{k+1} \circ g = \alpha\,(k+1)\, f^{k+1}.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$g \circ f^k - f^k \circ g = \alpha k f^k.$$

Remarque

Cela reste vrai pour $k = 0$ avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$.

2) Raisonnons par l'absurde, supposons f non nilpotente. Donc $f^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On note ϕ l'application donnée par l'énoncé. Elle est linéaire par bilinéarité de la composition, et $\dim\big(\mathcal{L}(E)\big) = n^2$. Donc ϕ possède un nombre fini de valeurs propres différentes (au plus n^2).
D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\phi(f^k) = \alpha\, k\, f^k.$$

Donc f^k, qui est non nul, est un vecteur propre associé à la valeur propre αk. Donc ϕ possède une infinité de valeurs propres (car $\alpha \neq 0$, donc les αk pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux différents), ce qui est absurde. Donc f est nilpotente.

Correction de l'exercice 7.31 **Énoncé p. 5**

1. Si $n = 1$, $U = (1)$ est diagonale. On suppose désormais $n \geqslant 2$.
   Les colonnes de U sont toutes égales et non nulles, donc $\mathrm{rg}(U) = 1$. D'après le théorème du rang, $\dim E_0(U) = \dim \mathrm{Ker}(U) = n - 1 \geqslant 1 : 0$ est valeur propre de U, et $E_0(U)$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.
   Soit $V = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Chaque ligne de U a pour somme n, donc $UV = nV$. Comme $V \neq 0$, n est valeur propre de U et $\dim E_n(U) \geqslant 1$.
   Les valeurs propres 0 et n sont distinctes, donc

$$n \leqslant \dim E_0(U) + \dim E_n(U) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(U)} \dim E_\lambda(U) \leqslant n.$$

   Toutes ces inégalités sont des égalités : U est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(U) = \{0, n\}$, $\dim E_0(U) = n - 1$ et $E_n(U) = \mathrm{Vect}(V)$.
   Notons $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $j \in [\![2, n]\!]$, la colonne $\varepsilon_1 - \varepsilon_j$ appartient à $E_0(U)$. Ces $n-1$ colonnes forment une famille libre, puisque seule $\varepsilon_1 - \varepsilon_j$ a une j-ième coordonnée non nulle : c'est une base de $E_0(U)$. En concaténant cette base et (V), on obtient $U = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n).$$

   $U^2 = nU$, puis montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{U^p = n^{p-1}U}.$$

   Par contre, $\boxed{U^0 = I_n}$.
   Initialisation : pour $p = 1$, on a

$$n^{1-1}U = U = U^1$$

   car $n^0 = 1$.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $U^p = n^{p-1}U$. Alors

$$U^{p+1} = U^p \times U = n^{p-1}U \times U = n^{p-1}U^2 = n^{p-1} \times nU = n^{(p+1)-1}U,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$U^p = n^{p-1}U.$$

On peut calculer U^p à l'aide de la diagonalisation de U : si on note $D = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$, le début de la question montre qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec

$$P^{-1}UP = D, \qquad \text{soit} \qquad U = PDP^{-1}.$$

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$U^p = PD^pP^{-1} = P\mathrm{diag}(0^p, \dots, 0^p, n^p)P^{-1} = P\mathrm{diag}(0, \dots, 0, n^p)P^{-1} = n^{p-1}P\mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)P^{-1} = n^{p-1}U.$$

On a utilisé $p \in \mathbb{N}^*$ pour affirmer $0^p = 0$.

Remarque

Le polynôme caractéristique se calcule : l'opération $L_n \leftarrow L_1 + \cdots + L_n$ donne, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\chi_U(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_n \leftarrow L_1+\cdots+L_n}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-n & \dots & \dots & \dots & \lambda-n \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-n) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Puis, les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ donnent

$$\chi_U(\lambda) = (\lambda-n) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda-n).$$

Donc

$$\chi_U = X^{n-1}(X-n),$$

puis on retrouve

$$\mathrm{Sp}(U) = \{0, n\}.$$

2. Avec la matrice U de la question précédente, on écrit

$$A = bU + (a-b)I_n.$$

Puis, si on note $D = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$, la question précédente montre qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec

$$P^{-1}UP = D.$$

Alors
$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}\big(bU+(a-b)I_n\big)P \\ &= bP^{-1}UP+(a-b)P^{-1}I_nP \\ &= bD+(a-b)I_n \\ &= \operatorname{diag}\big(a-b,\dots,a-b,nb+a-b\big) \end{aligned}$$
Donc A est semblable à une matrice diagonale, donc A est diagonalisable.
Calcul de puissance : Soit $p\in\mathbb{N}^*$, $A^p=\big(bU+(a-b)I_n\big)^p$, comme I_n commute avec U, par la formule du binôme de Newton (appliquée deux fois : une fois pour la première égalité, une fois pour la dernière égalité), on a (à l'aide de la question précédente) :
$$\begin{aligned} A^p &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(bU)^k\big((a-b)I_n\big)^{p-k} \\ &= (a-b)^pI_n+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}n^{k-1}b^k(a-b)^{p-k}U \\ &= \boxed{(a-b)^pI_n+\frac{\big(nb+(a-b)\big)^p-(a-b)^p}{n}U} \end{aligned}$$
La formule reste vraie pour $p=0$, les deux membres valant alors I_n.

Correction de l'exercice 7.32 **Énoncé p. 6**

1) A est diagonalisable, donc il existe $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ avec $D=P^{-1}AP$ diagonale. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$,
$$D^k=P^{-1}A^kP,$$
et donc
$$P^{-1}BP=P^{-1}\big(\alpha_0I_n+\alpha_1A+\cdots+\alpha_pA^p\big)=P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p}\alpha_kA^k\right)P=\sum_{k=0}^{p}\alpha_kP^{-1}A^kP=\sum_{k=0}^{p}\alpha_kD^k$$
est diagonale (un produit de matrices diagonales l'est encore, et une combinaison linéaire de matrices diagonales l'est encore), donc B est diagonalisable, puisque semblable à une matrice diagonale.
Si on note λ_i le i-ième coefficient de la diagonale de D (rappelons que les λ_i forment alors le spectre de A), alors
$$x_i:=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\lambda_i^k=Q(\lambda_i)$$
est le i-ième coefficient de la diagonale de $P^{-1}BP$, et donc la i-ième colonne de P est un vecteur propre de B pour la valeur propre x_i.
De plus, l'ensemble des x_i forment les valeurs propres de $P^{-1}BP$ (car le spectre d'une matrice diagonale est l'ensemble de ses coefficients diagonaux), donc de B (car B est semblable à $P^{-1}BP$). Donc
$$\mathrm{Sp}(B)=\big\{Q(\lambda_i)\ \text{pour}\ \lambda_i\ \text{sur la diagonale de}\ D\big\}.$$

Comme les éléments de la diagonale de D sont les éléments du spectre de A (répétés éventuellement plusieurs fois), on a

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{Q(\lambda) \text{ pour } \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}}.$$

2) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $Q(\lambda) = \mu$, et $X \in E_\lambda(A)$. Alors

$$AX = \lambda X.$$

Montrons alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que

$$A^k X = \lambda^k X.$$

Initialisation : pour $k = 0$,

$$A^0 X = I_n X = X$$

et $\lambda^0 = 1$, donc $\lambda^0 X = X$, on a bien l'égalité voulue.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $A^k X = \lambda^k X$. Alors

$$A^{k+1}X = A \times A^k X = A \times (\lambda^k X) = \lambda^k AX = \lambda^k . \lambda X = \lambda^{k+1} X,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A^k X = \lambda^k X.$$

Donc

$$BX = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k A^k X = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \lambda^k X = Q(\lambda)X = \mu X,$$

et donc $X \in E_\mu(B)$. Donc

$$E_\lambda(A) \subset E_\mu(B).$$

Cela est vrai pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $Q(\lambda) = \mu$, donc

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} E_\lambda(A) \subset E_\mu(B)$$

(car $E_\mu(B)$ est un espace vectoriel).
On sait ensuite que la somme de plusieurs espaces propres de A associés à des valeurs propres deux à deux différentes est directe. Donc

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} E_\lambda(A) \subset E_\mu(B).$$

Comme la somme est directe et qu'on a l'inclusion remarquée juste avant, pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$ on a

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} E_\lambda(A) \right) \leq \dim\big(E_\mu(B)\big),$$

soit :

$$\dim\big(E_\mu(B)\big) - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \geq 0.$$

Comme A est diagonalisable, on a

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big)$$

Puis, $\mathrm{Sp}(B) = \big\{Q(\lambda) \text{ pour } \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}$, donc

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \leq \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \dim\big(E_\mu(B)\big) \leq n$$

(et cette dernière inégalité est en fait une égalité, puisque B est diagonalisable).
Cela donne en particulier

$$\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \left(\dim\big(E_\mu(B)\big) - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \right) \leq n - n = 0,$$

et comme c'est une somme de réels tous positifs, elle doit être positive. Elle est donc nulle, et c'est donc une somme nulle de réels positifs, donc tous ces réels sont nuls, ce qui donne

$$\dim\big(E_\mu(B)\big) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big)$$

pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$.
On a une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut donc :

$$\boxed{E_\mu(B) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} E_\lambda(A)}$$

pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$.

Correction de l'exercice 7.33 **Énoncé p. 6**

On a $P = \begin{pmatrix} C_1 & | & \dots & | & C_n \end{pmatrix}$, donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ donne

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad A \begin{pmatrix} C_1 & | & \dots & | & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & | & \dots & | & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

puis par calcul matriciel par blocs,

$$\begin{pmatrix} AC_1 & | & \dots & | & AC_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 C_1 & | & \dots & | & \lambda_n C_n \end{pmatrix},$$

et donc on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$AC_i = \lambda_i C_i, \qquad \text{soit} \qquad C_i \in E_{\lambda_i}(A).$$

Donc la famille $(C_i)_{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda}$ est une famille de vecteurs de $E_\lambda(A)$, libre car extraite de la famille des colonnes de P, elle-même libre puisque P est inversible. Donc

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) \geq \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1, n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\},$$

soit

$$\dim\left(E_\lambda(A)\right) - \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\right\} \geq 0.$$

Puis, par union disjointe, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \geq \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\right\} &= \mathrm{Card}\left(\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\right\}\right)\\ &= \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)\right\}\\ &= n\end{aligned}$$

(puisque chaque coefficient de la diagonale de $P^{-1}AP$ est dans le spectre de A).
Comme d'autre part, on sait

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq n$$

puisque A est de taille n (cela provient de ce que des espaces propres de A associés à des valeurs propres deux à deux différentes sont toujours en somme directe), on en déduit

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\right\}$$

soit

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \underbrace{\left(\dim\left(E_\lambda(A)\right) - \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\right\}\right)}_{\geq 0} = 0$$

Or, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul, donc pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$,

$$\dim\left(E_\lambda(A)\right) - \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\right\} = 0$$

soit

$$\dim\left(E_\lambda(A)\right) = \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\right\} = \mathrm{Card}\left((C_i)_{i\in[\![1,n]\!]:\lambda_i=\lambda}\right).$$

La famille libre $(C_i)_{i\in[\![1,n]\!]:\lambda_i=\lambda}$ d'éléments de $E_\lambda(A)$ a donc autant d'éléments que la dimension de $E_\lambda(A)$, c'est donc bien une base de $E_\lambda(A)$.

Correction de l'exercice 7.34 **Énoncé p. 6**

1. Si $n = 1$, alors $M = (m)$ avec $m \neq 0$: la matrice M est diagonale, donc diagonalisable, et $\mathrm{tr}(M) = m \neq 0$. L'équivalence est vraie. Supposons désormais $n \geq 2$.
   Si M est une matrice de rang 1 alors 0 est valeur propre et

   $$\dim(E_0) = n - 1$$

   par le théorème du rang, donc 0 est de multiplicité au moins égale à $(n-1)$.
   Comme la somme des multiplicités des différentes valeurs propres fait n,
   - soit 0 est de multiplicité $n-1$ et il reste alors une valeur propre α (non nulle) de multiplicité 1,
   - soit 0 est de multiplicité n, et il n'y a pas d'autre valeur propre.

Dans les deux cas, la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité fait $\mathrm{tr}(M)$, et donc dans le premier cas on a

$$\mathrm{tr}(M) = (n-1) \times 0 + 1 \times \alpha = \alpha \neq 0,$$

et pour le deuxième cas on a

$$\mathrm{tr}(M) = n \times 0 = 0.$$

Donc :

— Si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, alors 0 est de multiplicité

$$n - 1 = \dim\big(E_0\big),$$

et $\mathrm{tr}(M)$ est une valeur propre de multiplicité 1, donc

$$\dim\big(E_{\mathrm{tr}(M)}\big) = 1,$$

et donc la somme des dimensions des espaces propres fait la taille de la matrice n, donc M est diagonalisable.

— Si $\mathrm{tr}(M) = 0$, alors M n'a qu'une seule valeur propre, 0, qui est de multiplicité

$$n \neq \dim(E_0) = n - 1,$$

donc M n'est pas diagonalisable.

Donc M est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$.

2. Soit M une matrice de rang 1. Notons $(C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes de M. Comme $\mathrm{rg}(M) = 1$, il existe i_0 tel que C_{i_0} soit non nul (car la matrice nulle n'est pas de rang 1). Puis,

$$1 = \mathrm{rg}(M) = \dim\big(\mathrm{Im}(M)\big),$$

et $C_{i_0} \in \mathrm{Im}(M)$ avec C_{i_0} non nul, permet de conclure que (C_{i_0}) est une base de $\mathrm{Im}(M)$. Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$C_i \in \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_{i_0}),$$

donc il existe λ_i avec

$$C_i = \lambda_i C_{i_0}.$$

Donc si on note

$$X = C_{i_0} \qquad \text{et} \qquad Y^\top = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

on a bien :

$$M = XY^\top.$$

Puis, $X = C_{i_0}$ est non nul par définition de i_0, et Y est non nul car $Y_{i_0,1} = \lambda_{i_0} = 1$ (ou sinon, si $Y = 0_{n,1}$, alors $M = X \times 0_{n,1}^\top = 0_n$ ne serait pas de rang 1).
Réciproquement, soit X et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nuls. Alors il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $X_{i,1} \neq 0$ et $Y_{j,1} \neq 0$. Alors la formule du produit matriciel donne

$$(XY^\top)_{i,j} = X_{i,1}(Y^\top)_{1,j} = X_{i,1}Y_{j,1} \neq 0$$

donc $M = XY^\top$ est non nul, donc $\mathrm{rg}(M) \geq 1$.

Puis, si on note C_i la i-ème colonne de M, alors $M = XY^\top$ donne $C_i = Y_{i,1}X$, donc $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Vect}(X)$. Donc

$$\mathrm{rg}(M) \leq \dim\big(\mathrm{Vect}(X)\big) \leq 1.$$

Donc

$$\mathrm{rg}(M) = 1.$$

On a donc bien l'équivalence voulue.
Remarquons que

$$Y^\top X = \sum_{i=1}^{n} X_{i,1}Y_{i,1},$$

or le coefficient sur la i-ième ligne de C_i est celui de $Y_{i,1}X$, soit $Y_{i,1}X_{i,1}$, et donc

$$Y^\top X = \mathrm{tr}(M).$$

On a alors :

$$M^2 = X(Y^\top X)Y^\top = X\big(\mathrm{tr}(M)\big)Y^\top = \mathrm{tr}(M)XY^\top = \mathrm{tr}(M)M.$$

Correction de l'exercice 7.35 **Énoncé p. 6**

1. Pour montrer que $U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre, puisque U est **non nul**, il suffit de vérifier (par le calcul) que

$$AU = A\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ est proportionnel à } U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ici on trouve

$$AU = A\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 3U,$$

donc U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

Remarque

On sait que 3 est valeur propre de A, donc racine de χ_A, donc on sait que l'on va pouvoir factoriser χ_A par $X - 3$, et le quotient, de degré 2, se factorise par la résolution d'une équation du second degré.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+6 & -1 & 8 \\ -8 & \lambda-1 & -8 \\ -9 & 1 & \lambda-11 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à } L_1}{=} (\lambda+6)\big((\lambda-1)(\lambda-11)+8\big) + (88-8\lambda-72) + 8(-8-9+9\lambda) \\
&= (\lambda+6)(\lambda^2-12\lambda+19) - 8\lambda + 16 + 8(-17+9\lambda) \\
&= \lambda^3 - 12\lambda^2 + 19\lambda + 6\lambda^2 - 72\lambda + 114 - 8\lambda + 16 + 72\lambda - 136 \\
&= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{1,2,3\}.$$

Remarque

Puisque l'on sait que $U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A, on peut utiliser ce fait pour simplifier le calcul de χ_A (on aura une forme partiellement factorisée) : on fait l'opération $C_1 \leftarrow 4C_1 - 4C_2 - 5C_3$ (qui correspond au produit matriciel AU). Comme on remplace C_1 par $4C_1 - 4C_2 - 5C_3$, il faut diviser par 4, sinon on modifie le déterminant. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &\underset{C_1 \leftarrow 4C_1-4C_2-5C_3}{=} \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4\lambda-12 & -1 & 8 \\ -4\lambda+12 & \lambda-1 & -8 \\ -5\lambda+15 & 1 & \lambda-11 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{4}(\lambda-3)\begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -4 & \lambda-1 & -8 \\ -5 & 1 & \lambda-11 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{=} \frac{1}{4}(\lambda-3)\begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -5 & 1 & \lambda-11 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En développant suivant la deuxième ligne, on a alors

$$\chi_A(\lambda) = \frac{1}{4}(\lambda-3)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -5 & \lambda-11 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2-2C_1}{=} \frac{1}{4}(\lambda-3)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1).$$

A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car A a trois valeurs propres réelles différentes et car A est de taille 3.

De plus, les espaces propres sont tous de dimension 1 (puisque les racines sont toutes simples).

La recherche des espaces propres qui suit est basée sur l'idée suivante : si on sait que

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) = 1$$

et que l'on trouve un vecteur $X \in E_\lambda(A)$ **non nul**, alors c'est une base de $E_\lambda(A)$ (tout vecteur non nul d'une droite vectorielle en est une base).

Espace propre associé à 1 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -7 & 1 & -8 \\ 8 & 0 & 8 \\ 9 & -1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 - C_2 - C_3 = 0_{3,1}$ (donc $(A - I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$) et que $\dim\big(E_1(A)\big) = 1$, on a

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

(on a noté C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de la dernière matrice écrite).

Espace propre associé à 2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 1 & -8 \\ 8 & -1 & 8 \\ 9 & -1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 - C_3 = 0_{3,1}$ (donc $(A - 2I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$) et que $\dim\big(E_2(A)\big) = 1$, on a

$$E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

(on a noté C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de la dernière matrice écrite).

Espace propre associé à 3 : on sait $\dim\big(E_3(A)\big) = 1$, $U \in E_3(A)$ et U non nul. On a donc

$$E_3(A) = \text{Vect}(U) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$$

Par conséquent, comme A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$ et qu'on a trouvé une base de chaque espace propre, alors la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

2. Résolvons $Y^2 = D$.
   Analyse : si Y est solution de $Y^2 = D$ alors D et Y commutent. En effet

$$YD = YY^2 = Y^3 = Y^2Y = DY.$$

Or les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales (on pose $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on écrit le système $YD - DY = 0_3$, on trouve directement $b = c = d = f = g = h = 0$, soit Y diagonale). Donc Y est diagonale.
On pose donc $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. L'équation $Y^2 = D$ devient alors :

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

c'est à dire $a = \pm 1$, $b = \pm\sqrt{2}$ et $c = \pm\sqrt{3}$.
Synthèse : soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$ et $Y = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Alors

$$Y^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

car $(\pm 1)^2 = 1$. Donc Y est solution de $Y^2 = D$.
Conclusion : donc l'ensemble des solutions de l'équation $Y^2 = D$ (d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) est

$$\mathcal{S}' = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\sqrt{3} \end{pmatrix} : (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3 \right\}$$

et donc l'équation $Y^2 = D$ a 8 solutions.

3. L'étude faite à la question 1 a montré que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible et
$$P^{-1}AP = D, \qquad \text{soit} \qquad A = PDP^{-1}.$$
Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notons alors $Y = P^{-1}XP$, ce qui donne $X = PYP^{-1}$. On a alors :

$$A = X^2 \quad \Leftrightarrow \quad PDP^{-1} = PYP^{-1}PYP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad PDP^{-1} = PY^2P^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad D = Y^2$$

(en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite). Donc X est une racine carrée de A si et seulement si Y est une racine carrée de D.
Donc l'étude faite à la question précédente, donne alors

$$A = X^2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3, \quad Y = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3, \quad X = P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1}$$

(car $X = PYP^{-1}$).
Donc l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 = A$ (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) est

$$\mathcal{S} = \left\{PYP^{-1},\ Y \in \mathcal{S}'\right\} = \left\{P\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\sqrt{3} \end{pmatrix}P^{-1} : (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3\right\}.$$

Puis, l'application

$$\phi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

est injective (elle est même bijective, de bijection réciproque

$$M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}MP \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

ce que l'on vérifie par calcul direct), donc

$$\mathcal{S} = \phi(\mathcal{S}')$$

a le même cardinal que $\mathcal{S}'$, donc est formé de 8 éléments.
Donc A a 8 racines carrées différentes.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes et non nulles. Alors A est diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Comme à la question précédente, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $X^2 = A$ si et seulement si $Y = P^{-1}XP$ vérifie $Y^2 = D$, et $X \mapsto P^{-1}XP$ est une bijection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même : les matrices A et D ont le même nombre de racines carrées.
Si $Y^2 = D$, alors Y commute avec D. En notant $Y = (y_{i,j})$, le coefficient d'indice (i, j) de $YD - DY$ est $(\lambda_j - \lambda_i)y_{i,j}$; il est nul, et comme les λ_i sont deux à deux distincts, $y_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Donc $Y = \mathrm{diag}(y_1, \ldots, y_n)$ est diagonale, et $Y^2 = D$ équivaut à : pour tout i, $y_i^2 = \lambda_i$.

   — Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives, chaque équation $y_i^2 = \lambda_i$ a exactement deux solutions réelles $\pm\sqrt{\lambda_i}$, et A possède 2^n racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   — Si l'une des valeurs propres de A est strictement négative, l'équation correspondante n'a pas de solution réelle, et A n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le même raisonnement vaut pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possédant n valeurs propres deux à deux distinctes et non nulles : chaque λ_i a exactement deux racines carrées complexes, donc A possède 2^n racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Correction de l'exercice 7.36 **Énoncé p. 6**

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à } C_1}{=} (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ \lambda-5 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\big(\lambda(\lambda-5)+6\big) - (3\lambda-6) + (6-10+2\lambda) \\
&= (\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-2) - (\lambda-2) \\
&= (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-1) \\
&= (\lambda-2)^2(\lambda-4)
\end{aligned}$$

donc

$$\chi_A = (X-2)^2(X-4) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{2,4\},$$

4 est valeur propre simple, donc

$$\dim\big(E_4(A)\big) = 1,$$

et 2 est valeur propre double, donc

$$1 \leq \dim\big(E_2(A)\big) \leq 2.$$

Remarque

Le calcul de $\chi_A(\lambda)$ se simplifie si l'on remarque que la somme de chaque ligne de A fait 2 : on fait alors l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, et cela permet d'avoir une forme en partie factorisée.

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 & -2 \\ \lambda-2 & \lambda-5 & 2 \\ \lambda-2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \lambda-8 & 4 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-8 & 4 \\ -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\big((\lambda-8)(\lambda+2)+24\big) = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8) \\
&= (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-2)
\end{aligned}$$

Puis,

$$A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] : \text{OK} \\ \dim\big(E_4(A)\big) = 1 \ \text{ OK} \\ \dim\big(E_2(A)\big) = 2 \end{array} \right. \quad (\text{car } \mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}).$$

Or,

$$\mathrm{rg}(A - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 1,$$

donc par le théorème du rang

$$\dim\big(E_2(A)\big) = 3 - 1 = 2,$$

donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Autre justification : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$\dim\big(E_2(A)\big) + \dim\big(E_4(A)\big) = 2 + 1 = 3 = \text{taille de } A$$

(et 2 et 4 sont deux éléments différents de $\mathbb{R}$), donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Espace propre associé à 2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(A) \quad \Leftrightarrow \quad (A - 2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 2z & = & 0 \\ -x + 3y - 2z & = & 0 \\ -x + 3y - 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 2z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix},\ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Notons $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (U, V) est une famille génératrice de $E_2(A)$,
formée de deux vecteurs, et $\dim\big(E_2(A)\big) = 2$, donc (U, V) est une base de $E_2(A)$.
Espace propre associé à 4 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_4(A) \quad \Leftrightarrow \quad (A - 4I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x - 3y + 2z & = & 0 \\ -x + y - 2z & = & 0 \\ -x + 3y - 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} -x - 3y + 2z & = & 0 \\ 4y - 4z & = & 0 \\ 6y - 6z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = z \end{array} \right.$$

Donc
$$E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
Notons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (W) est une famille génératrice de $E_4(A)$, formée de un seul vecteur, et $\dim\big(E_4(A)\big) = 1$, donc (W) est une base de $E_4(A)$.
Puis, comme A est diagonalisable et qu'on a trouvé une base de chaque espace propre, on en déduit que $\boxed{P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ est inversible et

$$\boxed{D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

2) La relation précédente se réécrit
$$A = PDP^{-1},$$
et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = PD^nP^{-1}$$
d'après le cours (proposition sur les puissances itérées). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme D est diagonale,

$$\boxed{A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}}.$$

Puis, A est inversible car $0 \notin \text{Sp}(A)$, et
$$B = P \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$
vérifie
$$AB = PDP^{-1}P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3,$$
donc
$$B = A^{-1}.$$
Puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, de la même manière qu'avant,
$$A^{-n} = (A^{-1})^n = P \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-1} \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (2^{-1})^n & 0 & 0 \\ 0 & (2^{-1})^n & 0 \\ 0 & 0 & (4^{-1})^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Donc la formule reste vraie pour n négatif.

Remarque

Plus simplement, en utilisant que, si P, Q et R sont inversibles, $(PQR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \left(PD^nP^{-1}\right)^{-1} = (P^{-1})^{-1}(D^n)^{-1}P^{-1} = P(D^n)^{-1}P^{-1},$$

et donc tout revient à vérifier que, pour $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$, on a $(D^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{pmatrix}$, ce qui est direct.

3) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons $N = P^{-1}MP$, alors $M = PNP^{-1}$, et donc

$$MA = AM \quad \Leftrightarrow \quad PNP^{-1}PDP^{-1} = PDP^{-1}PNP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad PNDP^{-1} = PDNP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad ND = DN.$$

Or, si $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$, alors

$$ND = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 2d & 2e & 4f \\ 2g & 2h & 4j \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad DN = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 4g & 4h & 4j \end{pmatrix},$$

donc

$$ND = DN \Leftrightarrow c = f = g = h = 0.$$

Donc

$$AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a, b, d, e, j) \in \mathbb{R}^5 \text{ avec } M = P\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}P^{-1}$$

Remarque

On peut aller plus loin : Notons

$$M_1 = PE_{1,1}P^{-1}, \qquad M_2 = PE_{1,2}P^{-1}, \qquad M_3 = PE_{2,1}P^{-1}, \qquad M_4 = PE_{2,2}P^{-1} \qquad \text{et enfin} \qquad M_5 = PE_{3,3}P^{-1}$$

(où $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), alors

$$P\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}P^{-1} = P\times\big(aE_{1,1}+bE_{1,2}+dE_{2,1}+eE_{2,2}+jE_{3,3}\big)\times P^{-1} = aM_1+bM_2+dM_3+eM_4+jM_5$$

en développant le produit matriciel. Donc pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$AM = MA \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{il existe } (a,b,d,e,j) \in \mathbb{R}^5 \text{ avec } M = aM_1 + bM_2 + dM_3 + eM_4 + jM_5.$$

Par conséquent, le commutant de A est

$$\mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5).$$

Puis, pour tout $(a,b,d,e,j) \in \mathbb{R}^5$, si $aM_1 + bM_2 + dM_3 + eM_4 + jM_5 = 0_3$, alors

$$0_3 = aM_1+bM_2+dM_3+eM_4+jM_5 = P\times\big(aE_{1,1}+bE_{1,2}+dE_{2,1}+eE_{2,2}+jE_{3,3}\big)\times P^{-1},$$

donc en multipliant par P à droite et P^{-1} à gauche,

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{1,2} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + jE_{3,3} = P^{-1}\times 0_3 \times P = 0_3,$$

donc

$$a = b = d = e = j = 0.$$

Donc la famille $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ est libre.
Donc la famille $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ est une base du commutant de A, qui est donc un espace vectoriel de dimension 5.

Correction de l'exercice 7.37 **Énoncé p. 7**

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$, donc

$$u(x) = \lambda x.$$

Alors, comme $u \circ v = v \circ u$,

$$u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

donc

$$v(x) \in E_\lambda(u).$$

Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que u a r valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, deux à deux différentes (donc $1 \leq r \leq \dim(E)$). Soit $E_1, \ldots, E_r$ les r sous-espaces propres associés. Notons $B_1, \ldots, B_r$ une base de chacun des sous-espaces propres. Alors $B = (B_1, \ldots, B_r)$ est une base de E car u est diagonalisable.

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, soit $x \in B_i \subset E_i$. Alors $u(x) = \lambda_i x$ et

$$v(x) \in E_i$$

car E_i est stable par v, d'où

$$u\big(v(x)\big) = \lambda_i v(x).$$

Or,

$$v\big(u(x)\big) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x).$$

D'où

$$u \circ v(x) = v \circ u(x)$$

pour chaque vecteur de la base B.
Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales, donc

$$u \circ v = v \circ u,$$

autrement dit, u et v commutent.

Correction de l'exercice 7.38 **Énoncé p. 7**

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à λ. Alors $X \neq 0_{n,1}$ et

$$AX = \lambda X.$$

Donc

$$A^2X = A\lambda X = \lambda AX = \lambda^2 X$$

et

$$A^3X = AA^2X = A\lambda^2 X = \lambda^2 AX = \lambda^3 X.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0_{n,1} &= 0_n X \\ &= (A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_n)X = A^3X - 2A^2X - 5AX + 6X \\ &= \lambda^3 X - 2\lambda^2 X - 5\lambda X + 6X = (\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6)X \end{aligned}$$

Comme $X \neq 0_{n,1}$, on a alors

$$0 = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, -2, 3\}}.$$

Sans autre information sur A, on ne peut pas préciser lesquelles de ces valeurs sont effectivement des valeurs propres de A.

Correction de l'exercice 7.39 **Énoncé p. 7**

M est une matrice triangulaire par blocs, de blocs diagonaux nuls, donc

$$\chi_M(X) = X^{2n},$$

et 0 est la seule valeur propre de M.

Si M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ avec $P^{-1}MP$ diagonale, et les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de M, donc sont nuls.
Donc

$$P^{-1}MP = 0_{2n}, \qquad \text{et donc} \qquad M = P0_{2n}P^{-1} = 0_{2n},$$

ce qui donne $A = 0_n$, contradiction.
Donc M n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 7.40 **Énoncé p. 7**

Si $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ alors $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $2n+1$ et unitaire, donc s'écrit

$$\chi_A = X^{2n+1} + R, \qquad \text{avec } R \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré au plus } 2n.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \chi_A(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \chi_A(x) = -\infty,$$

et comme χ_A est un polynôme, il est continu sur $\mathbb{R}$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_A admet (au moins) une racine réelle, donc A admet (au moins) une valeur propre réelle.

Correction de l'exercice 7.41 **Énoncé p. 7**

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0_n$ (r existe car N est nilpotente).
I_n et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton : pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq r$,

$$A^p = (\lambda I_n + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N^k = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N^k + \sum_{k=r}^{p} 0_n = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N^k.$$

Or, à $k \in [\![0, r-1]\!]$ fixé,

$$\binom{p}{k} \lambda^{p-k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (car $|\lambda| < 1$).
Donc A^p est, pour $p \geq r$, une combinaison linéaire des r matrices fixes $N^0, \dots, N^{r-1}$, dont les coefficients tendent vers 0. On en déduit

$$A^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Correction de l'exercice 7.42 **Énoncé p. 7**

1) Notons

$$T : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top.$$

T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car la transposition est linéaire ($(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top$, cours de première année), et

$$f = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + T,$$

donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par addition d'endomorphismes.

2) Si M est une matrice symétrique,

$$f(M) = 2M,$$

donc l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est inclus dans $E_2(f)$.
Si M est une matrice antisymétrique,

$$f(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0 \cdot M,$$

donc l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques est inclus dans $E_0(f)$.
Comme

$$n^2 = \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) + \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) \leq \dim\big(E_2(f)\big) + \dim\big(E_0(f)\big) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\big(E_\lambda(f)\big) \leq \dim\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) = n^2,$$

on en déduit que f est diagonalisable, que

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}, \qquad E_2(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad E_0(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Autre façon :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On étudie l'équation

$$f(M) = \lambda M,$$

pour déterminer à quelles conditions elle a des solutions $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ (pour avoir λ valeur propre). Or,

$$f(M) = \lambda M \qquad \Leftrightarrow \qquad M + M^\top = \lambda M \qquad \Leftrightarrow \qquad M^\top = (\lambda - 1)M.$$

Remarquons que $\lambda = 1$ est impossible, car sinon on a

$$f(M) = M \qquad \Leftrightarrow \qquad M^\top = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \qquad \Leftrightarrow \qquad M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})},$$

et ce n'est pas ce que l'on veut.
Supposons donc $\lambda \neq 1$, que λ soit valeur propre et que M soit un vecteur propre associé, alors on a$M^\top = (\lambda - 1)M$, soit

$$M = \frac{1}{\lambda - 1} M^\top,$$

et en passant à la transposition (et car ${}^\top M^\top) = M$), on a$M^\top = \dfrac{1}{\lambda - 1} M$, ce qui donne en reportant dans l'égalité précédente,

$$\frac{1}{\lambda - 1} M = (\lambda - 1)M.$$

Comme M est un vecteur propre de f, $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, donc

$$\frac{1}{\lambda - 1} = (\lambda - 1),$$

autrement dit $(\lambda - 1)^2 = 1$, soit $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, soit $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$. Donc on a montré

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 2\}.$$

Puis,

$$f(M) = 0.M \qquad \Leftrightarrow \qquad M^\top = -M \qquad \Leftrightarrow \qquad M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

donc $E_0(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (et comme c'est un espace non réduit à $\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ si $n \geq 2$, on a bien $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ pour $n \geq 2$).
Et

$$f(M) = 2M \qquad \Leftrightarrow \qquad M^\top = M \qquad \Leftrightarrow \qquad M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),$$

donc $E_2(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (et comme c'est un espace non réduit à $\{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$, on a bien $2 \in \mathrm{Sp}(f)$).
Enfin,

$$\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = n^2 = \dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right) + \dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right) = \dim\left(E_2(f)\right) + \dim\left(E_0(f)\right),$$

donc f est bien diagonalisable.

Correction de l'exercice 7.43 **Énoncé p. 7**

1) Les matrices A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique, donc le même spectre (exercice 7.61). Donc 1 est valeur propre de $A^\top$.
2) La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ avec

$$P^{-1}AP = D$$

matrice diagonale. De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A, et (puisque 1 est valeur propre, il apparait sur la diagonale de D), quitte à permuter deux colonnes de P (ce qui ne change pas le fait d'être inversible, puisque le déterminant est seulement changé en son opposé), on peut supposer

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Comme A est diagonalisable, la multiplicité de 1 comme valeur propre de A vaut

$$n(1) = \dim\left(E_1(A)\right) = 1,$$

et comme D est semblable à A, on en déduit que 1 est valeur propre simple de D, donc qu'il apparait une seule fois sur la diagonale de D, puisque D est diagonale. Donc, pour $j \in [\![2, p]\!]$, $\lambda_j \neq 1$, et donc

$$\left|\lambda_j\right| < 1$$

(par l'hypothèse de l'énoncé).
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & (\lambda_2)^n & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & (\lambda_p)^n \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

car pour tout $j \in [\![2, p]\!]$,

$$\left|\lambda_j\right| < 1, \qquad \text{donc} \qquad (\lambda_j)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ainsi, toutes les suites coordonnées (dans la base canonique) de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, ce qui assure la convergence de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Puis, d'après la formule du produit matriciel, chaque coefficient de $A^n = PD^nP^{-1}$ est une combinaison linéaire, à coefficients fixes (ne dépendant que de P et P^{-1}), des coefficients de D^n. Chacune de ces combinaisons linéaires de suites convergentes converge, donc la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, coordonnée par coordonnée, et

$$A^n = PD^nP^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q := P\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} Q^2 &= P\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= Q \end{aligned}$$

Remarque

On peut aussi dire :

$$A^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q$$

car la suite de matrices $(A^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{2n} = A^n \times A^n,$$

et chaque coefficient de $A^n \times A^n$ est une somme de produits de deux coefficients de A^n, qui convergent, donc

$$A^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q \times Q = Q^2.$$

L'unicité de la limite conclut :

$$Q^2 = Q.$$

3) Multiplier par une matrice inversible (à gauche ou à droite) ne change pas le rang, donc

$$\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}\left(P\begin{pmatrix}1 & & (0)\\ & 0 & \\ (0) & & 0\end{pmatrix}P^{-1}\right) = \mathrm{rg}\left(P\begin{pmatrix}1 & & (0)\\ & 0 & \\ (0) & & 0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & & (0)\\ & 0 & \\ (0) & & 0\end{pmatrix}\right) = \boxed{1}.$$

Par définition, on a

$$AX = X.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$A^n X = X.$$

Initialisation : l'hypothèse $AX = X$ donne le cas $n = 1$ (car $A^1 = A$). Remarquons que le cas $n = 0$ est vrai aussi, par convention, car $A^0 = I_p$, et donc

$$A^0 X = I_p X = X.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $A^n X = X$. Alors

$$A^{n+1}X = A \times A^n X = A \times X = AX = X,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n X = X.$$

Puis, le produit matriciel $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, défini sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc est continu. Donc

$$X = A^n X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} QX.$$

Donc

$$QX = X, \qquad \text{et donc} \qquad X \in \mathrm{Im}(Q).$$

Enfin, $X \neq 0_{p,1}$ (car c'est un vecteur propre), $X \in \mathrm{Im}(Q)$ et

$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) = \mathrm{rg}(Q) = 1,$$

donc (X) est une base de $\mathrm{Im}(Q)$.
4) Par définition, on a

$$A^\top Y = Y,$$

donc en transposant :

$$Y^\top = ({}^\top A^\top Y) = Y^\top({}^\top A^\top) = Y^\top A.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$Y^\top A^n = Y^\top.$$

Initialisation : l'hypothèse $Y^\top A = Y^\top$ donne le cas $n = 1$ (car $A^1 = A$). Remarquons que le cas $n = 0$ est vrai aussi, par convention, car $A^0 = I_p$, et donc

$$Y^\top A^0 = Y^\top I_p = Y^\top.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $Y^\top A^n = Y^\top$. Alors

$$Y^\top A^{n+1} = Y^\top A^n \times A = Y^\top \times A = Y^\top A = Y^\top,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y^\top A^n = Y^\top.$$

Puis, le produit matriciel $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, défini sur $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc est continu. Donc

$$Y^\top = Y^\top A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y^\top Q.$$

Donc

$$Y^\top Q = Y^\top.$$

Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de Q. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a

$$C_j \in \mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Vect}(X),$$

donc il existe $\alpha_j \in \mathbb{K}$ avec

$$C_j = \alpha_j X.$$

Donc

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 X & \ldots & \alpha_p X \end{array} \right) = X \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \end{pmatrix},$$

puis par produit matriciel par blocs,

$$Y^\top = Y^\top Q = Y^\top \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 X & \ldots & \alpha_p X \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 Y^\top X & \ldots & \alpha_p Y^\top X \end{array} \right).$$

Enfin, $Y^\top X$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, donc son unique coefficient est $\mathrm{tr}(Y^\top X)$, donc

$$Y^\top = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 Y^\top X & \ldots & \alpha_p Y^\top X \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{tr}(Y^\top X) & \ldots & \alpha_p \mathrm{tr}(Y^\top X) \end{pmatrix}$$

(la dernière égalité n'utilise pas de matrices par blocs). Comme Y est un vecteur propre, $Y \neq 0_{p,1}$, donc $Y^\top \neq 0_{1,p}$, et l'égalité précédente impose $\mathrm{tr}(Y^\top X) \neq 0$. On en déduit

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} Y^\top, \qquad \text{puis} \qquad Q = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} X Y^\top.$$

Remarque

1. On peut présenter aussi ainsi : comme $Y^\top X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$,

   $$Y^\top = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 Y^\top X & \ldots & \alpha_p Y^\top X \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \end{pmatrix} \times Y^\top X = \mathrm{tr}(Y^\top X). \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \end{pmatrix}$$

   (car $Y^\top X$ est la matrice dont l'unique coefficient est $\mathrm{tr}(Y^\top X)$), et donc $Q = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} X Y^\top$.
2. Cela n'est pas surprenant, car Q étant la matrice d'un projecteur, on a

   $$\mathrm{tr}(Q) = \mathrm{rg}(Q) = 1,$$

   et comme

   $$\mathrm{tr}(XY^\top) = \mathrm{tr}(Y^\top X),$$

   si Q est multiple de $XY^\top$, la seule possibilité est que

   $$Q = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} X Y^\top.$$

Autre démonstration de l'exercice, plus basé sur du produit matriciel par blocs :
Pour avoir le 1 comme premier coefficient de la diagonale de D, on prend X comme première colonne de P (comme X est non nul, et que

$$\dim\big(E_1(A)\big) = 1,$$

c'est une base de $E_1(A)$).
Comme $Y \in E_1(A^\top)$ et Y non nul avec

$$\dim\big(E_1(A^\top)\big) = 1,$$

on a (Y) base de $E_1(A^\top)$.
Puis, en transposant l'égalité

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_p),$$

on a

$$\begin{aligned}\big((P^\top)^{-1}\big)^{-1}A^\top(P^\top)^{-1} &= P^\top A^\top (P^\top)^{-1}\\ &= P^\top A^\top (P^{-1})^\top\\ &= (P^{-1}AP)^\top\\ &= \operatorname{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)^\top\\ &= \operatorname{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)\end{aligned}$$

Donc la première colonne de $(P^\top)^{-1} = (P^{-1})^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$ associé à 1, donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la première colonne de $(P^{-1})^\top$ est αY, soit la première ligne de P^{-1} est $\alpha Y^\top$.

Par conséquent, on a $P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X & C_2 & \dots & C_p \end{array}\right)$ et $P^{-1} = \left(\begin{array}{c} \alpha Y^\top \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_p \end{array}\right)$.

Puis,

$$Q = P\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X & C_2 & \dots & C_p \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c} \alpha Y^\top \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_p \end{array}\right) = \alpha X Y^\top.$$

Enfin, comme $Q^2 = Q$, Q est la matrice d'un projecteur, donc $\operatorname{rg}(Q) = \operatorname{tr}(Q)$. Et comme $\operatorname{rg}(Q) = 1$, on a alors

$$1 = \operatorname{rg}(Q) = \operatorname{tr}(Q) = \alpha \operatorname{tr}(XY^\top) = \alpha \operatorname{tr}(Y^\top X),$$

et donc

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{tr}(Y^\top X)}, \qquad \text{puis} \qquad Q = \frac{1}{\operatorname{tr}(Y^\top X)} XY^\top.$$

Correction de l'exercice 7.44 **Énoncé p. 7**

1) Plusieurs façons pour montrer l'égalité demandée.

Première façon : on calcule $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, puis on calcule $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et on constate bien

$$B^2 = B + 2I_3.$$

Deuxième façon : on calcule $\chi_A = X^3 + 3X$, puis

$$B^2 - B - 2I_3 = (A^2 + 2I_3)^2 - (A^2 + 2I_3) - 2I_3 = A^4 + 3A^2 = A \times \chi_A(A).$$

Or, le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_A(A) = 0_3$, donc

$$B^2 - B - 2I_3 = A \times 0_3 = 0_3,$$

ce qui donne bien l'égalité voulue.

2) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, de sorte que $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0_{3,1}$. Alors

$$BX = A^2X + 2X = \lambda^2 X + 2X = (\lambda^2 + 2)X,$$

donc $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B.

Mais

$$X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$$

est un polynôme annulateur de B qui admet -1 et 2 comme racines, donc

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{-1, 2\}.$$

Comme $\lambda^2 + 2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on conclut : si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2 = 2$, soit $\lambda = 0$.

Donc

$$0 \text{ est la seule valeur propre réelle possible de } A.$$

Mais si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existerait alors R une matrice inversible avec $R^{-1}AR$ qui serait une matrice diagonale, avec chaque coefficient diagonal qui serait une valeur propre réelle de A, donc nulle, donc on aurait

$$R^{-1}AR = 0_3, \qquad \text{soit} \qquad A = R \times 0_3 \times R^{-1} = 0_3,$$

ce qui est faux.

Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons le reste de la division euclidienne de X^n par

$$X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1).$$

La division euclidienne donne : il existe un unique couple (Q_n, R_n) avec $Q_n \in \mathbb{R}[X]$, $R_n \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$\deg(R_n) < \deg\left(X^2 - X - 2\right) = 2$$

tel que

$$X^n = (X^2 - X - 2) \times Q_n + R_n.$$

Comme $\deg(R_n) < 2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$R_n = aX + b, \qquad \text{et donc on a} \qquad X^n = (X^2 - X - 2) \times Q_n + aX + b.$$

En évaluant cette égalité en -1, on a alors

$$(-1)^n = 0 \times Q_n(-1) + a \times (-1) + b = -a + b.$$

En évaluant cette égalité en 2, on a alors

$$2^n = 0 \times Q_n(2) + a \times 2 + b = 2a + b.$$

Donc on a

$$\begin{cases} 2a + b = 2^n \\ b - a = (-1)^n \end{cases},$$

ce qui donne

$$a = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \qquad \text{puis} \qquad b = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}.$$

Donc

$$\boxed{R_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$ s'écrit alors

$$X^n = (X^2 - X - 2)Q_n + \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3},$$

et en évaluant en B, on a alors

$$B^n = \underbrace{(B^2 - B - 2I_3)}_{=0_3} \times Q_n(B) + \frac{2^n - (-1)^n}{3} B + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3 = \boxed{\frac{2^n - (-1)^n}{3} B + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3}.$$

Correction de l'exercice 7.45 **Énoncé p. 8**

On sait que $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$, donc il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec

$$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

(avec $a_n = 1$ car on sait que χ_A est unitaire). Alors le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_A(A) = 0_n$, soit

$$0_n = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n} a_k A^k,$$

ou encore

$$a_0 I_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k A^k = A \times \left(\sum_{k=1}^{n} -a_k A^{k-1} \right)$$

(*l'expression de droite existe bien, car pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $k - 1 \in \mathbb{N}$).

Comme la matrice A est inversible, 0 n'est pas valeur propre de A, donc 0 n'est pas racine de χ_A, donc $a_0 \neq 0$. Donc

$$I_n = A \times \left(\sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} \right),$$

et donc en multipliant par A^{-1} à gauche, on a

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{a_0} A^{k-1}.$$

Donc $P = \sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{a_0} X^{k-1}$ convient (c'est bien un polynôme car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k - 1 \in \mathbb{N}$).

Correction de l'exercice 7.46 **Énoncé p. 8**

1) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, alors $e_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$ par définition. Or, v commute avec u par hypothèse, et v commute avec Id (sans hypothèse), donc v commute avec $u - \lambda_i \mathrm{Id}$:

$$v \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}) = v \circ u - \lambda_i v \circ \mathrm{Id} = u \circ v - \lambda_i \mathrm{Id} \circ v = (u - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ v.$$

Remarque

On peut aussi dire : $u - \lambda_i \mathrm{Id}$ est un polynôme en u, v commute avec u, donc v commute avec $u - \lambda_i \mathrm{Id}$.

Par conséquent, v laisse stable le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$ (cours), donc

$$v(e_i) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}).$$

Or, u est un endomorphisme de E avec $n = \dim(E)$, et u a n valeurs propres deux à deux distinctes, donc chaque espace propre est de dimension 1.
Comme

- $e_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}) = E_{\lambda_i}(u)$,
- et que $e_i \neq 0$ (car B est libre, donc ne contient pas le vecteur nul)
- et que $\dim\left(E_{\lambda_i}(u)\right) = 1$,

on peut en conclure que (e_i) est une base de $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$.
Comme $v(e_i) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$, on en déduit qu'il existe $\mu_i \in \mathbb{K}$ avec

$$v(e_i) = \mu_i e_i.$$

2) Les λ_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux différents, donc les polynômes interpolateurs de Lagrange $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ associés, définis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par

$$L_i = \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

forment une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, et les coordonnées d'un polynôme P quelconque dans cette base sont

$$\left(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\right).$$

Donc, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$ (les coordonnées dans une base caractérisent le vecteur), à savoir

$$P = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i.$$

3) Notons $w = P(u)$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, comme $u(e_i) = \lambda_i e_i$, on a

$$w(e_i) = P(u)(e_i) = P(\lambda_i)e_i = \mu_i e_i = v(e_i).$$

Comme $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a alors

$$w = v \qquad \text{sur une base de } E.$$

Comme v et w sont linéaires, on en déduit bien que

$$w = v.$$

Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors $P(u)$ est un endomorphisme de E qui commute avec u (cours).
On a donc montré que le commutant de u était $\{P(u),\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$.

Remarque

L'hypothèse sur u n'est pas superflue : pour $u = \mathrm{Id}_E$ et $n \geq 2$, tout endomorphisme de E commute avec u, alors que $\{P(u),\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1.

Correction de l'exercice 7.47 **Énoncé p. 8**

A et B sont semblables, donc il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = B.$$

Alors, d'après le cours, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q^{-1}A^kQ = B^k.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k.$$

Alors

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1} \times \left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k \right) \times Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = \sum_{k=0}^{p} a_k B^k = P(B).$$

Donc les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Correction de l'exercice 7.48 **Énoncé p. 8**

La matrice A est diagonalisable, donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D une matrice diagonale avec $Q^{-1}AQ = D$, et les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres de A. Alors, d'après le cours, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q^{-1}A^kQ = D^k.$$

Puis, si on écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right)Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = P(D).$$

Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$$P(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{p} a_k\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Donc $P(A)$ est semblable à $P(D)$ qui est une matrice diagonale, donc est une matrice diagonalisable.
Supposons $n \geq 2$. Soit $A = E_{1,n}$ (la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui sur la première ligne et dernière colonne), alors

$$A^2 = 0_n$$

(car $n \geq 2$), donc A^2 est diagonalisable.
Mais A n'est pas diagonalisable. En effet, A est triangulaire, avec que des 0 sur la diagonale, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Si on avait A diagonalisable, il existerait R une matrice inversible et D une matrice diagonale avec $R^{-1}AR = D$, et les coefficients diagonaux de D seraient des valeurs propres de A, donc seraient nuls. Donc on aurait

$$D = 0_n, \qquad \text{puis} \qquad A = RDR^{-1} = R \times 0_n \times R^{-1} = 0_n,$$

ce qui est faux.
Donc la réciproque est fausse pour $P = X^2$.

Correction de l'exercice 7.49 **Énoncé p. 8**

Notons $Q = P - \lambda$, alors comme P est non constant, Q est aussi non constant. Donc le théorème de d'Alembert-Gauss donne (si on note $p = \deg(Q)$) qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ (les racines de Q, comptées avec multiplicité) et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ (le coefficient dominant de Q) avec

$$Q = \alpha(X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_p).$$

Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i n'est pas valeur propre de A, c'est-à-dire si la matrice $A - \lambda_i I_n$ est inversible, alors par produit de matrices inversibles et par produit avec un scalaire non nul, la matrice

$$P(A) - \lambda I_n = Q(A) = \alpha(A - \lambda_1 I_n) \dots (A - \lambda_p I_n)$$

est inversible, donc λ n'est pas valeur propre de $P(A)$.
En contraposant, si λ est une valeur propre de $P(A)$, il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que la racine λ_i de Q soit valeur propre de A. Il existe donc $\mu \in \mathbb{C}$ avec $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ et

$$0 = Q(\mu) = P(\mu) - \lambda, \qquad \text{soit} \qquad P(\mu) = \lambda$$

($\mu = \lambda_i$ convient).

Correction de l'exercice 7.50 **Énoncé p. 8**

1) $A^3 = A^2$, donc

$$P = X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$$

est un polynôme annulateur de A. Donc les valeurs propres de A sont des racines de P, donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1\}.$$

La matrice A est aussi une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et ses valeurs propres complexes sont encore des racines de P, donc appartiennent à $\{0, 1\}$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, et ses racines complexes sont les valeurs propres complexes de A. Notons p la multiplicité de 0 comme racine de χ_A ($p = 0$ si 0 n'est pas racine de χ_A), et q celle de 1 (idem). Alors

$$\chi_A = X^p(X - 1)^q \qquad \text{et} \qquad p + q = \deg(\chi_A) = n.$$

D'après le cours, la trace de A est la somme des racines complexes de χ_A comptées avec multiplicité, donc

$$\mathrm{tr}(A) = p \times 0 + q \times 1 = q.$$

Comme on suppose $\mathrm{tr}(A) = n$, on a alors

$$q = n, \qquad \text{et donc} \qquad p = 0.$$

Donc 0 n'est pas valeur propre de A (car sa multiplicité p est nulle), et 1 est valeur propre de multiplicité n. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}}.$$

2) De plus, comme 1 est la seule racine de χ_A, qui est un polynôme unitaire de degré n, on en déduit

$$\boxed{\chi_A = (X - 1)^n}.$$

3) Enfin, 0 n'est pas valeur propre de A, donc la matrice A est inversible. Donc, en multipliant l'égalité $A^3 = A^2$ par $(A^{-1})^2$, on obtient

$$\boxed{A = I_n}.$$

Correction de l'exercice 7.51 **Énoncé p. 8**

Si A est inversible, alors

$$A^2 = A - 2I_5,$$

soit $P(A) = 0_5$ avec

$$P = X^2 - X + 2.$$

Mais P n'a pas de racines réelles, donc A n'a pas de valeurs propres réelles.
Mais A est de taille 5, donc χ_A est de degré 5, impair. Donc

$$\lim_{-\infty} \chi_A = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{+\infty} \chi_A = +\infty.$$

Comme χ_A est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne que χ_A s'annule sur $\mathbb{R}$, donc que A a une valeur propre réelle. Contradiction.
Donc A n'est pas inversible.

Correction de l'exercice 7.52 **Énoncé p. 8**

Le polynôme

$$P = (X + 2)X(X - 1)$$

est un polynôme annulateur de A, donc

$$(A + 2I_n)A(A - I_n) = 0_n.$$

Comme -2 n'est pas valeur propre de A, la matrice

$$A - (-2)I_n = A + 2I_n$$

est inversible. En multipliant à gauche par $(A+2I_n)^{-1}$ l'égalité précédente, on a alors

$$A(A - I_n) = 0_n, \qquad \text{soit} \qquad A^2 - A = 0_n, \qquad \text{soit} \qquad A^2 = A.$$

Donc A est la matrice d'un projecteur.

Correction de l'exercice 7.53 **Énoncé p. 8**

Supposons $P(A) = 0_n$, autrement dit P est un polynôme annulateur de A. Alors, d'après le cours, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.
Supposons, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.
La matrice A est diagonalisable, donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D une matrice diagonale avec $Q^{-1}AQ = D$, et les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres de A.
Alors, d'après le cours, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q^{-1}A^kQ = D^k.$$

Puis, si on écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right)Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = P(D).$$

Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$$P(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Puis, comme pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$, par hypothèse on a $P(\lambda_i) = 0$, et donc

$$P(D) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 0_n.$$

Enfin,

$$P(A) = QP(D)Q^{-1} = Q \times 0_n \times Q^{-1} = 0_n.$$

Par double implication, on a bien l'équivalence demandée.

Correction de l'exercice 7.54 **Énoncé p. 8**

1) On a

$$MN \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det(MN) \neq 0 \Leftrightarrow \det(M) \times \det(N) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(\det(M) \neq 0 \text{ et } \det(N) \neq 0 \Big) \Leftrightarrow \Big(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } N \in \mathrm{G}$$

2) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de A, répétées autant de fois que leur multiplicité, de sorte que, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss,

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).$$

On a donc

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n} (B - \lambda_i I_n).$$

D'après la première question (et une récurrence immédiate), $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $B - \lambda_i I_n$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(B).$$

Ceci revient bien à dire que

$$\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$$

(puisque $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$).

Correction de l'exercice 7.55 **Énoncé p. 9**

Notons α le coefficient dominant de Q ; comme Q est non nul, $\alpha \neq 0$.
De plus, Q est non constant : un polynôme constant non nul n'annule aucune matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car $n \geq 1$). Soit $p = \deg(Q)$, alors

$$p \geq 1 \qquad \text{et} \qquad \deg(Q') = p - 1,$$

et le coefficient dominant de Q' est $p\alpha$. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ avec

$$Q' = p\alpha(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{p-1}).$$

Puis, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, si la matrice $A - \lambda_i I_n$ n'est pas inversible, alors λ_i est une valeur propre de A, donc une racine de Q puisque Q est un polynôme annulateur de A. Mais λ_i est aussi racine de Q', et donc λ_i serait racine au moins double de Q, ce qui contredit l'énoncé. Donc la matrice $A - \lambda_i I_n$ est inversible.
Alors, par produit de matrices inversibles et d'un complexe non nul, la matrice

$$Q'(A) = p\alpha(A - \lambda_1 I_n) \times \dots \times (A - \lambda_{p-1} I_n)$$

est inversible.

Correction de l'exercice 7.56 **Énoncé p. 9**

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et supposons λ racine de P. Il existe alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ avec

$$P = (X - \lambda)Q, \qquad \text{puis} \qquad P(A) = (A - \lambda I_n)Q(A).$$

Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, et donc

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Alors

$$\det\big(P(A)\big) = \det(A - \lambda I_n) \det\big(Q(A)\big) = 0 \times \det\big(Q(A)\big) = 0,$$

et donc la matrice $P(A)$ n'est pas inversible.
En contraposant, on a alors montré : si $P(A)$ est inversible, alors aucune racine de P n'est valeur propre de A.
Supposons P non constant.
Supposons qu'aucune racine de P n'est valeur propre de A. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, si on note α le coefficient dominant de P (non nul car P est non nul) et $p = \deg(P)$, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i).$$

Soit $i \in [\![1, p]\!]$, alors λ_i est racine de P, et donc par hypothèse n'est pas valeur propre de A, donc la matrice $A - \lambda_i I_n$ est inversible. Alors, par produit de matrices inversibles et d'un complexe non nul, la matrice

$$P(A) = \alpha \prod_{i=1}^{p} (A - \lambda_i I_n)$$

est inversible.

Si P est constant non nul égal à α, alors

$$P(A) = \alpha I_n$$

est bien inversible.
Si P est nul, alors il ne vérifie pas l'hypothèse « aucune racine de P n'est valeur propre de A ». En effet, tout complexe est racine du polynôme nul, en particulier les valeurs propres de A, qui existent puisque $n \geq 1$ et que l'on travaille dans $\mathbb{C}$.
Par disjonction des cas, on a bien montré : si aucune racine de P n'est valeur propre de A, alors $P(A)$ est inversible.

Correction de l'exercice 7.57 **Énoncé p. 9**

Supposons P non constant (le seul polynôme constant annulateur d'une matrice est le polynôme nul, qui vérifie bien l'égalité voulue), et notons $p = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$.
Il existe alors $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que

$$P = a_0 + \cdots + a_p X^p.$$

Supposons $a_0 = P(0) \neq 0$. Alors

$$0_n = P(N) \qquad \text{se réécrit} \qquad N \times \frac{1}{-a_0}(a_1 I_n + \cdots + a_p N^{p-1}) = I_n,$$

donc la matrice N est inversible (d'inverse $\frac{1}{-a_0}(a_1 I_n + \cdots + a_p N^{p-1})$), et donc par produit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N^k aussi. Mais il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$ car N est nilpotente, contradiction. Donc

$$P(0) = 0.$$

Correction de l'exercice 7.58 **Énoncé p. 9**

1a) Le polynôme

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

est un polynôme annulateur de A, n'a que 1 comme racine, donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$

Comme χ_A a au moins une racine complexe (car χ_A étant de degré n avec $n \geq 1$, le théorème de d'Alembert-Gauss assure que χ_A a au moins une racine complexe), on en déduit

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}}.$$

1b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculons le reste de la division euclidienne de X^p par $(X-1)^2$. La division euclidienne donne : il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $R \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$\deg(R) < \deg\left((X-1)^2\right) = 2$$

tel que

$$X^p = (X-1)^2 \times Q + R.$$

Comme $\deg(R) < 2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$R = aX + b, \qquad \text{et donc on a} \qquad X^p = (X-1)^2 \times Q + aX + b.$$

En évaluant cette égalité en 1, on a alors

$$1 = 1^p = 0 \times Q(1) + a \times 1 + b = a + b.$$

Pour exploiter le fait que $(X-1)^2$ admet 1 comme racine double, dérivons l'égalité polynomiale précédente : pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$pX^{p-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + a,$$

et évalué en 1 on obtient

$$p = 0 \times Q(1) + 0 \times Q'(1) + a = a.$$

Donc

$$a = p \qquad \text{et} \qquad b = 1 - p,$$

ce qui donne

$$X^p = (X-1)^2Q + pX + 1 - p.$$

En évaluant en A, cela donne

$$A^p = (A - I_n)^2Q(A) + pA + (1-p)I_n = pA + (1-p)I_n,$$

car $(A - I_n)^2 = 0_n$.

Remarque

On peut vérifier directement que cette formule reste valable pour $p = 0$.

Autre méthode : posons $N = A - I_n$, alors $N^2 = 0_n$ (donc $N^k = 0_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$), puis les matrices N et I_n commutent, donc la formule du binôme de Newton donne : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = (I_n + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k = I_n + pN + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} 0_n = I_n + pN.$$

Comme $N = A - I_n$, on a alors

$$A^p = I_n + p(A - I_n) = pA + (1-p)I_n.$$

Reste le cas $p < 0$. Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, la matrice A est inversible ; plus précisément, $A^2 - 2A + I_n = 0_n$ s'écrit

$$A(2I_n - A) = I_n, \qquad \text{donc} \qquad A^{-1} = 2I_n - A = I_n - N.$$

Posons $m = -p \in \mathbb{N}^*$. Comme $N^2 = 0_n$ et que I_n et N commutent, la formule du binôme de Newton donne

$$A^p = \left(A^{-1}\right)^m = (I_n - N)^m = I_n - mN = I_n + pN = pA + (1-p)I_n.$$

Finalement, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{A^p = pA + (1-p)I_n}.$$

2) On suppose $n \geq 2$ (sinon c'est faux, car pour $n = 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonale, donc diagonalisable).

On prend $A = I_n + E_{1,n}$, où $E_{1,n}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la première ligne et dernière colonne, qui vaut 1. Alors

$$A^2 - 2A + I_n = (A - I_n)^2 = (E_{1,n})^2 = 0_n$$

(la dernière égalité n'est vraie que pour $n \geq 2$).
Il reste à voir que A n'est pas diagonalisable. Or, A est triangulaire, n'a que des 1 sur la diagonale, donc

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.$$

Si A était diagonalisable, il existerait $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ serait diagonale, et les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ seraient des valeurs propres de A, donc vaudraient 1.
On aurait donc

$$P^{-1}AP = I_n, \qquad \text{soit} \qquad A = PI_nP^{-1} = I_n,$$

ce qui est faux (car $E_{1,n} \neq 0_n$).
Donc la matrice A n'est pas diagonalisable.
Cette matrice A convient donc.

Correction de l'exercice 7.59 **Énoncé p. 9**

Faisons une disjonction de cas :

- Si 0 est valeur propre de f, alors f a trois valeurs propres différentes, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.
- Si 0 n'est pas valeur propre de f, alors f est injectif, donc bijectif (car endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie), et donc en composant l'égalité $f^2 = f^4$ par $(f^{-1})^2$, on obtient

  $$\mathrm{Id} = f^2 \circ (f^{-1})^2 = f^4 \circ (f^{-1})^2 = f^2.$$

  Donc l'endomorphisme f est une symétrie, donc est diagonalisable.

Dans tous les cas, l'endomorphisme f est diagonalisable.

Correction de l'exercice 7.60 **Énoncé p. 9**

Les polynômes

$$P = X^4 - X^3 - X^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad Q = (X-1)(X-2)$$

sont des polynômes annulateurs de A, donc $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P et dans l'ensemble des racines de Q, donc dans l'intersection de ces deux ensembles.
Or, les racines de Q sont 1 et 2, et 1 est racine de P mais pas 2 (car $P(2) = 5 \neq 0$), donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$

Alors 2 n'est pas valeur propre de A, donc $A - 2I_n$ est inversible. Mais

$$0_n = Q(A) = (A - I_n)(A - 2I_n),$$

donc en multipliant par $(A - 2I_n)^{-1}$, on a

$$A - I_n = (A - I_n)(A - 2I_n)(A - 2I_n)^{-1} = Q(A) \times (A - 2I_n)^{-1} = 0_n \times (A - 2I_n)^{-1} = 0_n,$$

et donc

$$\boxed{A = I_n}.$$

Réciproquement, I_n vérifie bien les deux égalités de l'énoncé.

Correction de l'exercice 7.61 **Énoncé p. 9**

1. Pour tout $t \in \mathbb{K}$, la matrice $tI_n - A^\top$ est la transposée de $tI_n - A$, et une matrice et sa transposée ont le même déterminant. Donc

$$\chi_{A^\top}(t) = \det(tI_n - A^\top) = \det\big((tI_n - A)^\top\big) = \det(tI_n - A) = \chi_A(t).$$

Les polynômes $\chi_{A^\top}$ et χ_A coïncident en une infinité de points, donc

$$\boxed{\chi_{A^\top} = \chi_A}.$$

Le spectre d'une matrice est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique, donc $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A)$.

2. On a $E_\lambda(A^\top) = \mathrm{Ker}(A^\top - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}\big((A - \lambda I_n)^\top\big)$. Une matrice et sa transposée ont le même rang, donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim E_\lambda(A^\top) = n - \mathrm{rg}\big((A - \lambda I_n)^\top\big) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = \dim E_\lambda(A).$$

Les deux sous-espaces propres ont la même dimension (mais ne sont pas égaux en général, voir la question 4).

3. Supposons A diagonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En transposant, et comme $(P^{-1})^\top = (P^\top)^{-1}$,

$$A^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^\top)^{-1} D P^\top,$$

car D est diagonale donc symétrique. La matrice $A^\top$ est semblable à D, donc diagonalisable.

Réciproquement, si $A^\top$ est diagonalisable, ce qui précède appliqué à $A^\top$ montre que $(A^\top)^\top = A$ est diagonalisable.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Elle est triangulaire, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\} = \mathrm{Sp}(A^\top)$. On résout les équations aux éléments propres :

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$E_1(A^\top) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_2(A^\top) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de A sont les vecteurs non nuls de $E_1(A) \cup E_2(A)$, ceux de $A^\top$ les vecteurs non nuls de $E_1(A^\top) \cup E_2(A^\top)$. Ces quatre droites sont deux à deux distinctes, donc A et $A^\top$ n'ont aucun vecteur propre commun.

Correction de l'exercice 7.62 **Énoncé p. 9**

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v$. Alors $v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\, v$: $\mathrm{Ker}\, v$ est stable par u.

Soit $y \in \mathrm{Im}\, v$, et $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Alors $u(y) = u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) \in \mathrm{Im}\, v$:

$\operatorname{Im} v$ est stable par u.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Deux polynômes de u commutent, donc $P(u)$ commute avec $u = X(u)$. D'après ce qui précède, $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.

2. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \lambda_j e_j$, donc $Q_i(u)(e_j) = Q_i(\lambda_j)e_j$. Or $Q_i(\lambda_j) = 0$ si $j \neq i$, puisque $X - \lambda_j$ divise Q_i. Par linéarité de $Q_i(u)$,

$$Q_i(u)(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j Q_i(\lambda_j) e_j = Q_i(\lambda_i)\, x_i e_i,$$

avec $Q_i(\lambda_i) = \prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$, les valeurs propres étant deux à deux distinctes.

Par ailleurs, F est stable par u, donc par u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate), puis par toute combinaison linéaire des u^k, c'est-à-dire par tout polynôme de u. En particulier $Q_i(u)(x) \in F$, et en divisant par le scalaire non nul $Q_i(\lambda_i)$,

$$x_i e_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}\, Q_i(u)(x) \in F.$$

3. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$ et $F_I = \operatorname{Vect}(e_i \ ; \ i \in I)$. Pour $i \in I$, $u(e_i) = \lambda_i e_i \in F_I$, donc l'image par u d'une famille génératrice de F_I est dans F_I : F_I est stable par u.

Réciproquement, soit F un sous-espace stable par u. Posons $I = \{i \in [\![1, n]\!] \ ; \ e_i \in F\}$; on a $F_I \subset F$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in F$. D'après la question précédente, $x_i e_i \in F$ pour tout i ; si $x_i \neq 0$, alors $e_i = x_i^{-1}(x_i e_i) \in F$, donc $i \in I$. Ainsi $x = \sum_{i \in I} x_i e_i \in F_I$, et $F = F_I$.

Les sous-espaces stables par u sont donc exactement les F_I pour $I \subset [\![1, n]\!]$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, $e_j \in F_I$ si et seulement si $j \in I$: deux parties distinctes donnent deux sous-espaces distincts. Il y a donc autant de sous-espaces stables que de parties de $[\![1, n]\!]$, soit

$$\boxed{2^n \text{ sous-espaces stables par } u},$$

en comptant $\{0\}$ ($I = \emptyset$) et E ($I = [\![1, n]\!]$).

Correction de l'exercice 7.63

Énoncé p. 10

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $(b_0, \dots, b_{m-1}) \in \mathbb{K}^m$ et $t \in \mathbb{K}$, notons

$$\Delta_m(t \ ; \ b_0, \dots, b_{m-1}) = \begin{vmatrix} t & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & t & \\ b_0 & b_1 & \cdots & t + b_{m-1} \end{vmatrix},$$

avec $\Delta_1(t \ ; \ b_0) = t + b_0$, de sorte que $\chi_C(t) = \Delta_n(t \ ; \ a_0, \dots, a_{n-1})$. Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(m)$: « pour tout $(b_0, \dots, b_{m-1}) \in \mathbb{K}^m$ et tout $t \in \mathbb{K}$, $\Delta_m(t \ ; \ b_0, \dots, b_{m-1}) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ ».

Initialisation. $\Delta_1(t \ ; \ b_0) = t + b_0$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $m \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}(m)$. Soit $(b_0, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ et $t \in \mathbb{K}$. On développe $\Delta_{m+1}(t \ ; \ b_0, \dots, b_m)$ par rapport à sa première colonne, qui n'a que deux coefficients non nuls : t en position $(1, 1)$ et b_0 en position $(m + 1, 1)$.

— Le mineur associé à la position $(1,1)$ s'obtient en supprimant la première ligne et la première colonne : c'est exactement $\Delta_m(t\ ;\ b_1,\dots,b_m)$.
— Le mineur associé à la position $(m+1,1)$ s'obtient en supprimant la dernière ligne et la première colonne : il reste une matrice triangulaire supérieure de taille m dont la diagonale est formée de -1, de déterminant $(-1)^m$.

Donc

$$\begin{aligned}\Delta_{m+1}(t\ ;\ b_0,\dots,b_m) &= t\,\Delta_m(t\ ;\ b_1,\dots,b_m) + (-1)^{m+2}b_0(-1)^m\\ &= t\,\Delta_m(t\ ;\ b_1,\dots,b_m) + b_0.\end{aligned}$$

Par $\mathcal{P}(m)$ appliquée au m-uplet $(b_1,\dots,b_m)$,

$$\begin{aligned}\Delta_{m+1}(t\ ;\ b_0,\dots,b_m) &= t\big(t^m + b_m t^{m-1} + \cdots + b_1\big) + b_0\\ &= t^{m+1} + b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0,\end{aligned}$$

ce qui est $\mathcal{P}(m+1)$.
Conclusion. Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\chi_C(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 = P(t)$, donc

$$\boxed{\chi_C = P}.$$

2. Soit $X = (x_1,\dots,x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Les $n-1$ premières lignes de l'équation $CX = \lambda X$ s'écrivent $x_{i+1} = \lambda x_i$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, et la dernière

$$-a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n.$$

Les $n-1$ premières équations équivalent à : $x_i = \lambda^{i-1}x_1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. En reportant dans la dernière, celle-ci devient

$$-x_1\big(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1}\big) = \lambda^n x_1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x_1P(\lambda) = 0,$$

qui est toujours vérifiée puisque λ est racine de $\chi_C = P$. Ainsi

$$E_\lambda(C) = \left\{x_1\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}\ ;\ x_1 \in \mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix},$$

et ce vecteur est non nul (sa première coordonnée vaut 1) : $E_\lambda(C)$ est une droite.

3. Si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, alors $\chi_C = P$ possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$: la matrice C, de taille n, a n valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.
Réciproquement, si C est diagonalisable, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n. Chacun est de dimension 1 d'après la question précédente, donc C a exactement n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Ce sont n racines distinctes du polynôme $P = \chi_C$, de degré n : P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, les $n-1$ premières coordonnées de CX_k sont $u_{k+1},\dots,u_{k+n-1}$, et la dernière est

$$-a_0u_k - a_1u_{k+1} - \cdots - a_{n-1}u_{k+n-1} = u_{k+n}$$

d'après la relation de récurrence. Donc

$$\boxed{X_{k+1} = CX_k}, \qquad \text{puis} \qquad X_k = C^k X_0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Supposons P scindé à racines simples $r_1, \dots, r_n$. D'après les questions précédentes, C est diagonalisable et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur $V_i = (1, r_i, \dots, r_i^{n-1})^\top$ engendre $E_{r_i}(C)$. La famille $(V_1, \dots, V_n)$ est formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes : elle est libre, donc c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il existe donc $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $X_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i V_i$, et alors

$$X_k = C^k X_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i C^k V_i = \sum_{i=1}^{n} c_i r_i^k V_i.$$

En lisant la première coordonnée, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i r_i^k},$$

où les scalaires $c_1, \dots, c_n$ sont déterminés par les conditions initiales $u_0, \dots, u_{n-1}$ (coordonnées de X_0 dans la base $(V_1, \dots, V_n)$).

Correction de l'exercice 7.64 **Énoncé p. 10**

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ième coordonnée de AU est $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times 1 = 1$. Donc $AU = U$ avec $U \neq 0$: U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, et $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.

2. La i_0-ième ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j$. Par l'inégalité triangulaire et comme les $a_{i_0,j}$ sont positifs,

$$|\lambda| \left|x_{i_0}\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \left|x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \left|x_{i_0}\right| = \left|x_{i_0}\right|.$$

Comme $X \neq 0$, $\left|x_{i_0}\right| = \max_j \left|x_j\right| > 0$, et en divisant par $\left|x_{i_0}\right|$ on obtient $|\lambda| \leq 1$.

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ de module 1, $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$ un vecteur propre associé et i_0 comme à la question précédente ; posons $m = \left|x_{i_0}\right| > 0$.
Tous les x_j ont le même module. Les inégalités de la question précédente donnent, puisque $|\lambda| = 1$,

$$m \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \left|x_j\right| \leq m, \qquad \text{donc} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \left(m - \left|x_j\right|\right) = 0.$$

C'est une somme de termes positifs, donc chacun est nul ; comme $a_{i_0,j} > 0$, on obtient $\left|x_j\right| = m$ pour tout j.
Tous les x_j sont égaux à λx_{i_0}. Posons $w = \lambda x_{i_0}$, de module m. En multipliant la

relation $\lambda x_{i_0} = \sum_j a_{i_0,j} x_j$ par $\overline{w}$ et en prenant la partie réelle,

$$m^2 = w\overline{w} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \operatorname{Re}\left(x_j \overline{w}\right).$$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}_+$. Ici $\left|x_j \overline{w}\right| = m^2$, donc $\operatorname{Re}(x_j \overline{w}) \leq m^2$ pour tout j, et

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \left(m^2 - \operatorname{Re}(x_j \overline{w})\right) = 0$$

est encore une somme de termes positifs à coefficients $a_{i_0,j} > 0$: pour tout j, $\operatorname{Re}(x_j \overline{w}) = m^2 = \left|x_j \overline{w}\right|$, donc $x_j \overline{w} \in \mathbb{R}_+$ et $x_j \overline{w} = m^2 = w\overline{w}$. Comme $\overline{w} \neq 0$, $x_j = w = \lambda x_{i_0}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Conclusion. Pour $j = i_0$, on obtient $x_{i_0} = \lambda x_{i_0}$ avec $x_{i_0} \neq 0$, donc $\lambda = 1$: la seule valeur propre complexe de A de module 1 est 1. De plus $x_j = x_{i_0}$ pour tout j, c'est-à-dire $X = x_{i_0} U$. Tout vecteur propre de A associé à 1 est donc colinéaire à U, et $U \in E_1(A)$ d'après la première question :

$$\boxed{E_1(A) = \operatorname{Vect}(U)}.$$

Correction de l'exercice 7.65

Énoncé p. 10

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on développe par rapport à la deuxième ligne, qui ne contient qu'un coefficient non nul :

$$\chi_{A_a}(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -a & -1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2) \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix}$$
$$= (t-2)\left((t-1)^2 - 1\right) = (t-2)(t^2 - 2t).$$

Donc

$$\boxed{\chi_{A_a} = X(X-2)^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Sp}(A_a) = \{0, 2\},$$

qui ne dépend pas de a : 0 est valeur propre simple et 2 valeur propre double.

2. *Valeur propre* 0. La dimension de $E_0(A_a)$ est comprise entre 1 et la multiplicité de 0, qui vaut 1 : $\dim E_0(A_a) = 1$ pour tout a. Explicitement, $X = (x, y, z)^\top \in \operatorname{Ker} A_a$ si et seulement si $x + ay + z = 0$, $2y = 0$ et $x + y + z = 0$, soit $y = 0$ et $z = -x$:

$$E_0(A_a) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Valeur propre 2. On a $A_a - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $X = (x, y, z)^\top \in E_2(A_a)$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x + ay + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

soit, en ajoutant la seconde équation à la première,

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ (a+1)y=0. \end{cases}$$

— Si $a \neq -1$: $y=0$ et $z=x$, donc $E_2(A_a) = \text{Vect}(1,0,1)^\top$ est de dimension 1.

— Si $a=-1$: le système se réduit à $z=x+y$, donc $E_2(A_{-1}) = \left\{(x,y,x+y)^\top \ ; \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\left((1,0,1)^\top,(0,1,1)^\top\right)$ est de dimension 2.

3. La matrice A_a est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3, c'est-à-dire si et seulement si $\dim E_2(A_a) = 2$:

$$\boxed{A_a \text{ est diagonalisable si et seulement si } a=-1}.$$

Dans ce cas, en concaténant les bases de $E_0(A_{-1})$ et $E_2(A_{-1})$ trouvées à la question précédente, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres, et $A_{-1} = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7.66 **Énoncé p. 11**

1. On rappelle (chapitre 4) que le produit de deux matrices découpées en blocs compatibles se calcule comme un produit ordinaire, bloc par bloc, et que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.
Comme X est un scalaire (il commute avec toute matrice), on obtient

$$\begin{aligned} NM &= \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & XI_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} XI_n & A \\ -XB+XB & -BA+XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n & A \\ 0_n & XI_n-BA \end{pmatrix}, \\ MN &= \begin{pmatrix} XI_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & XI_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} XI_n-AB & XA \\ B-B & XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n-AB & XA \\ 0_n & XI_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ces deux matrices sont triangulaires supérieures par blocs, donc

$$\begin{aligned} \det(NM) &= \det(XI_n)\det(XI_n-BA) = X^n\chi_{BA}, \\ \det(MN) &= \det(XI_n-AB)\det(XI_n) = X^n\chi_{AB}. \end{aligned}$$

2. Les calculs précédents restent valables si l'on remplace X par un scalaire $t\in\mathbb{K}$: les matrices $M(t)$ et $N(t)$ obtenues sont dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ et vérifient

$$\det\big(N(t)M(t)\big) = t^n\chi_{BA}(t), \qquad \det\big(M(t)N(t)\big) = t^n\chi_{AB}(t).$$

Or $\det\big(N(t)M(t)\big) = \det N(t)\det M(t) = \det\big(M(t)N(t)\big)$, donc, pour tout $t\in\mathbb{K}$, $t^n\chi_{BA}(t) = t^n\chi_{AB}(t)$, et en particulier $\chi_{BA}(t) = \chi_{AB}(t)$ pour tout

$t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Les polynômes χ_{AB} et χ_{BA} coïncident en une infinité de points, donc

$$\boxed{\chi_{AB} = \chi_{BA}}.$$

3. Non. Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La seule matrice semblable à 0_2 est 0_2 elle-même (car $P^{-1}0_2P = 0_2$), et $BA \neq 0_2$: les matrices AB et BA ne sont pas semblables, bien qu'elles aient le même polynôme caractéristique X^2.

En revanche, si A (ou B) est inversible, alors $BA = A^{-1}(AB)A$, donc AB et BA sont semblables.

Correction de l'exercice 7.67 **Énoncé p. 11**

1. Par récurrence immédiate, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!]$, $J^k e_i = e_{i+k}$ où l'indice est lu modulo n (dans $[\![1, n]\!]$). En particulier $J^n e_i = e_i$ pour tout i, donc

$$\boxed{J^n = I_n}.$$

Le polynôme $X^n - 1$ est donc annulateur de J, et toute valeur propre λ de J en est racine : $\lambda^n = 1$. Les racines n-ièmes de l'unité étant les ω^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a bien $\mathrm{Sp}(J) \subset \{\omega^k \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

2. La i-ième colonne de J est $Je_i = e_{i+1}$ pour $i \leq n-1$, et la dernière est e_1. Pour $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de coordonnées $v_1, \dots, v_n$, la i-ième coordonnée de JV est donc v_{i-1} si $i \geq 2$, et v_n si $i = 1$: la multiplication par J décale les coordonnées d'un cran vers le bas, la dernière remontant en tête.

Les coordonnées de V_k sont $v_i = \omega^{(i-1)k}$. Pour $i \geq 2$, la i-ième coordonnée de JV_k vaut $\omega^{(i-2)k} = \omega^{-k}\,\omega^{(i-1)k}$, et la première vaut $\omega^{(n-1)k} = \omega^{-k}$ car $\omega^n = 1$. Ainsi

$$\boxed{JV_k = \omega^{-k} V_k}.$$

Comme $V_k \neq 0$, ω^{-k} est valeur propre de J. Lorsque k parcourt $[\![0, n-1]\!]$, $\omega^{-k} = \omega^{n-k}$ parcourt les n racines n-ièmes de l'unité, qui sont deux à deux distinctes. Avec la question précédente,

$$\mathrm{Sp}(J) = \{\omega^k \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!]\},$$

et J possède n valeurs propres distinctes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: elle est diagonalisable, et $(V_0, \dots, V_{n-1})$ est une base de vecteurs propres.

3. D'après la première question, $J^k e_i = e_{i+k}$ (indices modulo n) : la i-ième colonne de $P(J) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$ a pour coordonnées a_0 en ligne i, a_1 en ligne $i+1$, etc. Le coefficient de $P(J)$ en position (i, j) est a_{i-j}, l'indice étant lu modulo n :

$$P(J) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Notons Q la matrice de passage de la base canonique à $(V_0, \dots, V_{n-1})$ et $D = \operatorname{diag}(1, \omega^{-1}, \dots, \omega^{-(n-1)})$, de sorte que $J = QDQ^{-1}$. Alors $J^k = QD^kQ^{-1}$ pour tout k, donc

$$P(J) = QP(D)Q^{-1} \qquad \text{avec} \qquad P(D) = \operatorname{diag}\big(P(1), P(\omega^{-1}), \dots, P(\omega^{-(n-1)})\big).$$

La matrice $P(J)$ est semblable à une matrice diagonale, donc diagonalisable, et

$$\det\big(P(J)\big) = \det\big(P(D)\big) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k),$$

la dernière égalité venant de ce que $k \mapsto n-k$ (avec $n \equiv 0$) est une permutation de $[\![0, n-1]\!]$.

Correction de l'exercice 7.68 **Énoncé p. 11**

1. Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN$: Φ_A est linéaire, et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé. La matrice M dont toutes les colonnes sont égales à X est non nulle et vérifie $AM = \lambda M$ (le produit AM se calcule colonne par colonne), donc $\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi_A)$.
   Réciproquement, soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi_A)$ et $M \neq 0_n$ telle que $AM = \lambda M$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M ; l'égalité $AM = \lambda M$ s'écrit $AC_j = \lambda C_j$ pour tout j. L'une des colonnes au moins est non nulle, et c'est un vecteur propre de A : $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$. Ainsi
   $$\boxed{\operatorname{Sp}(\Phi_A) = \operatorname{Sp}(A)}.$$
2. On vient de voir que les colonnes de M vérifient $AC_j = \lambda C_j$: chacune appartient à $E_\lambda(A)$, c'est-à-dire est nulle ou vecteur propre de A associé à λ. Réciproquement, toute matrice non nulle dont les colonnes sont dans $E_\lambda(A)$ est vecteur propre de Φ_A. Donc
   $$E_\lambda(\Phi_A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ ; \ \text{chaque colonne de } M \text{ appartient à } E_\lambda(A)\}.$$
   L'application $M \mapsto (C_1, \dots, C_n)$ est un isomorphisme de $E_\lambda(\Phi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$, donc
   $$\dim E_\lambda(\Phi_A) = n \dim E_\lambda(A).$$
3. D'après le cours, un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace. Comme $\operatorname{Sp}(\Phi_A) = \operatorname{Sp}(A)$,
   $$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\Phi_A)} \dim E_\lambda(\Phi_A) = n \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A).$$
   Le membre de gauche vaut $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$, c'est-à-dire si et seulement si A est diagonalisable.
   Donc Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Correction de l'exercice 7.69 **Énoncé p. 11**

1. Soit $x \in E_{\lambda_j}(u)$. Comme $u(x) = \lambda_j x$, on a $P(u)(x) = P(\lambda_j)x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ (cours). En particulier, puisque $L_i(\lambda_j)$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon,

$$p_i(x) = L_i(\lambda_j)x = \begin{cases} x & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Comme u est diagonalisable, $E = \sum_{j=1}^{p} E_{\lambda_j}(u)$, la somme étant directe. Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_j \in E_{\lambda_j}(u)$, et par linéarité

$$p_i(x) = \sum_{j=1}^{p} p_i(x_j) = x_i.$$

Ainsi p_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\sum_{j\neq i} E_{\lambda_j}(u)$.

2. Avec les notations précédentes, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{p} p_i(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i = x \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} u(x_i) = u(x),$$

donc $\sum_{i=1}^{p} p_i = \mathrm{Id}_E$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i = u$.

3. Pour $x = x_1 + \cdots + x_p$ comme ci-dessus, $P(u)(x_i) = P(\lambda_i)x_i = P(\lambda_i)p_i(x)$, donc

$$P(u)(x) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)x_i = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)p_i(x), \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)\, p_i}.$$

Si P s'annule en chaque λ_i, cette formule donne $P(u) = 0$. Réciproquement, si $P(u) = 0$, alors pour $x \in E_{\lambda_i}(u)$ non nul, $0 = P(u)(x) = P(\lambda_i)x$, donc $P(\lambda_i) = 0$. Ainsi $P(u) = 0$ si et seulement si P s'annule en chaque valeur propre de u.

Correction de l'exercice 7.70 **Énoncé p. 12**

1. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u. Comme u est diagonalisable, $E = \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ (somme directe) ; soit $x \in F$ et $x = x_1 + \cdots + x_p$ sa décomposition, avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, posons $Q_i = \prod_{j\neq i}(X - \lambda_j)$. Pour tout j, $Q_i(u)(x_j) = Q_i(\lambda_j)x_j$, qui est nul si $j \neq i$; donc

$$Q_i(u)(x) = Q_i(\lambda_i)x_i \qquad \text{avec} \qquad Q_i(\lambda_i) = \prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.$$

Or F est stable par u, donc par u^k pour tout k (récurrence immédiate), donc par toute combinaison linéaire des u^k : $Q_i(u)(x) \in F$. Ainsi $x_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u)(x) \in F$.

Notons u_F l'endomorphisme de F induit par u. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i = F \cap E_{\lambda_i}(u)$ est un sous-espace de F sur lequel u_F coïncide avec $\lambda_i \operatorname{Id}$: $F_i \subset E_{\lambda_i}(u_F)$ (avec $E_{\lambda_i}(u_F) = \{0\}$ si λ_i n'est pas valeur propre de u_F). Ce qui précède montre que tout $x \in F$ est somme d'éléments des F_i : $F = F_1 + \cdots + F_p$. Donc F est la somme de ses sous-espaces propres pour u_F (ceux-ci contiennent les F_i et sont contenus dans F), et u_F est diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$. Pour $x \in E_\lambda(u)$, $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E_\lambda(u)$: le sous-espace $E_\lambda(u)$ est stable par v. Comme v est diagonalisable, la question précédente montre que l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par v est diagonalisable : il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(u)$ formée de vecteurs propres de v. Ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres de u (associés à λ).
   Comme $E = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ avec somme directe, la concaténation des bases $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ est une base de E : elle est formée de vecteurs propres communs à u et v.
3. Notons u et v les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associés à A et B. Ils sont diagonalisables et commutent, donc il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres communs. Si P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, les matrices $D = P^{-1}AP$ et $D' = P^{-1}BP$ sont diagonales, et
$$P^{-1}(A+B)P = D + D', \qquad P^{-1}(AB)P = DD'$$
   sont diagonales : $A + B$ et AB sont diagonalisables.
   Sans l'hypothèse de commutation, le résultat tombe en défaut. Prenons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   toutes deux diagonalisables (deux valeurs propres distinctes 1 et -1). Alors
$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   La matrice $A + B$ a pour seule valeur propre 0 et n'est pas nulle : elle n'est pas diagonalisable. La matrice AB a pour seule valeur propre -1 et n'est pas égale à $-I_2$: elle n'est pas diagonalisable non plus.

Correction de l'exercice 7.71 **Énoncé p. 12**

1. L'application $M \mapsto AM - MA$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même, et $C(A)$ est son noyau : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Comme A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$; les d_i sont les valeurs propres de A, chaque $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ apparaissant exactement m_λ fois. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, posons $N = P^{-1}MP$. Alors
$$AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff DN = ND,$$
   et $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui envoie $C(A)$ sur $C(D)$: $\dim C(A) = \dim C(D)$.
   Calculons $C(D)$. Pour $N = (n_{ij})$, le coefficient (i, j) de DN est $d_i n_{ij}$ et celui

de ND est $n_{ij}d_j$. Donc

$$DN = ND \iff \forall (i,j),\ (d_i - d_j)n_{ij} = 0 \iff \big(\forall (i,j),\ d_i \neq d_j \Rightarrow n_{ij} = 0\big).$$

Ainsi $C(D)$ est l'ensemble des matrices dont les coefficients sont nuls hors des positions (i,j) telles que $d_i = d_j$, les autres coefficients étant quelconques : sa dimension est le nombre de couples (i,j) tels que $d_i = d_j$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il y a m_λ indices i tels que $d_i = \lambda$, donc m_λ^2 couples (i,j) avec $d_i = d_j = \lambda$. Finalement

$$\boxed{\dim C(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda^2}.$$

2. Comme A est diagonalisable, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda = n$. Pour tout λ, m_λ est un entier supérieur ou égal à 1, donc $m_\lambda^2 \geq m_\lambda$, avec égalité si et seulement si $m_\lambda = 1$. En sommant,
$$\dim C(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda^2 \geq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda = n,$$
avec égalité si et seulement si $m_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, c'est-à-dire si et seulement si A a n valeurs propres distinctes (puisque la somme des m_λ vaut n).
3. Les matrices $I_n, A, \dots, A^{n-1}$ commutent avec A, donc $\mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) \subset C(A)$.
Montrons que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre. Soit $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k = 0_n$, et $\displaystyle Q = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$. Le polynôme Q est annulateur de A, donc s'annule en chacune des n valeurs propres distinctes de A. Un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant n racines distinctes est nul : $Q = 0$, donc tous les c_k sont nuls.
Ainsi $\dim \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) = n = \dim C(A)$ d'après la question précédente, et l'inclusion est une égalité :
$$C(A) = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1}).$$

Correction de l'exercice 7.72 **Énoncé p. 12**

1. On rappelle (chapitre 4) qu'un produit de matrices découpées en blocs compatibles se calcule bloc par bloc. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$,
$$M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ BY \end{pmatrix},$$
donc
$$M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \big(AX = \lambda X \text{ et } BY = \lambda Y\big).$$
Tout vecteur de $\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{K})$ s'écrivant sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, on obtient l'égalité annoncée (avec la convention $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, éventuellement réduit à $\{0\}$ si λ n'est pas valeur propre).

L'application $(X, Y) \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $E_\lambda(A) \times E_\lambda(B)$ sur $E_\lambda(M)$, donc

$$\boxed{\dim E_\lambda(M) = \dim E_\lambda(A) + \dim E_\lambda(B)}.$$

En particulier $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$.

2. D'après la question précédente, en sommant sur $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim E_\lambda(M) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim E_\lambda(B),$$

les termes ajoutés pour $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ (resp. $\lambda \notin \mathrm{Sp}(B)$) étant nuls. D'après le cours, la première somme du membre de droite est inférieure ou égale à n, avec égalité si et seulement si A est diagonalisable, et la seconde est inférieure ou égale à p, avec égalité si et seulement si B est diagonalisable. Le membre de gauche est donc inférieur ou égal à $n + p$, avec égalité si et seulement si A et B sont diagonalisables. Or M est diagonalisable si et seulement si ce membre de gauche vaut $n + p$. Donc M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.

3. La matrice P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -X \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$: en effet, par produit par blocs,

$$\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -X \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -X + X \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = I_{n+p}.$$

Ensuite

$$M'P = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX + C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

puis

$$P^{-1}M'P = \begin{pmatrix} I_n & -X \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & AX + C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX + C - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = M,$$

puisque $AX - XB = -C$. Ainsi

$$\boxed{P^{-1}M'P = M}$$

et M' est semblable à M. En particulier, M' est alors diagonalisable si et seulement si A et B le sont. L'existence d'une matrice X telle que $AX - XB = -C$ est l'objet de l'exercice suivant.

Correction de l'exercice 7.73 **Énoncé p. 12**

1. Soit $X \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, c'est-à-dire $AX = XB$. Montrons par récurrence que $A^k X = XB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $k = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $A^k X = XB^k$. Alors

$$A^{k+1}X = A(A^kX) = A(XB^k) = (AX)B^k = (XB)B^k = XB^{k+1}.$$

Pour $P = \sum_k a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, par combinaison linéaire,

$$P(A)X = \sum_k a_k A^k X = \sum_k a_k XB^k = XP(B).$$

2. Soit $X \in \operatorname{Ker}\Phi$. Avec $P = \chi_B$, la question précédente et le théorème de Cayley-Hamilton donnent

$$\chi_B(A)X = X\chi_B(B) = X \times 0_n = 0_n.$$

Le polynôme χ_B est scindé sur $\mathbb{C}$: $\chi_B = \prod_{j=1}^{n}(X-\mu_j)$ où les μ_j sont les valeurs propres de B (comptées avec multiplicité). Donc $\chi_B(A) = \prod_{j=1}^{n}(A-\mu_j I_n)$. Pour tout j, $\mu_j \in \operatorname{Sp}(B)$ donc $\mu_j \notin \operatorname{Sp}(A)$, et $A-\mu_j I_n$ est inversible. La matrice $\chi_B(A)$ est un produit de matrices inversibles, donc inversible, et $\chi_B(A)X = 0_n$ donne $X = 0_n$.
Ainsi $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_n\}$: l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (il est linéaire) est injectif, donc bijectif puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie.

3. Un tel V existe : $\chi_{B^\top} = \chi_B$ (exercice 7.61), donc $\operatorname{Sp}(B^\top) = \operatorname{Sp}(B)$ contient λ.
On a $AU = \lambda U$ et $B^\top V = \lambda V$, d'où $V^\top B = (B^\top V)^\top = \lambda V^\top$. Alors

$$\Phi(UV^\top) = (AU)V^\top - U(V^\top B) = \lambda UV^\top - \lambda UV^\top = 0_n,$$

donc $UV^\top \in \operatorname{Ker}\Phi$. De plus $UV^\top \neq 0_n$: si $u_i \neq 0$ est une coordonnée non nulle de U et $v_j \neq 0$ une coordonnée non nulle de V, le coefficient (i,j) de $UV^\top$ vaut $u_i v_j \neq 0$.
Ainsi $\operatorname{Ker}\Phi \neq \{0_n\}$ et Φ n'est pas injective, donc pas bijective. Avec la question précédente : Φ est bijective si et seulement si $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$.

Correction de l'exercice 7.74 **Énoncé p. 13**

1. Comme A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et D diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, chaque μ_i apparaissant m_i fois et 0 apparaissant $n - \sum_{i=1}^{p} m_i$ fois (éventuellement aucune). Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PD^kP^{-1}$, et deux matrices semblables ont la même trace, donc

$$\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(D^k) = \sum_{i=1}^{p} m_i \mu_i^k$$

(les coefficients diagonaux nuls de D ne contribuent pas car $k \geq 1$).

2. Raisonnons par l'absurde en supposant $p \geq 1$. On a $p \leq n$ (les μ_i sont des valeurs propres distinctes de A), donc l'hypothèse donne, pour $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{p} m_i \mu_i^k = 0, \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_p \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1^p & \mu_2^p & \cdots & \mu_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de ce système s'écrit $W \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_p)$, où $W = \left(\mu_j^{i-1}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$ est la matrice de Vandermonde des μ_j : son déterminant est $\prod_{1 \leq i < j \leq p}(\mu_j - \mu_i)$, non nul puisque les μ_j sont deux à deux distincts. Le déterminant de $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ est $\prod_j \mu_j \neq 0$, les μ_j étant non nuls. La matrice du système est donc inversible, et $m_1 = \cdots = m_p = 0$, ce qui contredit $m_i = \dim E_{\mu_i}(A) \geq 1$. Donc

$$\boxed{p = 0}.$$

3. Puisque $p = 0$, la seule valeur propre possible de A est 0, et la matrice diagonale D de la première question est nulle : $A = P0_nP^{-1} = 0_n$.
   Sans l'hypothèse de diagonalisabilité, le résultat est faux : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0_2$, donc $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = 0$, et pourtant $A \neq 0_2$.

Correction de l'exercice 7.75 **Énoncé p. 13**

1. Le polynôme $X^k - 1$ est annulateur de A. Toute valeur propre complexe λ de A est racine de ce polynôme : $\lambda^k = 1$, c'est-à-dire λ est une racine k-ième de l'unité. En particulier $|\lambda| = 1$.
2. Le polynôme caractéristique $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$ est scindé sur $\mathbb{C}$: $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ avec λ_1, λ_2 les valeurs propres complexes de A (éventuellement égales), de sorte que $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$. Comme $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$,
   $$|\det(A)| = |\lambda_1|\,|\lambda_2| = 1 \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{tr}(A)| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = 2.$$
   Comme A est à coefficients entiers, $\det(A) \in \mathbb{Z}$, donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$; de même $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$ et $|\mathrm{tr}(A)| \leq 2$.
3. Posons $t = \mathrm{tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $d = \det(A) \in \{-1, 1\}$, de sorte que $\chi_A = X^2 - tX + d$, dont les racines sont de module 1.
   Cas $d = -1$. Le discriminant $t^2 + 4$ est strictement positif : les racines sont réelles, de module 1 et de produit -1, donc ce sont 1 et -1, et $t = 0$: $\chi_A = X^2 - 1$.
   Cas $d = 1$. Si $t = \pm 2$, $\chi_A = (X \mp 1)^2$. Si $|t| \leq 1$, le discriminant $t^2 - 4$ est strictement négatif : les racines sont deux complexes conjugués λ et $\overline{\lambda}$, de produit $|\lambda|^2 = d = 1$, ce qui est compatible avec la question 1.
   La liste des polynômes caractéristiques possibles est donc
   $$X^2-1, \qquad X^2+1, \qquad X^2-X+1, \qquad X^2+X+1, \qquad (X-1)^2, \qquad (X+1)^2.$$
   Montrons que $A^{12} = I_2$ dans chaque cas.
   Pour les quatre premiers polynômes, χ_A a deux racines distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Les racines sont respectivement ± 1, $\pm \mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi/3}$ et $\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\pi/3}$, et chacune vérifie $\lambda^{12} = 1$ (elles sont d'ordre 1, 2, 4, 6 ou 3, qui divise 12). Donc $D^{12} = I_2$ et $A^{12} = PD^{12}P^{-1} = I_2$.
   Pour $\chi_A = (X - \varepsilon)^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$, le théorème de Cayley-Hamilton donne $(A - \varepsilon I_2)^2 = 0_2$. Posons $N = A - \varepsilon I_2$; comme N et I_2 commutent et $N^2 = 0_2$, la formule du binôme donne
   $$I_2 = A^k = (\varepsilon I_2 + N)^k = \varepsilon^k I_2 + k\varepsilon^{k-1}N, \qquad \text{soit} \qquad k\varepsilon^{k-1}N = (1 - \varepsilon^k)I_2.$$
   Si $1 - \varepsilon^k \neq 0$, la matrice $k\varepsilon^{k-1}N$ serait inversible, alors que $N^2 = 0_2$ interdit à N d'être inversible. Donc $\varepsilon^k = 1$, puis $k\varepsilon^{k-1}N = 0_2$ avec $k \neq 0$, donc $N = 0_2$ et $A = \varepsilon I_2$. Dans ce cas $A^{12} = \varepsilon^{12} I_2 = I_2$.
   Dans tous les cas,
   $$\boxed{A^{12} = I_2}.$$

Correction de l'exercice 7.76 **Énoncé p. 14**

1. Soit $y \in F_x$: il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(\mu_0, \dots, \mu_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ tels que $y = \sum_{k=0}^{m} \mu_k u^k(x)$. Par linéarité,
$$u(y) = \sum_{k=0}^{m} \mu_k u^{k+1}(x) \in F_x.$$
Donc F_x est stable par u.
Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $u^k(x) \in G$. *Initialisation.* $u^0(x) = x \in G$. *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $u^k(x) \in G$. Comme G est stable par u, $u^{k+1}(x) = u\big(u^k(x)\big) \in G$. Ainsi G contient tous les vecteurs $u^k(x)$, donc le sous-espace qu'ils engendrent : $F_x \subset G$.
Le sous-espace F_x est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x.

2. Soit I l'ensemble des entiers $q \in [\![1, n]\!]$ tels que la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)\big)$ soit libre. Comme $x \neq 0$, la famille (x) est libre et $1 \in I$. L'ensemble I est une partie non vide de $[\![1, n]\!]$, donc finie : elle admet un plus grand élément p.
Notons $V = \mathrm{Vect}\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ et montrons que $u^p(x) \in V$.
   - Si $p = n$, la famille $\big(x, \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est libre et compte $n = \dim E$ vecteurs : c'est une base de E, donc $V = E$ et $u^n(x) \in V$.
   - Si $p < n$, alors $p + 1 \in [\![1, n]\!]$ et $p + 1 \notin I$ par maximalité de p : la famille $\big(x, \dots, u^p(x)\big)$ est liée. Il existe donc $(\mu_0, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ non nul tel que $\sum_{k=0}^{p} \mu_k u^k(x) = 0$. Si $\mu_p = 0$, la liberté de $\big(x, \dots, u^{p-1}(x)\big)$ donne $\mu_0 = \cdots = \mu_{p-1} = 0$, ce qui est exclu. Donc $\mu_p \neq 0$ et
$$u^p(x) = -\frac{1}{\mu_p} \sum_{k=0}^{p-1} \mu_k u^k(x) \in V.$$
Dans les deux cas, $u^p(x) \in V$. Comme la famille $\big(x, \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est libre, les coordonnées de $u^p(x)$ dans cette famille sont uniques, ce qui définit sans ambiguïté les scalaires $a_0, \dots, a_{p-1}$ et le polynôme P_x, unitaire de degré p.

3. Montrons que V est stable par u. Pour $j \in [\![0, p-2]\!]$, $u\big(u^j(x)\big) = u^{j+1}(x) \in V$, et $u\big(u^{p-1}(x)\big) = u^p(x) \in V$ d'après la question 2. Les images des vecteurs d'une famille génératrice de V sont dans V, donc, par linéarité, $u(V) \subset V$.
Ainsi V est stable par u et contient x : d'après la question 1, $F_x \subset V$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) \in V$. L'inclusion $V \subset F_x$ est immédiate, donc $F_x = V$. La famille $\mathcal{B}_x$ est libre et engendre F_x : c'est une base de F_x, et
$$\boxed{\dim F_x = p}.$$

4. Pour $j \in [\![0, p-2]\!]$, $u_x\big(u^j(x)\big) = u^{j+1}(x)$: la colonne $j+1$ de M_x a un 1 en ligne $j+2$ et des zéros ailleurs. Enfin $u_x\big(u^{p-1}(x)\big) = u^p(x) = -a_0 x - \cdots - a_{p-1} u^{p-1}(x)$. Donc
$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Si $p = 1$, $M_x = (-a_0)$ et $\chi_{u_x} = X + a_0 = P_x$. Si $p \geq 2$, M_x est la transposée de la matrice compagnon C associée à P_x dans l'exercice 7.63 (avec p au lieu de n). Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique (exercice 7.61) : $\chi_{C^\top} = \chi_C$; et le polynôme caractéristique de la matrice compagnon associée à P_x est P_x (exercice 7.63) : $\chi_C = P_x$. Dans tous les cas,

$$\boxed{\chi_{u_x} = \chi_{M_x} = P_x}.$$

5. Par définition des scalaires $a_0, \dots, a_{p-1}$,

$$P_x(u)(x) = u^p(x) + a_{p-1}u^{p-1}(x) + \cdots + a_1 u(x) + a_0 x = 0.$$

6. Si $p = n$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M_x$ et $\chi_u = P_x$. Supposons $p < n$ et notons $\mathcal{B} = \big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), e_{p+1}, \dots, e_n\big)$. Les p premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ forment une base de F_x, qui est stable par u : leurs images par u sont dans F_x, donc leurs coordonnées sur $e_{p+1}, \dots, e_n$ sont nulles. La matrice de u est donc triangulaire par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} M_x & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{avec } B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

Pour $t \in \mathbb{K}$, la matrice

$$tI_n - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} tI_p - M_x & -B \\ 0 & tI_{n-p} - C \end{pmatrix}$$

est triangulaire par blocs, donc son déterminant est le produit des déterminants des blocs diagonaux :

$$\chi_u(t) = \chi_{M_x}(t)\,\chi_C(t) = P_x(t)\,\chi_C(t).$$

Les polynômes χ_u et $P_x\chi_C$ coïncident en une infinité de points, donc sont égaux : $\chi_u = P_x\chi_C$, et P_x divise χ_u.

7. D'après la question précédente, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_u = QP_x$. Alors $\chi_u(u) = Q(u) \circ P_x(u)$, donc, d'après la question 5,

$$\chi_u(u)(x) = Q(u)\big(P_x(u)(x)\big) = Q(u)(0) = 0.$$

Le vecteur non nul x était quelconque : $\chi_u(u)$ s'annule en tout vecteur non nul de E, et en 0 par linéarité. Donc

$$\boxed{\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$$

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A. Dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, donc $\chi_u = \chi_A$ et, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}\big(P(u)\big) = P(A)$. D'après la question 7,

$$\chi_A(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}\big(\chi_u(u)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_n.$$

9. Supposons $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. La famille (x) est libre et, si $n \geq 2$, la famille $(x, u(x)) = (x, \lambda x)$ est liée : dans tous les cas $p = 1$. La relation $u(x) = \lambda x = -a_0 x$ donne $a_0 = -\lambda$, donc $P_x = X - \lambda$. D'après la question 6, $X - \lambda$ divise χ_u, c'est-à-dire $\chi_u(\lambda) = 0$: toute valeur propre de u est racine de χ_u.

Correction de l'exercice 7.77 **Énoncé p. 14**

1. Les coefficients de T_n sont $t_{j,j} = 2$, $t_{j,j-1} = t_{j,j+1} = -1$ et $t_{j,l} = 0$ si $|j-l| \geq 2$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième coordonnée de $T_n X$ vaut donc

$$(T_n X)_j = -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1},$$

où le terme x_0 (pour $j = 1$) et le terme x_{n+1} (pour $j = n$) sont nuls, conformément à la convention $x_0 = x_{n+1} = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} T_n X = \lambda X &\iff \forall j \in [\![1, n]\!],\ -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} = \lambda x_j \\ &\iff \forall j \in [\![1, n]\!],\ x_{j-1} + x_{j+1} = (2-\lambda)\, x_j. \end{aligned}$$

2. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, la formule $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ donne

$$x_{j-1} + x_{j+1} = \sin\big((j-1)\theta\big) + \sin\big((j+1)\theta\big) = 2\sin(j\theta)\cos\theta = 2\cos(\theta)\, x_j.$$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme $1 \leq k \leq n$, on a $\theta_k \in]0, \pi[$. Posons $x_j = \sin(j\theta_k)$ pour $j \in [\![0, n+1]\!]$: alors $x_0 = \sin 0 = 0$, $x_{n+1} = \sin(k\pi) = 0$, et $X_k = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. D'après la question 2, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$x_{j-1} + x_{j+1} = 2\cos(\theta_k)\, x_j = (2 - \lambda_k)\, x_j,$$

donc $T_n X_k = \lambda_k X_k$ d'après la question 1. Enfin $X_k \neq 0$: sa première coordonnée $\sin\theta_k$ est strictement positive car $\theta_k \in]0, \pi[$. Donc X_k est un vecteur propre de T_n associé à la valeur propre λ_k.

4. On a $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \pi$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc

$$1 > \cos\theta_1 > \cos\theta_2 > \cdots > \cos\theta_n > -1,$$

soit

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < 4.$$

Les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc n valeurs propres distinctes de $T_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice de taille n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, et son polynôme caractéristique, de degré n, n'a pas d'autre racine :

$$\boxed{T_n \text{ est diagonalisable et } \operatorname{Sp}(T_n) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}}.$$

Les n sous-espaces propres sont de dimension au moins 1 et la somme de leurs dimensions vaut n (diagonalisabilité) : chacun est de dimension 1, et $E_{\lambda_k}(T_n) = \operatorname{Vect}(X_k)$.
Enfin, $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, donc

$$\lambda_k = 2(1 - \cos\theta_k) = 4\sin^2\frac{\theta_k}{2} = 4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

5. On a $\det T_1 = 2$ et $\det T_2 = 4 - 1 = 3$. Pour $n \geq 3$, développons $\det T_n$ par rapport à sa première ligne, qui n'a que deux coefficients non nuls : 2 en position $(1,1)$ et -1 en position $(1,2)$.
   — Le mineur associé à la position $(1,1)$ est $\det T_{n-1}$.

— Le mineur associé à la position $(1,2)$ s'obtient en supprimant la première ligne et la deuxième colonne. La matrice obtenue a pour première colonne $(-1,0,\dots,0)^\top$ et, une fois cette colonne et sa première ligne supprimées, il reste T_{n-2}. En développant par rapport à cette première colonne, ce mineur vaut $-\det T_{n-2}$.

Donc, pour $n \geq 3$,

$$\det T_n = 2\det T_{n-1} + (-1)(-1)^{1+2}(-\det T_{n-2}) = 2\det T_{n-1} - \det T_{n-2}.$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\det T_n = n+1$ et $\det T_{n+1} = n+2$ ».

Initialisation. $\det T_1 = 2$ et $\det T_2 = 3$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Alors $\det T_{n+2} = 2\det T_{n+1} - \det T_n = 2(n+2) - (n+1) = n+3$, et $\det T_{n+1} = n+2$ par hypothèse : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\boxed{\det T_n = n+1}$.

Par ailleurs, T_n est diagonalisable : $T_n = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, donc $\det T_n = \det D = \prod_{k=1}^n \lambda_k$. D'après la question 4,

$$n+1 = \prod_{k=1}^n 4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)} = 4^n\Big(\prod_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\Big)^2.$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{k\pi}{2(n+1)} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc chaque sinus est strictement positif et

$$\boxed{\prod_{k=1}^n \sin\frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}}.$$

6. Soit $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{R}$. La matrice $tI_n - T_n$ est tridiagonale, de coefficients diagonaux $t-2$ et de coefficients sous- et sur-diagonaux égaux à 1. Si $n = 2$,

$$D_2(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2 - 1 = (t-2)D_1(t) - D_0(t).$$

Si $n \geq 3$, on développe par rapport à la première ligne, comme à la question 5 : le mineur associé à la position $(1,1)$ est $D_{n-1}(t)$; celui associé à la position $(1,2)$ est le déterminant d'une matrice de première colonne $(1,0,\dots,0)^\top$ dont le bloc restant est $tI_{n-2} - T_{n-2}$, et vaut $D_{n-2}(t)$. Donc

$$D_n(t) = (t-2)D_{n-1}(t) + 1\cdot(-1)^{1+2}D_{n-2}(t) = (t-2)D_{n-1}(t) - D_{n-2}(t).$$

7. Soit $\theta \in \left]0,\pi\right[$ et $t = 2 - 2\cos\theta$, de sorte que $t-2 = -2\cos\theta$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{Q}(n)$:

$$\text{« } D_n(t) = (-1)^n\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta} \text{ et } D_{n+1}(t) = (-1)^{n+1}\frac{\sin\big((n+2)\theta\big)}{\sin\theta} \text{ ».}$$

Initialisation. $D_0(t) = 1 = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ et $D_1(t) = t-2 = -2\cos\theta = -\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$: $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{Q}(n)$. D'après la question 6,

$$\begin{aligned} D_{n+2}(t) &= (t-2)D_{n+1}(t) - D_n(t) \\ &= -2\cos\theta\cdot(-1)^{n+1}\frac{\sin\big((n+2)\theta\big)}{\sin\theta} - (-1)^n\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta} \\ &= (-1)^{n+2}\,\frac{2\cos\theta\sin\big((n+2)\theta\big) - \sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

Or $2\cos\theta\sin\big((n+2)\theta\big) = \sin\big((n+3)\theta\big) + \sin\big((n+1)\theta\big)$, donc

$$D_{n+2}(t) = (-1)^{n+2}\frac{\sin\big((n+3)\theta\big)}{\sin\theta},$$

et $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\boxed{D_n(2-2\cos\theta) = (-1)^n\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \det(tI_n - T_n) = \chi_{T_n}(t)$. L'application $\theta \mapsto 2-2\cos\theta$ est une bijection de $]0,\pi[$ sur $]0,4[$. Pour $t = 2-2\cos\theta$ dans cet intervalle,

$$\chi_{T_n}(t) = 0 \iff \sin\big((n+1)\theta\big) = 0 \iff (n+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$$
$$\iff \theta \in \left\{\frac{k\pi}{n+1}\ ;\ k \in [\![1,n]\!]\right\},$$

la dernière équivalence car $0 < (n+1)\theta < (n+1)\pi$. Les réels $\lambda_k = 2-2\cos\theta_k$, $k \in [\![1,n]\!]$, sont donc n racines distinctes de χ_{T_n} dans $]0,4[$. Comme χ_{T_n} est unitaire de degré n,

$$\chi_{T_n} = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(T_n) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}.$$

8. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, l'équation du mouvement s'écrit

$$y_j'' = \frac{k}{m}\,(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) = -\omega_0^2\,(-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1}) = -\omega_0^2\,(T_nY)_j$$

d'après le calcul de la question 1, avec $y_0 = y_{n+1} = 0$. Donc $Y'' = -\omega_0^2\,T_nY$.

9. Pour $Y(t) = \cos(\omega t)\,X$, on a $Y''(t) = -\omega^2\cos(\omega t)\,X$. Donc Y est solution si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \omega^2\cos(\omega t)\,X = \omega_0^2\cos(\omega t)\,T_nX.$$

Si cette relation est vraie, elle donne en $t=0$: $T_nX = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}X$. Réciproquement, si $T_nX = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}X$, la relation est vraie pour tout t. Comme $X \neq 0$, Y est solution si et seulement si X est un vecteur propre de T_n, de valeur propre associée $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$, c'est-à-dire $\omega^2 = \omega_0^2\lambda$.
Les valeurs propres de T_n sont les $\lambda_k = 4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}$, et $\omega > 0$, donc les pulsations possibles sont

$$\omega_k = \omega_0\sqrt{\lambda_k} = 2\omega_0\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}, \qquad k \in [\![1,n]\!],$$

le sinus étant positif. Dans le mode propre associé à ω_k, $Y(t) = \cos(\omega_k t)\,X_k$, soit

$$y_j(t) = \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right)\cos(\omega_k t), \qquad j \in [\![1,n]\!].$$

Toutes les masses oscillent à la même pulsation ω_k, en phase ou en opposition de phase, la j-ième avec l'amplitude $\left|\sin\frac{jk\pi}{n+1}\right|$: les amplitudes sont les valeurs aux points $j/(n+1)$ de la fonction $s \mapsto \sin(k\pi s)$. Pour $k=1$, toutes les masses se déplacent dans le même sens, l'amplitude étant maximale au centre de la chaîne ; pour $k=n$, $\sin\frac{jn\pi}{n+1} = (-1)^{j+1}\sin\frac{j\pi}{n+1}$ et deux masses voisines oscillent en opposition de phase.

10. La famille $(X_1, \dots, X_n)$ est formée de n vecteurs propres de T_n associés à des valeurs propres distinctes : elle est libre, donc c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit Y une solution et, pour $t \in \mathbb{R}$, $z_1(t), \dots, z_n(t)$ les coordonnées de $Y(t)$ dans cette base. Chaque z_k est une combinaison linéaire fixe des fonctions $y_1, \dots, y_n$ (les coordonnées dans une base dépendent linéairement du vecteur), donc est deux fois dérivable, et

$$Y''(t) = \sum_{k=1}^{n} z_k''(t)\, X_k \qquad \text{et} \qquad -\omega_0^2\, T_n Y(t) = -\sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 z_k(t)\, X_k,$$

puisque $\omega_0^2 \lambda_k = \omega_k^2$. Par unicité des coordonnées dans une base, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $z_k''(t) = -\omega_k^2 z_k(t)$. Les solutions de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, avec $\omega_k > 0$, sont les $t \mapsto \alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t)$ avec $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$. Donc

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t)\big) X_k.$$

Réciproquement, le même calcul montre que toute fonction de cette forme est solution.

11. Soit k fixé. Quand $n \to +\infty$, $\frac{k\pi}{2(n+1)} \to 0$ et $\sin v \sim v$ en 0, donc

$$\omega_k \sim 2\omega_0 \cdot \frac{k\pi}{2(n+1)} = k \cdot \frac{\pi\omega_0}{n+1}.$$

Pour n grand, les premières pulsations propres sont donc des multiples entiers de la pulsation fondamentale $\frac{\pi\omega_0}{n+1}$. C'est ce qui se produit pour une corde vibrante de longueur L fixée à ses deux extrémités, dont les pulsations propres sont $\frac{k\pi c}{L}$, c désignant la célérité des ondes ; on retrouve cette expression avec $L = (n+1)a$, où a est la distance entre deux masses voisines au repos, et $c = a\omega_0$. Les deux modèles diffèrent pour les modes élevés : les pulsations de la chaîne restent majorées par $2\omega_0$, alors que celles de la corde ne sont pas bornées.

Correction de l'exercice 7.78 **Énoncé p. 16**

1. Comme $X \neq 0$, on a $x_{i_0} \neq 0$. La i_0-ième ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = \lambda x_{i_0}$, soit

$$(\lambda - a_{i_0,i_0})\, x_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j.$$

Par l'inégalité triangulaire et le choix de i_0,

$$\left|\lambda - a_{i_0,i_0}\right| \left|x_{i_0}\right| \leq \sum_{j \neq i_0} \left|a_{i_0,j}\right| \left|x_j\right| \leq \left(\sum_{j \neq i_0} \left|a_{i_0,j}\right|\right) \left|x_{i_0}\right| = r_{i_0}(A) \left|x_{i_0}\right|.$$

En divisant par $\left|x_{i_0}\right| > 0$, $\left|\lambda - a_{i_0,i_0}\right| \leq r_{i_0}(A)$, c'est-à-dire $\lambda \in D_{i_0}(A)$.
Toute valeur propre complexe de A admet un vecteur propre, donc appartient à l'un des disques $D_i(A)$:

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)}.$$

2. Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique, donc le même spectre (exercice 7.61, appliqué avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^\top) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Les coefficients de $A^\top$ sont $(A^\top)_{i,j} = a_{j,i}$: le j-ième disque de Gershgorin de $A^\top$ a pour centre $(A^\top)_{j,j} = a_{j,j}$ et pour rayon

$$r_j(A^\top) = \sum_{i \neq j} \left|(A^\top)_{j,i}\right| = \sum_{i \neq j} \left|a_{i,j}\right| = c_j(A).$$

La question 1 appliquée à $A^\top$ donne donc

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^\top) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left\{z \in \mathbb{C} \,;\, \left|z - a_{j,j}\right| \leq c_j(A)\right\}.$$

3. Supposons A non inversible. Alors $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et, d'après la question 1, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $0 \in D_i(A)$, c'est-à-dire $\left|a_{i,i}\right| = \left|0 - a_{i,i}\right| \leq r_i(A)$. Cela contredit l'hypothèse de diagonale strictement dominante. Donc A est inversible.
4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. D'après la question 1, il existe i tel que $\left|\lambda - a_{i,i}\right| \leq r_i(A)$, donc

$$|\lambda| \leq \left|\lambda - a_{i,i}\right| + \left|a_{i,i}\right| \leq r_i(A) + \left|a_{i,i}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

De même, d'après la question 2, il existe j tel que $\left|\lambda - a_{j,j}\right| \leq c_j(A)$, d'où $|\lambda| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$. Le module de λ est inférieur aux deux majorants, donc à leur minimum.

Si A est stochastique, ses coefficients sont positifs et chaque ligne a pour somme 1 : $\sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right| = 1$ pour tout i, et la majoration donne $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, ce qui est le résultat de la question 2 de l'exercice 7.64.
5. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ avec $|\lambda| = 1$. D'après la question 1, il existe i tel que $\left|\lambda - a_{i,i}\right| \leq r_i(A)$. Les coefficients de A sont positifs et la i-ième ligne a pour somme 1, donc $r_i(A) = 1 - a_{i,i}$, avec $0 < a_{i,i} \leq 1$. Posons $\mu = \lambda - a_{i,i}$, de sorte que $|\mu| \leq 1 - a_{i,i}$. Alors

$$\begin{aligned} 1 = |\lambda|^2 = \left|\mu + a_{i,i}\right|^2 &= |\mu|^2 + 2a_{i,i}\,\mathrm{Re}(\mu) + a_{i,i}^2 \\ &\leq |\mu|^2 + 2a_{i,i}\,|\mu| + a_{i,i}^2 = \left(|\mu| + a_{i,i}\right)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Les deux inégalités sont donc des égalités. La seconde donne $|\mu| = 1 - a_{i,i}$ et la première, $\mathrm{Re}(\mu) = |\mu|$ (on a utilisé $a_{i,i} > 0$), ce qui impose $\mu \in \mathbb{R}_+$. Ainsi $\mu = 1 - a_{i,i}$ et

$$\lambda = a_{i,i} + \mu = 1.$$

Donc 1 est la seule valeur propre complexe de A de module 1 (et c'en est une : chaque ligne de A a pour somme 1, donc $A(1, \ldots, 1)^\top = (1, \ldots, 1)^\top$, voir la question 1 de l'exercice 7.64).

La question 3 de l'exercice 7.64 suppose tous les coefficients strictement positifs ; on n'a supposé ici que la positivité stricte des coefficients diagonaux, et l'on obtient la même conclusion sur les valeurs propres de module 1. En revanche, on n'obtient plus $E_1(A) = \mathrm{Vect}(U)$: la matrice I_n est stochastique à diagonale strictement positive, et $E_1(I_n) = \mathbb{C}^n$. L'hypothèse sur la diagonale ne peut pas être supprimée : la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est stochastique et admet -1 pour valeur propre.

6. Supposons $n \geq 3$. Les coefficients diagonaux de T_n valent 2 ; $r_1(T_n) = r_n(T_n) = 1$ et $r_i(T_n) = 2$ pour $2 \leq i \leq n-1$. Les disques sont donc $\{|z-2| \leq 1\}$ et $\{|z-2| \leq 2\}$, et la question 1 donne

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(T_n) \subset \big\{z \in \mathbb{C} \,;\ |z-2| \leq 2\big\}.$$

(Pour $n = 2$, on obtient le disque de rayon 1 ; pour $n = 1$, le singleton $\{2\}$.)
Le spectre exact est formé des réels $\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k \in [\![1, n]\!]$, tous dans $]0, 4[$, c'est-à-dire dans le diamètre réel du disque trouvé, privé de ses extrémités. La localisation ne peut pas être améliorée uniformément en n : $\lambda_1 \to 0$ et $\lambda_n \to 4$ quand $n \to +\infty$, de sorte que les valeurs propres s'approchent des deux points du cercle frontière situés sur l'axe réel. Elle ne donne en revanche ni le fait que les valeurs propres sont réelles, ni le fait que T_n est inversible (0 est sur le bord du disque).

7. La matrice D est inversible, de coefficients diagonaux $d_i > 0$, et $D^{-1}AD$ est semblable à A. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc le même spectre complexe : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D^{-1}AD) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
Le coefficient d'indice (i, j) de $D^{-1}AD$ vaut $\dfrac{a_{i,j}\, d_j}{d_i}$; en particulier ses coefficients diagonaux sont les $a_{i,i}$, et

$$r_i(D^{-1}AD) = \sum_{j \neq i} \frac{|a_{i,j}|\, d_j}{d_i} = \frac{1}{d_i} \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|\, d_j.$$

La question 1 appliquée à $D^{-1}AD$ donne l'inclusion demandée.
Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 10^{-4} & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$, les rayons sont $100\,\dfrac{d_2}{d_1}$ et $10^{-4}\,\dfrac{d_1}{d_2}$.
Le choix $d_1 = 1000$, $d_2 = 1$ les rend égaux à 0,1 :

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \big\{|z-1| \leq 0{,}1\big\} \cup \big\{|z-2| \leq 0{,}1\big\}.$$

La question 1 appliquée directement à A donne les disques $\{|z-1| \leq 100\}$ et $\{|z-2| \leq 10^{-4}\}$, dont la réunion est le disque de centre 1 et de rayon 100 : elle n'apporte presque rien, et la question 2 (disques de rayons 10^{-4} et 100, de centres 1 et 2) pas davantage.
Enfin, $\chi_A = (X-1)(X-2) - 10^{-2} = X^2 - 3X + 1{,}99$, de discriminant $9 - 7{,}96 = 1{,}04 > 0$: les valeurs propres sont réelles,

$$\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{1{,}04}}{2}, \qquad \lambda_- \approx 0{,}9901, \qquad \lambda_+ \approx 2{,}0099.$$

Chacune est bien dans l'un des deux petits disques, à moins de 10^{-2} de son centre.

Correction de l'exercice 7.79 **Énoncé p. 17**

1. La dérivation et la multiplication par $X^2 - 1$ sont linéaires, donc L est linéaire. Si $P \in E$, alors $\deg P' \leq n-1$, $\deg\big((X^2-1)P'\big) \leq n+1$ et $\deg L(P) \leq n$: $L(P) \in E$, et L est un endomorphisme de E.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$L(X^k) = (X^2-1)\,k(k-1)X^{k-2} + 2X \cdot kX^{k-1} = k(k+1)\,X^k - k(k-1)\,X^{k-2},$$

le second terme étant nul pour $k \in \{0, 1\}$. Comme $L(X^k) \in \mathbb{R}_k[X]$, la matrice de L dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure. En indexant lignes et colonnes de 0 à n, son coefficient diagonal d'indice k est $k(k+1)$, son coefficient d'indice $(k-2, k)$ est $-k(k-1)$ pour $k \geq 2$, et tous les autres sont nuls. Par exemple, pour $n = 4$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de L étant triangulaire, son polynôme caractéristique est le produit des $X - m_{k,k}$:

$$\chi_L = \prod_{k=0}^{n} \big(X - k(k+1)\big).$$

Pour j et k dans $\mathbb{N}$, $j(j+1) - k(k+1) = (j-k)(j+k+1)$ et $j+k+1 > 0$, donc $j(j+1) = k(k+1)$ si et seulement si $j = k$. Les $n+1$ racines $k(k+1)$, $k \in [\![0, n]\!]$, de χ_L sont donc distinctes : L possède $n+1 = \dim E$ valeurs propres distinctes, donc L est diagonalisable et

$$\boxed{\mathrm{Sp}(L) = \big\{k(k+1)\ ;\ k \in [\![0, n]\!]\big\}}.$$

3. Soit P un vecteur propre de L associé à $k(k+1)$; notons $d = \deg P$ et $c \neq 0$ son coefficient dominant, de sorte que $P = cX^d + S$ avec $\deg S < d$. D'après la question 1, $\deg L(X^j) \leq j$ pour tout j, donc $\deg L(S) < d$ par linéarité, et le coefficient de X^d dans $L(X^d)$ est $d(d+1)$. Ainsi

$$L(P) = c\,L(X^d) + L(S) = c\,d(d+1)\,X^d + (\text{termes de degré} < d).$$

Or $L(P) = k(k+1)P = c\,k(k+1)\,X^d + k(k+1)S$. En comparant les coefficients de X^d, $c\,d(d+1) = c\,k(k+1)$, soit $d(d+1) = k(k+1)$ puisque $c \neq 0$, et $d = k$ d'après la question 2.

Tout vecteur non nul de $E_{k(k+1)}(L)$ est donc de degré exactement k. Comme $k(k+1)$ est valeur propre, il existe $P_0 \in E_{k(k+1)}(L)$ de degré k, de coefficient dominant $c_0 \neq 0$. Soit $P \in E_{k(k+1)}(L)$ non nul, de coefficient dominant c : le polynôme $P - \frac{c}{c_0}P_0$ appartient à $E_{k(k+1)}(L)$ et son degré est strictement inférieur à k, donc il est nul. Ainsi $E_{k(k+1)}(L) = \mathrm{Vect}(P_0)$ est une droite. Ses éléments unitaires sont les αP_0 avec $\alpha c_0 = 1$: il y en a exactement un, $L_k = \frac{1}{c_0}P_0$.

4. Si $k = 0$, $U_0 = 1$ et les deux membres sont nuls. Si $k \geq 1$, $U_k' = 2kX\,(X^2-1)^{k-1}$, donc

$$(X^2-1)\,U_k' = 2kX\,(X^2-1)^k = 2kX\,U_k.$$

5. Rappelons la formule de Leibniz : pour f et g dans $\mathbb{R}[X]$ et $m \in \mathbb{N}$, $(fg)^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f^{(i)} g^{(m-i)}$. Les dérivées de $X^2 - 1$ sont $2X$, 2, puis 0 ; en dérivant $k+1$ fois le membre de gauche de la question 4, il reste trois termes :

$$\begin{aligned}\big((X^2-1)\,U_k'\big)^{(k+1)} &= (X^2-1)\,U_k^{(k+2)} + (k+1)\,2X\,U_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2} 2\,U_k^{(k)} \\ &= (X^2-1)\,R_k'' + 2(k+1)X\,R_k' + k(k+1)\,R_k.\end{aligned}$$

Les dérivées de X sont 1 puis 0 ; pour le membre de droite,

$$(2kX\,U_k)^{(k+1)} = 2k\big(X\,U_k^{(k+1)} + (k+1)\,U_k^{(k)}\big) = 2kX\,R_k' + 2k(k+1)\,R_k.$$

En égalant et en simplifiant,

$$(X^2-1)\,R_k'' + 2X\,R_k' = k(k+1)\,R_k.$$

Comme $\deg U_k = 2k$, on a $\deg R_k \leq k \leq n$, donc $R_k \in E$ et le membre de gauche est $L(R_k) : L(R_k) = k(k+1)\,R_k$.

6. Le polynôme $U_k = (X^2-1)^k$ est unitaire de degré $2k$: $U_k = X^{2k} + V_k$ avec $\deg V_k < 2k$. Pour $j \geq k$, la dérivée k-ième de X^j est $\frac{j!}{(j-k)!}X^{j-k}$, de degré $j-k$; la dérivée k-ième de V_k est donc de degré strictement inférieur à k, et

$$R_k = \frac{(2k)!}{k!}\,X^k + V_k^{(k)}$$

est de degré k et de coefficient dominant $\frac{(2k)!}{k!}$. En particulier $R_k \neq 0$: d'après la question 5, R_k est un vecteur propre de L associé à $k(k+1)$, donc $R_k \in E_{k(k+1)}(L) = \mathrm{Vect}(L_k)$, et $\frac{k!}{(2k)!}R_k$ est l'unique élément unitaire de cette droite :

$$\boxed{L_k = \frac{k!}{(2k)!}\big((X^2-1)^k\big)^{(k)}}.$$

On en déduit $L_0 = 1$, $L_1 = \frac{1}{2}(X^2-1)' = X$,

$$L_2 = \frac{2}{24}(X^4 - 2X^2 + 1)'' = \frac{1}{12}(12X^2 - 4) = X^2 - \frac{1}{3},$$

$$L_3 = \frac{6}{720}(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1)''' = \frac{1}{120}(120X^3 - 72X) = X^3 - \frac{3}{5}X.$$

7. Le polynôme $U_k = (X^2-1)^k$ ne contient que des puissances paires de X : $U_k = \sum_{i=0}^{k} a_i X^{2i}$. En dérivant k fois, les monômes de degré $2i < k$ disparaissent et les autres deviennent des multiples de X^{2i-k}, dont l'exposant a la parité de k. Ainsi $R_k(-X) = (-1)^k R_k(X)$, et de même pour $L_k = \frac{k!}{(2k)!}R_k$.

8. Pour $j \in [\![0, k]\!]$, notons $\mathcal{P}(j)$ la propriété : « $U_k^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans $]-1,1[$, et 1 et -1 sont racines de $U_k^{(j)}$ de multiplicité au moins $k-j$ ».
Initialisation. $U_k = (X-1)^k(X+1)^k$: 1 et -1 sont racines de U_k de multiplicité k, et la première condition est vide pour $j = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $j \in [\![0, k-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}(j)$. Soit $a_1 < \cdots < a_j$ des racines distinctes de $U_k^{(j)}$ dans $]-1,1[$, et posons $a_0 = -1$, $a_{j+1} = 1$: ce sont aussi des racines de $U_k^{(j)}$, de multiplicité au moins $k-j \geq 1$. La fonction polynomiale $U_k^{(j)}$ s'annule aux $j+2$ points $a_0 < a_1 < \cdots < a_{j+1}$; d'après le théorème de Rolle appliqué sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$, il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $U_k^{(j+1)}(b_i) = 0$, pour $i \in [\![0, j]\!]$. Les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ étant deux à deux disjoints et inclus dans $]-1,1[$, les $b_0, \ldots, b_j$ sont $j+1$ racines distinctes de $U_k^{(j+1)}$ dans $]-1,1[$.
Si α est racine d'un polynôme Q de multiplicité au moins $m \geq 1$, alors $Q = (X-\alpha)^m S$ et

$$Q' = (X-\alpha)^{m-1}\big(mS + (X-\alpha)S'\big),$$

donc α est racine de Q' de multiplicité au moins $m-1$. Appliqué à $Q = U_k^{(j)}$ et $m = k-j$, cela montre que 1 et -1 sont racines de $U_k^{(j+1)}$ de multiplicité au moins $k-(j+1)$. Donc $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(k)$ est vraie : $R_k = U_k^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$. Comme $\deg R_k = k$, il n'en a pas d'autre, réelle ou complexe. Le polynôme L_k, proportionnel à R_k, possède donc exactement k racines réelles distinctes, toutes dans $]-1,1[$.

9. Les fonctions $t \mapsto (t^2-1)P'(t)$ et $t \mapsto Q(t)$ sont de classe C^1 sur $[-1,1]$; par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\langle L(P),\, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} \big((t^2-1)P'(t)\big)' Q(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \Big[(t^2-1)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)\,P'(t)\,Q'(t)\ \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et le crochet est nul car t^2-1 s'annule en 1 et en -1. Donc $\langle L(P),\, Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)\,P'(t)\,Q'(t)\ \mathrm{d}t$. Cette expression est symétrique en P et Q : elle vaut aussi $\langle L(Q),\, P\rangle = \langle P,\, L(Q)\rangle$.

10. Soit $j \neq k$ dans $[\![0,n]\!]$. D'après la question 9 et la définition de L_j et L_k,

$$j(j+1)\ \big\langle L_j,\, L_k\big\rangle = \big\langle L(L_j),\, L_k\big\rangle = \big\langle L_j,\, L(L_k)\big\rangle = k(k+1)\ \big\langle L_j,\, L_k\big\rangle,$$

donc $\big(j(j+1)-k(k+1)\big)\big\langle L_j,\, L_k\big\rangle = 0$. Comme $j \neq k$, $j(j+1) \neq k(k+1)$ (question 2), et $\big\langle L_j,\, L_k\big\rangle = 0$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Les polynômes $L_0, \dots, L_{k-1}$ sont non nuls, de degrés respectifs $0, \dots, k-1$ deux à deux distincts : ils forment une famille libre de k éléments de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, qui est de dimension k, donc une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Tout $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ s'écrit $Q = \sum_{j=0}^{k-1} q_j L_j$, et par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle L_k,\, Q\rangle = \sum_{j=0}^{k-1} q_j\ \big\langle L_k,\, L_j\big\rangle = 0.$$

11. Notons $c_1 < \cdots < c_m$ les racines distinctes de L_k dans $]-1,1[$ (éventuellement $m=0$), μ_i la multiplicité de c_i, et écrivons

$$L_k = \prod_{i=1}^{m} (X-c_i)^{\mu_i} \cdot T,$$

où $T \in \mathbb{R}[X]$ n'a pas de racine dans $]-1,1[$. La fonction T est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $]-1,1[$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle y garde un signe strict constant. Par ailleurs, au voisinage de c_i, $L_k = (X-c_i)^{\mu_i} V_i$ avec $V_i(c_i) \neq 0$, donc V_i de signe constant au voisinage de c_i : L_k change de signe en c_i si et seulement si μ_i est impair. Les points de changement de signe de L_k sont donc les c_i, $i \in I$, où $I = \{i \in [\![1,m]\!]\ ;\ \mu_i \text{ impair}\}$.

Posons $Q = \prod_{i\in I}(X-c_i)$ (avec $Q=1$ si I est vide). Alors

$$L_k Q = T \cdot \prod_{i\in I} (X-c_i)^{\mu_i+1} \cdot \prod_{i\notin I} (X-c_i)^{\mu_i},$$

où tous les exposants sont pairs : sur $]-1,1[$, L_kQ a le signe constant de T et ne s'annule qu'aux points $c_1, \dots, c_m$. La fonction $t \mapsto L_k(t)Q(t)$ est continue

sur $[-1,1]$, de signe constant et non identiquement nulle, donc $\langle L_k, Q\rangle \neq 0$. D'après la question 10, $Q \notin \mathbb{R}_{k-1}[X]$, c'est-à-dire $\deg Q = \operatorname{card} I \geq k$: L_k change de signe en au moins k points de $]-1,1[$.
Enfin, $\prod_{i=1}^{m}(X-c_i)^{\mu_i}$ divise L_k, de degré k, donc

$$k \leq \operatorname{card} I \leq m \leq \sum_{i=1}^{m} \mu_i \leq k.$$

Toutes ces inégalités sont des égalités : $m = k$, chaque μ_i vaut 1, et $\deg T = 0$. Comme L_k est unitaire, $L_k = \prod_{i=1}^{k}(X-c_i)$: L_k possède k racines réelles distinctes, toutes dans $]-1,1[$, ce qui est le résultat de la question 8.

Correction de l'exercice 7.80 **Énoncé p. 18**

1. Notons $\mathcal{B}_x = \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ et $(c_0, \dots, c_{n-1})$ les coordonnées de $u^n(x)$ dans cette base : $u^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k u^k(x)$. Pour $j \in [\![0, n-2]\!]$, $u\big(u^j(x)\big) = u^{j+1}(x)$ est le vecteur suivant de la base, et $u\big(u^{n-1}(x)\big) = u^n(x)$, donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & 0 & & c_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est, avec $p = n$ et $a_k = -c_k$, la matrice M_x de l'exercice 7.76, dont le polynôme caractéristique est $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ (question 4 de cet exercice). Donc

$$\boxed{\chi_u = X^n - c_{n-1}X^{n-1} - \cdots - c_1 X - c_0}.$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, n]\!]$, $u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$, donc $u^k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i^k e_i$. La matrice de la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ a pour coefficient d'indice (i,k) le scalaire $x_i \lambda_i^{k-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_1\lambda_1 & \cdots & x_1\lambda_1^{n-1} \\ x_2 & x_2\lambda_2 & \cdots & x_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n\lambda_n & \cdots & x_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)\, V(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice de Vandermonde des λ_i. Donc

$$\det A = x_1 x_2 \cdots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i),$$

et le produit des $\lambda_j - \lambda_i$ est non nul puisque les valeurs propres sont deux à deux distinctes. La famille $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$, de n vecteurs, est une base de E si et seulement si $\det A \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si tous les x_i sont non nuls.

3. Si les valeurs propres de u sont deux à deux distinctes, la question 2 appliquée à $x = e_1 + \cdots + e_n$ montre que x est cyclique : u est cyclique.
Réciproquement, supposons u cyclique et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes. Comme u est diagonalisable, $E = \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$. Soit $x \in E$ et $x =$

$y_1+\cdots+y_p$ sa décomposition, avec $y_i \in E_{\lambda_i}(u)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(y_i) = \lambda_i^k y_i$, donc

$$u^k(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \, y_i \in \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_p).$$

Ainsi $F_x \subset \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_p)$ et $\dim F_x \leq p$. Si x est cyclique, $n = \dim F_x \leq p \leq n$, donc $p = n$: u a n valeurs propres deux à deux distinctes.

4. Comme u est nilpotent, l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^m = 0$ est non vide ; on note q son plus petit élément, appelé *indice de nilpotence* de u : $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$. Comme $u^{n-1} \neq 0$, on a $q \geq n$. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, et montrons que la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x)\big)$ est libre. Soit $(\mu_0, \dots, \mu_{q-1}) \in \mathbb{K}^q$ tel que $\sum_{k=0}^{q-1} \mu_k u^k(x) = 0$, et supposons les μ_k non tous nuls ; soit k_0 le plus petit indice tel que $\mu_{k_0} \neq 0$. En appliquant u^{q-1-k_0},

$$0 = \sum_{k=k_0}^{q-1} \mu_k \, u^{q-1-k_0+k}(x) = \mu_{k_0} \, u^{q-1}(x),$$

car $q - 1 - k_0 + k \geq q$ pour $k > k_0$, donc $u^{q-1-k_0+k} = 0$. Comme $u^{q-1}(x) \neq 0$, on obtient $\mu_{k_0} = 0$, ce qui est contradictoire. La famille est donc libre.
Une famille libre de q vecteurs de E vérifie $q \leq n$. Ainsi $q = n$, et $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une famille libre de n vecteurs : c'est une base de E, et x est cyclique. Enfin $u^n(x) = 0$: toutes ses coordonnées dans cette base sont nulles, et la question 1 donne

$$\boxed{\chi_u = X^n}.$$

5. Si $P(u) = 0$, alors $P(u)(x) = 0$. Réciproquement, supposons $P(u)(x) = 0$. Deux polynômes de u commutent, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(u)\big(u^k(x)\big) = u^k\big(P(u)(x)\big) = u^k(0) = 0.$$

L'application linéaire $P(u)$ s'annule sur la base $\mathcal{B}_x$, donc $P(u) = 0$.

6. Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$ un polynôme non nul de degré strictement inférieur à n. Alors $P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k u^k(x) \neq 0$, car la famille $\mathcal{B}_x$ est libre et les p_k ne sont pas tous nuls. Donc $P(u) \neq 0$: P n'annule pas u.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$, donc, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $(Q\chi_u)(u) = Q(u) \circ \chi_u(u) = 0$: les multiples de χ_u annulent u. Réciproquement, soit P un polynôme annulateur de u, et $P = Q\chi_u + R$ sa division euclidienne par χ_u, avec $\deg R < n$. Alors

$$R(u) = P(u) - Q(u) \circ \chi_u(u) = 0,$$

donc $R = 0$ d'après ce qui précède, et $P = Q\chi_u$. Les polynômes annulateurs de u sont exactement les multiples de χ_u.

7. Comme $v \circ u = u \circ v$, on a $v \circ u^k = u^k \circ v$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate). Donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$v\big(u^k(x)\big) = u^k\big(v(x)\big) = u^k\big(P(u)(x)\big) = P(u)\big(u^k(x)\big),$$

en utilisant que u^k et $P(u)$ commutent. Les applications linéaires v et $P(u)$ coïncident sur la base $\mathcal{B}_x$, donc $v = P(u)$.

Soit $v \in C(u)$. Comme $\mathcal{B}_x$ est une base de E, il existe $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k u^k(x) = P(u)(x)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$, et ce qui précède donne $v = P(u) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$. Réciproquement, tout polynôme de u commute avec u, donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset C(u)$. Ainsi $C(u) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$.

Enfin, la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre : si $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k u^k = 0$, alors, en évaluant en x, $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k u^k(x) = 0$, donc tous les μ_k sont nuls par liberté de $\mathcal{B}_x$. C'est une base de $C(u)$, et

$$\boxed{\dim C(u) = n}.$$

8. Notons $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de w, $E_i = E_{\mu_i}(w)$ et $d_i = \dim E_i \geq 1$. Comme w est diagonalisable, $E = \sum_{i=1}^{p} E_i$ et $\sum_{i=1}^{p} d_i = n$.

   Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Si v commute avec w, chaque E_i est stable par v, comme dans la question 2 de l'exercice 7.70 : pour $y \in E_i$, $w\big(v(y)\big) = v\big(w(y)\big) = \mu_i v(y)$, donc $v(y) \in E_i$. Réciproquement, si chaque E_i est stable par v, alors, pour $y \in E_i$, $w\big(v(y)\big) = \mu_i v(y) = v(\mu_i y) = v\big(w(y)\big)$; les applications linéaires $w \circ v$ et $v \circ w$ coïncident sur chaque E_i, donc sur leur somme E. Ainsi $C(w)$ est l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent chacun des E_i.

   Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \sum_{i=1}^{p} E_i$. Un endomorphisme v stabilise chaque E_i si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, de la forme $\mathrm{diag}(V_1, \dots, V_p)$ avec $V_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{K})$. L'application $v \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui envoie $C(w)$ sur le sous-espace de ces matrices diagonales par blocs, de dimension $\sum_{i=1}^{p} d_i^2$. Donc

$$\dim C(w) = \sum_{i=1}^{p} d_i^2 \geq \sum_{i=1}^{p} d_i = n,$$

   avec égalité si et seulement si $d_i^2 = d_i$ pour tout i, c'est-à-dire $d_i = 1$ pour tout i. Si $\dim C(w) = n$, tous les sous-espaces propres de w sont des droites, donc $p = \sum_{i=1}^{p} d_i = n$: w est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes, donc cyclique d'après la question 3.

9. Le polynôme nul est dans I_F car $0(u)(x) = 0 \in F$. Si P et Q sont dans I_F et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda P + Q)(u)(x) = \lambda P(u)(x) + Q(u)(x) \in F$, car F est un sous-espace vectoriel. Donc I_F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Il contient χ_u puisque $\chi_u(u)(x) = 0 \in F$ (théorème de Cayley-Hamilton).

   Soit $P \in I_F$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. Le sous-espace F est stable par u, donc par u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate), puis par toute combinaison linéaire des u^k, c'est-à-dire par tout polynôme de u. Comme $P(u)(x) \in F$,

$$(PQ)(u)(x) = Q(u)\big(P(u)(x)\big) \in F,$$

   donc $PQ \in I_F$.

10. Le sous-espace I_F contient $\chi_u \neq 0$, donc l'ensemble des degrés de ses éléments non nuls est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément m. Soit $P_1 \in I_F$ non nul de degré m et c son coefficient dominant ; alors $P_F = \frac{1}{c} P_1 \in I_F$ est unitaire de degré m. Si $P' \in I_F$ est aussi unitaire de degré m, alors $P_F - P' \in I_F$ est de degré strictement inférieur à m, donc nul par minimalité de m : $P' = P_F$. D'où l'existence et l'unicité de P_F.

D'après la question 9, $P_F Q \in I_F$ pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$. Réciproquement, soit $P \in I_F$ et $P = P_F Q + R$ sa division euclidienne par P_F, avec $\deg R < m$. Alors $R = P - P_F Q \in I_F$, donc $R = 0$ par minimalité de m, et $P = P_F Q$. Ainsi

$$I_F = \{P_F Q \ ; \ Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

En particulier $\chi_u \in I_F$ s'écrit $\chi_u = P_F Q_F$: P_F divise χ_u. Le polynôme Q_F est unitaire, comme quotient de deux polynômes unitaires, et $\deg Q_F = n - \deg P_F$.

11. Par définition de I_F, $\{P(u)(x) \ ; \ P \in I_F\} \subset F$. Réciproquement, soit $y \in F$. Comme $\mathcal{B}_x$ est une base de E, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(u)(x)$, et alors $P \in I_F$. D'où l'égalité $F = \{P(u)(x) \ ; \ P \in I_F\}$.
D'après la question 10,

$$F = \big\{(P_F Q)(u)(x) \ ; \ Q \in \mathbb{K}[X]\big\} = \big\{P_F(u)\big(Q(u)(x)\big) \ ; \ Q \in \mathbb{K}[X]\big\}.$$

Or, lorsque Q décrit $\mathbb{K}[X]$, $Q(u)(x)$ décrit E tout entier, puisque x est cyclique. Donc $F = P_F(u)(E) = \operatorname{Im} P_F(u)$.

12. Soit $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que χ_u divise $Q_F R$. Alors $Q_F R$ annule u (question 6), donc $Q_F(u)\big(R(u)(x)\big) = (Q_F R)(u)(x) = 0$ et $R(u)(x) \in \operatorname{Ker} Q_F(u)$. Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Ker} Q_F(u)$; comme x est cyclique, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = R(u)(x)$, et $(Q_F R)(u)(x) = Q_F(u)(y) = 0$. D'après la question 5, $(Q_F R)(u) = 0$, puis, d'après la question 6, χ_u divise $Q_F R$. Ainsi

$$\operatorname{Ker} Q_F(u) = \big\{R(u)(x) \ ; \ R \in \mathbb{K}[X], \ \chi_u \text{ divise } Q_F R\big\}.$$

Or $\chi_u = P_F Q_F$ divise $Q_F R$ si et seulement si P_F divise R : si $Q_F R = P_F Q_F S$, alors $R = P_F S$ en simplifiant par $Q_F \neq 0$, et la réciproque est immédiate. Donc

$$\operatorname{Ker} Q_F(u) = \big\{(P_F S)(u)(x) \ ; \ S \in \mathbb{K}[X]\big\} = \{P(u)(x) \ ; \ P \in I_F\} = F$$

d'après les questions 10 et 11.

13. Posons $y = P_F(u)(x)$. Pour $j \in \mathbb{N}$, $u^j(y) = (X^j P_F)(u)(x)$ appartient à F d'après la question 9. Montrons que la famille $\big(y, u(y), \dots, u^{d-1}(y)\big)$ est une base de F (si $d = 0$, la famille est vide, $Q_F = 1$ et $F = \operatorname{Ker} \mathrm{Id}_E = \{0\}$; on suppose donc $d \geq 1$).
Liberté. Soit $(\mu_0, \dots, \mu_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que $\sum_{j=0}^{d-1} \mu_j u^j(y) = 0$, et $S = \sum_{j=0}^{d-1} \mu_j X^j$. Alors $(SP_F)(u)(x) = \sum_{j=0}^{d-1} \mu_j u^j(y) = 0$, donc $(SP_F)(u) = 0$ (question 5) et χ_u divise SP_F (question 6). Or $\deg(SP_F) \leq d - 1 + \deg P_F = n - 1 < \deg \chi_u$ si $SP_F \neq 0$; donc $SP_F = 0$, puis $S = 0$ car $P_F \neq 0$, et tous les μ_j sont nuls.
Caractère générateur. Soit $z \in F$. D'après la question 11, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $z = (P_F Q)(u)(x)$. Soit $Q = Q_F A + B$ la division euclidienne de Q par Q_F, avec $\deg B \leq d - 1$; écrivons $B = \sum_{j=0}^{d-1} b_j X^j$. Alors $P_F Q = \chi_u A + P_F B$, et

$$z = A(u)\big(\chi_u(u)(x)\big) + (P_F B)(u)(x) = B(u)(y) = \sum_{j=0}^{d-1} b_j u^j(y),$$

car $\chi_u(u) = 0$. Donc $z \in \operatorname{Vect}\big(y, u(y), \dots, u^{d-1}(y)\big)$.
La famille est une base de F, formée de d vecteurs :

$$\boxed{\dim F = \deg Q_F}.$$

14. Les polynômes de u commutent avec u, donc $G = \operatorname{Ker} Q(u)$ est stable par u (question 1 de l'exercice 7.62). Écrivons $\chi_u = PQ$, où P est unitaire. Pour $R \in \mathbb{K}[X]$,

$$\begin{aligned} R \in I_G &\iff Q(u)\big(R(u)(x)\big) = 0 \iff (QR)(u)(x) = 0 \\ &\iff (QR)(u) = 0 \iff \chi_u \text{ divise } QR \iff P \text{ divise } R, \end{aligned}$$

d'après les questions 5 et 6, et en simplifiant par $Q \neq 0$ comme à la question 12. Ainsi $I_G = \{PS \ ; \ S \in \mathbb{K}[X]\}$. Les éléments non nuls de I_G ont un degré au moins égal à $\deg P$, et le seul élément unitaire de degré $\deg P$ est P : donc $P_G = P$, et $Q_G = \chi_u / P = Q$.

15. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires de χ_u et $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E stables par u. D'après la question 14, $\Phi : Q \mapsto \operatorname{Ker} Q(u)$ est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}$; d'après la question 10, $\Psi : F \mapsto Q_F$ est une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{D}$. La question 12 donne $\Phi \circ \Psi(F) = \operatorname{Ker} Q_F(u) = F$ pour tout $F \in \mathcal{S}$, et la question 14 donne $\Psi \circ \Phi(Q) = Q_{\operatorname{Ker} Q(u)} = Q$ pour tout $Q \in \mathcal{D}$. Donc Φ est une bijection de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{S}$, de réciproque Ψ.

Écrivons $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i^{m_i}$, où les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires distincts de $\mathbb{K}[X]$. Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, les diviseurs unitaires de χ_u sont les $\prod_{i=1}^{r} P_i^{k_i}$ avec $0 \leq k_i \leq m_i$: il y en a $\prod_{i=1}^{r}(m_i + 1)$. Un endomorphisme cyclique possède donc exactement $\prod_{i=1}^{r}(m_i + 1)$ sous-espaces stables, en nombre fini.

16. Supposons que u possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés. Alors u est diagonalisable et cyclique (question 3), et $\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Ses diviseurs unitaires sont les

$$Q_I = \prod_{i \in I}(X - \lambda_i), \qquad I \subset [\![1, n]\!],$$

deux à deux distincts puisque leurs racines diffèrent. Pour $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$,

$$Q_I(u)(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \, Q_I(\lambda_j) \, e_j = \sum_{j \notin I} y_j \, Q_I(\lambda_j) \, e_j,$$

avec $Q_I(\lambda_j) \neq 0$ pour $j \notin I$. Donc $Q_I(u)(y) = 0$ si et seulement si $y_j = 0$ pour tout $j \notin I$: $\operatorname{Ker} Q_I(u) = \operatorname{Vect}(e_i \ ; \ i \in I)$. D'après la question 15, les sous-espaces stables par u sont exactement les $\operatorname{Vect}(e_i \ ; \ i \in I)$ pour $I \subset [\![1, n]\!]$, au nombre de 2^n : c'est le résultat de l'exercice 7.62.

Supposons maintenant u nilpotent avec $u^{n-1} \neq 0$, et soit x un vecteur cyclique. D'après la question 4, $\chi_u = X^n$, dont les diviseurs unitaires sont les X^k pour $k \in [\![0, n]\!]$. Les sous-espaces stables par u sont donc exactement les $\operatorname{Ker} u^k$, $k \in [\![0, n]\!]$, au nombre de $n + 1$, avec $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$ (question 13) :

$$\{0\} = \operatorname{Ker} u^0 \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} u^{n-1} \subset \operatorname{Ker} u^n = E.$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, les k vecteurs $u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x)$ sont dans $\operatorname{Ker} u^k$, car $u^k\big(u^j(x)\big) = u^{k+j}(x) = 0$ dès que $k + j \geq n$, et ils sont libres comme extraits de la base $\mathcal{B}_x$. Comme $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$,

$$\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Vect}\big(u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x)\big).$$