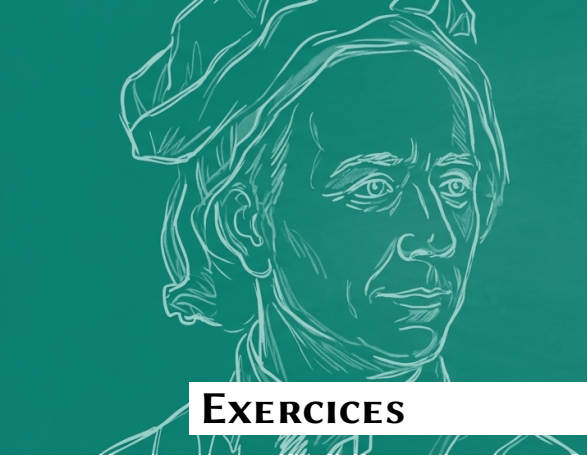


8 Intégrales généralisées

Exercices

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 8.3 Nature par calcul direct
  - 8.4 Intégrales de référence, majoration
  - 8.7 Changements de variable
  - 8.9 Intégrabilité en chaque borne
- **Piste rouge**
  - 8.13 Nature selon un paramètre
  - 8.19 La fonction Γ
  - 8.20 Transformée de Laplace
  - 8.25 Nature de l'intégrale de Dirichlet
- **Piste bleue**
  - 8.26 Intégrale de $t^n e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+$
  - 8.35 Produit de logarithmes (CCP 2019)
  - 8.17 Reste d'une intégrale convergente
  - 8.18 Intégrales gaussiennes
- **Piste noire**
  - 8.33 Fonction définie par une intégrale
  - 8.42 Inégalité de Cauchy-Schwarz
  - 8.47 Intégrales de Fresnel
  - 8.49 Valeur de l'intégrale de Dirichlet

Intégrales généralisées

Exercice 8.1 ○ Correction p. 17

Dire si les fonctions suivantes sont continues par morceaux sur l'intervalle indiqué.

1. $f : t \mapsto \lfloor t^2 \rfloor$ sur $[0, 2]$.
2. $f : t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ sur $]0, 1]$, puis la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ si $t > 0$ et $g(0) = 0$.
3. $f : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $[0, 1[$, puis la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = \frac{1}{1-t}$ si $t < 1$ et $g(1) = 0$.
4. $f : t \mapsto t\lfloor 1/t \rfloor$ sur $]0, 1]$, puis la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = t\lfloor 1/t \rfloor$ si $t > 0$ et $g(0) = 1$.

Exercice 8.2 ○ Correction p. 17

1. Calculer $\displaystyle\int_0^3 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t$.
2. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = -1$ si $t < 0$, $f(0) = 5$ et $f(t) = t$ si $t > 0$. Justifier que f est continue par morceaux sur $[-1, 1]$ et calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t) \, \mathrm{d}t$.
3. Déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{3k}{n} \right\rfloor$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8.3 ○ Correction p. 18

Par un calcul direct, déterminer la nature des intégrales suivantes et, en cas de convergence, leur valeur.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2}$
6. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$

Exercice 8.4 ○ Correction p. 19

1. Sans calcul, donner la nature des intégrales suivantes.
   (a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/3}\,\mathrm{d}t$
   (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{t/3}\,\mathrm{d}t$
   (c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$
   (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t}}$
   (e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}}$
   (f) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}}$
2. Par majoration ou minoration, déterminer la nature des intégrales suivantes.
   (a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + t^2}$
   (b) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2+\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   (c) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2+\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
   (d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t}$
   (e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t^3}$

Exercice 8.5 ○ Correction p. 19

Déterminer la nature des intégrales suivantes et, en cas de convergence, leur valeur.

1. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$
2. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8.6 ○ Correction p. 20

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer. En déduire la nature et la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.7 ○ Correction p. 20

Après avoir précisé les bornes en lesquelles elles sont généralisées, étudier la nature des intégrales suivantes et les calculer à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$ (*poser* $u = \mathrm{e}^t$).
2. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ (*poser* $u = \frac{1}{t}$).

Exercice 8.8 ○ Correction p. 21

Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur l'intervalle indiqué, et en déduire une majoration de la valeur absolue de leur intégrale.

1. $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : t \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$.
3. $h : t \mapsto \dfrac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$.

Exercice 8.9 ○ Correction p. 21

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$.
2. $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$.
3. $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ sur $]0, 1]$.
5. $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8.10 ○ Correction p. 22

1. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur l'intervalle indiqué ?
   (a) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-t}}$ sur $[0, 2[$.
   (b) $t \mapsto \ln(t-1)$ sur $]1, 2]$.
   (c) $t \mapsto \dfrac{1}{(t-1)^2}$ sur $]1, 2]$.
2. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$ est intégrable sur $]-1, 0[$ et sur $]0, 1[$, et calculer

$$\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}}.$$

Exercice 8.11 ○ Correction p. 23

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |P(t)|\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.12 • Correction p. 23

Préciser la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{t})\ln(t)}{\sqrt{t}-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}(t)-\sin(t)}{t^{7/2}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(z+t)(1+\sqrt{t})}$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-)$

Exercice 8.13 • Correction p. 31

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur de α, la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8.14 • Correction p. 31

Justifier la convergence des intégrales suivantes et les calculer.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}$

Exercice 8.15 • Correction p. 32

Montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer (*on pourra poser* $u=\sqrt{t}$).

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8.16 • Correction p. 33

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur I, à valeurs réelles.

1. On suppose f intégrable sur I et g bornée sur I. Montrer que fg est intégrable sur I.
2. On suppose f^2 et g^2 intégrables sur I. Montrer que fg est intégrable sur I.
3. Donner un exemple de fonctions f et g intégrables sur $]0,1]$ telles que fg ne le soit pas.

Exercice 8.17 • Correction p. 33

1. Soit f une fonction continue et intégrable sur $[a,+\infty[$, à valeurs réelles. Pour $x\geqslant a$, on pose $R(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Justifier que R est définie sur $[a,+\infty[$, que $R(x)\to 0$ quand $x\to+\infty$, et que R est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, de dérivée $-f$.
2. Soit $x>0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} \qquad (\textit{on pourra remarquer que } \mathrm{e}^{-t^2}\leqslant \tfrac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2} \textit{ pour } t\geqslant x).$$

3. Montrer que $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 8.18 • Correction p. 34

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent et les calculer.

Exercice 8.19 • Correction p. 35

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cette intégrale converge,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ (*on admet que* $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 8.20 • Correction p. 36

Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, et M un majorant de $|f|$ sur $[0,+\infty[$. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leqslant \dfrac{M}{x}$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
2. On suppose $f \geqslant 0$. Montrer que F est décroissante.
3. Calculer F lorsque f est la fonction constante égale à 1, puis lorsque $f = \cos$.

Exercice 8.21 •• Correction p. 36

Étudier, suivant les valeurs de $\alpha \geq 0$, l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8.22 •• Correction p. 38

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que l'intégrale suivante existe :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8.23 • Correction p. 39

Existence et calcul de :

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
   (*poser* $u = \frac{1}{t}$)
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
3. $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ln\big(\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t$
   (*poser* $u = \cos(t)$)
4. $L = \displaystyle\int_0^{1} \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
   (*poser* $t = \sin(u)$)
5. $M = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
   (*indication :* $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$)

Exercice 8.24 ●● Correction p. 43

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que pour $-1 < \alpha < 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exercice 8.25 ●● Correction p. 44

Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (*on pourra intégrer par parties*) mais pas absolument (*on pourra utiliser que* $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$ *puis une identité trigonométrique pour se ramener à une intégrale semblable à* I).

Exercice 8.26 ○ Correction p. 46

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.27 ● Correction p. 47

On définit la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 1$. Calculer I_1.
2. Trouver un lien entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 8.28 ● Correction p. 49

Étudier la suite (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$ (*on pourra chercher une relation entre* I_{n+1} *et* I_n).

Exercice 8.29 ●● Correction p. 50

Soit $f \in C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 8.30 ●● Correction p. 51

Déterminer a pour que l'intégrale suivante existe :

$$\int_1^{+\infty} \left(x+1-\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Exercice 8.31 ●● Correction p. 53

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$. *Indication : on intègre par parties en dérivant* ln, *puis dans l'intégrale qui reste, on pose* $u = \sqrt{1-t}$.

Exercice 8.32 ●●● Correction p. 54

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. Notons $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ sa base canonique : pour $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est la fonction polynôme $t \mapsto t^k$.

1. (a) Démontrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 P_k(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) En déduire que si $f \in E$, l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ est bien définie.
   On pose $g = L(f)$.
   (c) Calculer $L(P_0)$, $L(P_1)$, $L(P_2)$.
   (d) Démontrer que, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(P_{k+1}) = P_{k+1} - (k+1)L(P_k)$, et en déduire que
   $$L(P_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j.$$
2. (a) Vérifier que si f appartient à E alors $L(f)$ appartient à E et en déduire que l'application L est un endomorphisme de E. Donner la matrice M de l'endomorphisme L dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$.
   (b) À l'aide de la question 1d, démontrer que M est inversible et préciser M^{-1}.

Exercice 8.33 ●●● Correction p. 58

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathcal{D}$.
3. Donner un équivalent de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

Exercice 8.34 ●● Correction p. 60

CCP 2009, Officiel de la Taupe, exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8.35 ● Correction p. 62

CCP PC 2019, exercice 2 (RMS 130, exercice 1353).

Montrer que $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Exercice 8.36 ● Correction p. 62

CCP PC 2019, exercice 2 (RMS 130, exercice 1355).

Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. Calculer I.

Exercice 8.37 ●●● Correction p. 64

CCP PC 2018, BEOS 4575.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer par intégration par parties que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.
2. Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.
3. (a) Montrer que
$$v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$
(b) Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{2\pi}$.
4. On définit la fonction f par $f : x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\mapsto \dfrac{1}{\tan(\pi x)} - \dfrac{1}{\pi x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
5. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 8.38 ●●● Correction p. 68

CCP PC 2018, ODLT 193.

Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. Pour $P \in E$, on note $I(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. $I(1)$ est-elle convergente ? Quelle est sa valeur ?
2. Pour $0 \leq k \leq 5$, $I(X^k)$ est-elle absolument convergente ? $I(P)$ converge-t-elle ?
3. Dans cette question, on admet qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $P \in E$,
$$I(P) = a\,P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\,P(0) + c\,P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$
(a) Calculer $I(X)$ et en déduire une relation entre a, b et c.
(b) On donne $I(X^2) = \dfrac{\pi}{2}$; donner les valeurs de a, b et c.
4. Donner une relation entre $I(X^{k+1})$ et $I(X^{k-1})$, puis montrer le résultat admis à la question précédente.

Exercice 8.39 ●● Correction p. 71

Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Y est-elle intégrable ? (*on pourra appliquer le critère des séries alternées*).

Exercice 8.40 ●● Correction p. 73

Soient α et β deux réels.

1. Déterminer, selon les valeurs de α et β, la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,|\ln t|^\beta}$ (on pourra poser $u = 1/t$).

Exercice 8.41 ●● Correction p. 74

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0 + 1$,
$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
3. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

Exercice 8.42 ●● Correction p. 74

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur I, à valeurs réelles, telles que f^2 et g^2 soient intégrables sur I.

1. Montrer que fg est intégrable sur I et que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $(f+\lambda g)^2$ est intégrable sur I.
2. En étudiant le signe de $\displaystyle\int_I (f+\lambda g)^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\left(\int_I fg\right)^2 \leqslant \int_I f^2 \int_I g^2.$$
3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, telle que f^2 et f'^2 soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Montrer que ff' est intégrable sur $[0, +\infty[$, que f^2 admet une limite finie en $+\infty$, puis que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8.43 ●●● Correction p. 75

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, telle que f et f' soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
2. Soit f une fonction continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles. On suppose f uniformément continue sur $[0, +\infty[$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \geqslant 0$ vérifiant $|x - y| \leqslant \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   (a) Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé à $\varepsilon/2$ par l'uniforme continuité. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \geqslant \varepsilon$,
   $$\int_x^{x+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varepsilon\delta}{2}.$$
   (b) En déduire que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$ et non bornée.

Exercice 8.44 ●● Correction p. 76

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Pour $0 < \varepsilon < X$, exprimer $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ et de $\displaystyle\int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

3. Encadrer $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ et en déduire que $I = \ln\dfrac{b}{a}$.

Exercice 8.45 ●● Correction p. 77

1. Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, dont on justifiera la convergence, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ pour $a > 0$.

Exercice 8.46 ●● Correction p. 78

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge, puis que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut I.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $2I$.
3. En calculant $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t$ de deux façons, déterminer I.

Exercice 8.47 ●●● Correction p. 79

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge (on pourra poser $u = t^2$, puis intégrer par parties).
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ (on pourra utiliser l'inégalité $|\sin u| \geqslant \sin^2 u$).
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,\mathrm{d}t$ converge, et que la fonction $t \mapsto t\sin(t^4)$ n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$.



8 Intégrales généralisées

★ Pour aller plus loin

Exercice 8.48 ● ● ● Correction p. 80

La série d'Euler.
Le cours utilise l'intégration par parties pour décider de la nature d'une intégrale. On l'emploie ici pour obtenir un développement asymptotique à tout ordre, en $+\infty$, de la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

La **partie I** établit ce développement, la **partie II** le retrouve par une autre méthode, et la **partie III** montre que la série obtenue en poussant le développement indéfiniment diverge pour tout x, ce qui n'empêche pas de s'en servir pour calculer $f(x)$.
Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,k!}{x^{k+1}}.$$

Partie I — Le développement asymptotique

1. Justifier que f est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $R_n(x)$ est bien défini et vérifie
$$0 < R_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}}.$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,
$$R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)R_{n+1}(x).$$
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}S_n(x) + (-1)^{n+1}(n+1)!\,R_{n+1}(x).$$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x}S_n(x)$ et $\mathrm{e}^{-x}S_{n+1}(x)$, et que
$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x}S_n(x)| \leqslant \frac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}}.$$
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,k!}{x^{k+1}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\right).$$

Partie II — Une seconde méthode

5. Soit $x > 0$. Montrer, par le changement de variable $t = x + u$, que
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $u \geqslant 0$,
$$\frac{1}{x+u} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{x^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1} u^{n+1}}{x^{n+1}(x+u)}.$$
7. En déduire, à l'aide de l'exercice 8.26, une nouvelle démonstration de la question 4.

Partie III — Une série divergente qui calcule

8. Soit $x > 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k\, k!}{x^{k+1}}$ diverge.
9. On fixe $x > 0$ et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$, de sorte que
$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x} b_n.$$
Étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour quel entier n la majoration est-elle la meilleure ?
10. On prend $x = 10$. Montrer que $f(10) \geqslant \dfrac{9}{100}\mathrm{e}^{-10}$, puis que, pour $n = 8$,
$$\frac{\left|f(10) - \mathrm{e}^{-10} S_8(10)\right|}{f(10)} \leqslant 10^{-3}.$$
Ainsi la série divergente $\sum (-1)^k k!/10^{k+1}$, arrêtée au bon rang, donne $f(10)$ à moins d'un millième près.

Exercice 8.49 • • • Correction p. 83

L'intégrale de Dirichlet.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (exercice 8.25). On calcule ici sa valeur avec les seuls outils de ce chapitre ; elle s'obtient aussi, par une autre méthode, au chapitre sur les intégrales à paramètres. La **partie I** calcule l'intégrale sur $[0, \pi/2]$ d'une fonction trigonométrique, le *noyau de Dirichlet* ; la **partie II** établit qu'une intégrale contre $\sin(\lambda t)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$; la **partie III** conclut.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour $t \in]0, \pi/2]$,
$$D_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}.$$

Partie I — Le noyau de Dirichlet

1. Montrer que, pour tout $t \in]0, \pi/2]$,
$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$$
(*on pourra calculer* $2\sin(t)\cos(2kt)$).
2. En déduire que D_n se prolonge par continuité en 0 et que
$$\int_0^{\pi/2} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Partie II — Un lemme de Riemann-Lebesgue

3. Soit g une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$, à valeurs réelles. Montrer, par une intégration par parties, que
$$\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$
4. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par
$$g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$
   (a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0, en posant $g(0) = 0$.
   (b) Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ (*on pourra utiliser le théorème de la limite de la dérivée et un développement limité de* $\sin^2 t - t^2\cos t$ *en* 0).
5. En déduire que
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Partie III — Conclusion et applications

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
7. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
8. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
9. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$ (*on pourra intégrer par parties*). En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.50 • • • Correction p. 86

Intégration des relations de comparaison.
Le théorème de comparaison du cours décide de l'intégrabilité d'une fonction, mais ne dit rien de la valeur des intégrales. On montre ici que les relations de comparaison en $+\infty$, négligeabilité, domination et équivalence, passent aux intégrales : entre les intégrales partielles $\int_a^x$ quand l'intégrale de référence diverge (**partie I**), entre les restes $\int_x^{+\infty}$ quand elle converge (**partie II**). La **partie III** en tire des équivalents d'intégrales qu'on ne sait pas calculer. Ces résultats ne sont pas au programme de PC : dans une copie, ils doivent être redémontrés.
Dans tout l'exercice, $a \in \mathbb{R}$, f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles, et g est à valeurs strictement positives.

Partie I — Le cas divergent

Dans cette partie, on suppose que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \geqslant a$ tel que, pour tout $x \geqslant A$,
$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
En déduire que $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
3. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$. Montrer que $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
4. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$. Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et que
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
5. Montrer sur l'exemple $f(t) = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^3}$, $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$ que la conclusion de la question 4 est fausse lorsque $\int_a^{+\infty} g$ converge.
6. On pose, sur $[0, +\infty[$, $g(t) = \sin t$ et $f(t) = (1 + \mathrm{e}^{-t})\sin t$. Vérifier que $f(t) - g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$ et que $\int_0^{+\infty} g$ diverge, puis que
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{n'est pas négligeable devant} \quad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$
quand $x \to +\infty$: la positivité de g est indispensable.

Partie II — Le cas convergent

Dans cette partie, on suppose g intégrable sur $[a, +\infty[$.

7. On suppose $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$. Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ et que
$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
8. Énoncer et démontrer les résultats analogues lorsque $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$ et lorsque $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$.

Partie III — Applications

9. Soit $h : t \mapsto \dfrac{t}{\ln t}$ sur $[2, +\infty[$. Montrer que $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln t}$, puis que
$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$
10. Montrer de même que $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.
11. Soit $k : t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}$ sur $[1, +\infty[$. Calculer k' et en déduire que
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

12. En appliquant le même procédé à $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right).$$

Exercice 8.51 ★ Correction p. 89

L'inégalité de Hardy.
Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$ dont le carré est intégrable. Sa moyenne sur $]0,x]$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est-elle encore de carré intégrable ? L'inégalité de Hardy répond oui :

$$\int_0^{+\infty} F(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

La **partie I** donne un sens à F, la **partie II** démontre l'inégalité et montre qu'elle est stricte, la **partie III** montre que la constante 4 ne peut pas être améliorée.
Dans tout l'exercice, f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles, telle que f^2 soit intégrable sur $]0,+\infty[$. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz de l'exercice 8.42.

Partie I — La fonction moyenne

1. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$. En déduire que F est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$,
$$xF'(x) = f(x) - F(x).$$
3. Montrer que, pour tout $x>0$,
$$xF(x)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t,$$
et en déduire que $xF(x)^2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

Partie II — L'inégalité

On note $B = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

4. Soient $0<\varepsilon<X$. Montrer, par une intégration par parties, que
$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2 - XF(X)^2.$$
5. En déduire que
$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{B} + \varepsilon F(\varepsilon)^2.$$

6. Montrer que, pour tous $0 < \varepsilon < X$,

$$\sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{B} + \sqrt{B + \varepsilon F(\varepsilon)^2}.$$

En déduire que F^2 est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

7. On suppose dans cette question que f n'est pas la fonction nulle et que

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que $\left(\int_0^{+\infty} Ff\right)^2 = \int_0^{+\infty} F^2 \int_0^{+\infty} f^2$.

(b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F = \lambda f$, puis que $\lambda = 2$.

(c) Résoudre l'équation différentielle vérifiée par F et conclure à une contradiction. Ainsi l'inégalité de Hardy est stricte dès que f n'est pas nulle.

Partie III — La constante est optimale

Soit $A > 1$. On définit f_A sur $]0,+\infty[$ par

$$f_A(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant A, \\ \dfrac{A+1-t}{\sqrt{A}} & \text{si } A \leqslant t \leqslant A+1, \\ 0 & \text{si } t \geqslant A+1, \end{cases}$$

et l'on note F_A la fonction moyenne associée.

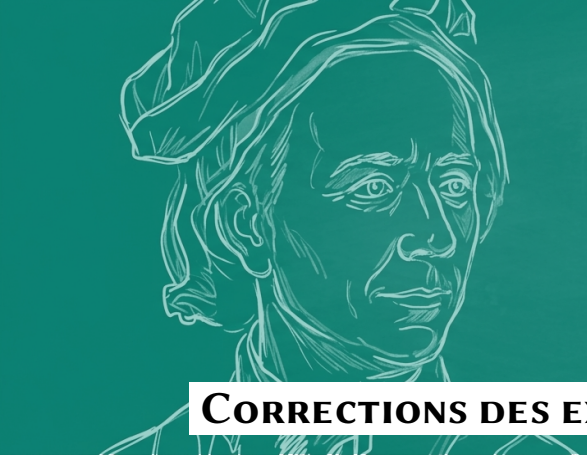
8. Vérifier que f_A est continue sur $]0,+\infty[$, que f_A^2 y est intégrable et que

$$\int_0^{+\infty} f_A(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \ln A + 1.$$

9. Montrer que, pour tout $x \in [1,A]$, $F_A(x) \geqslant \dfrac{2(\sqrt{x}-1)}{x}$, puis que

$$\int_0^{+\infty} F_A(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 4\ln A - 16.$$

10. En déduire qu'il n'existe pas de constante $C < 4$ telle que $\int_0^{+\infty} F^2 \leqslant C\int_0^{+\infty} f^2$ pour toute fonction f continue sur $]0,+\infty[$ de carré intégrable.



8

Intégrales généralisées

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 8.1

Énoncé p. 1

1. Pour $t \in [0,2]$, on a $t^2 \in [0,4]$, et pour $k \in [\![0,3]\!]$, $\lfloor t^2 \rfloor = k$ si et seulement si $\sqrt{k} \leqslant t < \sqrt{k+1}$. La fonction f est donc constante sur chacun des intervalles $[0,1[$, $[1,\sqrt{2}[$, $[\sqrt{2},\sqrt{3}[$ et $[\sqrt{3},2[$, et $f(2) = 4$. Elle est continue sur $[0,2]$ sauf en 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et 2, où elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite : elle est continue par morceaux sur $[0,2]$, et la subdivision $(0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2)$ lui est adaptée.
2. La fonction f est continue sur $]0,1]$, donc continue par morceaux sur cet intervalle : sa restriction à tout segment inclus dans $]0,1]$ est continue.

   La fonction g n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$. Si elle l'était, il existerait une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[0,1]$ adaptée à g, et g admettrait une limite finie en 0 à droite, limite de sa restriction à $]0,x_1[$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0$ et $g\left(\frac{1}{\pi/2+2n\pi}\right) = 1$, et ces deux suites de points tendent vers 0 : g n'a pas de limite en 0. La valeur $g(0)$ n'intervient pas.
3. La fonction f est continue sur $[0,1[$, donc continue par morceaux sur cet intervalle.

   La fonction g n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$: sur le dernier morceau $]x_{n-1},1[$ d'une subdivision adaptée, elle coïnciderait avec $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, qui tend vers $+\infty$ en 1, et n'aurait pas de limite finie à gauche en 1.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, on a $\lfloor 1/t \rfloor = n$, donc $f(t) = nt$. Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $]0,1]$. Les points $\frac{1}{n}$ qui appartiennent à $[c,d]$ vérifient $n \leqslant \frac{1}{c}$: ils sont en nombre fini, et entre deux d'entre eux f coïncide avec une fonction $t \mapsto nt$, continue et de limites finies aux bornes. La restriction de f à $[c,d]$ est continue par morceaux, donc f est continue par morceaux sur $]0,1]$.

   En $\frac{1}{n}$ avec $n \geqslant 2$, f vaut 1 et admet pour limite à droite $\frac{n-1}{n}$: elle est discontinue en chacun de ces points, qui s'accumulent en 0. La fonction g n'est donc pas continue par morceaux sur $[0,1]$: le premier morceau $]0,x_1[$ d'une subdivision adaptée contiendrait tous les $\frac{1}{n}$ avec $n > \frac{1}{x_1}$, et g y serait continue. Pourtant g est continue en 0 : pour $t \in \left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, on a $g(t) = nt \in \left]\frac{n}{n+1},1\right]$, donc $g(t) \to 1 = g(0)$ quand $t \to 0$.

Correction de l'exercice 8.2

Énoncé p. 1

1. Pour $k \in [\![0,2]\!]$, la fonction partie entière vaut k sur $[k,k+1[$: la subdivision $(0,1,2,3)$ est adaptée, et sur chaque morceau le prolongement continu est la constante k. Donc
$$\int_0^3 \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t + \int_1^2 1 \,\mathrm{d}t + \int_2^3 2 \,\mathrm{d}t = 3.$$
2. Sur $]-1,0[$, f est constante égale à -1 ; sur $]0,1[$, elle coïncide avec $t \mapsto t$. Ces

deux restrictions sont continues et admettent des limites finies aux bornes (-1 en 0^-, 0 en 0^+) : f est continue par morceaux sur $[-1,1]$, avec la subdivision $(-1,0,1)$. La valeur $f(0)=5$ n'intervient pas, et

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(-1)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} t\,\mathrm{d}t = -1+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Soit $g : t \mapsto \lfloor 3t \rfloor$ sur $[0,1]$. Elle vaut 0 sur $[0,\frac{1}{3}[$, 1 sur $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}[$, 2 sur $[\frac{2}{3},1[$ et $g(1)=3$: elle est continue par morceaux sur $[0,1]$. La somme de l'énoncé est $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$, une somme de Riemann de g sur $[0,1]$. D'après la proposition sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{3k}{n}\right\rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \lfloor 3t\rfloor\,\mathrm{d}t = 0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1.$$

Correction de l'exercice 8.3 **Énoncé p. 1**

1. La fonction $t\mapsto\frac{1}{(1+t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour $x\geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1-\frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

L'intégrale converge et vaut 1.

2. La fonction $t\mapsto\frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, et pour $x\in[0,1[$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

3. La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{2t}$ est continue sur $]-\infty,0]$, et pour $x\leqslant 0$,

$$\int_x^0 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_x^0 = \frac{1-\mathrm{e}^{2x}}{2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{2}$.

4. La fonction sin est continue sur $[0,+\infty[$, et pour $x\geqslant 0$, $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1-\cos(x)$. Cette quantité n'a pas de limite en $+\infty$: elle vaut 0 en $x=2n\pi$ et 2 en $x=(2n+1)\pi$. L'intégrale diverge.

5. Pour $t\geqslant 2$, $\ln(t)\geqslant\ln 2>0$: la fonction $t\mapsto\frac{1}{t\ln(t)^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$, et $t\mapsto-\frac{1}{\ln(t)}$ en est une primitive. Pour $x\geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} = \frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\ln 2}.$$

L'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\ln 2}$.

6. De même, $t\mapsto\frac{1}{t\ln(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$, de primitive $t\mapsto\ln(\ln(t))$, et pour $x\geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln(\ln(x))-\ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge.

Correction de l'exercice 8.4

Énoncé p. 2

1. Ce sont des intégrales de référence.
   (a) Converge : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ avec $a = \frac{1}{3} > 0$.
   (b) Diverge : $a = -\frac{1}{3} < 0$.
   (c) Converge : intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.
   (d) Diverge : intégrale de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{3}{2} \geqslant 1$.
   (e) Converge : intégrale de Riemann en 0 avec $\alpha = \frac{1}{3} < 1$.
   (f) Diverge : intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = \frac{1}{3} \leqslant 1$.
2. Dans chaque cas, la fonction est continue et positive sur l'intervalle d'intégration.
   (a) Pour $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^t + t^2 \geqslant \mathrm{e}^t > 0$, donc $0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^t+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (référence, $a = 1 > 0$) : par critère de majoration, l'intégrale converge.
   (b) Pour $t \geqslant 1$, $1 \leqslant 2 + \sin(t) \leqslant 3$, donc $0 \leqslant \frac{2+\sin(t)}{t^2} \leqslant \frac{3}{t^2}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{3}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann, $\alpha = 2 > 1$, et linéarité) : par critère de majoration, l'intégrale converge.
   (c) Pour $t \geqslant 1$, $\frac{2+\sin(t)}{t} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge (intégrale de Riemann, $\alpha = 1$) : par minoration, l'intégrale diverge.
   (d) Pour $t \in]0, 1]$, $\sqrt{t} + t \geqslant \sqrt{t} > 0$, donc $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}+t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) : par critère de majoration, l'intégrale converge.
   (e) Pour $t \in]0, 1]$, $t^2 + t^3 = t^2(1 + t) \leqslant 2t^2$, donc $\frac{1}{t^2+t^3} \geqslant \frac{1}{2t^2} \geqslant 0$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2}$ diverge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = 2 \geqslant 1$) : par minoration, l'intégrale diverge.

Correction de l'exercice 8.5

Énoncé p. 2

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$: l'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$. La fonction $t \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{t}\right)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivée $2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{1+t} = f(t)$. On coupe en $c = 1$, où $2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.
   — En $+\infty$: pour $x \geqslant 1$, $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
   — En 0 : pour $x \in]0, 1]$, $\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) \xrightarrow[x\to0]{} \frac{\pi}{2}$.
   L'intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On coupe en 1 : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), mais $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ diverge (intégrale de Riemann en $+\infty$, $\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$). L'intégrale diverge : il suffit d'une divergence à l'une des deux bornes.
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et paire sur $]-1, 1[$. Pour $x \in [0, 1[$, $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x) \xrightarrow[x\to1]{} \frac{\pi}{2}$: l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. D'après la proposition sur les fonctions paires, l'intégrale converge et vaut $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.
4. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et impaire sur $]-1, 1[$. Pour $x \in [0, 1[$,
$$\int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2} \xrightarrow[x\to1]{} 1,$$

donc $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la proposition sur les fonctions impaires, l'intégrale converge et vaut 0.

5. La fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge, et d'après la proposition, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge. Pourtant $\int_{-x}^{x} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \geqslant 0$: la convergence demande deux limites indépendantes, l'une en $-\infty$ et l'autre en $+\infty$.

Correction de l'exercice 8.6

Énoncé p. 2

Posons $z = -1 + \mathrm{i}\omega$, qui est non nul. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$ est continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs complexes, et pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \mathrm{e}^{zt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{zt}}{z}\right]_0^x = \frac{\mathrm{e}^{zx}-1}{z}, \qquad \text{avec} \qquad |\mathrm{e}^{zx}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)\,x} = \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

L'intégrale converge donc et vaut

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{z} = \frac{1}{1-\mathrm{i}\omega} = \frac{1+\mathrm{i}\omega}{1+\omega^2}.$$

Pour $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{zt} = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\right)$: la partie réelle de f est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t)$ et sa partie imaginaire est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(\omega t)$. D'après la proposition sur les fonctions à valeurs complexes, leurs intégrales convergent et sont les parties réelle et imaginaire de l'intégrale de f :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\omega^2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

Correction de l'exercice 8.7

Énoncé p. 2

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$: l'intégrale est généralisée en $-\infty$ et en $+\infty$. Posons $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^t$, qui est de classe C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u > 0$, $u = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln(u)$, et alors $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, soit $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$, avec $\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} = u + \frac{1}{u} = \frac{u^2+1}{u}$. Donc, par changement de variable, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

ont même nature. De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$, car $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Pour $t > 1$, $t^2 - 1 > 0$: la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$, et l'intégrale est généralisée en 1 et en $+\infty$. Posons $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, donc bijective de $]1, +\infty[$ sur $]0, 1[$.

Pour tout $t > 1$ et tout $u \in]0,1[$, $u = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{u}$, et alors $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, soit $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, avec, puisque $u > 0$,

$$t\sqrt{t^2-1} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1} = \frac{1}{u}\cdot\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}.$$

Ainsi $\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ et $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$ ont même nature. De plus, $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$, car $\arcsin(x) \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to 1$. Donc les deux intégrales convergent et, les bornes 1 et $+\infty$ devenant 1 et 0,

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_1^0\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 8.8

Énoncé p. 3

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut π. Par critère de majoration, en $-\infty$ et en $+\infty$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge : f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Son intégrale converge donc, et
$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi.$$
2. La fonction g est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$: un segment $[c,d] \subset [1,+\infty[$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers, et entre deux entiers consécutifs g coïncide avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ ou avec $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$, continues et de limites finies aux bornes. Pour tout $t \geqslant 1$, $|g(t)| = \frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann, $\alpha = 2 > 1$), de valeur 1 : g est intégrable sur $[1,+\infty[$, et
$$\left|\int_1^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1.$$
3. La fonction h est continue sur $]0,1]$, et pour tout $t \in]0,1]$, $0 \leqslant |h(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$. L'intégrale $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann en 0, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$) et vaut 2. Par critère de majoration, h est intégrable sur $]0,1]$, et
$$\left|\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2.$$

Correction de l'exercice 8.9

Énoncé p. 3

1. Pour $t > 0$, $t^2 + \sqrt{t} > 0$: la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2+\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $t^2 = \mathrm{o}\left(\sqrt{t}\right)$, donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0.
   - En $+\infty$: $\sqrt{t} = \mathrm{o}\left(t^2\right)$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ ($\alpha = 2 > 1$). Par critère d'équivalence, f est intégrable en $+\infty$.

La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $e^{-t} \to 1$, donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable en 0. Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0.
   - En $+\infty$: pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-t}$, donc $f(t) = O\left(e^{-t}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ ($a = 1 > 0$). Par critère de domination, f est intégrable en $+\infty$.

   La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. La fonction $f : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $1 - \cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, donc $f(t) \to \frac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 : son intégrale sur $]0,1]$ n'est pas généralisée en 0, et f est intégrable en 0.
   - En $+\infty$: pour $t > 0$, $0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{2}{t^2}$, donc $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par critère de domination, f est intégrable en $+\infty$.

   La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$, et la seule borne à étudier est 0. Comme $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, on a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, et $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0 ($\alpha = 1$). Par critère d'équivalence, f n'est pas intégrable en 0, donc pas sur $]0,1]$.
5. La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Les bornes à étudier sont 0 et $+\infty$.
   - En 0 : $e^{-t} \to 1$, donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, et ln est intégrable en 0 (fonction de référence). Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0.
   - En $+\infty$: par croissances comparées, $t^2 f(t) = t^2 \ln(t) e^{-t} \to 0$, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par critère de négligeabilité, f est intégrable en $+\infty$.

   La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 8.10 **Énoncé p. 3**

1. (a) La fonction est continue sur $[0,2[$, et la seule borne à étudier est 2. C'est la fonction $t \mapsto \frac{1}{(2-t)^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$: d'après la remarque sur les fonctions de Riemann en un point quelconque, elle est intégrable en 2, donc sur $[0,2[$.

   (b) La fonction est continue sur $]1,2]$, et la seule borne à étudier est 1. Notons-la f. Par translation, elle est intégrable en 1 si et seulement si $t \mapsto f(1+t) = \ln(t)$ est intégrable en 0, ce qui est le cas (fonction de référence). Elle est donc intégrable sur $]1,2]$.

   (c) La fonction est continue sur $]1,2]$. C'est la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-1)^\alpha}$ avec $\alpha = 2 \geqslant 1$: elle n'est pas intégrable en 1, donc pas sur $]1,2]$.
2. Sur $]0,1[$, la fonction est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) et continue sur $]0,1]$: elle est intégrable sur $]0,1[$, et pour $x \in]0,1]$, $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \to 2$

quand $x \to 0$, d'où $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}} = 2$.

Sur $]-1,0[$, la fonction est $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{-t}}$, continue sur $[-1,0[$, et la borne à étudier est 0. Par retournement, f est intégrable en 0 si et seulement si $t \mapsto f(0-t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0, ce qui est le cas. Pour $x \in [-1,0[$,

$$\int_{-1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t}} = \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{x} = 2 - 2\sqrt{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

La somme demandée vaut $2 + 2 = 4$.

Correction de l'exercice 8.11

Énoncé p. 3

Existence. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et par croissances comparées, $t^2 P(t)\mathrm{e}^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$: ainsi $P(t)\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Par critère de négligeabilité, $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: l'intégrale $N(P)$ converge, et elle est positive par positivité de l'intégrale. L'application N est donc bien définie, de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$.
Homogénéité. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \geqslant 0$, $|\lambda P(t)|\,\mathrm{e}^{-t} = |\lambda|\,|P(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$, et par linéarité de l'intégrale, $N(\lambda P) = |\lambda|\,N(P)$.
Inégalité triangulaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $t \geqslant 0$, $|P(t)+Q(t)|\,\mathrm{e}^{-t} \leqslant |P(t)|\,\mathrm{e}^{-t} + |Q(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$. Les trois intégrales convergent, et par croissance puis linéarité de l'intégrale, $N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.
Séparation. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N(P) = 0$. La fonction $t \mapsto |P(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$, intervalle non réduit à un point, et son intégrale est nulle, donc elle est nulle sur $[0,+\infty[$ (voir la proposition du cours sur l'intégrale nulle d'une fonction continue positive). Comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, on a $P(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$: le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$.
L'application N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 8.12

Énoncé p. 3

1) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a

$$\sqrt{t} f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}\ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

par croissance comparée (car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

On a

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée (car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Rédaction 1 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Rédaction 2 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0,+\infty[$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Remarque

En 0, on peut aussi dire : $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t)$ et ln est intégrable sur $]0,1]$, donc par critère d'équivalence, f aussi.

2) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$$

est continue sur $]0,1[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1[$.
On a

$$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}.$$

La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{1-t}$$

est continue sur $[0,1[$, la fonction

$$t \mapsto g(1-t) = \frac{1}{t}$$

n'est pas intégrable en 0 (Riemann), donc la fonction g n'est pas intégrable en 1 (proposition de retournement). Comme la fonction g est positive sur $[0,1[$, on en déduit que l'intégrale de g diverge en 1.
Enfin, toujours car g est positive, on en déduit que l'intégrale de f diverge en 1 par critère d'équivalence. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Remarque

Cette dernière intégrale converge en 0, mais cela n'a pas d'intérêt.

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(t)| \leq |t|$. Donc si $t \in]0,1[$,

$$|\sin(t)| \leq |t| < \sqrt{t},$$

inégalité stricte qui reste vraie en 1 (c'est-à-dire $|\sin(1)| < \sqrt{1}$), donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{t})\ln(t)}{\sqrt{t} - \sin(t)}$$

est définie et continue sur $]0,1]$ (composée, produit puis quotient de fonctions qui le sont, avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur $]0,1]$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
On a

$$\sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t = \underset{t\to 0^+}{o}(\sqrt{t}), \qquad \text{donc} \qquad \sqrt{t} - \sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}.$$

Puis, $\mathrm{sh}(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} u$, et comme $\sqrt{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, par composition, on a l'équivalent

$$\mathrm{sh}(\sqrt{t}) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}.$$

Donc

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t).$$

Rédaction 1 : la fonction

$$g : t \mapsto \ln(t)$$

est intégrable sur $]0,1]$.
Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable sur $]0,1]$. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
Rédaction 2 : la fonction

$$g : t \mapsto \ln(t)$$

est intégrable en 0.
Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
4) Pour tout $t \in]1,+\infty[$, on a $t > 1$ donc $t^2 > t$, puis

$$t^2 - t > 0.$$

Et $(1+t)^2 \geq 4 > 0$ si $t \in [1,+\infty[$. Donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2}$$

est continue sur $]1,+\infty[$ par composition puis quotient de fonctions qui le sont (avec le dénominateur qui ne s'annule pas), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]1,+\infty[$.
On a

$$f(t) = \frac{\ln(t) + \ln(t-1)}{(1+t)^2} \underset{t\to 1^+}{\sim} \frac{1}{4}\ln(t-1)$$

(car $\ln(t) \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(t-1) \underset{t\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\ln(t)$ est négligeable devant $\ln(t-1)$ en 1^+).
On a

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t^2-t)}{\sqrt{t}} = \frac{\ln(t^2)+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Rédaction 1 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[2,+\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$), la fonction

$$t \mapsto \ln(t-1)$$

est intégrable sur $]1,2]$ car la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$.
Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable sur $]1,2]$, et par critère de domination, la fonction f est intégrable sur $[2,+\infty[$. Donc la fonction f est intégrable sur $]1,+\infty[$, donc l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
Rédaction 2 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$), la fonction

$$t \mapsto \ln(t-1)$$

est intégrable en 1^+ car la fonction ln est intégrable en 0^+.
Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en 1^+, et par critère de domination, la fonction f est intégrable en $+\infty$. Donc la fonction f est intégrable sur $]1,+\infty[$, donc l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
5) La fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est continue et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction

$$f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$$

est continue (et positive) sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par composition avec la racine carrée, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
Si $t = \frac{\pi}{2} - h$,

$$\tan(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)} = \frac{\cos(h)}{\sin(h)} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}.$$

Donc

$$f(t) \underset{t\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-t}}.$$

La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - t}}$$

est intégrable en $\frac{\pi}{2}$, car la fonction

$$t \mapsto g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

l'est en 0^+ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).

Donc par critère d'équivalence, f est intégrable en $\frac{\pi}{2}$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Autre méthode : la fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction

$$f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$$

est continue (et positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par composition avec la racine carrée, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Faisons le changement de variable $u = \tan(t)$. La fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est de classe C^1 et strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc induit une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur

$$\left]\lim_{t \to 0^+} \tan(t), \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(t)\right[=]0, +\infty[,$$

on peut donc bien faire ce changement de variable.

De plus, on a « $\mathrm{d}u = \left(1 + \tan^2(t)\right) \mathrm{d}t$ », soit « $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2}$ ». Le théorème de changement de variable donne alors que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\, \mathrm{d}t$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1 + u^2}\, \mathrm{d}u$$

(et a même valeur si convergence).

Rédaction 1 : la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1 + u^2}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$, en particulier sur $[0, 1]$.

De plus,

$$\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ converge absolument, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ converge absolument aussi.

Rédaction 2 : la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$.
De plus,

$$\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est intégrable en $+\infty$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ converge absolument, et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ converge absolument aussi.

6) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t) - \sin(t)}{t^{7/2}}$$

est continue sur $]0, 1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.
Un DL donne

$$f(t) = \frac{t + \frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to0}{O}(t^5) - t + \frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to0}{O}(t^5)}{t^{\frac{7}{2}}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{t}}.$$

Rédaction 1 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{3\sqrt{t}} = \frac{1}{3t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction f aussi. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Rédaction 2 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{3\sqrt{t}} = \frac{1}{3t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction f aussi. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.
7) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\sin(t)}}{t}$$

est continue sur $[1, +\infty[$ (par composition puis quotient, avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) \geq -1$ donc par croissance de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{\sin(t)} \geq \mathrm{e}^{-1},$$

puis pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(t) \geq \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t} \geq 0.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}$$

est continue **positive** sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann).
Donc par critère de comparaison, l'intégrale considérée diverge.
8) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

est continue sur $[0, 1[$ car $t \mapsto 1 - t^2$ est continue et strictement positive sur $[0, 1[$ (on peut alors composer avec $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, 1[$.
On a

$$f(t) \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$

(car $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t)$).
La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

est intégrable en 1^- car la fonction

$$t \mapsto g(1-t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable en 0^+ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en 1^-. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Remarque

Ici, on connaît une primitive. La fonction arcsin est une primitive de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

sur $]-1,1[$, donc pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin(t)]_0^x = \arcsin(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

car on sait que la fonction arcsin, bien que seulement dérivable sur $]-1,1[$, est continue sur $[-1,1]$. Donc on retrouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge, et on a en plus

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

9) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t^2 + 4t + 1 = (t+1)^2 + 2t \geq 0,$$

donc on peut composer par la fonction racine carrée, puis par composition puis soustraction, la fonction

$$f : t \mapsto t + 2 - \sqrt{t^2+4t+1}$$

est continue sur $[0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$.
En utilisant la quantité conjuguée, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t + 2 - \sqrt{t^2+4t+1} = \frac{3}{t+2+\sqrt{t^2+4t+1}} = \frac{3}{t\left(1+\frac{2}{t}+\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}\right)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2t}.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{3}{2t}$$

est continue positive sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{2t}\,\mathrm{d}t$ diverge (Riemann).
Donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \left(t + 2 - \sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$$

diverge, ce qui entraîne que l'intégrale considérée diverge.
10) Soit

$$f : t \mapsto \frac{1}{(z+t)(1+\sqrt{t})},$$

la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ car $(z+t)(1+\sqrt{t})$ ne s'annule que pour $t = -z \notin \mathbb{R}_+$ (car $z \notin \mathbb{R}_-$). Donc la fonction f est intégrable sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$, en particulier sur $[0,1]$.
On a

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

Rédaction 1 : la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$
est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Rédaction 2 : la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$
est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en $+\infty$.
Donc la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Correction de l'exercice 8.13 **Énoncé p. 4**

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$: la nature de l'intégrale est celle de l'intégrabilité de f en 0 et en $+\infty$.
   En 0, $1 + t \to 1$, donc $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$. Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ (Riemann en 0).
   En $+\infty$, $1 + t \sim t$, donc $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Par critère d'équivalence, f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha + 1 > 1$, soit $\alpha > 0$ (Riemann en $+\infty$).
   L'intégrale converge si et seulement si $0 < \alpha < 1$.
2. La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$.
   Cas $\alpha > 1$. Choisissons β tel que $1 < \beta < \alpha$, par exemple $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$. Par croissances comparées,
   $$t^\beta g(t) = \frac{\ln(t)}{t^{\alpha-\beta}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$
   car $\alpha - \beta > 0$. Donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ en $+\infty$, et $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\beta > 1$) : par critère de négligeabilité, g est intégrable sur $[1, +\infty[$, et l'intégrale converge.
   Cas $\alpha \leqslant 1$. Pour $t \geqslant e$, on a $\ln(t) \geqslant 1$, donc $g(t) \geqslant \frac{1}{t^\alpha} \geqslant 0$. Or $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge (Riemann, $\alpha \leqslant 1$) : par minoration, $\int_e^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge, donc l'intégrale diverge.
   L'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.
3. La fonction $h : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
   En 0, $\arctan(t) \sim t$, donc $h(t) \sim t^{1-\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$. Par critère d'équivalence, h est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, soit $\alpha < 2$.
   En $+\infty$, $\arctan(t) \to \frac{\pi}{2}$, donc $h(t) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^\alpha}$. Par critère d'équivalence, h est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
   L'intégrale converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

Correction de l'exercice 8.14 **Énoncé p. 4**

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et $f(t) \sim \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $2 > 1$), f est intégrable sur $[0, +\infty[$ par critère d'équivalence, et l'intégrale converge.

Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}.$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+2}$ divergent toutes deux, on ne sépare donc pas l'intégrale en deux : pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1) - \ln(t+2)]_0^x = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \ln(2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2),$$

car $\frac{x+1}{x+2} \to 1$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = \ln(2)$.

2. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t(t^2+1)}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et $g(t) \sim \frac{1}{t^3}$ en $+\infty$: par critère d'équivalence, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $3 > 1$), et l'intégrale converge.
   Pour tout $t \geqslant 1$,

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1},$$

et pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_1^x = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\ln(2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln(2),$$

car $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} \to 1$. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+1)} = \frac{1}{2}\ln(2)$.

3. Pour tout réel t, $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1 \geqslant 1$: la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{t^2+2t+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et l'intégrale est généralisée en $-\infty$ et en $+\infty$. Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \arctan(t+1)$. Coupons en 0. Pour $y \geqslant 0$,

$$\int_0^y h(t)\,\mathrm{d}t = \arctan(y+1) - \arctan(1) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

et pour $x \leqslant 0$,

$$\int_x^0 h(t)\,\mathrm{d}t = \arctan(1) - \arctan(x+1) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Les deux intégrales convergent, donc l'intégrale converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Correction de l'exercice 8.15 **Énoncé p. 4**

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Pour $t = u^2$ avec $u > 0$, on a $\sqrt{t} = u$ et $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$. Donc, par changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

ont même nature, et même valeur en cas de convergence.
Étudions la seconde par parties. Posons $a : u \mapsto 2u$ et $b : u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}$, qui sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, avec $a'(u) = 2$ et $b'(u) = \mathrm{e}^{-u}$. On a

$a(u)b(u) = -2ue^{-u} \to 0$ quand $u \to 0$, et aussi quand $u \to +\infty$ par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} 2ue^{-u}\,du$ et $\int_0^{+\infty} a'(u)b(u)\,du = -\int_0^{+\infty} 2e^{-u}\,du$ ont même nature. De plus, $\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^{+\infty} 2ue^{-u}\,du = [-2ue^{-u}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-u}\,du = 0 + 2 = 2.$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut 2.

2. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1[$. Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,1[$, donc bijective de $]0,1[$ sur $]0,1[$. Pour $t = u^2$ avec $u \in]0,1[$, on a $\sqrt{t} = u$, $\ln(t) = 2\ln(u)$ et $dt = 2u\,du$, donc $\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2\ln(u)}{u} \cdot 2u\,du = 4\ln(u)\,du$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ et $\int_0^1 4\ln(u)\,du$ ont même nature. De plus, $\int_0^1 \ln(u)\,du$ est une intégrale de référence convergente, et pour $x \in]0,1[$,

$$\int_x^1 \ln(u)\,du = [u\ln(u) - u]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

par croissances comparées. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt = 4\int_0^1 \ln(u)\,du = -4.$$

Correction de l'exercice 8.16 **Énoncé p. 4**

1. La fonction fg est continue sur I comme produit de fonctions continues. Soit M un majorant de $|g|$ sur I. Pour tout $t \in I$,

$$0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant M\,|f(t)|\,.$$

La fonction f est intégrable sur I, donc $M|f|$ aussi par linéarité. Par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de I qui ne lui appartient pas, $|fg|$ est intégrable sur I : la fonction fg est intégrable sur I.

2. La fonction fg est continue sur I. Pour tout $t \in I$, on a $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$, soit

$$0 \leqslant |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(f(t)^2 + g(t)^2\right).$$

Les fonctions f^2 et g^2 sont intégrables sur I, donc $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ aussi par linéarité. Par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de I qui ne lui appartient pas, fg est intégrable sur I.

3. Prenons $f = g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$. Cette fonction est continue, positive et intégrable sur $]0,1]$ (Riemann en 0, $\frac{1}{2} < 1$), mais $fg : t \mapsto \frac{1}{t}$ ne l'est pas (Riemann en 0, $1 \geqslant 1$).

Correction de l'exercice 8.17 **Énoncé p. 4**

1. Soit $x \geqslant a$. La fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$, donc $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, et par la relation de Chasles $\int_x^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge aussi : f est

intégrable sur $[x, +\infty[$, et $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

Notons $J = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et, pour $x \geqslant a$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Par la relation de Chasles, $J = F(x) + R(x)$, soit $R(x) = J - F(x)$. Par définition de la convergence de l'intégrale, $F(x) \to J$ quand $x \to +\infty$, donc $R(x) \to 0$.

Enfin, f est continue sur $[a, +\infty[$, donc F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $F' = f$ (théorème fondamental de l'analyse). Ainsi $R = J - F$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $R' = -f$.

2. Soit $x > 0$. Pour $t \geqslant x$, on a $\frac{t}{x} \geqslant 1$, donc

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}.$$

Les deux fonctions sont continues et positives sur $[x, +\infty[$. De plus, pour $y \geqslant x$,

$$\int_x^y \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^y = \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-y^2}}{2x} \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x},$$

donc $\int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$. Par critère de majoration, $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{t}{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[n, +\infty[$, et pour $y \geqslant n$,

$$\int_n^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(y) - \arctan(n) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \arctan(n).$$

L'intégrale converge et, puisque $\arctan(n) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$ pour $n > 0$,

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

car $\arctan(u) \sim u$ quand $u \to 0$.

Correction de l'exercice 8.18 **Énoncé p. 5**

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at^2}$ est continue et paire sur $\mathbb{R}$. Posons $\varphi : u \mapsto \frac{u}{\sqrt{a}}$, qui est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Pour $t = \frac{u}{\sqrt{a}}$, on a $at^2 = u^2$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a}}$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. La seconde converge par hypothèse, donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

La fonction étant paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

2. La fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

3. Les deux fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$.
Posons $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, avec $u'(t) = 1$ et $v'(t) = te^{-t^2}$. On a $u(0)v(0) = 0$ et $u(x)v(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$ par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ ont même nature. La seconde converge par hypothèse, donc les deux convergent et

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}te^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Posons maintenant $u : t \mapsto t^2$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, avec $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = te^{-t^2}$. On a $u(0)v(0) = 0$ et $u(x)v(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ ont même nature. La seconde converge d'après la question précédente, donc les deux convergent et

$$\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^2e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 8.19 **Énoncé p. 5**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$: l'intégrale converge si et seulement si f_x est intégrable en 0 et en $+\infty$.
En 0, $e^{-t} \to 1$, donc $f_x(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$. Par critère d'équivalence, f_x est intégrable en 0 si et seulement si $1 - x < 1$, soit $x > 0$ (Riemann en 0).
En $+\infty$, par croissances comparées, $t^2f_x(t) = t^{x+1}e^{-t} \to 0$, donc $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $2 > 1$), f_x est intégrable en $+\infty$ par critère de négligeabilité, et ce pour tout x.
Donc $\Gamma(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$.

2. Soit $x > 0$. Posons $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$, qui sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, avec $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$. On a $u(t)v(t) = -t^xe^{-t} \to 0$ quand $t \to 0$, car $x > 0$, et quand $t \to +\infty$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} t^xe^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ ont même nature. La seconde converge d'après la première question, donc les deux convergent et

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^xe^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

Montrons par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1 = 0!$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\Gamma(n+1) = n!$. Alors, d'après ce qui précède avec $x = n+1 > 0$, $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)\cdot n! = (n+1)!$. Par récurrence, $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. D'après la première question, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge. Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Pour $t = u^2$ avec $u > 0$, on a $\sqrt{t} = u$ et $dt = 2u\,du$, donc

$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{e^{-u^2}}{u}\cdot 2u\,du = 2e^{-u^2}\,du$. Donc, par changement de variable,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2}\,du = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Correction de l'exercice 8.20 **Énoncé p. 5**

1. Soit $x > 0$. La fonction $g_x : t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $t \geqslant 0$,
$$0 \leqslant |g_x(t)| \leqslant Me^{-xt}.$$
Comme $x > 0$, $\int_0^{+\infty} Me^{-xt}\,dt$ converge (intégrale de référence) et vaut $\frac{M}{x}$. Par critère de majoration, g_x est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $F(x)$ est bien définie, et
$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |g_x(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} Me^{-xt}\,dt = \frac{M}{x}.$$
Comme $\frac{M}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, on a $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
2. Soient $0 < x \leqslant y$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $e^{-yt} \leqslant e^{-xt}$, et comme $f(t) \geqslant 0$, $f(t)e^{-yt} \leqslant f(t)e^{-xt}$. Les deux intégrales convergent d'après la première question : par croissance de l'intégrale, $F(y) \leqslant F(x)$. La fonction F est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. Si $f = 1$, pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$.
Si $f = \cos$, soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{(-x+i)t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs complexes, et pour $y \geqslant 0$,
$$\int_0^y e^{(-x+i)t}\,dt = \left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^y = \frac{e^{(-x+i)y}-1}{-x+i}.$$
Comme $\left|e^{(-x+i)y}\right| = e^{-xy} \to 0$ quand $y \to +\infty$, l'intégrale converge et
$$\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\,dt = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}.$$
Sa partie réelle est $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(t)\,dt$, donc
$$F(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Correction de l'exercice 8.21 **Énoncé p. 5**

La fonction
$$f : x \mapsto \frac{|\ln(x)|^\alpha}{x^2+1}$$
est continue sur $]0,+\infty[$ (la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $[0,+\infty[$ si $\alpha \geq 0$) par composition puis quotient de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc la fonction f est intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a
$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} |\ln(x)|^\alpha = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

car $\sqrt{x}\,|\ln(x)|^\alpha \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$).
On a

$$x^{\frac{3}{2}} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. Donc

$$f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Rédaction 1 : la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge, pour tout $\alpha \geq 0$.
Rédaction 2 : la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).
Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0,+\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge, pour tout $\alpha \geq 0$.
La fonction

$$g : t \mapsto \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha}$$

est continue positive sur $]0,+\infty[$ (positive car $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout réel t, donc $\sin(t) \leq |\sin(t)| \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

est continue positive sur $[1,+\infty[$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ (Riemann), soit si et seulement si $\alpha > 2$. Donc la fonction g est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha > 2$ (et comme $g \geq 0$, cela revient bien à dire

que l'intégrale converge en l'infini si et seulement si $\alpha > 2$).
On a

$$g(t) = \frac{\frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)}{t^\alpha} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{6t^{\alpha-3}}.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$$

est continue positive sur $]0,1]$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha - 3 < 1$ (Riemann), soit si et seulement si $\alpha < 4$. Donc la fonction g est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $\alpha < 4$ (et comme $g \geq 0$, cela revient bien à dire que l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha < 4$).
Conclusion : l'intégrale converge si et seulement si $2 < \alpha < 4$, et alors elle converge absolument.

Correction de l'exercice 8.22 **Énoncé p. 5**

La fonction

$$f : t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ ($t^b > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$. De plus, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'intégrale considérée converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Cas 1 : Si $b > 0$,

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^a,$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{-a}}$ est positive continue sur $]0,1]$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $-a < 1$ (Riemann).
Puis,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{b-a}}$ est positive continue sur $[1,+\infty[$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $b - a > 1$ (Riemann). Donc (par critère d'équivalence), l'intégrale existe si et seulement si

$$b > 1 + a > 0.$$

Cas 2 : si $b = 0$, l'intégrale est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}t^a \,\mathrm{d}t$ qui diverge toujours (Riemann).
Cas 3 : si $b < 0$,

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{b-a}}$ est positive continue sur $]0,1]$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ si et seulement si $b - a < 1$ (Riemann).
Puis,

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^a,$$

or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{-a}}$ est positive continue sur $[1,+\infty[$, et intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ si et seulement si $-a > 1$ (Riemann). Donc (par critère d'équivalence), l'intégrale existe si et seulement si $b < 1+a < 0$.
Conclusion : donc l'intégrale existe si et seulement si $b > 1+a > 0$ ou $b < 1+a < 0$.

Remarque

Si $b < 0$, on peut écrire $b = -b'$ avec $b' > 0$, et alors

$$\frac{t^a}{1+t^b} = \frac{t^a}{1+\frac{1}{t^{b'}}} = \frac{t^{a+b'}}{1+t^{b'}},$$

et donc le premier cas donne la convergence si et seulement si $b' > a+b'+1 > 0$, soit $b < b-a-1 < 0$, qui redonne bien $b < 1+a < 0$.

Correction de l'exercice 8.23 **Énoncé p. 5**

1) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
On a

$$f(t) = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \qquad \text{et} \qquad f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

par croissances comparées.
De plus,

- la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$),
- la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$),

donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ et $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc sur $]0,+\infty[$, ce qui assure l'absolue convergence de l'intégrale I, donc la convergence.
Faisons le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$: la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est une bijection C^1 strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$, puis (**comme on sait que l'intégrale I converge**) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2}\left(-\mathrm{d}u\right) = -I$$

donc

$$\boxed{I = 0}.$$

2) La fonction

$$g : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

est continue sur $]0, +\infty[$ (par composition), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
On a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \ln(t^2+1) - 2\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -2\ln(t),$$

or

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$)
- et la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$,

donc par critère d'équivalence, la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc sur $]0, +\infty[$. En particulier, l'intégrale J converge absolument, donc converge.
Les fonctions

$$u : t \mapsto t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -\frac{2}{t(1+t^2)}.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad u(t)v(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -2\ln(t)t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

(donc uv a bien une limite **finie** en 0^+ et en $+\infty$).
Donc, le théorème d'intégration par parties s'applique : comme l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, on a l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

qui converge aussi, et

$$J = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} -\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\,[\arctan(t)]_0^{+\infty} = \boxed{\pi}.$$

3) La fonction

$$f : t \mapsto \sin(t)\ln\big(\sin(t)\big)$$

est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car sur cet intervalle, sin > 0), donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$f(t) = \sin(t) \ln\left(\sqrt{1-\cos^2(t)}\right) = \frac{1}{2}\sin(t)\ln\left(1-\cos^2(t)\right),$$

car sin > 0 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (donc $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$).
Faisons le changement de variable $u = \cos(t)$.
La fonction

$$t \mapsto \cos(t)$$

est une bijection C^1 strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1[$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$, donc le théorème de changement de variable donne que l'intégrale K **a la même nature que** l'intégrale

$$\int_1^0 -\frac{1}{2}\ln\left(1-u^2\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\ln(1-u)+\ln(1+u)\right)\mathrm{d}u,$$

et a même valeur si convergence. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\ln(1-u)+\ln(1+u)\right)\mathrm{d}u &= \lim_{\mathrm{e}\to 0^-}\left[-(1-u)\ln(1-u)+(1-u)+(1+u)\ln(1+u)-(1+u)\right]_0^{1-\mathrm{e}} \\ &= \lim_{\mathrm{e}\to 0^-}\Big(-\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})+\mathrm{e}+(2-\mathrm{e})\ln(2-\mathrm{e})-(2-\mathrm{e})\Big) = 2\ln(2)-2\end{aligned}$$

Comme la limite existe et est finie, l'intégrale précédente converge, donc l'intégrale K converge, et

$$\boxed{K = \ln(2)-1}.$$

4) La fonction

$$t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$$

est continue sur $[0,1[$ (car pour $t \in [0,1[$, on a $0 \le t < 1$ donc $1-t^2 > 0$, donc on peut composer avec la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0,1[$.
Faisons le changement de variable $t = \sin(u)$: la fonction

$$u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \sin(u)$$

est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1[$. Alors $\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u$ car sur cet intervalle, cos > 0. Donc

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Donc le théorème de changement de variable donne que l'intégrale L **a la même nature que** l'intégrale

$$L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)\,\mathrm{d}u,$$

et même valeur si convergence. Or, cette nouvelle intégrale n'est pas généralisée : la fonction

$$u \mapsto \sin^3(u)$$

est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc est intégrable sur ce segment. Donc l'intégrale L' converge, donc l'intégrale L converge aussi, et

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\big(1-\cos^2(u)\big)\,\mathrm{d}u = \left[-\cos(u) + \frac{1}{3}\cos^3(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

5) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.
On a

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^3} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

par croissance comparée, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ et l'intégrale M existe donc (l'intégrale M converge absolument, donc converge).
Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto -\frac{1}{2(1+t^2)} \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \ln(t)$$

sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto \frac{1}{t},$$

de plus on a

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(t)}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$). Comme on sait que l'intégrale

$$M = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

converge, et de plus, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{\left[-\frac{\ln(t)}{2(1+t^2)}\right]_1^{+\infty}}_{=0-0} - \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(t)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^{+\infty} \\ &= \lim_{A\to+\infty}\frac{2\ln(A)-\ln(1+A^2)}{4}+\frac{\ln(2)}{4} \\ &= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{4}\ln\left(\frac{A^2}{1+A^2}\right)+\frac{\ln(2)}{4} = \boxed{\frac{\ln(2)}{4}} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8.24 **Énoncé p. 6**

1) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x)| = x^\alpha,$$

et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x$$

est une intégrale de Riemann toujours divergente (quel que soit α : en 0 si $\alpha \le -1$, en $+\infty$ si $\alpha \ge -1$). Donc la fonction f n'est jamais intégrable sur $]0,+\infty[$.
2) L'intégrale demandée n'est pas absolument convergente, mais on va regarder sa convergence.
Pour $\alpha > -1$, la fonction

$$x \mapsto |f(x)| = x^\alpha$$

est intégrable en 0 (Riemann), donc pas de problème en 0 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Puis, les fonctions

$$u : x \mapsto -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto x^\alpha$$

sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, de dérivées

$$u' : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$

Puis, pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$|u(x)v(x)| = x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si $\alpha < 0$. Donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} -\mathrm{i}\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$$

(*et si convergence, on a une égalité qui les relie, mais on ne s'en sert pas ici*).
Or, la fonction

$$g : x \mapsto -\mathrm{i}\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, la fonction

$$|g| : x \mapsto |\alpha|\, x^{\alpha-1}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ si $\alpha < 0$ (Riemann), donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge.
Conclusion : l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge si $\alpha < 0$, l'intégrale

$$\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge si $-1 < \alpha$, et donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge si $-1 < \alpha < 0$.

Correction de l'exercice 8.25 **Énoncé p. 6**

La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, et se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$), donc est intégrable sur tout intervalle du type $]0, A]$ avec $A > 0$. En particulier, l'intégrale

$$\int_0^{1} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge.
Les fonctions

$$u : t \mapsto -\cos(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \frac{1}{t}$$

sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \sin(t) \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}.$$

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a

$$0 \leq |u(t)v(t)| \leq \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$$

(donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$)
Donc le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(*et si convergence, on a une égalité qui les relie, mais on ne s'en servira pas ici*).
Puis, la fonction

$$g : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, et la fonction cos étant bornée sur $\mathbb{R}$ (donc au voisinage de $+\infty$), on a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc par critère de domination, la fonction g aussi. Donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge, et donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.
Conclusion : les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

convergent, donc par la relation de Chasles, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge.

Remarque

En choisissant $t \mapsto 1-\cos(t)$ comme primitive de sin, on peut même faire l'intégration par parties sur $]0,+\infty[$, et obtenir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(t) \in [-1,1],$$

on a, pour tout $t \in]0,+\infty[$,

$$|\sin(t)| \geq \sin^2(t), \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} \geq 0.$$

Or, la formule trigonométrique de duplication donne, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geq \frac{1-\cos(2t)}{2t} \geq 0.$$

Puis, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$$

converge par intégration par parties, avec $u : t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{2}$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{2t}$: le produit uv tend vers 0 en $+\infty$, et $uv' : t \mapsto -\dfrac{\sin(2t)}{4t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de domination par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ (comme ci-dessus), mais l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

diverge. Donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$$

diverge (addition d'une intégrale convergente avec une intégrale divergente). L'inégalité des fonctions (positives) et la divergence de cette intégrale donnent, grâce au critère de comparaison, que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$$

diverge, autrement dit que l'intégrale I ne converge pas absolument.

Correction de l'exercice 8.26 **Énoncé p. 6**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$$

est continue sur $[0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$. On a

$$f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

car $t^{n+2}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (car $n+2>0$). Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc par critère de domination, la fonction f aussi.
Donc l'intégrale I_n converge (absolument) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto t^n \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$$

sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto nt^{n-1} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto \mathrm{e}^{-t},$$

et

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$), donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme on sait que l'intégrale I_n converge, le théorème d'intégration par parties donne :

$$I_n = \underbrace{\left[-t^n\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -nt^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = nI_{n-1}$$

Comme

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1,$$

on en déduit par récurrence directe que

$$\boxed{I_n = n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 8.27 **Énoncé p. 6**

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

est continue sur $[0,+\infty[$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$, en particulier sur $[0,1]$.
On a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}},$$

or $n \geq 1$ donc $2n \geq 2 > 1$, donc la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{2n}}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.

Donc la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$, puis l'intégrale I_n existe (et même converge absolument).
Enfin,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre par parties : les fonctions

$$u : x \mapsto x \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, de dérivées

$$u' : x \mapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}},$$

on a

$$u(x)v(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $2n-1 \geq 1 > 0$ (puisque $n \geq 1$). Enfin, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

converge, alors le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{-2nx}{(x^2+1)^{n+1}} x\,\mathrm{d}x$$

converge, et

$$I_n = \underbrace{\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}} x\,\mathrm{d}x = 2n\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

Donc

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) On a alors en itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} I_1 = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

(en multipliant numérateur et dénominateur par $2n(2n-2)\dots 2$), donc

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}\pi = \boxed{\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{n}{2n-1}\pi}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
Initialisation : si $n = 1$,

$$\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{n}{2n-1}\pi = \frac{2!}{4\times 1^2}\frac{1}{2-1}\pi = \frac{\pi}{2} = I_1.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{n}{2n-1}\pi$. Alors

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n = \frac{2n-1}{2n}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{n}{2n-1}\pi = \frac{1}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\pi$$

alors que

$$\frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}\frac{n+1}{2(n+1)-1}\pi = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\big((n+1)n!\big)^2}\frac{n+1}{2n+1}\pi = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{4(n+1)^2 4^n(n!)^2}\frac{n+1}{2n+1}\pi = \frac{1}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\pi$$

Il y a donc bien égalité :

$$I_{n+1} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}\frac{n+1}{2(n+1)-1}\pi.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{n}{2n-1}\pi$.

Correction de l'exercice 8.28 **Énoncé p. 6**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f : t \mapsto \ln^n(t)$$

est continue sur $]0,1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(t) = \underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

car

$$\sqrt{t}\ln^n(t) = t^{\frac{1}{2}}\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (car $\dfrac{1}{2} > 0$). Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ (Riemann, $\dfrac{1}{2} < 1$), donc la fonction f aussi par critère de domination.
Donc l'intégrale I_n est absolument convergente (donc convergente) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$u : t \mapsto t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \ln^{n+1}(t)$$

sont de classe C^1 sur $]0,1]$, de dérivée

$$u' : t \mapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto (n+1)\frac{\ln^n(t)}{t},$$

on a

$$u(t)v(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en 0^+), donc par le théorème d'intégration par parties, comme on sait que l'intégrale

$$I_{n+1} = \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

converge, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (n+1)t\frac{\ln^n(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge, et que :

$$I_{n+1} = \underbrace{\left[t\ln^{n+1}(t)\right]_0^1}_{=0-0} - \int_0^1 (n+1)\ln^n(t)\,\mathrm{d}t = -(n+1)I_n$$

Comme $I_0 = 1$, on a par récurrence directe

$$\boxed{I_n = (-1)^n n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Le changement de variable $u = -\ln(t)$ donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = (-1)^n n!$$

d'après l'un des exercices précédents.

Correction de l'exercice 8.29 **Énoncé p. 6**

1) La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc par quotient, la fonction

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue sur $]0,1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
Puis, $f(0) = 0$ et la fonction f est dérivable en 0, donc

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f'(0),$$

donc la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$$

est bornée au voisinage de 0 (puisqu'elle a une limite en 0), et donc

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ (Riemann, $\frac{1}{2}<1$).

Donc, par critère de domination, la fonction g est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$. En particulier, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

est (absolument) convergente.

2) La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc par quotient, la fonction

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t^2}$$

est continue sur $]0,1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1]$.
Comme $f(0)=0$ et $f'(0)\neq 0$, on peut dire

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} tf'(0),$$

et donc

$$\frac{f(t)}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{f'(0)}{t},$$

or la fonction

$$t \mapsto \frac{f'(0)}{t}$$

est continue **de signe constant** sur $]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(0)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (Riemann, **et car** $f'(0)\neq 0$), donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est divergente.

Correction de l'exercice 8.30 **Énoncé p. 6**

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0,$$

donc par composition, la fonction

$$x\mapsto\sqrt{x^2+2x+2}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction

$$f : x\mapsto x+1-\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{a}{x}$$

est continue sur $[1,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1,+\infty[$.
En utilisant la quantité conjuguée : pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+^*$ (on veut $x\geq 0$ pour que $\sqrt{x^2}=x$, et $x\neq 0$ pour pouvoir diviser par x),

$$x+1-\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{-1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{-1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}.$$

On utilise alors le développement limité :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{O}(u^2),$$

donc en posant $u = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}$, on a $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent,

$$x+1-\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{-1}{x}\frac{1}{2+\frac{2}{x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-1}{2x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Or, on a le DL

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + \underset{u\to 0}{O}(u^2),$$

donc en posant $u = \dfrac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, on a $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$x+1-\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{-1}{2x}\left(1 - \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{-2a-1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Si $-2a-1 \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-2a-1}{2x},$$

or la fonction

$$x \mapsto \frac{-2a-1}{2x}$$

est de signe constant et continue sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-2a-1}{2x}\,\mathrm{d}x$ diverge (Riemann, **et car** $-2a-1\neq 0$), donc, par critère d'équivalence, l'intégrale considérée diverge.

Si $-2a-1 = 0$, alors

$$f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.

Donc l'intégrale existe si et seulement si

$$\boxed{a = -\frac{1}{2}}.$$

Correction de l'exercice 8.31 **Énoncé p. 7**

La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$$

est continue sur $]0,1[$ par composition et quotient de fonctions qui le sont (car $1-t>0$ pour $t \in]0,1[$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0,1[$.
On a

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln(t),$$

or la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$.
On a

$$f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0,$$

donc la fonction f se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1)=0$), donc la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right[\\ \text{en } 1 \end{array} \right\}$.
Donc la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1\right[\\ \text{en } 1 \end{array} \right\}$, donc sur $]0,1[$.
L'intégrale considérée converge donc absolument, en particulier elle converge.
On intègre alors par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto \ln(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto -2\sqrt{1-t}$$

sont C^1 sur $]0,1[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}},$$

de plus

$$\lim_{t\to 1^-} u(t)v(t) = 0$$

existe et est finie, mais la fonction uv n'a pas de limite finie en 0. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration par parties sur $]0,1[$, mais on peut l'appliquer sur $[\mathrm{e},1[$, pour tout $\mathrm{e} \in]0,1[$.
Comme on sait que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$ (donc sur $[\mathrm{e},1[$), on a alors :

$$\int_{\mathrm{e}}^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \Big[-2\sqrt{1-t}\ln(t)\Big]_{\mathrm{e}}^{1} - \int_{\mathrm{e}}^{1} -2\sqrt{1-t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) + 2\int_{\mathrm{e}}^{1} \sqrt{1-t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Posons alors $u = \sqrt{1-t}$ dans l'intégrale qui reste : la fonction

$$t \mapsto \sqrt{1-t}$$

est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $[\mathrm{e}, 1[$ sur $]0, \sqrt{1-\mathrm{e}}]$, et « $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ », donc « $\mathrm{d}t = -2u\,\mathrm{d}u$ ». Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t &= 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) + 2\int_{\sqrt{1-\mathrm{e}}}^{0} -u^2\frac{1}{1-u^2}2\,\mathrm{d}u \\ &= 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) + 4\int_{0}^{\sqrt{1-\mathrm{e}}}\left(-1+\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right)\mathrm{d}u \\ &= 2\sqrt{1-\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) - 4\sqrt{1-\mathrm{e}} - 2\ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}}\right) + 2\ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}}\right)\end{aligned}$$

En utilisant la quantité conjuguée, on a

$$\ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}}}\right) = \ln(\mathrm{e}) - \ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}}\right),$$

par conséquent

$$\int_{\mathrm{e}}^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \underbrace{2\left(\sqrt{1-\mathrm{e}}-1\right)}_{\substack{\sim \\ \mathrm{e}\to 0^+}\ -\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) - 4\sqrt{1-\mathrm{e}} + 4\ln\left(1+\sqrt{1-\mathrm{e}}\right) \underset{\mathrm{e}\to 0^+}{\longrightarrow} -4+4\ln(2)$$

car $\lim\limits_{\mathrm{e}\to 0^+} \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) = 0$ (par croissance comparée). Donc

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \boxed{-4+4\ln(2)}.$$

Correction de l'exercice 8.32 **Énoncé p. 7**

1a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
La fonction

$$f : t \mapsto P_k(t)\mathrm{e}^t = t^k\mathrm{e}^t$$

est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.
On a

$$\frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^{k+2}\mathrm{e}^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Donc

$$f(t) = \underset{t\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]-\infty,-1] \\ \text{en } -\infty\end{array}\right\}$ car la fonction

$$t \mapsto g(-t) = \frac{1}{t^2}$$

l'est $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2 > 1$).

Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]-\infty,-1] \\ \text{en } -\infty \end{array} \right\}$.
Autrement dit, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} P_k(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

est absolument convergente, donc convergente.
1b) Si $f \in E$, alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k.$$

Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

converge par linéarité de l'intégrale convergente (d'après la question précédente, chaque intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} P_k(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ est convergente).
Enfin, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

converge (une fonction continue sur un segment, ici $[0, x]$, est intégrable sur ce segment). Par la relation de Chasles, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

est donc convergente, donc la fonction g est bien définie en x. C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc g est définie sur $\mathbb{R}$.
1c) On a

$$L(P_0) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^{x} = 1,$$

donc

$$\boxed{L(P_0) = P_0}.$$

Les intégrations par parties qui suivent se justifient comme dans la question 1d, qui traite le cas général.
Intégrons par parties :

$$L(P_1) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[t\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x - 1,$$

donc

$$\boxed{L(P_1) = P_1 - P_0}.$$

Intégrons par parties :

$$L(P_2) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^2\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \left[t^2\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} 2t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = x^2 - 2(x-1),$$

donc

$$\boxed{L(P_2) = P_2 - 2P_1 + 2P_0}.$$

1d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Intégrons par parties. Les fonctions

$$u : t \mapsto \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto t^{k+1}$$

sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-\infty, x]$. On a

$$u' : t \mapsto \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto (k+1)t^k.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en $-\infty$). Le théorème d'intégration par parties s'applique alors, et comme l'intégrale

$$L(P_{k+1})(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

est une intégrale convergente, on sait que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} (k+1)t^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

converge, et :

$$L(P_{k+1}) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\left[t^{k+1}\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}(k+1)t^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x^{k+1} - 0 - (k+1)\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = P_{k+1}(x)$$

Cela est vrai pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, donc

$$L(P_{k+1}) = P_{k+1} - (k+1)L(P_k).$$

La formule proposée se déduit alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
Initialisation : si $k = 0$,

$$L(P_0) = P_0 = (-1)^0 0! \sum_{j=0}^{0} \frac{(-1)^j}{j!} P_j$$

(car $0! = 1$ et $(-1)^0 = 1$), d'où l'initialisation.
Hérédité : soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons la formule vraie au rang k, alors d'après le début de la question,

$$\begin{aligned}
L(P_{k+1}) &= P_{k+1} - (k+1)L(P_k) \\
&= P_{k+1} - (k+1)(-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j \\
&= P_{k+1} + (-1)^{k+1}(k+1)! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j \\
&= (-1)^{k+1}(k+1)! \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j}{j!} P_j
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$L(P_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} P_j.$$

2a) Montrons que L est linéaire : pour tout $(f, g) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L(\lambda f + g)(x) &= \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} (\lambda f + g)(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \big(\lambda f(t)\mathrm{e}^t + g(t)\mathrm{e}^t\big) \,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= \lambda L(f)(x) + L(g)(x) \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale convergente (chaque intégrale converge, vu à la question 1b).
L'égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit bien

$$L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g).$$

Donc L est linéaire.
La formule de la question précédente donne directement que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $L(P_k) \in \mathbb{R}[X]$ et que

$$\deg\big(L(P_k)\big) = k,$$

et même $L(P_k)$ est unitaire (son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient de P_k, vaut 1). Alors, comme L est linéaire, on en déduit bien que si $f \in E$ alors $L(f)$, qui est combinaison linéaire de $L(P_0), \ldots, L(P_n)$ (car $(P_0, \ldots, P_n)$ base de E) qui sont tous dans $\mathbb{R}_n[X]$, est aussi dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Donc L va de E dans E.
Donc L est un endomorphisme de E.
De la question précédente, on a

$$M = \mathrm{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}(L) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & (-1)^n n! \\ & 1 & (-1)^{i+j}\dfrac{j!}{i!} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$M_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}\dfrac{j!}{i!} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

(en supposant qu'on numérote les lignes et colonnes de M à partir de 0).
La matrice M est donc triangulaire supérieure, et tous ses coefficients diagonaux valent 1.

2b) De 1d, on a par linéarité de L :

$$L\big(P_{k+1} + (k+1)P_k\big) = P_{k+1}$$

(pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) et $L(P_0) = P_0$, donc $P_0, \ldots, P_n$ sont dans l'image de L, donc L est surjective (contient une base de l'espace d'arrivée), donc L est bijective (car surjective, linéaire et les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension **finie**). Puis, $P_0 = L^{-1}(P_0)$ et

$$L^{-1}(P_{k+1}) = P_{k+1} + (k+1)P_k$$

(pour $k \in [\![0, n-1]\!]$). Donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice de L^{-1} dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$).

Correction de l'exercice 8.33

Énoncé p. 7

1) La fonction

$$g : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$, en particulier sur $[x, 1]$ pour tout $x > 0$.
On a

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$), donc la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ par critère de domination.
La fonction g est donc intégrable sur $[x, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc sur $[x, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc l'expression $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbb{R}_+^* \subset \mathcal{D}.$$

On a

$$g(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t},$$

or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue positive sur $]0, 1]$, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

diverge (intégrale de Riemann), donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

diverge et donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

diverge aussi. Donc la fonction f n'est pas définie en 0.
Si la fonction f était définie en $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

serait convergente, et comme $x < 0 < +\infty$, on devrait avoir l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

convergente aussi, ce qui n'est pas. Donc l'expression $f(x)$ n'existe pas pour $x \in \mathbb{R}_-^*$.
Donc

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*}.$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la relation de Chasles, on peut écrire

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t + f(1).$$

La fonction g est continue sur **l'intervalle** $]0, +\infty[$, donc il existe une primitive G de g sur cet intervalle (théorème fondamental de l'analyse), alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(1).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = -G(x) + G(1) + f(1),$$

et comme la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée g, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$f' = -g$$

sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f' est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f aussi.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = -\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1) = \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1) - \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1) - \ln(x).$$

Or, la fonction

$$\phi : t \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 (en posant $\phi(0) = 1$), donc

$$\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \phi(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

(car l'intégrale converge, puisque faussement impropre en 0), par conséquent la fonction

$$x \mapsto \int_1^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + f(1)$$

est négligeable devant $\ln(x)$ en 0^+ (car tend vers une limite finie alors que $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$), donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \frac{1}{t}$$

sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées

$$u' : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -\frac{1}{t^2},$$

de plus

$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$), donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et donne (puisque l'on sait que l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente) :

$$f(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} -\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = -0 + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, par croissance de l'intégrale, en utilisant que, pour $t \in [x, +\infty[$ on a $t \geq x > 0$, donc $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{x}$, donc

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \leq \frac{\mathrm{e}^{-t}}{xt},$$

puis

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\big(f(x)\big),$$

donc $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\big(f(x)\big)$, soit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}}.$$

Remarque

On peut aussi majorer ainsi :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2},$$

donc

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - f(x) \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right),$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

Correction de l'exercice 8.34 **Énoncé p. 7**

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^n \ln(x)}{1 - x^2}$$

est continue sur $]0, 1[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1[$.

Puis,

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1^n(x-1)}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x} \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{2},$$

donc la fonction f se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$), donc la fonction f est intégrable en 1.
Si $n \geq 1$,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée), et donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$), donc la fonction f est intégrable en 0. Et dans ce cas, l'intégrale considérée converge.
Si $n = 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x),$$

or la fonction ln est intégrable en 0, donc par le critère d'équivalence, f aussi. Donc l'intégrale considérée converge.
Si $n = -1$, alors

$$-f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

et la fonction

$$x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}$$

est continue et positive sur $]0, 1]$ (et avec $-f$ continue sur $]0, 1]$ après son prolongement en 1), donc le critère d'équivalence donne que l'intégrale

$$\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x$$

est de même nature que l'intégrale

$$I = \int_0^1 -\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $\mathrm{e} \in]0, 1[$,

$$\int_{\mathrm{e}}^1 -\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_{\mathrm{e}}^1 = \frac{1}{2}\ln^2(\mathrm{e}) \underset{\mathrm{e}\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc l'intégrale I est divergente. Donc l'intégrale

$$\int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge, donc l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge aussi.
Si $n \leq -2$,

$$\frac{\ln(x)}{x} = \underset{x\to 0^+}{O}\big(f(x)\big),$$

et la fonction f est de signe constant sur]0, 1[, donc si l'intégrale de f convergeait en 0, ce serait le cas de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui est faux d'après le calcul précédent. Donc l'intégrale diverge.

Correction de l'exercice 8.35 **Énoncé p. 7**

La fonction $t \mapsto 1-t$ est continue et strictement positive sur $]0,1[$. La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction

$$t \mapsto \ln(1-t)$$

est continue sur $]0,1[$.
Par produit, la fonction

$$t \mapsto \ln(t)\ln(1-t)$$

aussi. Puis, la fonction $t \mapsto t$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,1[$, donc par quotient, la fonction f est continue sur $]0,1[$.
Si $t \to 0$,

$$\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t, \qquad \text{et donc} \qquad f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t).$$

Or la fonction ln est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$, donc par critère d'équivalence, la fonction f aussi.
Puis,

$$\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1, \qquad \text{donc} \qquad f(t) \underset{t\to 1}{\sim} (t-1)\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée), donc la fonction f se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1)=0$). Donc la fonction f est intégrable en 1.
Donc la fonction f est intégrable sur $]0,1[$.

Correction de l'exercice 8.36 **Énoncé p. 7**

La fonction

$$f : x \mapsto \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations usuelles.
On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0)=0$), et donc la fonction f est intégrable en 0.
On a

$$x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^3\ln(x)}{x^4} = \frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc

$$f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2>1$), donc par critère de domination, la fonction f aussi.
Donc l'intégrale I converge absolument, donc converge.
Pour le calcul de I :

Méthode 1 : par intégration par parties. Les fonctions

$$u : x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2(1+x^2)}$$

(on a rajouté $\frac{1}{2}$ à la « primitive naturelle », pour que la limite de uv en 0 soit finie) et

$$v : x \mapsto \ln(x)$$

sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées respectives

$$u'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

De plus,

$$u(x)v(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc la fonction uv a une limite **finie** en 0. On peut donc intégrer par parties sur $]0, A]$ pour tout $A > 0$.

Remarque

On ne peut pas appliquer le théorème sur $]0, +\infty[$, car la fonction uv n'a pas de limite finie en $+\infty$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2(1+x^2)}\ln(x)\right]_0^A - \int_0^A \frac{x^2}{2(1+x^2)}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{2(1+A^2)}\ln(A) - \frac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^A \\
&= \frac{A^2}{2(1+A^2)}\ln(A) - \frac{1}{4}\ln(1+A^2) \\
&= \frac{A^2}{2(1+A^2)}\ln(A) - \frac{1}{2}\ln(A) - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+A^2}\ln(A) - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

(car $\frac{1}{1+A^2}\ln(A) \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(A)}{A^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée). Donc

$$\boxed{I = 0}.$$

Remarque

Cette méthode donne aussi la convergence de I, puisque la limite trouvée est finie.

Méthode 2 : appliquons le changement de variable $u = \frac{1}{x}$. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, donc induit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. De plus, « $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ ». Comme on sait que l'intégrale I converge, le théorème de changement de variable s'applique et donne

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{-u\ln(u)}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = -I.$$

Donc

$$\boxed{I = 0}.$$

Remarque

Pour cette méthode, il était indispensable de montrer avant que l'intégrale I convergeait.

Correction de l'exercice 8.37 **Énoncé p. 7**

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.
   Les fonctions
   $$u : x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \cos(x)$$
   sont de classe C^1 sur le segment $[\pi, A]$, de dérivées
   $$u' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto -\sin(x).$$
   On peut donc intégrer par parties sur ce segment, et on a :
   $$\int_\pi^A \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\sin(x)}{x}\right]_\pi^A - \int_\pi^A \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin(A)}{A} - \int_\pi^A \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   Or, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$,
   $$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   donc
   $$\lim_{A\to+\infty} \frac{\sin(A)}{A} = 0$$
   par le théorème des gendarmes. Puis, la fonction
   $$g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$$
   est continue sur $[\pi, +\infty[$, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$,
   $$\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2},$$
   et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [\pi,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$, donc par critère de comparaison, la fonction g est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [\pi,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.

Donc l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge, et

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{\pi}^{A} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Par suite,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{\pi}^{A} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{\sin(A)}{A} - \int_{\pi}^{A} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right) = 0 - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

existe et est finie, donc l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

converge.

2. Pour $n = 0$, les intégrales u_0 et v_0 sont celles de la fonction nulle : elles convergent et valent 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}$$

est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et

$$\frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{(n\pi x)^2}{\pi x} = n^2\pi x \underset{x\to0}{\to} 0$$

(limite **finie**), donc la fonction f_n est intégrable en 0, donc sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Donc l'intégrale

$$v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$$

converge (absolument).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$h_n : x \mapsto \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}$$

est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et

$$\frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{(n\pi x)^2}{\pi x} = n^2\pi x \underset{x\to0}{\to} 0$$

(limite **finie**), donc la fonction h_n est intégrable en 0, et

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} = 0$$

(limite **finie**), donc la fonction h_n est intégrable en $\frac{1}{2}$.

Donc la fonction h_n est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Donc l'intégrale

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}\,\mathrm{d}x$$

converge.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le changement de variable affine $t = n\pi x$, soit $x = \dfrac{t}{n\pi}$. La fonction

$$x \mapsto n\pi x$$

est C^1 strictement croissant, donc induit une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left]0, \frac{n\pi}{2}\right[$, et « $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}t$ », de plus l'intégrale v_n converge, donc le théorème de changement de variable donne

$$v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{\frac{t}{n}} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, on a aussi

$$v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

en posant cette fois le changement de variable affine $u = 2t$.

Remarque

Pour $n = 0$, les égalités restent vraies de manière directe.

(b) Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= v_1 + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)}$$

$$= v_1 + \frac{\ln(n\pi) - \ln(\pi)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= v_1 + \frac{\ln(n)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{2\pi} = +\infty$ et, comme l'intégrale

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

converge, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{+\infty} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \in \mathbb{R},$$

donc

$$v_n = \underbrace{\frac{\ln(n)}{2\pi}}_{\to+\infty} + \underbrace{v_1 - \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u}_{\text{limite finie}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2\pi}.$$

4. On a

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\frac{1}{\tan(\pi x)}}_{\to 0} - \frac{1}{\pi x}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

Puis, un DL en 0 donne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} &= \frac{1}{\pi x - \frac{(\pi x)^3}{3} + \underset{x\to0}{o}(x^3)} - \frac{1}{\pi x} \\
&= \frac{1}{\pi x}\left(\frac{1}{1 - \frac{\pi^2x^2}{3} + \underset{x\to0}{o}(x^2)} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\pi x}\left(\frac{\pi^2x^2}{3} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right) \\
&= \frac{\pi x}{3} + \underset{x\to0}{o}(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Par suite, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et $\frac{1}{2}$, en posant

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(n\pi x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$\left|\sin^2(n\pi x) f(x)\right| \leq |f(x)|,$$

et l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

converge (car la fonction $|f|$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et prolongeable par continuité en 0 et en $\frac{1}{2}$), donc, par l'inégalité triangulaire puis par croissance de l'intégrale,

$$|u_n - v_n| = \left|\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(n\pi x) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\sin^2(n\pi x) f(x)\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

donc la suite numérique $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Comme

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty,$$

et la suite numérique $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a

$$u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n),$$

donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2\pi}.$$

Correction de l'exercice 8.38 **Énoncé p. 8**

1) On a

$$I(1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Or, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est continue sur $]-1,1[$ (car $1-x^2 > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$, et que l'on compose des fonctions usuelles), admet arcsin comme primitive, et arcsin a une limite finie en 1^- et -1^+ (car arcsin est en fait continue sur $[-1,1]$), donc l'intégrale $I(1)$ converge.
De plus, comme $f \geq 0$, on en déduit que la fonction f est intégrable sur $]-1,1[$.
Enfin, on a alors

$$I(1) = \lim_{x\to1^-} \arcsin(x) - \lim_{x\to-1^+} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}.$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors la fonction

$$f_k : x \in]-1,1[\mapsto \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} = x^k f(x)$$

est continue sur $]-1,1[$ par produit de fonctions continues, et la fonction $x \mapsto x^k$ a une limite finie si $x \to 1^-$ ou $x \to -1^+$, donc

$$f_k(x) = \underset{x\to1^-}{O}\big(f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad f_k(x) = \underset{x\to-1^+}{O}\big(f(x)\big).$$

Comme la fonction f est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]-1,1[\\ \text{en } -1 \text{ et en } 1\end{array}\right\}$, le critère de domination (appliqué en 1 et en -1) donne que la fonction f_k est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]-1,1[\\ \text{en } -1 \text{ et en } 1\end{array}\right\}$, donc que l'intégrale $I(X^k)$ converge absolument, donc converge.
Puis, soit $P \in E$, alors il existe $(a_0,\dots,a_5) \in \mathbb{R}^6$ avec

$$P = \sum_{k=0}^{5} a_k X^k.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I(X^k) = \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

converge. Donc par linéarité de l'intégrale convergente, l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{5} a_k \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

converge (et on a aussi

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{5} a_k I(X^k),$$

mais on ne va pas s'en servir ici).
3a) La fonction

$$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

est dérivable sur $]-1,1[$, et admet pour dérivée la fonction

$$x \mapsto -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

. Donc

$$I(X) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} = \boxed{0}$$

On en déduit

$$0 = I(X) = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{a = c}$$

3b) Avec le résultat admis, on a alors

$$\frac{\pi}{2} = I(X^2) = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \qquad \text{soit} \qquad a + c = \frac{2\pi}{3}$$

Donc

$$\boxed{a = c = \frac{\pi}{3}}.$$

Enfin, on a $\pi = I(1) = a + b + c$, donc

$$\boxed{b = \frac{\pi}{3}}.$$

4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$I(X^{k+1}) = \int_{-1}^{1} x^k \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Intégrons par parties : les fonctions

$$u : x \mapsto -\sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto x^k$$

sont de classe C^1 sur $]-1,1[$, la fonction uv a une limite finie (nulle) en 1 et en -1, et l'intégrale $I(X^{k+1})$ converge, donc on peut appliquer le théorème d'intégration par parties, et on a :

$$I(X^{k+1}) = \left[-\sqrt{1-x^2}x^k\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -\sqrt{1-x^2}kx^{k-1}\,\mathrm{d}x = 0-0+k\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}x^{k-1}\,\mathrm{d}x = kI(X^{k-1}) - kI(X^{k+1}).$$

Donc

$$\boxed{I(X^{k+1}) = \frac{k}{k+1} I(X^{k-1})}.$$

Comme $I(X) = 0$, on en déduit

$$I(X^3) = \frac{2}{3} I(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad I(X^5) = \frac{4}{5} I(X^3) = 0.$$

On en déduit aussi

$$I(X^4) = \frac{3}{4} I(X^2).$$

Notons

$$J(P) = \frac{\pi}{3}\left(P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + P(0) + P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

pour $P \in E$, alors on a

$$I(X^k) = J(X^k)$$

pour $k \in [\![0, 2]\!]$ d'après les calculs faits à la question précédente.
Puis,

$$J(X^3) = \frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 0^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) = 0 = I(X^3)$$

et

$$J(X^5) = \frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + 0^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right) = \frac{\pi}{3}\left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right) = 0 = I(X^5).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} J(X^4) &= \frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + 0^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \times 0^2 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{3}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{3}{4} J(X^2) = \frac{3}{4} I(X^2) = I(X^4) \end{aligned}$$

Pour finir, les applications I et J (définies sur E) sont linéaires (I par linéarité de l'intégrale convergente), coïncident sur la base $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ de E, donc sont égales.

Correction de l'exercice 8.39 **Énoncé p. 8**

Pour tout $n \geq 0$, on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{array} \right.$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left|f_n(x_0)\right| = \frac{1}{x_0^2} \qquad \text{donc} \qquad \left|f_n(x_0)\right| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs.
Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ est absolument convergente, donc convergente.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étudions la continuité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, alors pour tout $x \in [a, b]$,

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n^2 + a^2}$$

(même pour $n = 0$, car on suppose $a > 0$), donc

$$\left\|f_n\right\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

De plus, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2 + a^2}$ est convergente (car $\frac{1}{n^2+a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \left\|f_n\right\|_{\infty,[a,b]}$ converge.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.
Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique : la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par « caractère local » de la continuité.
Autre façon :
On a $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et pas juste $\mathbb{R}_+^*$), et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

puis

$$0 \leq \left\|f_n\right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$), par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \left\|f_n\right\|_\infty$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne alors que la fonction

$$T : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par addition, la fonction

$$S : x \mapsto T(x) + \frac{1}{x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

1. Cette façon est intéressante, car on constate que le problème en 0 provient juste de f_0, et donc (et c'est ce qu'on fait dans la suite), il peut être intéressant d'étudier $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne peut pas converger normalement sur $\mathbb{R}_+^*$, car la fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La suite numérique $\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)_{n\geq 1}$ est positive (donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est alternée), décroissante et tend vers 0, donc le critère des séries alternées s'applique. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|T(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq |f_1(x)| = \frac{1}{x^2+1}.$$

Donc,

- la fonction T est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a
$$|T(x)| \leq \frac{1}{1+x^2},$$
- et la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue positive sur $\mathbb{R}_+$, et admet arctan comme primitive, et que arctan a une limite finie en $+\infty$).

Donc, par critère de comparaison, la fonction T est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si la fonction S était intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait par soustraction que la fonction $x \mapsto S(x) - T(x) = \frac{1}{x^2}$ le serait aussi, ce qui est faux (Riemann, $2 > 1$).
Donc la fonction S n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Autre façon : la fonction T est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 0. Donc

$$S(x) = T(x) + \frac{1}{x^2} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\substack{\longrightarrow \\ x\to 0}} {}^{+\infty} + T(0) + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

En particulier,

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Mais la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue positive sur $]0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ diverge (Riemann, $2 > 1$), et la fonction S est continue sur $]0,1]$, donc par critère d'équivalence, l'intégrale $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. À plus forte raison, l'intégrale $\int_0^\infty S(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, donc la fonction S n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 8.40 **Énoncé p. 8**

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$, car $\ln t > 0$ pour $t \geqslant 2$.
   Cas $\alpha > 1$**.** Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, de sorte que $1 < \gamma < \alpha$. Pour $t \geqslant 2$,
   $$t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$
   par croissances comparées, puisque $\alpha - \gamma > 0$. Donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ en $+\infty$. Comme $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ converge (Riemann en $+\infty$, $\gamma > 1$), la fonction f est intégrable sur $[2,+\infty[$ par critère de négligeabilité : l'intégrale converge.
   Cas $\alpha < 1$**.** Posons $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, de sorte que $\alpha < \gamma < 1$. Pour $t \geqslant 2$,
   $$t^\gamma f(t) = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$
   par croissances comparées, puisque $\gamma - \alpha > 0$. Il existe donc $A \geqslant 2$ tel que, pour tout $t \geqslant A$, $f(t) \geqslant \frac{1}{t^\gamma}$. Comme $\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ diverge (Riemann en $+\infty$, $\gamma \leqslant 1$), l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge par minoration, donc $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi.
   Cas $\alpha = 1$**.** Pour $x \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est la dérivée de ln, donc si $\beta \neq 1$,
   $$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \left[\frac{(\ln t)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^x = \frac{(\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta},$$
   qui a une limite finie quand $x \to +\infty$ si et seulement si $1 - \beta < 0$, c'est-à-dire $\beta > 1$. Si $\beta = 1$,
   $$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$
   et l'intégrale diverge.
   Conclusion. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
2. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est continue et positive sur $]0,1/2[$, car $\ln t < 0$ sur cet intervalle. La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est de classe C^1, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]2,+\infty[$ sur $]0,1/2[$, avec $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2}$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales
   $$\int_0^{1/2} g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$
   sont de même nature. Or, pour $u \geqslant 2$, $|\ln(1/u)| = \ln u$, donc
   $$g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2} = \frac{u^\alpha}{(\ln u)^\beta} \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{1}{u^{2-\alpha}(\ln u)^\beta}.$$
   D'après la première question, cette intégrale converge si et seulement si $2-\alpha > 1$, ou $2 - \alpha = 1$ et $\beta > 1$. Donc $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Correction de l'exercice 8.41 **Énoncé p. 9**

1. Soit $n \geqslant n_0 + 1$. Pour $t \in [n, n+1]$, on a $t \geqslant n$, donc $f(t) \leqslant f(n)$ par décroissance de f ; par croissance de l'intégrale sur un segment de longueur 1, $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$. De même, pour $t \in [n-1, n]$, $f(t) \geqslant f(n)$, d'où $f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Pour $n \geqslant n_0$, posons $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$, et pour $x \geqslant n_0$, $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $f \geqslant 0$, la suite (S_n) est croissante et la fonction F est croissante : la série converge si et seulement si (S_n) est majorée, et l'intégrale converge si et seulement si F est majorée.
   En sommant les inégalités de la première question pour k allant de $n_0 + 1$ à n, on obtient pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, par la relation de Chasles,
   $$F(n+1) - F(n_0+1) \leqslant S_n - f(n_0) \leqslant F(n).$$
   Si l'intégrale converge, F est majorée par sa limite L, donc $S_n \leqslant f(n_0) + L$ pour tout n : la série converge.
   Si la série converge, (S_n) est majorée par sa somme S. Soit $x \geqslant n_0 + 1$ et $n = \lfloor x \rfloor$. Comme F est croissante,
   $$F(x) \leqslant F(n+1) \leqslant F(n_0+1) + S_n - f(n_0) \leqslant F(n_0+1) + S,$$
   donc F est majorée : l'intégrale converge.
3. Si $\beta \leqslant 0$, pour $n \geqslant 3$ on a $\ln n \geqslant 1$, donc $(\ln n)^\beta \leqslant 1$ et $\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$. La série harmonique diverge, donc la série étudiée diverge, par comparaison de séries à termes positifs.
   Si $\beta > 0$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, comme inverse du produit des deux fonctions croissantes et strictement positives $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\ln t)^\beta$. D'après la deuxième question, la série $\sum_{n \geqslant 2} f(n)$ est de même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$, qui converge si et seulement si $\beta > 1$ d'après l'exercice précédent.
   La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge donc si et seulement si $\beta > 1$.

Correction de l'exercice 8.42 **Énoncé p. 9**

1. La fonction fg est continue sur I et, pour tout $t \in I$, $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geqslant 0$ donne
   $$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(f(t)^2 + g(t)^2\right).$$
   La fonction $\frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ est intégrable sur I comme somme de fonctions intégrables, donc fg est intégrable sur I par critère de majoration, appliqué en chaque extrémité de I qui ne lui appartient pas.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2$ est une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I, donc est intégrable sur I.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons
   $$P(\lambda) = \int_I (f + \lambda g)^2 = \int_I f^2 + 2\lambda \int_I fg + \lambda^2 \int_I g^2,$$
   par linéarité, toutes les intégrales convergeant d'après la première question.

Comme $(f+\lambda g)^2 \geqslant 0$, on a $P(\lambda) \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par positivité de l'intégrale.
Si $\int_I g^2 = 0$, la fonction P est affine et positive sur $\mathbb{R}$, donc constante : $\int_I fg = 0$, et l'inégalité demandée s'écrit $0 \leqslant 0$.
Si $\int_I g^2 > 0$, P est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$: son discriminant est négatif ou nul,

$$4\left(\int_I fg\right)^2 - 4\int_I f^2 \int_I g^2 \leqslant 0,$$

ce qui est l'inégalité demandée.

3. La première question, appliquée à f et $g = f'$ sur $I = [0, +\infty[$, montre que ff' est intégrable sur $[0, +\infty[$; en particulier $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
La fonction f^2 est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, de dérivée $2ff'$, donc pour $x \geqslant 0$,

$$f(x)^2 = f(0)^2 + 2\int_0^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)^2 + 2\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi f^2 admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Comme f^2 est intégrable sur $[0, +\infty[$ et admet une limite en $+\infty$, cette limite est nulle (cours) : $\ell = 0$. Enfin $|f| = \sqrt{f^2}$ tend vers 0 en $+\infty$, donc f aussi.

Correction de l'exercice 8.43 **Énoncé p. 9**

1. Comme f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $x \geqslant 0$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ qui admet une limite en $+\infty$ a une limite nulle (cours) : $\ell = 0$.

2. (a) Soit $x \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \geqslant \varepsilon$. Pour $t \in [x, x+\delta]$, on a $|t - x| \leqslant \delta$, donc $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2$ et

$$|f(t)| \geqslant |f(x)| - |f(x) - f(t)| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[x, x+\delta]$, $\int_x^{x+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\delta$.

(b) Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $A \geqslant 0$, il existe $x \geqslant A$ vérifiant $|f(x)| \geqslant \varepsilon$. Soit $\delta > 0$ associé à $\varepsilon/2$ par l'uniforme continuité.
On construit par récurrence une suite (x_n) de réels positifs telle que $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ pour tout n et $x_{n+1} \geqslant x_n + \delta$ pour tout n : on choisit $x_0 \geqslant 0$ avec $|f(x_0)| \geqslant \varepsilon$, puis, x_n étant construit, on choisit $x_{n+1} \geqslant x_n + \delta$ avec $|f(x_{n+1})| \geqslant \varepsilon$.
Les segments $[x_n, x_n + \delta]$ sont alors deux à deux d'intérieurs disjoints, et tous contenus dans $[0, x_N + \delta]$ pour $n \leqslant N$. Comme $|f| \geqslant 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{x_N+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{N} \int_{x_n}^{x_n+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant (N+1)\frac{\varepsilon\delta}{2}.$$

Or f est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $\int_0^{x_N+\delta} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour tout N, ce qui contredit l'inégalité précédente quand $N \to +\infty$. Donc f tend vers 0 en $+\infty$.

3. Pour $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{8}$, donc les segments $J_n = \left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$ sont deux à deux disjoints et contenus dans $[1,+\infty[$. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction nulle en dehors des J_n, et dont le graphe sur chaque J_n est un triangle de sommet (n,n) : f est affine sur chaque moitié de J_n, nulle aux deux extrémités et vaut n au milieu. Elle est continue et positive sur $[0,+\infty[$, et non bornée puisque $f(n) = n$ pour tout $n \geqslant 2$.
L'aire du n-ième triangle est $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2}$. Soit $x \geqslant 0$ et N un entier tel que $N \geqslant x+1$: les segments J_n qui rencontrent $[0,x]$ sont d'indice $n \leqslant N$, donc, comme $f \geqslant 0$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{J_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante et majorée, donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et comme $f \geqslant 0$, la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 8.44 Énoncé p. 9

1. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. En 0, $\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt} = (b-a)t + o(t)$, donc $h(t) \to b-a$ quand $t \to 0$: h se prolonge par continuité en 0, et $\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Pour $t \geqslant 1$, comme $a < b$, on a $0 < \mathrm{e}^{-bt} < \mathrm{e}^{-at}$, donc $0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-at}}{t} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence, $a > 0$), donc h est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de majoration, et $\int_1^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
L'intégrale I converge.
2. Soient $0 < \varepsilon < X$. Sur le segment $[\varepsilon, X]$, par linéarité,

$$\int_\varepsilon^X h(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = at$ dans la première intégrale et $u = bt$ dans la seconde donne

$$\int_\varepsilon^X h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Comme $a\varepsilon < b\varepsilon$ et $aX < bX$, la relation de Chasles donne

$$\int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$
$$\int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

d'où

$$\int_\varepsilon^X h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

3. Pour $u \in [a\varepsilon, b\varepsilon]$, on a $\mathrm{e}^{-b\varepsilon} \leqslant \mathrm{e}^{-u} \leqslant \mathrm{e}^{-a\varepsilon}$, donc par croissance de l'intégrale, puisque $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln \frac{b}{a}$,

$$\mathrm{e}^{-b\varepsilon} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{e}^{-a\varepsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

De même, $0 \leqslant \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{e}^{-aX} \ln \frac{b}{a}$.
Fixons $\varepsilon > 0$ et faisons tendre X vers $+\infty$ dans l'égalité de la deuxième question : le membre de gauche tend vers $\int_\varepsilon^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ (l'intégrale converge), et $\int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \to 0$. Donc

$$\int_\varepsilon^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Faisons maintenant tendre ε vers 0 : le membre de gauche tend vers I, et le membre de droite est encadré par deux quantités qui tendent vers $\ln \frac{b}{a}$. Donc

$$I = \ln \frac{b}{a}.$$

Correction de l'exercice 8.45 **Énoncé p. 10**

1. La fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est de classe C^1, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, avec $\varphi'(u) = -\dfrac{1}{u^2}$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$ sont de même nature, et comme φ est strictement décroissante,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}.$$

2. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, et pour tout $t > 0$, $0 \leqslant g(t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$, car arctan est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$. Par critère de majoration, g est intégrable sur $]0, +\infty[$: l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. D'après la première question, $J = \int_0^{+\infty} g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, et pour $u > 0$,

$$g\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)(1+u^{-\alpha})} \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}.$$

Les deux intégrales convergent, donc par linéarité

$$2J = \int_0^{+\infty} \frac{1+u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2},$$

d'où $J = \dfrac{\pi}{4}$.

3. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En 0, $\sqrt{t}\,f(t) \to 0$ par croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (Riemann en

$0, \frac{1}{2} < 1)$: f est intégrable sur $]0,1]$ par critère de négligeabilité. En $+\infty$, $t^{3/2} f(t) \to 0$ par croissances comparées, donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge (Riemann en $+\infty$, $\frac{3}{2} > 1$) : f est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de négligeabilité. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc.
D'après la première question, et comme pour $u > 0$,

$$f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2} = \frac{-\ln u}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{1}{u^2} = -\frac{\ln u}{1+u^2},$$

on obtient $I = -I$, donc $I = 0$.
Soit $a > 0$. La fonction $\psi : u \mapsto au$ est de classe C^1, strictement croissante, et réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Par le théorème de changement de variable, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{a^2u^2+a^2}\,a\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u,$$

qui converge comme combinaison linéaire des intégrales convergentes $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ et $I = 0$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}\ln a + 0\right) = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Correction de l'exercice 8.46 **Énoncé p. 10**

1. La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue sur $]0,\pi/2]$, car $\sin t > 0$ sur cet intervalle. L'intégrale I n'est généralisée qu'en 0. Pour $t \in]0,1[$, on a $0 < \sin t < 1$ et $0 < t < 1$, donc $-\ln(\sin t) > 0$ et $-\ln t > 0$. De plus

$$-\ln(\sin t) = -\ln t - \ln\frac{\sin t}{t}, \qquad \text{avec} \quad \ln\frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty,$$

donc $-\ln(\sin t) \sim -\ln t$ en 0. L'intégrale $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence), donc $t \mapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0,1[$, et par critère d'équivalence, $t \mapsto -\ln(\sin t)$ est intégrable sur $]0,1[$. L'intégrale I converge.
La fonction $\varphi : u \mapsto \frac{\pi}{2} - u$ est de classe C^1, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]0,\pi/2[$ sur $]0,\pi/2[$, avec $\varphi' = -1$. Par le théorème de changement de variable, $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)(-1)\,\mathrm{d}u = -\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, donc la première converge, et comme φ est strictement décroissante,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = I.$$

2. La fonction $u \mapsto \ln(\sin u)$ est continue sur $]0,\pi[$, et l'intégrale est généralisée en ses deux bornes. Par définition, elle converge si et seulement si $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ convergent. La première est I. Pour la seconde, la fonction $u \mapsto \pi - u$ est de classe C^1, strictement décroissante, et réalise une bijection de $]0,\pi/2[$ sur $]\pi/2,\pi[$; comme $\sin(\pi - v) = \sin v$, le théorème de changement de variable montre que $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u$ converge et

vaut $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I$. Donc

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I.$$

3. Pour $t \in]0, \pi/2[$, on a $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t) > 0$, donc

$$\ln(\sin t \cos t) = \ln(\sin t) + \ln(\cos t) = \ln(\sin 2t) - \ln 2.$$

D'une part, par linéarité, les deux intégrales convergeant,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = 2I.$$

D'autre part, la fonction $u \mapsto \frac{u}{2}$ est de classe C^1, strictement croissante, et réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $]0, \pi/2[$: par le théorème de changement de variable, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\frac{\mathrm{d}u}{2}$, donc converge et vaut $\frac{1}{2} \cdot 2I = I$. Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \ln 2\ \mathrm{d}t = I - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

En comparant, $2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$, donc

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Correction de l'exercice 8.47 **Énoncé p. 10**

1. La fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$; l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et il suffit d'étudier $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.
La fonction $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^1, strictement croissante, et réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$, avec $\varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Par le théorème de changement de variable, $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
Posons $a : u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$ et $b : u \mapsto -\cos u$, de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, avec $b' = \sin$. Le produit $a(u)b(u) = -\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}$ a une limite finie en 1 et tend vers 0 en $+\infty$, comme produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0. Par le théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} a(u)b'(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} a'(u)b(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Or

$$a'(u)b(u) = \frac{\cos u}{4u^{3/2}}, \qquad |a'(u)b(u)| \leqslant \frac{1}{4u^{3/2}},$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$ converge (Riemann en $+\infty$, $\frac{3}{2} > 1$) : par critère de majoration, $a'b$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} a'(u)b(u)\,\mathrm{d}u$ converge. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge, puis $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$, et enfin $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.
2. Par le même changement de variable, appliqué à la fonction continue $t \mapsto \left|\sin(t^2)\right|$, les intégrales $\int_1^{+\infty} \left|\sin(t^2)\right|\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
Pour $u \geqslant 1$, comme $|\sin u| \leqslant 1$,

$$\frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}} \geqslant \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{4\sqrt{u}} - \frac{\cos 2u}{4\sqrt{u}}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{4\sqrt{u}}$ diverge (Riemann en $+\infty$, $\frac{1}{2} \leqslant 1$). L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2u}{4\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge : avec $a : u \mapsto \frac{1}{4\sqrt{u}}$ et $b : u \mapsto \frac{\sin 2u}{2}$, de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, le produit ab a une limite finie en 1 et tend vers 0 en $+\infty$, et $|a'(u)b(u)| \leqslant \frac{1}{16u^{3/2}}$, donc on conclut comme à la première question. Si $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ convergeait, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{4\sqrt{u}}$ convergerait par linéarité, ce qui est faux : elle diverge.

Les fonctions $u \mapsto \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$: par minoration, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ diverge, donc $\int_1^{+\infty} \left|\sin(t^2)\right| \mathrm{d}t$ diverge, et $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

3. La fonction $t \mapsto t\sin(t^4)$ est continue sur $[0, +\infty[$. La fonction $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^1, strictement croissante, et réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, avec $\varphi'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. Par le théorème de changement de variable, $\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\,\sin(u^2)\,\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u,$$

qui converge d'après la première question. Donc $\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $t_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{1/4}$. Alors $t_n \sin(t_n^4) = t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: la fonction $t \mapsto t\sin(t^4)$ n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 8.48 **Énoncé p. 11**

1. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}/t^{n+1}$ est continue et strictement positive sur $[x, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant x$, on a $t^{n+1} \geqslant x^{n+1}$, donc

$$0 < g_n(t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x^{n+1}}.$$

L'intégrale $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence), donc, par critère de majoration, g_n est intégrable sur $[x, +\infty[$: $R_n(x)$ est bien défini. En intégrant la majoration,

$$R_n(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}}.$$

Enfin, par positivité de g_n, $R_n(x) \geqslant \int_x^{x+1} g_n(t)\,\mathrm{d}t$, et cette dernière intégrale est strictement positive : c'est l'intégrale sur le segment $[x, x+1]$, avec $x < x+1$, d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. Donc $R_n(x) > 0$. Le cas $n = 0$ montre que $f(x) = R_0(x)$ est défini pour tout $x > 0$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t^{n+1}}$ et $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, de classe C^1 sur $[x, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant x$,

$$u'(t) = -\frac{n+1}{t^{n+2}} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

On a $u(x)v(x) = -\mathrm{e}^{-x}/x^{n+1}$ et $u(t)v(t) = -\mathrm{e}^{-t}/t^{n+1} \to 0$ quand $t \to +\infty$: le produit uv a des limites finies aux deux bornes. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_x^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = R_n(x)$ et

$$\int_x^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t = (n+1)R_{n+1}(x)$$

ont même nature. Elles convergent toutes deux d'après la question 1, et

$$R_n(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+1}}\right]_x^{+\infty} - (n+1)R_{n+1}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)R_{n+1}(x).$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, multiplions la relation de la question 2, écrite au rang k, par $(-1)^k k!$:

$$(-1)^k k!\, R_k(x) - (-1)^{k+1}(k+1)!\, R_{k+1}(x) = \frac{(-1)^k k!\, \mathrm{e}^{-x}}{x^{k+1}}.$$

En sommant pour k de 0 à n, le membre de gauche se télescope :

$$R_0(x) - (-1)^{n+1}(n+1)!\, R_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \mathrm{e}^{-x} S_n(x).$$

Comme $R_0(x) = f(x)$, c'est la relation demandée.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. D'après la question 3, écrite aux rangs n et $n+1$,

$$f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_n(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\, R_{n+1}(x),$$
$$f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_{n+1}(x) = (-1)^{n+2}(n+2)!\, R_{n+2}(x).$$

Comme $R_{n+1}(x) > 0$ et $R_{n+2}(x) > 0$ (question 1), ces deux différences sont non nulles et de signes opposés : $f(x)$ est strictement compris entre $\mathrm{e}^{-x} S_n(x)$ et $\mathrm{e}^{-x} S_{n+1}(x)$. De plus, par la majoration de la question 1,

$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x} S_n(x)| = (n+1)!\, R_{n+1}(x) \leqslant \frac{(n+1)!\, \mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}}.$$

Posons $r_n(x) = \mathrm{e}^x f(x) - S_n(x)$, de sorte que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(S_n(x) + r_n(x))$. L'inégalité précédente donne $x^{n+1}\,|r_n(x)| \leqslant (n+1)!/x$, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$: $r_n(x) = o(1/x^{n+1})$ quand $x \to +\infty$, ce qui est le développement annoncé.

5. Soit $x > 0$. Posons $\varphi : u \mapsto x + u$, de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc bijective de $[0, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$. Pour tout $u \geqslant 0$, $t = \varphi(u) = x + u$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}/t$ est continue sur $[x, +\infty[$, donc, par changement de variable, les intégrales

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(x+u)}}{x+u}\,\mathrm{d}u$$

ont même nature. La première converge (question 1), donc la seconde aussi, et

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u.$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u \geqslant 0$. Comme $-u/x \neq 1$, la somme géométrique donne

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{x^{k+1}} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{u}{x}\right)^k = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - (-u/x)^{n+1}}{1 + u/x} = \frac{1}{x+u} - \frac{(-1)^{n+1} u^{n+1}}{x^{n+1}(x+u)},$$

ce qui est la relation demandée.

7. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Multiplions la relation de la question 6 par e^{-u} : pour tout $u \geqslant 0$,

$$\frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} u^k \mathrm{e}^{-u} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}} \cdot \frac{u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}}{x+u}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^k \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $k!$ (exercice 8.26), et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u$ converge (question 5). Par linéarité, l'intégrale

$$\rho_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u$$

converge aussi, comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes, et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}}\rho_n(x) = S_n(x) + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}}\rho_n(x).$$

L'intégrande de $\rho_n(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, +\infty[$: comme à la question 1, $\rho_n(x) > 0$. Pour tout $u \geqslant 0$, $\dfrac{1}{x+u} \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc

$$0 < \rho_n(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} u^{n+1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{(n+1)!}{x}.$$

En reportant dans la question 5,

$$f(x) - \mathrm{e}^{-x}S_n(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{\mathrm{e}^{-x}\rho_n(x)}{x^{n+1}}.$$

Cette différence est du signe de $(-1)^{n+1}$, et celle au rang $n+1$ du signe opposé : $f(x)$ est compris entre $\mathrm{e}^{-x}S_n(x)$ et $\mathrm{e}^{-x}S_{n+1}(x)$. De plus,

$$|f(x) - \mathrm{e}^{-x}S_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{-x}\rho_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \frac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}},$$

et l'on conclut comme à la question 4.

8. Soit $x > 0$. Posons $a_k = k!/x^{k+1} > 0$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1}/a_k = (k+1)/x$, qui est supérieur ou égal à 1 dès que $k \geqslant x - 1$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 \geqslant x - 1$: la suite $(a_k)_{k \geqslant k_0}$ est croissante, donc $a_k \geqslant a_{k_0} > 0$ pour tout $k \geqslant k_0$. Le terme général $(-1)^k a_k$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$ et

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2)!}{x^{n+3}} \cdot \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} = \frac{n+2}{x}.$$

Ainsi $b_{n+1} < b_n$ si et seulement si $n < x - 2$, et $b_{n+1} > b_n$ si et seulement si $n > x - 2$.

   — Si $x < 2$, la suite (b_n) est strictement croissante : la meilleure majoration est celle de $n = 0$.
   — Si $x \geqslant 2$, posons $p = \lfloor x \rfloor - 1 \in \mathbb{N}$. Pour $n \leqslant p - 1$, on a $n \leqslant x - 2$, donc $b_{n+1} \leqslant b_n$; pour $n \geqslant p$, on a $n > x - 2$, donc $b_{n+1} > b_n$. La suite (b_n) est donc décroissante jusqu'au rang p, puis strictement croissante, et son minimum est b_p : la meilleure majoration est celle de $n = p = \lfloor x \rfloor - 1$ (si x est entier, $b_{p-1} = b_p$ et le rang $p - 1$ convient aussi).

Autrement dit, la majoration $\mathrm{e}^{-x}b_n$ est la valeur absolue $\mathrm{e}^{-x}a_{n+1}$ du premier terme omis, et elle est la meilleure lorsque ce terme est le plus petit de la série.

10. Prenons $x = 10$. D'après la question 4 avec $n = 0$, $f(10)$ est compris entre

$$\mathrm{e}^{-10}S_0(10) = \frac{\mathrm{e}^{-10}}{10} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-10}S_1(10) = \mathrm{e}^{-10}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{100}\right) = \frac{9}{100}\mathrm{e}^{-10},$$

donc $f(10) \geqslant \dfrac{9}{100}\mathrm{e}^{-10}$. D'après la question 9, la meilleure majoration est obtenue pour $n = 8$ (ou $n = 9$, qui donne la même), et $b_8 = 9!/10^{10} = 362\,880/10^{10} \leqslant 4 \cdot 10^{-5}$. Donc

$$\frac{\left|f(10) - \mathrm{e}^{-10}S_8(10)\right|}{f(10)} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-10}b_8}{\frac{9}{100}\mathrm{e}^{-10}} = \frac{100}{9}\,b_8 \leqslant \frac{4 \cdot 10^{-3}}{9} \leqslant 10^{-3}.$$

Numériquement, $S_8(10) = 0{,}091\,581\,92$, donc $\mathrm{e}^{10}f(10) = 0{,}0916$ à 10^{-4} près.

Correction de l'exercice 8.49

Énoncé p. 12

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \,]0, \pi/2]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la formule $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos(a)\sin(b)$, appliquée avec $a = 2kt$ et $b = t$, donne

$$2\sin(t)\cos(2kt) = \sin\big((2k+1)t\big) - \sin\big((2k-1)t\big).$$

En sommant pour k de 1 à n, la somme se télescope :

$$2\sin(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt) = \sin\big((2n+1)t\big) - \sin(t),$$

donc $\sin(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)\right) = \sin\big((2n+1)t\big)$. Comme $\sin t \neq 0$ sur $]0, \pi/2]$, on peut diviser par $\sin t$, ce qui donne la relation demandée.

2. La fonction $t \mapsto 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ et coïncide avec D_n sur $]0, \pi/2]$: D_n se prolonge par continuité en 0, en posant $D_n(0) = 2n+1$. Par linéarité, puisque, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\int_0^{\pi/2}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin(k\pi)}{2k} = 0,$$

on obtient

$$\int_0^{\pi/2}D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

3. Soit $\lambda > 0$. Les fonctions g et $t \mapsto -\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, \pi/2]$, donc, par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2}g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{g(t)\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2}g'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $|\cos| \leqslant 1$, l'inégalité triangulaire donne

$$\left|\int_0^{\pi/2}g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|g(\pi/2)| + |g(0)| + \int_0^{\pi/2}|g'(t)|\,\mathrm{d}t\right),$$

où l'intégrale de $|g'|$ est celle d'une fonction continue sur un segment. Le majorant tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$, donc, par encadrement, $\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \to 0$.

4. (a) Pour $t \in]0, \pi/2]$,
$$g(t) = \frac{t - \sin t}{t \sin t}.$$
Quand $t \to 0$, le développement limité $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$ donne $t - \sin t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{6}$ et $t \sin t \underset{t\to 0}{\sim} t^2$, donc $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{6}$, et $g(t) \to 0$. La fonction g se prolonge donc par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

   (b) La fonction g est de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$, comme différence des inverses de deux fonctions de classe C^1 qui ne s'annulent pas, et, pour tout $t \in]0, \pi/2]$,
$$g'(t) = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2} = \frac{\sin^2 t - t^2 \cos t}{t^2 \sin^2 t}.$$
Quand $t \to 0$, de $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^4)$ et $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, on tire
$$\sin^2 t = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4) \qquad \text{et} \qquad t^2 \cos t = t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4),$$
donc $\sin^2 t - t^2 \cos t = \dfrac{t^4}{6} + o(t^4) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^4}{6}$. Comme $t^2 \sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} t^4$, on obtient $g'(t) \to \dfrac{1}{6}$ quand $t \to 0$.
Ainsi g est continue sur $[0, \pi/2]$, de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$, et g' admet une limite finie en 0 : d'après le théorème de la limite de la dérivée, g est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$, avec $g'(0) = \dfrac{1}{6}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in]0, \pi/2]$, $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{\sin t} - g(t)$, donc
$$\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} = D_n(t) - g(t)\sin\big((2n+1)t\big).$$
Les deux fonctions du membre de droite sont continues sur $[0, \pi/2]$ (questions 2 et 4), donc le membre de gauche se prolonge par continuité en 0, et, par linéarité et d'après la question 2,
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t.$$
La fonction g est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ (question 4) et $2n+1 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$: d'après la question 3, la dernière intégrale tend vers 0, d'où la limite annoncée.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $t \mapsto \sin\big((2n+1)t\big)/t$ et $u \mapsto \sin(u)/u$, prolongées par continuité en 0 (par $2n+1$ et par 1), sont continues sur les segments $[0, \pi/2]$ et $[0, (2n+1)\pi/2]$. Le changement de variable affine $u = (2n+1)t$, pour lequel $t = u/(2n+1)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/(2n+1)$, et donc
$$\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin u}{u/(2n+1)} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2n+1} = \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u,$$
donne l'égalité demandée.

7. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (exercice 8.25) : par définition, $\int_0^X \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \to I$ quand $X \to +\infty$. Comme $X_n = (2n+1)\pi/2 \to +\infty$, on a donc
$$\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} I.$$
D'après les questions 5 et 6, cette suite tend aussi vers $\frac{\pi}{2}$. Par unicité de la limite,
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}.$$

8. Supposons d'abord $a > 0$. Posons $\varphi : t \mapsto at$, de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Pour tout $t > 0$, $u = at$ équivaut à $t = u/a$, et $\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t$, de sorte que
$$\frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin u}{u/a}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
La fonction $t \mapsto \sin(at)/t$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. La seconde converge et vaut $\pi/2$ (question 7), donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
Si $a < 0$, alors $\sin(at) = -\sin(|a|\,t)$ pour tout t, et le cas précédent appliqué à $|a| > 0$ montre que l'intégrale converge et vaut $-\pi/2$. En résumé, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } a > 0, \\ -\pi/2 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

9. La fonction $h : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$, $h(t) \to 1$ quand $t \to 0$: h se prolonge par continuité en 0, donc est intégrable sur $]0,1]$. Pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{1}{t^2}$, et $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann) : par critère de majoration, h est intégrable sur $[1,+\infty[$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc.
Posons $u : t \mapsto \sin^2 t$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Pour tout $t > 0$, $u'(t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$. On a $u(t)v(t) = -\sin^2(t)/t \underset{t\to 0}{\sim} -t \to 0$ quand $t \to 0$, et $|u(t)v(t)| \leqslant 1/t \to 0$ quand $t \to +\infty$: le produit uv a des limites finies aux deux bornes. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ et
$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
ont même nature. La première converge, donc les deux convergent, et, d'après la question 8 avec $a = 2$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour la seconde intégrale, posons $u : t \mapsto 1 - \cos t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, avec $u'(t) = \sin t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t > 0$. On a $u(t)v(t) = -(1 - \cos t)/t \underset{t\to 0}{\sim} -t/2 \to 0$ quand $t \to 0$, et $|u(t)v(t)| \leqslant 2/t \to 0$ quand $t \to +\infty$. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ont même nature. La seconde converge (question 7), donc la première aussi, et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 8.50 **Énoncé p. 13**

Pour $x \geqslant a$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big)$ signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon\, g(t)$ pour tout $t \geqslant A$, et que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\big(g(t)\big)$ signifie qu'il existe $M \geqslant 0$ et $A \geqslant a$ tels que $|f(t)| \leqslant Mg(t)$ pour tout $t \geqslant A$.

1. Comme g est positive, la fonction G est croissante sur $[a, +\infty[$: pour $a \leqslant x \leqslant y$, $G(y) - G(x) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. D'après le théorème de la limite monotone, G admet en $+\infty$ une limite, finie ou égale à $+\infty$. Si cette limite était finie, l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergerait, par définition. Elle diverge, donc $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon\, g(t)$ pour tout $t \geqslant A$. Pour $x \geqslant A$, la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire donnent
$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \int_A^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Notons $C = \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right|$, qui ne dépend pas de x. Comme g est positive, $\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant G(x)$, donc $|F(x)| \leqslant C + \varepsilon\, G(x)$ pour tout $x \geqslant A$. D'après la question 1, $G(x) \to +\infty$: il existe $A' \geqslant A$ tel que $G(x) \geqslant C/\varepsilon$ pour tout $x \geqslant A'$, et alors
$$|F(x)| \leqslant \varepsilon\, G(x) + \varepsilon\, G(x) = 2\varepsilon\, G(x).$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $F(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\big(G(x)\big)$.
3. Il existe $M \geqslant 0$ et $A \geqslant a$ tels que $|f(t)| \leqslant Mg(t)$ pour tout $t \geqslant A$. Le même calcul qu'à la question 2 donne, pour $x \geqslant A$,
$$|F(x)| \leqslant C + M\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C + M\,G(x) \qquad \text{avec} \qquad C = \left|\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$
Comme $G(x) \to +\infty$, il existe $A' \geqslant A$ tel que $G(x) \geqslant C$ pour tout $x \geqslant A'$, et alors $|F(x)| \leqslant (M+1)\,G(x)$: donc $F(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\big(G(x)\big)$.
4. L'hypothèse $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$ signifie que $f(t) - g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big)$. La fonction $f - g$ est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, donc la question 2 s'applique à $f - g$ et g :
$$F(x) - G(x) = \int_a^x \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\big(G(x)\big),$$

c'est-à-dire $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} G(x)$. Comme $G(x) \to +\infty$ (question 1), on en déduit $F(x) \to +\infty$: F n'a pas de limite finie en $+\infty$, donc $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

5. Sur $[1, +\infty[$, g est continue et strictement positive, $f(t) = g(t)\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, et $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann). Pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et le quotient des intégrales partielles tend vers $\dfrac{3}{2} \neq 1$: les deux conclusions de la question 4 sont fausses.

6. Pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) - g(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t$, donc $|f(t) - g(t)| = \mathrm{e}^{-t}\,|g(t)|$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{e}^{-t} \to 0$, il existe $A \geqslant 0$ tel que $\mathrm{e}^{-t} \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$, et alors $|f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon\,|g(t)|$: ainsi $f(t) - g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\big(g(t)\big)$.

   Pour $x \geqslant 0$, $G(x) = \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$, qui vaut 0 en $x = 2k\pi$ et 2 en $x = (2k+1)\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: G n'a pas de limite en $+\infty$, donc $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

   Enfin, la fonction $t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}(\sin t + \cos t)}{2}$ est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin t$ sur $\mathbb{R}$, donc, pour $x \geqslant 0$,

$$F(x) - G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

   Si l'on avait $F(x) - G(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\big(G(x)\big)$, il existerait $A \geqslant 0$ tel que $|F(x) - G(x)| \leqslant |G(x)|$ pour tout $x \geqslant A$, donc $F(x) - G(x) = 0$ en tout point $x = 2k\pi \geqslant A$, alors que $F(2k\pi) - G(2k\pi) \to \dfrac{1}{2}$ quand $k \to +\infty$. C'est absurde : la conclusion de la question 2 ne vaut plus quand g change de signe.

7. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $A \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant g(t)$ pour tout $t \geqslant A$. La fonction g est intégrable sur $[A, +\infty[$, donc, par critère de majoration, f l'est aussi ; elle est intégrable sur le segment $[a, A]$ car continue par morceaux, donc intégrable sur $[a, +\infty[$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_\varepsilon \geqslant a$ tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon\, g(t)$ pour tout $t \geqslant A_\varepsilon$. Pour $x \geqslant A_\varepsilon$, les intégrales $\int_x^{+\infty} f$, $\int_x^{+\infty} |f|$ et $\int_x^{+\infty} g$ convergent, et

$$\left|\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Donc $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

8. *Domination.* Si $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\big(g(t)\big)$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ et

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

   En effet, il existe $M \geqslant 0$ et $A \geqslant a$ tels que $|f(t)| \leqslant Mg(t)$ pour tout $t \geqslant A$: l'intégrabilité de f s'obtient comme à la question 7, par critère de majoration, et, pour $x \geqslant A$,

$$\left|\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Équivalence. Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$ et

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En effet, $f-g = \underset{t\to+\infty}{o}(g)$ est continue par morceaux, donc, d'après la question 7, $f-g$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, et $f = g + (f-g)$ l'est aussi. De plus, pour $x \geqslant a$,

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \big(f(t)-g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

ce qui est l'équivalence annoncée.

9. La fonction h est de classe C^1 sur $[2,+\infty[$ et, pour $t \geqslant 2$,

$$h'(t) = \frac{\ln t - 1}{(\ln t)^2} = \frac{1}{\ln t}\left(1 - \frac{1}{\ln t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln t},$$

car $\dfrac{1}{\ln t} \to 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue et strictement positive sur $[2,+\infty[$, et, pour $t \geqslant 2$, $\ln t \leqslant t$ donc $\dfrac{1}{\ln t} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$; comme $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge (Riemann), $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ diverge par minoration. La question 4, appliquée à h' et $t \mapsto 1/\ln t$, donne

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_2^x h'(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(2) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x},$$

le dernier équivalent venant de $\dfrac{x}{\ln x} \to +\infty$ (croissances comparées).

10. Posons $h : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ sur $[1,+\infty[$, de classe C^1, avec

$$h'(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t} - \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^t}{t}\left(1 - \frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ est continue et strictement positive sur $[1,+\infty[$, et $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$ pour $t \geqslant 1$, donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge par minoration. La question 4 donne

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x) - h(1) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{x},$$

car $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$.

11. La fonction k est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et, pour $t \geqslant 1$,

$$k'(t) = -\frac{-2t\mathrm{e}^{-t^2}\cdot 2t - 2\mathrm{e}^{-t^2}}{4t^2} = \mathrm{e}^{-t^2} + \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} = \mathrm{e}^{-t^2}\left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et strictement positive sur $[1,+\infty[$, et $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geqslant 1$, donc elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de majoration. La question 8 (équivalence) donne

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} k'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} k(X) - k(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x},$$

puisque $k(X) \to 0$ quand $X \to +\infty$.

12. D'après la question 11, k' et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} = k'(t) - \mathrm{e}^{-t^2}$ aussi, et, pour $x \geqslant 1$,

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} k'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $m : t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^3}$ sur $[1,+\infty[$, de classe C^1, avec

$$m'(t) = -\frac{-2t\mathrm{e}^{-t^2}\cdot 2t^3 - 6t^2\mathrm{e}^{-t^2}}{4t^6} = \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} + \frac{3\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^4} = \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\left(1+\frac{3}{2t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}/t^2$ est continue, strictement positive et intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, d'après la question 8 et comme $m(X) \to 0$ quand $X \to +\infty$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} m'(t)\,\mathrm{d}t = -m(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x^3}.$$

Autrement dit, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right)$, et en reportant,

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{4x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right).$$

Correction de l'exercice 8.51 Énoncé p. 15

1. Pour tout $t > 0$, $0 \leqslant 2\,|f(t)| \leqslant 1 + f(t)^2$, puisque $(1-|f(t)|)^2 \geqslant 0$. La fonction constante 1 est intégrable sur l'intervalle borné $]0,1]$, et f^2 l'est par hypothèse, donc $|f|$ est intégrable sur $]0,1]$ par critère de majoration : f est intégrable sur $]0,1]$.

   Soit $x > 0$. La fonction f est intégrable sur $]0,1]$ et continue sur le segment d'extrémités 1 et x, donc intégrable sur $]0,x]$: l'intégrale $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $F(x)$ est bien défini.

2. Pour $x > 0$, notons $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Par la relation de Chasles,

$$\Phi(x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

   et $x \mapsto \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction continue f qui s'annule en 1 : Φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $\Phi' = f$. Donc $F : x \mapsto \Phi(x)/x$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas, et, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{x\Phi'(x) - \Phi(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} - \frac{F(x)}{x}, \qquad \text{soit} \qquad xF'(x) = f(x) - F(x).$$

3. Soit $x > 0$. Les fonctions f et 1 sont continues sur $]0,x]$ et leurs carrés y sont intégrables, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice 8.42) donne

$$\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t \int_0^x \mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Le membre de gauche vaut $x^2F(x)^2$; en divisant par $x > 0$, on obtient $xF(x)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Comme f^2 est intégrable sur $]0,1]$, on a, par définition, $\int_x^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ quand $x \to 0^+$, donc

$$\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_x^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

Puisque $0 \leqslant xF(x)^2 \leqslant \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$, on conclut par encadrement que $xF(x)^2 \to 0$ quand $x \to 0^+$.

4. Les fonctions $t \mapsto F(t)^2$ et $t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, X]$ (question 2), donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t &= \left[tF(t)^2\right]_\varepsilon^X - \int_\varepsilon^X t\cdot 2F(t)F'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= XF(X)^2 - \varepsilon F(\varepsilon)^2 - 2\int_\varepsilon^X F(t)\,tF'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'après la question 2, $tF'(t) = f(t) - F(t)$ pour tout $t > 0$, donc

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t = XF(X)^2 - \varepsilon F(\varepsilon)^2 - 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + 2\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t,$$

et il reste à isoler $\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t$:

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2 - XF(X)^2.$$

5. Comme $XF(X)^2 \geqslant 0$, la question 4 donne

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2.$$

Les fonctions F et f sont continues sur le segment $[\varepsilon, X]$, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'y applique :

$$\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_\varepsilon^X f(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{B},$$

la dernière majoration venant de la positivité de f^2, qui donne $\int_\varepsilon^X f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant B$. D'où l'inégalité demandée.

6. Notons $S = \sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \geqslant 0$ et $c = \varepsilon F(\varepsilon)^2 \geqslant 0$. La question 5 s'écrit $S^2 - 2\sqrt{B}\,S \leqslant c$, soit $(S - \sqrt{B})^2 \leqslant B + c$. Donc $S - \sqrt{B} \leqslant \sqrt{B + c}$, ce qui est l'inégalité demandée :

$$\sqrt{\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{B} + \sqrt{B + \varepsilon F(\varepsilon)^2}.$$

Intégrabilité de F^2. D'après la question 3, il existe $\varepsilon_0 \in\,]0,1[$ tel que $\varepsilon F(\varepsilon)^2 \leqslant B$ pour tout $\varepsilon \in\,]0, \varepsilon_0]$. Pour un tel ε et tout $X > \varepsilon$, l'inégalité précédente donne

$$\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\sqrt{B} + \sqrt{2B}\right)^2 = (1+\sqrt{2})^2 B =: K.$$

La fonction F^2 est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Pour $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, $\int_\varepsilon^1 F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant K$, et $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^1 F(t)^2\,\mathrm{d}t$ est décroissante : elle admet une limite finie en 0^+, donc $\int_0^1 F(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $X > 1$, $\int_1^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon_0}^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant K$, et $X \mapsto \int_1^X F(t)^2\,\mathrm{d}t$ est croissante : elle admet une limite finie en $+\infty$, donc $\int_1^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge. La fonction F^2, positive, est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

L'inégalité. Soit $X > 0$. Dans l'inégalité du début de la question, faisons tendre ε vers 0^+ : par intégrabilité de F^2, $\int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \to \int_0^X F(t)^2\,\mathrm{d}t$, et $\varepsilon F(\varepsilon)^2 \to 0$ (question 3). Par continuité de la racine carrée,

$$\sqrt{\int_0^X F(t)^2\,\mathrm{d}t} \leqslant 2\sqrt{B}, \qquad \text{soit} \qquad \int_0^X F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4B.$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

7. (a) Les fonctions F et f sont continues sur $]0,+\infty[$, de carrés intégrables (question 6), et $|Ff| \leqslant \dfrac{F^2+f^2}{2}$, donc, par critère de majoration, Ff est intégrable sur $]0,+\infty[$ (exercice 8.42). Fixons $\varepsilon > 0$. La question 4 s'écrit, pour $X > \varepsilon$,

$$XF(X)^2 = 2\int_\varepsilon^X F(t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon F(\varepsilon)^2 - \int_\varepsilon^X F(t)^2\,\mathrm{d}t,$$

et le membre de droite a une limite finie quand $X \to +\infty$: $XF(X)^2$ admet une limite finie $L \geqslant 0$ en $+\infty$. Si $L > 0$, alors $F(X)^2 \underset{X\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{X}$, et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}X}{X}$ diverge (Riemann), donc F^2 ne serait pas intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère d'équivalence : c'est exclu. Ainsi $XF(X)^2 \to 0$ quand $X \to +\infty$.

Faisons tendre X vers $+\infty$ puis ε vers 0^+ dans la relation de la question 4, en utilisant la question 3 et l'intégrabilité de Ff et de F^2 :

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} F(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse $\int_0^{+\infty} F^2 = 4B$ donne alors $\int_0^{+\infty} Ff = 2B$, donc

$$\left(\int_0^{+\infty} Ff\right)^2 = 4B^2 = \int_0^{+\infty} F^2 \int_0^{+\infty} f^2.$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $(F-\lambda f)^2$ est continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$, comme combinaison linéaire $F^2 - 2\lambda Ff + \lambda^2 f^2$ de fonctions intégrables (exercice 8.42), et, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \big(F(t)-\lambda f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} F^2 - 2\lambda\int_0^{+\infty} Ff + \lambda^2\int_0^{+\infty} f^2 \\ &= 4B - 4\lambda B + \lambda^2 B = B(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Pour $\lambda = 2$, cette intégrale est nulle. La fonction $(F-2f)^2$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$; pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ avec $a < b$, $0 \leqslant \int_a^b (F-2f)^2 \leqslant \int_0^{+\infty}(F-2f)^2 = 0$, donc $F-2f$ est nulle sur $[a,b]$. Ainsi $F = 2f$ sur $]0,+\infty[$: $F = \lambda f$ avec $\lambda = 2$.

(c) D'après la question 2 et $f = F/2$, pour tout $x > 0$,

$$xF'(x) = f(x) - F(x) = -\frac{F(x)}{2}, \qquad \text{soit} \qquad F'(x) + \frac{1}{2x}F(x) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène, sur $]0, +\infty[$; comme $x \mapsto \frac{1}{2}\ln x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2x}$, ses solutions sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{C}{\sqrt{x}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = C/\sqrt{x}$, puis $f(x) = \dfrac{C}{2\sqrt{x}}$ et $f(x)^2 = \dfrac{C^2}{4x}$ pour tout $x > 0$. Or $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge (Riemann) : comme f^2 est intégrable sur $]0, 1]$, on a nécessairement $C = 0$, donc $f = 0$. C'est contraire à l'hypothèse. Ainsi, pour f non nulle,

$$\int_0^{+\infty} F(t)^2\,\mathrm{d}t < 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

8. Sur chacun des intervalles $]0, 1]$, $[1, A]$, $[A, A+1]$ et $[A+1, +\infty[$, f_A est continue, et les expressions se raccordent aux points de jonction : $\sqrt{1} = 1 = 1/\sqrt{1}$ en $t = 1$, $1/\sqrt{A} = (A + 1 - A)/\sqrt{A}$ en $t = A$, et $(A + 1 - (A + 1))/\sqrt{A} = 0$ en $t = A + 1$. Donc f_A est continue sur $]0, +\infty[$.
La fonction f_A^2 est continue sur $]0, A + 1]$ et majorée par 1 (car $0 \leqslant f_A \leqslant 1$), donc intégrable sur cet intervalle borné par critère de majoration, et nulle sur $[A + 1, +\infty[$: elle est intégrable sur $]0, +\infty[$, et, par la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} f_A(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_A^{A+1} \frac{(A+1-t)^2}{A}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \ln A + \frac{1}{3A},$$

la dernière intégrale valant $\dfrac{1}{A}\left[-\dfrac{(A+1-t)^3}{3}\right]_A^{A+1} = \dfrac{1}{3A}$. Comme $A > 1$, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3A} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \leqslant 1$, d'où $\int_0^{+\infty} f_A(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \ln A + 1$.

9. Soit $x \in [1, A]$. Par la relation de Chasles,

$$xF_A(x) = \int_0^x f_A(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} + 2(\sqrt{x} - 1) \geqslant 2(\sqrt{x} - 1),$$

donc $F_A(x) \geqslant \dfrac{2(\sqrt{x}-1)}{x} \geqslant 0$.
La fonction f_A est continue sur $]0, +\infty[$ et f_A^2 y est intégrable (question 8), donc, d'après la question 6, F_A^2 est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par positivité de F_A^2 et par l'inégalité précédente, élevée au carré entre nombres positifs,

$$\int_0^{+\infty} F_A(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^A F_A(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 4\int_1^A \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^{3/2}} + \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\int_1^A \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right]_1^A = \ln A + \frac{4}{\sqrt{A}} - \frac{1}{A} - 3 \geqslant \ln A - 4,$$

puisque $\dfrac{4}{\sqrt{A}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{A} \leqslant 1$. En multipliant par 4, on obtient $\int_0^{+\infty} F_A(t)^2 \,\mathrm{d}t \geqslant 4\ln A - 16$.

10. Supposons qu'il existe $C < 4$ tel que $\int_0^{+\infty} F^2 \leqslant C \int_0^{+\infty} f^2$ pour toute fonction f continue sur $]0, +\infty[$ de carré intégrable. Si $C < 0$, l'inégalité est fausse pour toute f non nulle, puisque $\int_0^{+\infty} F^2 \geqslant 0 > C \int_0^{+\infty} f^2$; donc $C \geqslant 0$. Pour tout $A > 1$, les questions 8 et 9 donnent alors

$$4\ln A - 16 \leqslant \int_0^{+\infty} F_A(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant C \int_0^{+\infty} f_A(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant C(\ln A + 1),$$

soit $(4 - C)\ln A \leqslant 16 + C$. Comme $4 - C > 0$ et $\ln A \to +\infty$ quand $A \to +\infty$, le membre de gauche n'est pas majoré : c'est absurde. Il n'existe donc pas de constante $C < 4$ dans l'inégalité de Hardy.