

# 9 Endomorphismes des espaces euclidiens

## Exercices

**Parcours conseillés**

- **Piste verte**
  - 9.1 Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$
  - 9.8 Projecteur orthogonal sur une droite
  - 9.7 Diagonalisation en base orthonormée
  - 9.9 Matrices symétriques positives
- **Piste rouge**
  - 9.33 Endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  - 9.30 Matrices de la forme $A^\top A$
  - 9.41 Matrice de Gram, matrice de Hilbert
  - 9.44 Matrices telles que $M^\top = M^2$
- **Piste bleue**
  - 9.10 Noyau et image d'un autoadjoint
  - 9.11 Isométrie et sous-espace stable
  - 9.29 Matrices symétriques de taille 3
  - 9.36 Encadrement par les valeurs propres
- **Piste noire**
  - 9.47 Matrices symétriques qui commutent
  - 9.40 Endomorphismes antisymétriques
  - 9.32 Racine carrée d'une matrice positive
  - 9.51 Produit de deux matrices symétriques

**Exercice 9.1** ○ Correction p. 17

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et on note $(e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère les applications

$$f_1 : (x, y, z) \mapsto (y, z, x),$$
$$f_2 : (x, y, z) \mapsto (x + y,\ y + z,\ z + x),$$
$$f_3 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{3}(2x + 2y - z,\ 2x - y + 2z,\ -x + 2y + 2z).$$

1. Dire lesquelles de ces applications sont des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour chaque isométrie vectorielle trouvée, calculer son déterminant et dire si elle appartient à $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$.
3. Montrer que $f_3$ est une symétrie orthogonale et préciser par rapport à quel sous-espace.

**Exercice 9.2** ○ Correction p. 18

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Soit $P$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $s$ la réflexion par rapport à $P$.

1. Donner un vecteur unitaire $n$ orthogonal à $P$, puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $s(x) = x - 2\langle x, n\rangle n$.
2. Écrire la matrice $S$ de $s$ dans la base canonique.
3. Vérifier que $S$ est symétrique, orthogonale, que $S^2 = I_3$ et calculer $\det S$.

**Exercice 9.3** ○ Correction p. 18

Déterminer les réels $a, b, c$ tels que la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & a \\ 6 & -3 & b \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}$$

soit orthogonale. Pour chaque solution, dire si $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.4** ○ Correction p. 19

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et de son orientation usuelle. Soient

$$u_1 = \frac{1}{3}(1,2,2), \qquad u_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2), \qquad u_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage $P$ de la base canonique à $\mathcal{B}'$. Justifier sans calcul que $P$ est orthogonale et donner $P^{-1}$.
3. La base $\mathcal{B}'$ est-elle directe ? Sinon, modifier un de ses vecteurs pour obtenir une base orthonormée directe.
4. Déterminer les coordonnées de $x = (1,2,3)$ dans $\mathcal{B}'$.

**Exercice 9.5** ○ Correction p. 19

On rappelle les notations du cours : pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel et de son orientation usuelle.

1. Pour chacune des matrices

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   vérifier qu'elle appartient à $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et préciser la nature de l'isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée : rotation (donner son angle) ou réflexion (donner son axe).
2. Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Quel est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $A^n = I_2$ ?
3. Calculer $AB$ et $BA$ et préciser la nature des isométries vectorielles associées.

**Exercice 9.6** ○ Correction p. 20

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel et de son orientation usuelle.

1. Déterminer une mesure de l'angle orienté $(x, y)$ dans chacun des cas suivants :

$$x = (\sqrt{3}, 1),\ y = (1, \sqrt{3})\ ; \qquad x = (1,1),\ y = (-2,2)\ ; \qquad x = (2,0),\ y = (-1, -\sqrt{3}).$$

2. Dans le premier cas, donner la matrice dans la base canonique de la rotation vectorielle qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.
3. Plus généralement, soient $u = (a,b)$ et $v = (c,d)$ deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice dans la base canonique de la rotation vectorielle qui envoie $u$ sur $v$.

**Exercice 9.7** ○ Correction p. 20

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $A$ et une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$.
2. Écrire $A = PDP^\top$ avec $D$ diagonale et $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Peut-on choisir $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ ?

3. En déduire $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 9.8** ○ Correction p. 21

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Soit $a = (1, -1, 2)$ et $p$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(a)$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, exprimer $p(x)$ en fonction de $x$ et $a$.
2. Écrire la matrice $P$ de $p$ dans la base canonique. Vérifier que $P$ est symétrique et que $P^2 = P$.
3. Soit $q$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement au plan d'équation $x = 0$. Écrire la matrice de $q$ dans la base canonique. L'endomorphisme $q$ est-il autoadjoint ?

**Exercice 9.9** ○ Correction p. 22

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ou à aucun des deux :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lorsque la matrice est positive sans être définie positive, donner une colonne $X \neq 0$ telle que $X^\top MX = 0$.

**Exercice 9.10** ○ Correction p. 22

Soit $E$ un espace euclidien et $u$ un endomorphisme autoadjoint de $E$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp$.
2. En déduire que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ et que cette somme est orthogonale.
3. Application : montrer que si $u \circ u = 0$, alors $u = 0$.

**Exercice 9.11** • Correction p. 22

Soit $E$ un espace euclidien, $f \in \mathrm{O}(E)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$.

1. Montrer que $f(F) = F$.
2. Montrer que $F^\perp$ est stable par $f$.
3. Montrer que l'endomorphisme de $F$ induit par $f$ est une isométrie vectorielle de $F$.
4. On suppose $\dim E = 3$, $f \in \mathrm{SO}(E)$ et on suppose qu'il existe un vecteur unitaire $a$ tel que $f(a) = a$. Montrer que l'endomorphisme de $a^\perp$ induit par $f$ est une rotation vectorielle du plan euclidien $a^\perp$.

**Exercice 9.12** • Correction p. 23

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ et $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $F$.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $s$ est diagonale. En déduire $\det s$ et $\operatorname{tr} s$.
2. Pour quelles valeurs de $p$ a-t-on $s \in \mathrm{SO}(E)$ ?
3. Montrer qu'une réflexion n'est jamais une rotation vectorielle.
4. Pour quelles valeurs de $n$ l'endomorphisme $-\mathrm{Id}_E$ appartient-il à $\mathrm{SO}(E)$ ?

**Exercice 9.13** • Correction p. 23

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel, de base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et l'on pose $\mathcal{B}' = (e_1, e_1 + e_2)$, qui est une base de $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $u(e_1)$ et $u(e_2)$. L'endomorphisme $u$ est-il autoadjoint ?
2. Soit $v$ la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(e_1)$. Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$. Est-elle symétrique ?
3. Soit $E$ un espace euclidien, $C = (c_1, \dots, c_n)$ une base quelconque de $E$, $G$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $\langle c_i, c_j \rangle$, et $w$ un endomorphisme de $E$ de matrice $A$ dans $C$. Montrer que $w$ est autoadjoint si et seulement si $A^\top G = GA$. Que retrouve-t-on lorsque $C$ est orthonormée ?

**Exercice 9.14** • Correction p. 24

Soit $E$ un plan euclidien orienté et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de $E$. On note $r_\theta$ la rotation d'angle $\theta$ et $s_\alpha$ la réflexion de matrice $S(\alpha)$ dans $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $r_\theta \circ s_\alpha$ et $s_\alpha \circ r_\theta$ sont des réflexions, et déterminer leurs axes.
2. Montrer que toute rotation vectorielle de $E$ est la composée de deux réflexions, l'une des deux pouvant être choisie arbitrairement.
3. Montrer que toute isométrie vectorielle de $E$ est la composée d'au plus deux réflexions.

**Exercice 9.15** • Correction p. 24

Soit $E$ un plan euclidien orienté, $\theta \in \mathbb{R}$ et $r$ la rotation d'angle $\theta$ de $E$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $r$.
2. Pour quelles valeurs de $\theta$ la rotation $r$ admet-elle une valeur propre réelle ? Que vaut alors $r$ ?
3. On suppose $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Déterminer les valeurs propres complexes de $R(\theta)$ et, pour chacune, un vecteur propre dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. La matrice $R(\theta)$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ?
4. On suppose toujours $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $r$.

**Exercice 9.16** • Correction p. 24

1. Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
3. Soit $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $R(\theta)$. En déduire les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.17** • Correction p. 25

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et l'on pose, pour $X, Y \in E$, $\varphi_A(X, Y) = X^\top AY$.

1. Montrer que $\varphi_A$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E$.
2. Montrer que $\varphi_A$ est un produit scalaire sur $E$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Réciproquement, soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire quelconque sur $E$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, pour tous $X, Y \in E$, $\langle X, Y \rangle = X^\top AY$.
4. Expliciter le produit scalaire associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donner une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

**Exercice 9.18** • Correction p. 26

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $i$, $a_{i,i} \geq 0$, et que $a_{i,i} > 0$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soient $i \neq j$. En considérant $X^\top AX$ pour $X = E_i + tE_j$, $t \in \mathbb{R}$, montrer que $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$.
3. En déduire que si $a_{i,i} = 0$, alors la ligne $i$ et la colonne $i$ de $A$ sont nulles.
4. Montrer que si $\operatorname{tr} A = 0$, alors $A = 0$. Retrouver ce résultat à l'aide des valeurs propres de $A$.

**Exercice 9.19** • Correction p. 26

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $A = \lambda XX^\top$ est une matrice symétrique de rang 1, et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
2. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ unitaire et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tels que $A = \lambda XX^\top$.
3. Pour quelles valeurs de $\lambda$ la matrice $\lambda XX^\top$ est-elle positive ?
4. Application : déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $M = (ij)_{1 \leq i,j \leq n}$.

**Exercice 9.20** • Correction p. 27

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $A^k \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que dire si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{Z}$ ?
3. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $A + B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et que $A + B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dès que l'une des deux matrices est définie positive.
4. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. La matrice $AB$ est-elle nécessairement symétrique positive ?

**Exercice 9.21** • Correction p. 27

Soit $E$ euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

1. Montrer que $s$ est une isométrie vectorielle si et seulement si $s$ est autoadjointe.
2. Montrer que $s$ est autoadjointe si et seulement si $s$ est une symétrie orthogonale.
3. Montrer que $s$ est une symétrie orthogonale si et seulement si $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ avec $p$ un projecteur orthogonal.

**Exercice 9.22** ○ Correction p. 30

Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9.23** •• Correction p. 31

Soit $E$ un espace euclidien. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

1. Montrer que si $u$ et $v$ sont unitaires alors $\langle u + v, u - v \rangle = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ conservant l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.
   Montrer que si $u$ et $v$ sont unitaires alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.

3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$. Que dire de $\frac{1}{k}f$ si $k \neq 0$ ? Que dire si $k = 0$ ?

**Exercice 9.24** • Correction p. 32

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $E$ un espace euclidien non réduit au vecteur nul, $v \in E\backslash\{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $x \in E$ : $f(x) = x + \lambda \langle x, v\rangle v$.

1. Déterminer $\lambda$ pour que $f$ soit dans $\mathrm{O}(E)$.
2. Montrer qu'alors $f$ est une symétrie et la caractériser.

**Exercice 9.25** •• Correction p. 34

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

**Exercice 9.26** •• Correction p. 35

Montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale $A$ (à coefficients réels) sont de module 1 (*Indication : pour $X$ vecteur propre de $A$, calculer $\overline{AX}^{\top} AX$ de deux façons différentes.*).

**Exercice 9.27** •• Correction p. 36

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$, $g$ celui canoniquement associé à $A^{\top}$. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

1. Montrer que pour tous $x$ et $y$ de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$\langle g(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle \qquad \text{puis que} \qquad \langle g \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2 .$$
2. En déduire que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ (orthogonal de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathbb{R}^n$).
3. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est autoadjoint.
4. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

**Exercice 9.28** ○ Correction p. 38

Soit $E$ euclidien. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints de $E$ est un espace vectoriel réel.

**Exercice 9.29** • Correction p. 38

Diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 9.30** •• Correction p. 41

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = A^{\top}A$.
   (a) Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   (b) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $S$ (comptées avec multiplicité). Démontrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^{\top}A$.

**Exercice 9.31** • Correction p. 43

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg}\left(A^\top A\right) = \operatorname{rg}(A)$.

**Exercice 9.32** ••• Correction p. 44

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = C^2$.
2. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $C = Q(A)$ (*Indication : utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange*).

*Pour les deux questions, on pourra commencer par traiter le cas $A$ diagonale.*

**Exercice 9.33** • Correction p. 47

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \operatorname{tr}\left(P^\top Q\right)$. Fixons $A \in E$, et notons

$$\phi : X \in E \mapsto AX^\top A.$$

Montrer que $\phi$ est un endomorphisme autoadjoint de $E$.

**Exercice 9.34** • Correction p. 48

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i$ et $j$, $a_{i,j} = 1$. Montrer que $A$ est diagonalisable et sans calcul donner son spectre ainsi que ses sous-espaces propres.

**Exercice 9.35** • Correction p. 49

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $u$ autoadjoint, où $E$ est un espace euclidien. Montrer l'équivalence entre :

(i) Pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq 0$.

(ii) Les valeurs propres de $u$ sont positives.

**Exercice 9.36** • Correction p. 50

1. Soit $E$ un espace euclidien et $f$ un endomorphisme autoadjoint de $E$. On note $\lambda$ la plus petite valeur propre de $f$ et $\mu$ la plus grande. Montrer que pour tout $x \in E$,
$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle f(x), x\rangle \leq \mu \|x\|^2.$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note $\lambda$ la plus petite valeur propre de $A$ et $\mu$ la plus grande. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\lambda X^\top X \leq X^\top AX \leq \mu X^\top X.$$

**Exercice 9.37** • Correction p. 51

Soit $S = (s_{i,j})$ une matrice orthogonale d'ordre $n$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}^2 = n \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}\right| \leq n$$

*Indication : pour l'inégalité, commencer par déterminer $X$ vecteur colonne tel que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j} = X^\top SX$.

**Exercice 9.38** •• Correction p. 51

Soit $E$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle ., .\rangle$, la norme associée étant notée $\|.\|$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de $E$ tels que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|x_i\| = 1$ et pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $i \neq j \Rightarrow \left\|x_i - x_j\right\| = 1$.

1. Calculer, pour tout couple d'indices $i$ et $j$, $\left\langle x_i, x_j\right\rangle$.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée d'ordre $n$, de terme générique $a_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$. Déterminer le spectre de $A$.
   Montrer que $A$ est inversible et en déduire que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

**Exercice 9.39** • Correction p. 53

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. Démontrer que $A^2 = I_n$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. Démontrer que $A = 0_n$.

**Exercice 9.40** ••• Correction p. 54

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que :

$$\text{pour tout } u \in E,\ \langle u, f(u) \rangle = 0.$$

1. Démontrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $\langle f(u), v \rangle = -\langle u, f(v) \rangle$ (*Indication : calculer* $\langle f(u+v), u+v \rangle$).
2. (a) Démontrer que $\lambda = 0$ est la seule valeur propre possible de $f$. Est-ce que $f$ est diagonalisable ?
   (b) Démontrer que $f \circ f$ est autoadjoint et que les valeurs propres de $f \circ f$ sont négatives.
3. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) = \big(\mathrm{Im}(f)\big)^{\perp}$ (orthogonal de $\mathrm{Im}(f)$ dans $E$).
4. Montrer l'existence d'une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ formée de vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. (a) Montrer que la matrice $A$ de $f$ dans une base orthonormée $B$ est antisymétrique (i.e. $A^\top = -A$).
   (b) Réciproquement, si $f$ est un endomorphisme de $E$ dont la matrice $A$ dans une base orthonormée $B$ est antisymétrique, démontrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $\langle f(u), v \rangle = -\langle u, f(v) \rangle$. Conclure.
6. Prouver que $\mathrm{Id}_E + f \in \mathrm{GL}(E)$ et que $\big(\mathrm{Id}_E - f\big) \circ \big(\mathrm{Id}_E + f\big)^{-1} \in \mathrm{SO}(E)$.

**Exercice 9.41** •• Correction p. 57

Soient $E$ un espace préhilbertien, $p \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, par $a_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A$ est inversible si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.
3. **Application :** soit $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}$ (la matrice de Hilbert). Montrer que $H \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.42** ○ Correction p. 58

*CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2.*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A^\top = A^2$. Montrer que $A$ est orthogonale.

**Exercice 9.43** • Correction p. 58

*CCP 2009 Officiel de la Taupe - exo 2.*
Soit $E$ un espace euclidien et $f$ une isométrie vectorielle de $E$. Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$ sont supplémentaires orthogonaux.

**Exercice 9.44** ●● Correction p. 59

*CCP PC 2017 (?).*
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M$. L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. On suppose que

$$M^\top = M^2.$$

1. Montrer que $M^4 = M$.
2. Que peut-on dire des valeurs du déterminant de $M$ et des valeurs propres complexes de $M$ ?
3. Montrer que si l'on suppose $M$ inversible, alors $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Caractériser dans ce cas géométriquement $f$.
4. Montrer que si $f$ n'est pas inversible, alors $M$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0, 1\}$.
5. Si $b = 0$, que dire de $f$ ?
6. Si $b = 1$, montrer que $f$ est diagonalisable, puis montrer que $f$ est un projecteur orthogonal.

**Exercice 9.45** ● Correction p. 63

*CCP PC 2019 (RMS 130 exo 1324).*
On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$u(x) = \langle x, a \rangle\, b + \langle x, b \rangle\, a,$$

où $a$ et $b$ sont des vecteurs unitaires et libres de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $u$ est un endomorphisme autoadjoint. Que peut-on en déduire ?
2. Donner $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $u$ n'est pas un projecteur orthogonal.

**Exercice 9.46** ●● Correction p. 64

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Montrer que $\det(A - I_3) = \det(I_3 - A)$. En déduire que 1 est valeur propre de $A$.
2. Soit $a$ un vecteur unitaire tel que $f(a) = a$. Montrer que le plan $P = a^\perp$ est stable par $f$ et que l'endomorphisme de $P$ induit par $f$ est une rotation vectorielle de $P$.
3. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et un réel $\theta$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Exprimer $\cos\theta$ en fonction de $\mathrm{tr}\, A$.
4. Application : pour

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

   vérifier que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ et $\cos\theta$.
5. Que peut-on dire si $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ avec $\det A = -1$ ?

**Exercice 9.47** ●● Correction p. 65

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. On note $u$ et $v$ les endomorphismes de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel, canoniquement associés à $A$ et $B$.

1. Montrer que chaque sous-espace propre de $u$ est stable par $v$.
2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. Montrer que l'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ induit par $v$ est autoadjoint, et en déduire qu'il existe une base orthonormée de $E_\lambda(u)$ formée de vecteurs propres de $v$.
3. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^\top AP$ et $P^\top BP$ soient toutes deux diagonales.
4. Réciproquement, montrer que si deux matrices symétriques sont diagonalisables dans une même base orthonormée, elles commutent.
5. Application : montrer que si $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ commutent, alors $AB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.48** ●● Correction p. 65

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D$ diagonale telles que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(DB')$ où $B' = P^\top BP$, et que $B' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$.
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \leq \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$.
4. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{tr}(AB) = 0$. Montrer que $B = 0$.

**Exercice 9.49** ●● Correction p. 66

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = R(\theta)$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
2. Résoudre l'équation $M^2 = R(\theta)$ d'inconnue $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. On distinguera le cas $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $M^n = R(\theta)$ d'inconnue $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Combien a-t-elle de solutions ?
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $M^3 = S(\alpha)$ d'inconnue $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.50** ●●● Correction p. 66

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On utilisera le résultat de l'exercice 9.32 : toute matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ admet une unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M^\top M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = M^\top M$. Montrer que $S$ est inversible et que $O = MS^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $M$ s'écrit $M = OS$ avec $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, puis montrer que cette écriture est unique.
4. Montrer que $M$ s'écrit aussi $M = S'O'$ avec $O' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
5. Déterminer $O$ et $S$ pour $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 9.51** ●●● Correction p. 67

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $C$ la racine carrée de $A$ dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (exercice 9.32).

1. Montrer que $C$ est inversible et que $CBC \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $AB = C(CBC)C^{-1}$. En déduire que $AB$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.
3. Montrer que si de plus $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, les valeurs propres de $AB$ sont positives, et strictement positives si $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. La matrice $AB$ est-elle nécessairement symétrique ?



# 9 Endomorphismes des espaces euclidiens

## ★ Pour aller plus loin

**Exercice 9.52** ● ● ● Correction p. 68

*Une démonstration du théorème spectral.*
Le cours admet le théorème spectral. L'objet de cet exercice est de le démontrer. La **partie I** établit que tout endomorphisme autoadjoint admet une valeur propre réelle, la **partie II** en déduit le théorème par récurrence sur la dimension, et la **partie III** en tire quelques compléments.
Dans tout l'exercice, $E$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Pour $Z = (z_1, \dots, z_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\overline{Z} = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})^\top$ la colonne des conjugués.

**Partie I — Une valeur propre réelle**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que $\overline{Z}^\top Z$ est un réel positif, nul si et seulement si $Z = 0$.
2. Justifier que $A$, vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. On fixe un vecteur propre associé $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $AZ = \lambda Z$.
3. Montrer que $A\overline{Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$, puis calculer $\overline{Z}^\top AZ$ de deux façons. En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que $A$ admet un vecteur propre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis que tout endomorphisme autoadjoint de $E$ admet au moins une valeur propre.

**Partie II — Récurrence sur la dimension**

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

5. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$. Montrer que l'endomorphisme de $F$ induit par $u$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $F$, et rappeler pourquoi $F^\perp$ est stable par $u$.
6. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension $n$ admet une base orthonormée formée de vecteurs propres.
7. En déduire que les sous-espaces propres de $u$ sont deux à deux orthogonaux et que leur somme est $E$.

**Partie III — Compléments**

8. Montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle est scindé sur $\mathbb{R}$.
9. Soit $v$ un endomorphisme de $E$ admettant une base orthonormée de vecteurs propres. Montrer que $v$ est autoadjoint.
10. *Une autre voie pour la partie I.* Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On admet qu'il existe un vecteur unitaire $x_0$ tel que
$$\langle u(x_0),\, x_0\rangle = \max\{\langle u(x),\, x\rangle \;;\; x \in E,\ \|x\| = 1\}$$
(c'est le théorème des bornes atteintes du chapitre 16 : la sphère unité est une partie fermée bornée de $E$, et $x \mapsto \langle u(x),\, x\rangle$ y est continue). On note $\mu$ ce maximum.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, $\langle u(x),\, x\rangle \leq \mu \|x\|^2$.

(b) Soit $y \in E$ orthogonal à $x_0$ et $t \in \mathbb{R}$. Développer $\langle u(x_0 + ty),\, x_0 + ty\rangle$ et $\|x_0 + ty\|^2$, puis montrer que $\langle u(x_0),\, y\rangle = 0$.

(c) En déduire que $x_0$ est un vecteur propre de $u$, associé à la valeur propre $\mu$.

**Exercice 9.53** ★ Correction p. 69

*Réduction des isométries vectorielles.*
Le cours classe les isométries vectorielles d'un plan euclidien, et l'exercice 9.46 celles de l'espace de dimension 3. Cet exercice traite la dimension quelconque : toute isométrie vectorielle admet une base orthonormée dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs, les blocs étant 1, −1 ou une matrice de rotation $R(\theta)$. La **partie I** construit un sous-espace stable de dimension 1 ou 2, la **partie II** en déduit la réduction par récurrence, et la **partie III** en tire des conséquences.
Dans tout l'exercice, $E$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathrm{O}(E)$. On rappelle que pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

**Partie I — Un sous-espace stable de dimension au plus 2**

On pose $v = u + u^{-1}$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x),\, y\rangle = \left\langle x,\, u^{-1}(y)\right\rangle$. En déduire que $v$ est autoadjoint.
2. Justifier que $v$ admet un vecteur propre $x$ ; on note $\mu$ la valeur propre associée et $F = \mathrm{Vect}\,(x, u(x))$. Montrer que $u\,(u(x)) = \mu\, u(x) - x$, puis que $F$ est stable par $u$ et de dimension 1 ou 2.
3. On suppose $\dim F = 1$. Montrer que $u(x) = x$ ou $u(x) = -x$.
4. On suppose $\dim F = 2$. On note $u_F$ l'endomorphisme de $F$ induit par $u$, $C$ une base orthonormée de $F$ et $M = \mathrm{Mat}_C(u_F)$.
   (a) Montrer que $u_F$ est une isométrie vectorielle de $F$ et que $M^2 - \mu M + I_2 = 0$.
   (b) À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, montrer que $(\mathrm{tr}\, M - \mu)M = (\det M - 1)I_2$, puis que $\det M = 1$ et $\mathrm{tr}\, M = \mu$.
   (c) En déduire qu'il existe $\theta \in \,]0, \pi[$ et une base orthonormée de $F$ dans laquelle la matrice de $u_F$ est $R(\theta)$, et que $\mu = 2\cos\theta$.

**Partie II — La réduction**

5. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$, des entiers $p, q, r \in \mathbb{N}$ avec $p + q + 2r = n$ et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \,]0, \pi[$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix},$$

   les coefficients non écrits étant nuls et chacun des trois types de blocs pouvant être absent. On raisonnera par récurrence forte sur la dimension, en utilisant la partie I et l'exercice 9.11.
6. Exprimer $\chi_u$ à l'aide de $p$, $q$ et des $\theta_i$. En déduire que $p = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, $q = \dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$, que la famille $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ est déterminée à l'ordre près, et que $\det u = (-1)^q$.

7. On suppose $n = 3$. Retrouver que si $\det u = 1$, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0, \pi]$, et montrer que si $\det u = -1$, il en existe une dans laquelle elle est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

**Partie III — Conséquences**

8. Montrer que toute isométrie vectorielle de $E$ distincte de l'identité est la composée d'au plus $n$ réflexions. On pourra utiliser l'égalité $R(\theta) = S(\theta)S(0)$.
9. Retrouver que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale sont de module 1 (exercice 9.26), et montrer que $u$ est diagonalisable si et seulement si $u$ est une symétrie orthogonale.
10. Soit $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, un entier $p$ et des réels $\theta_1, \dots, \theta_s$ avec $0 < \theta_i \leq \pi$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & R(\theta_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(\theta_s) \end{pmatrix} P^\top.$$

En déduire une application $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, dont chaque coefficient est une fonction continue de $t$, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$.

**Exercice 9.54** ● ● ● Correction p. 72

*Décomposition QR et moindres carrés.*
La **partie I** factorise une matrice inversible en le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire, en traduisant matriciellement l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
La **partie II** résout « au mieux » un système linéaire qui a plus d'équations que d'inconnues, et la **partie III** l'applique à l'ajustement d'une droite sur un nuage de points.
Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

**Partie I — La décomposition QR**

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_1, \dots, C_n$.

1. Justifier que $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $(Q_1, \dots, Q_n)$ la base orthonormée obtenue par le procédé de Gram-Schmidt. Rappeler pourquoi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(Q_1, \dots, Q_k) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k)$ et $\langle C_k, Q_k \rangle > 0$.
2. On note $Q$ la matrice de colonnes $Q_1, \dots, Q_n$. Montrer que $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et qu'il existe une matrice $R$ triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = QR$.
3. Montrer que cette écriture est unique : si $A = QR = Q'R'$ avec $Q, Q' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $R, R'$ triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs, alors $Q = Q'$ et $R = R'$. On pourra étudier la matrice $R'R^{-1}$.
4. Déterminer la décomposition QR de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Exprimer $|\det A|$ à l'aide des coefficients diagonaux de $R$. Comment résout-on le système $AX = B$ lorsqu'on connaît $Q$ et $R$ ?

**Partie II — Moindres carrés**

Soient $n \geq p \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $p$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ rendant $\|AX - B\|$ minimale. On note $F = \left\{AX \ ; \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}$ et $p_F$ la projection orthogonale sur $F$.

6. Montrer que $A^\top A \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.
7. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\|AX - B\| \geq \|p_F(B) - B\|$, avec égalité si et seulement si $AX = p_F(B)$. En déduire qu'il existe un unique $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ rendant $\|AX - B\|$ minimale.
8. Montrer que $X_0$ est l'unique solution du système $A^\top AX = A^\top B$ (les *équations normales*).
9. Montrer que $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ est la matrice de $p_F$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et vérifier directement que $P^\top = P$ et $P^2 = P$.

**Partie III — Droite de régression**

Soient $n \geq 2$ et $(t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$ des points de $\mathbb{R}^2$, les réels $t_1, \dots, t_n$ n'étant pas tous égaux. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ rendant minimale la somme $\sum_{i=1}^n (at_i + b - y_i)^2$. On note $\overline{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$.

10. Mettre ce problème sous la forme de la partie II, et vérifier l'hypothèse sur le rang.
11. Écrire les équations normales et montrer que la solution est

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \overline{t})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \overline{t})^2} \qquad \text{et} \qquad b = \overline{y} - a\,\overline{t}.$$

    Que dire du point $(\overline{t}, \overline{y})$ par rapport à la droite d'équation $y = at + b$ ?
12. Déterminer la droite de régression des quatre points $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$ et $(3,4)$, et la valeur du minimum.

**Exercice 9.55** • • •

Correction p. 75

*Critère de Sylvester, décomposition de Cholesky et inégalité de Hadamard.*
Le cours caractérise les matrices symétriques définies positives par leurs valeurs propres. La **partie I** en donne un critère qui ne demande que des déterminants, la **partie II** les factorise en $T^\top T$ avec $T$ triangulaire, et la **partie III** en déduit une majoration du déterminant.
Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on note $A_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice formée des $k$ premières lignes et des $k$ premières colonnes de $A$, et $\Delta_k = \det A_k$. Ainsi $A_n = A$ et $\Delta_1 = a_{1,1}$.

**Partie I — Le critère de Sylvester**

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$, puis que $\Delta_k > 0$.
2. Soient $n \geq 2$, $A' \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $d \in \mathbb{R}$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A' & C \\ C^\top & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \qquad s = d - C^\top A'^{-1} C \in \mathbb{R}, \qquad L = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ C^\top A'^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

    Vérifier que

$$M = L \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} L^\top$$

    et en déduire que $\det M = s \det A'$.
3. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $s > 0$.
4. Montrer par récurrence sur $n$ le *critère de Sylvester* : si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\Delta_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

5. Applications.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nul, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz > 0$.
   (b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Delta_k \geq 0$ pour tout $k$. A-t-on nécessairement $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ?

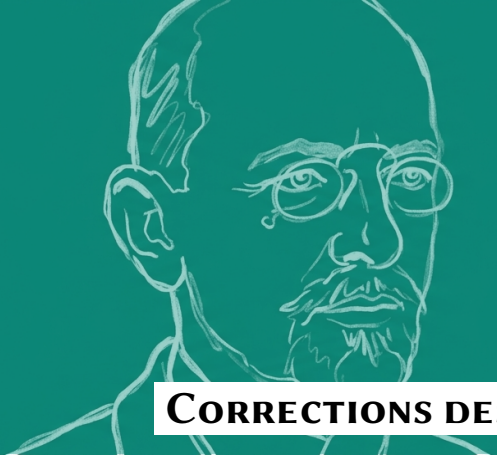
**Partie II — La décomposition de Cholesky**

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

6. Montrer qu'il existe une matrice $T$ triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = T^\top T$. On pourra utiliser l'exercice 9.30 et la décomposition QR de l'exercice 9.54.
7. Montrer que cette matrice $T$ est unique.
8. Déterminer $T$ pour
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
en identifiant les coefficients de $T^\top T$ colonne par colonne. En déduire $\det A$.

**Partie III — L'inégalité de Hadamard**

9. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T = (t_{i,j})$ sa décomposition de Cholesky. Exprimer $a_{j,j}$ à l'aide des coefficients de la $j$-ième colonne de $T$. En déduire
$$\det A \leq \prod_{j=1}^{n} a_{j,j},$$
avec égalité si et seulement si $A$ est diagonale. Étendre l'inégalité à $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
10. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$. Montrer que
$$|\det M| \leq \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|,$$
et préciser le cas d'égalité lorsque $M$ est inversible.
11. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A \leq \left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n$. On pourra utiliser la concavité du logarithme.



# 9

# Endomorphismes des espaces euclidiens

## Corrections des exercices

**Correction de l'exercice 9.1** **Énoncé p. 1**

**1)** Les trois applications sont linéaires. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\|f_1(x,y,z)\|^2 = y^2+z^2+x^2 = \|(x,y,z)\|^2$, donc $f_1$ conserve la norme : c'est une isométrie vectorielle.
On a $f_2(e_1) = (1,0,1)$, de norme $\sqrt{2}\neq\|e_1\|$, donc $f_2$ n'est pas une isométrie vectorielle.
La matrice de $f_3$ dans la base canonique est

$$M_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont de norme $\frac{1}{3}\sqrt{4+4+1}=1$ et deux à deux orthogonales : $\frac{1}{9}(4-2-2)=0$, $\frac{1}{9}(-2+4-2)=0$ et $\frac{1}{9}(-2-2+4)=0$. Donc $M_3\in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, et comme la base canonique est orthonormée, $f_3$ est une isométrie vectorielle.
**2)** La matrice de $f_1$ dans la base canonique est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

de déterminant $0-1\times(0-1)+0=1$ (développement selon la première ligne). Donc $f_1\in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$.
Pour $f_3$, en développant selon la première ligne,

$$\det M_3 = \frac{1}{27}\left(2(-2-4)-2(4+2)-1(4-1)\right) = \frac{-27}{27} = -1.$$

Donc $f_3\notin \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$.
**3)** La matrice $M_3$ est symétrique et orthogonale, donc $M_3^2 = M_3M_3^\top = I_3$ : $f_3\circ f_3 = \mathrm{Id}$, et $f_3$ est une symétrie. Comme c'est une isométrie vectorielle, c'est une symétrie orthogonale, par rapport à $\mathrm{Ker}(f_3-\mathrm{Id})$. Or

$$M_3 - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix},$$

dont les lignes sont toutes proportionnelles à $(1,-2,1)$. Donc

$$\mathrm{Ker}(f_3-\mathrm{Id}) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-2y+z=0\},$$

un plan, et $f_3$ est la réflexion par rapport à ce plan. On retrouve $\det f_3 = -1$.

**Correction de l'exercice 9.2** **Énoncé p. 1**

**1)** Le vecteur $(1,1,1)$ est orthogonal à $P$, puisque $x+y+z = \langle (x,y,z),\ (1,1,1)\rangle$. On pose $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, unitaire, et $P^\perp = \mathrm{Vect}(n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Le projeté orthogonal de $x$ sur $P^\perp$ est $\langle x,\ n\rangle\, n$, donc celui sur $P$ est $p(x) = x - \langle x,\ n\rangle\, n$. La réflexion $s$ fixe $p(x)$ et change en son opposé la composante sur $P^\perp$ :

$$s(x) = p(x) - \langle x,\ n\rangle\, n = x - 2\,\langle x,\ n\rangle\, n.$$

**2)** Pour $x = (x_1,x_2,x_3)$, $\langle x,\ n\rangle\, n = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)(1,1,1)$, donc

$$s(x) = \frac{1}{3}\left(x_1 - 2x_2 - 2x_3,\ -2x_1 + x_2 - 2x_3,\ -2x_1 - 2x_2 + x_3\right),$$

donc

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3)** La matrice $S$ est symétrique. Ses colonnes sont de norme $\frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$ et deux à deux orthogonales, car $\frac{1}{9}(-2-2+4) = 0$ pour chaque paire : $S \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Alors $S^2 = SS^\top = I_3$. Enfin, en développant selon la première ligne,

$$\det S = \frac{1}{27}\left(1(1-4) + 2(-2-4) - 2(4+2)\right) = \frac{-27}{27} = -1.$$

**Correction de l'exercice 9.3** **Énoncé p. 1**

Les deux premières colonnes sont de norme $\frac{1}{7}\sqrt{4+36+9} = 1$ et $\frac{1}{7}\sqrt{36+9+4} = 1$, et elles sont orthogonales : $\frac{1}{49}(12-18+6) = 0$. La matrice $A$ est donc orthogonale si et seulement si la troisième colonne est unitaire et orthogonale aux deux premières, soit

$$\begin{cases} 2a + 6b + 3c = 0 \\ 6a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 49.$$

En retranchant le double de la première équation au triple de la seconde, $14a - 21b = 0$, soit $a = \frac{3}{2}b$. Posons $b = 2t$ : alors $a = 3t$ et la première équation donne $6t + 12t + 3c = 0$, soit $c = -6t$. La condition de norme s'écrit $9t^2 + 4t^2 + 36t^2 = 49$, soit $t = \pm 1$. Il y a deux solutions :

$$(a,b,c) = (3,2,-6) \qquad \text{et} \qquad (a,b,c) = (-3,-2,6).$$

Les deux matrices obtenues sont orthogonales, de déterminant 1 ou $-1$, et l'une se déduit de l'autre en changeant le signe de la troisième colonne, ce qui change le signe du déterminant : l'une est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, l'autre non. Pour $(a,b,c) = (3,2,-6)$, en développant selon la première ligne,

$$\det A = \frac{1}{343}\left(2(18-4) - 6(-36-6) + 3(12+9)\right) = \frac{28+252+63}{343} = 1.$$

Donc la solution $(3,2,-6)$ donne une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et la solution $(-3,-2,6)$ une matrice de déterminant $-1$.

**Correction de l'exercice 9.4** **Énoncé p. 2**

**1)** Les trois vecteurs sont de norme $\frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$, et

$$\langle u_1, u_2\rangle = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0, \quad \langle u_1, u_3\rangle = \frac{1}{9}(2-4+2) = 0, \quad \langle u_2, u_3\rangle = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0.$$

La famille $\mathcal{B}'$ est orthonormée, donc libre, et elle compte trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ : c'est une base orthonormée.
**2)** Les colonnes de $P$ sont les coordonnées des $u_i$ dans la base canonique :

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de passage entre deux bases orthonormées, donc elle est orthogonale, et

$$P^{-1} = P^{\top} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = P,$$

puisque $P$ est symétrique.
**3)** En développant selon la première ligne,

$$\det P = \frac{1}{27}\left(1(1-4) - 2(2+4) + 2(-4-2)\right) = \frac{-27}{27} = -1.$$

La base $\mathcal{B}'$ est orthonormée indirecte. La famille $(u_1, u_2, -u_3)$ est encore orthonormée et sa matrice de passage a pour déterminant 1 : c'est une base orthonormée directe.
**4)** Si $X$ et $X'$ désignent les colonnes des coordonnées de $x$ dans la base canonique et dans $\mathcal{B}'$, alors $X = PX'$, donc $X' = P^{-1}X = P^{\top}X$ :

$$X' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $x = \langle x, u_1\rangle u_1 + \langle x, u_2\rangle u_2 + \langle x, u_3\rangle u_3$ avec $\langle x, u_1\rangle = \frac{11}{3}$, $\langle x, u_2\rangle = -\frac{2}{3}$ et $\langle x, u_3\rangle = \frac{1}{3}$.

**Correction de l'exercice 9.5** **Énoncé p. 2**

**1)** Chaque matrice a des colonnes unitaires et orthogonales, donc appartient à $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. On les identifie à un $R(\theta)$ ou un $S(\theta)$.

- $A = R\left(\frac{\pi}{3}\right)$ car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ : rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- $B = S\left(\frac{\pi}{3}\right)$ : réflexion par rapport à la droite dirigée par $\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$, c'est-à-dire d'équation $x - \sqrt{3}\,y = 0$.
- $C = S\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ car $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ : réflexion par rapport à la droite dirigée par $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, c'est-à-dire Vect $\big((1,-1)\big)$. On vérifie que $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $D = R\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ car $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ : rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

**2)** D'après la formule $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta')$, on a $A^n = R\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (vrai

pour $n = 0$, et si $A^n = R\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ alors $A^{n+1} = R\left(\frac{n\pi}{3}\right) R\left(\frac{\pi}{3}\right) = R\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)$) :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & -\sin\frac{n\pi}{3} \\ \sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

On a $A^n = I_2$ si et seulement si $\frac{n\pi}{3} \equiv 0 \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire si et seulement si 6 divise $n$. Le plus petit entier $n \geq 1$ convenable est $n = 6$.
**3)** D'après les formules du cours, $R(\theta')S(\theta) = S(\theta + \theta')$ et $S(\theta)R(\theta') = S(\theta - \theta')$, donc

$$AB = R\left(\tfrac{\pi}{3}\right) S\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = S\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad BA = S\left(\tfrac{\pi}{3}\right) R\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont deux réflexions : $AB$ par rapport à la droite dirigée par $\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$, et $BA$ par rapport à l'axe des abscisses. Elles sont distinctes : $A$ et $B$ ne commutent pas.

## Correction de l'exercice 9.6 Énoncé p. 2

**1)** Si $\theta$ est une mesure de l'angle orienté $(x, y)$, le cours donne $\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin\theta = \frac{\det(x,y)}{\|x\|\|y\|}$, le déterminant étant pris dans la base canonique, qui est orthonormée directe.

- $\langle x, y\rangle = 2\sqrt{3}$, $\det(x, y) = 3 - 1 = 2$, $\|x\|\,\|y\| = 4$ : $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.
- $\langle x, y\rangle = 0$, $\det(x, y) = 2 + 2 = 4$, $\|x\|\,\|y\| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ : $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
- $\langle x, y\rangle = -2$, $\det(x, y) = -2\sqrt{3}$, $\|x\|\,\|y\| = 4$ : $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

**2)** Par définition de l'angle orienté, cette rotation est la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$, de matrice

$$R\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

On vérifie : $R\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-1 \\ \sqrt{3}+\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{y}{\|y\|}$.
**3)** La rotation cherchée est la rotation d'angle $\theta$, où $\theta$ est une mesure de l'angle orienté $(u, v)$. Comme $u$ et $v$ sont unitaires, $\cos\theta = \langle u, v\rangle = ac + bd$ et $\sin\theta = \det(u, v) = ad - bc$, d'où la matrice

$$\begin{pmatrix} ac + bd & -(ad - bc) \\ ad - bc & ac + bd \end{pmatrix}.$$

## Correction de l'exercice 9.7 Énoncé p. 2

**1)** Le polynôme caractéristique de $A$ est $(X-2)(X+1)-4 = X^2-X-6 = (X-3)(X+2)$. Les valeurs propres sont 3 et $-2$.
Pour $\lambda = 3$ : $A - 3I_2 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, dont le noyau est engendré par $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Pour $\lambda = -2$ : $A + 2I_2 = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, dont le noyau est engendré par $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux, comme le prévoit le théorème spectral puisque $A$ est symétrique. En

les normant, la famille

$$(X_1, X_2) = \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base orthonormée de vecteurs propres.

**2)** Avec $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée, et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. Ici $\det P = \frac{-4-1}{5} = -1$. En remplaçant $X_2$ par $-X_2$, qui est encore un vecteur propre unitaire pour $-2$, on obtient

$$P' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad A = P' D P'^\top.$$

**3)** Pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^\top$ puisque $P^\top P = I_2$, donc

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & 2 \cdot 3^n - 2(-2)^n \\ 2 \cdot 3^n - 2(-2)^n & 3^n + 4(-2)^n \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $n = 0$ donne $I_2$ et $n = 1$ donne $A$.

**Correction de l'exercice 9.8** **Énoncé p. 3**

**1)** La famille $\left( \frac{a}{\|a\|} \right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a)$, donc pour $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p(x) = \left\langle x, \ \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle x, \ a \rangle}{\|a\|^2} \, a = \frac{\langle x, \ a \rangle}{6} \, a,$$

puisque $\|a\|^2 = 1 + 1 + 4 = 6$.

**2)** Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\langle x, \ a \rangle = x_1 - x_2 + 2x_3$, donc

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Elle est symétrique. Si $A$ désigne la colonne de $a$, alors $P = \frac{1}{6} AA^\top$ et

$$P^2 = \frac{1}{36} A \left( A^\top A \right) A^\top = \frac{6}{36} AA^\top = P,$$

car $A^\top A = \|a\|^2 = 6$. On retrouve que le projecteur orthogonal $p$ est autoadjoint, sa matrice dans une base orthonormée étant symétrique.

**3)** Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, on a $x = x_1 a + (0, \ x_2 + x_1, \ x_3 - 2x_1)$, avec $x_1 a \in \mathrm{Vect}(a)$ et le second vecteur dans le plan d'équation $x = 0$. Donc $q(x) = x_1 a$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas symétrique alors que la base canonique est orthonormée : $q$ n'est pas autoadjoint. C'est conforme au cours, un projecteur étant autoadjoint si et seulement s'il est orthogonal, et $\mathrm{Ker}\, q$, le plan d'équation $x = 0$, n'est pas l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a)$.

**Correction de l'exercice 9.9** **Énoncé p. 3**

Les quatre matrices sont symétriques réelles. D'après la caractérisation spectrale, une telle matrice est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives, définie positive si et seulement si elles sont strictement positives.

- $\chi_A = (X-2)^2 - 1 = (X-1)(X-3)$ : valeurs propres 1 et 3, donc $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.
- $\chi_B = (X-1)^2 - 1 = X(X-2)$ : valeurs propres 0 et 2, donc $B \in \mathcal{S}_2^{+}(\mathbb{R})$ mais $B \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Avec $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, qui engendre $\operatorname{Ker} B, X^\top BX = 0$.
- $\chi_C = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ : la valeur propre $-1$ montre que $C$ n'est pas positive. Avec $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), X^\top CX = -2 < 0$.
- Les lignes de $D$ ont une somme nulle, donc $D\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$ : 0 est valeur propre. Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned}\chi_D &= X^3 - \operatorname{tr}(D)X^2 + \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) X - \det D \\ &= X^3 - 4X^2 + 3X = X(X-1)(X-3).\end{aligned}$$

  Les valeurs propres 0, 1, 3 sont positives, l'une est nulle : $D \in \mathcal{S}_3^{+}(\mathbb{R})$ et $D \notin \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$, avec $X^\top DX = 0$ pour $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

**Correction de l'exercice 9.10** **Énoncé p. 3**

**1)** Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Pour tout $y \in E$, $\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle 0_E, y\rangle = 0$, donc $x$ est orthogonal à tout élément de $\operatorname{Im} u$ : $\operatorname{Ker} u \subset (\operatorname{Im} u)^\perp$.
Réciproquement, soit $x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$. Alors $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u(u(x))\rangle = 0$, car $u(u(x)) \in \operatorname{Im} u$. Donc $u(x) = 0_E$ et $x \in \operatorname{Ker} u$. D'où l'égalité.
**2)** Dans l'espace euclidien $E$, tout sous-espace $F$ vérifie $E = F \oplus F^\perp$. Avec $F = \operatorname{Im} u$ et la question précédente, $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, et les deux sous-espaces sont orthogonaux.
**3)** Si $u \circ u = 0$, alors pour tout $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Ker} u$ : $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp$. Donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} u \cap (\operatorname{Im} u)^\perp = \{0_E\}$, et $u = 0$.

**Correction de l'exercice 9.11** **Énoncé p. 3**

**1)** Par hypothèse $f(F) \subset F$. L'application $f$ est injective, car c'est une isométrie vectorielle : si $f(x) = 0_E$ alors $\|x\| = \|f(x)\| = 0$ et $x = 0_E$. Sa restriction à $F$ est donc injective, et $\dim f(F) = \dim F$. L'inclusion $f(F) \subset F$ avec égalité des dimensions donne $f(F) = F$.
**2)** Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. D'après la question précédente, il existe $y' \in F$ tel que $y = f(y')$. Alors, comme $f$ conserve le produit scalaire,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle f(x), f(y')\rangle = \langle x, y'\rangle = 0.$$

Donc $f(x) \in F^\perp$ : le sous-espace $F^\perp$ est stable par $f$.
**3)** Notons $g$ l'endomorphisme de $F$ induit par $f$, défini par $g(x) = f(x)$ pour $x \in F$. Pour $x \in F$, $\|g(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$ : $g$ conserve la norme, c'est une isométrie vectorielle de $F$.
**4)** La droite $\operatorname{Vect}(a)$ est stable par $f$, donc le plan $P = a^\perp$ aussi, d'après la question 2, et l'endomorphisme $g$ de $P$ induit par $f$ est une isométrie vectorielle de $P$ d'après la question 3. Il reste à voir que $\det g = 1$. Soit $(b, c)$ une base orthonormée de $P$ ;

alors $(a, b, c)$ est une base orthonormée de $E$, dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{(a,b,c)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad M = \mathrm{Mat}_{(b,c)}(g) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}),$$

la première colonne traduisant $f(a) = a$ et les deux autres la stabilité de $P$. Par déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, $1 = \det f = \det M = \det g$. Donc $g$ est une isométrie vectorielle de déterminant 1 du plan $P$ : une rotation vectorielle.

**Correction de l'exercice 9.12** **Énoncé p. 3**

**1)** Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de $F$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$. Comme $E = F \oplus F^\perp$ et que les deux sous-espaces sont orthogonaux, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $E$. La symétrie $s$ vaut Id sur $F$ et $-\mathrm{Id}$ sur $F^\perp$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n-p}).$$

Par conséquent $\det s = (-1)^{n-p}$ et $\mathrm{tr}\, s = p - (n-p) = 2p - n$.
**2)** La symétrie $s$ est une isométrie vectorielle, donc $s \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si $\det s = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $n - p$ est pair.
**3)** Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, soit $p = n - 1$ : son déterminant est $(-1)^1 = -1$, et elle n'est pas dans $\mathrm{SO}(E)$.
**4)** On a $-\mathrm{Id}_E = s$ avec $F = \{0_E\}$, soit $p = 0$ : $\det(-\mathrm{Id}_E) = (-1)^n$. Donc $-\mathrm{Id}_E \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si $n$ est pair. En dimension 2, c'est la rotation d'angle $\pi$ ; en dimension 3, $-\mathrm{Id}_E$ est une isométrie vectorielle de déterminant $-1$.

**Correction de l'exercice 9.13** **Énoncé p. 4**

**1)** La matrice de $u$ dans $\mathcal{B}'$ dit que $u(e_1) = e_1 + e_2$ et $u(e_1 + e_2) = e_1$. Par linéarité, $u(e_2) = u(e_1 + e_2) - u(e_1) = -e_2$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas symétrique. La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, $u$ n'est pas autoadjoint. Directement : $\langle u(e_1), e_2 \rangle = 1$ alors que $\langle e_1, u(e_2) \rangle = 0$. La symétrie de la matrice dans la base non orthonormée $\mathcal{B}'$ ne dit rien.
**2)** On a $v(e_1) = e_1$ et $v(e_2) = -e_2$, donc $v(e_1 + e_2) = e_1 - e_2 = 2e_1 - (e_1 + e_2)$. Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas symétrique, bien que $v$ soit autoadjoint (sa matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(1, -1)$).
**3)** Pour $x, y \in E$ de colonnes de coordonnées $X$ et $Y$ dans $C$, par bilinéarité,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle c_i, c_j \rangle = X^\top G Y.$$

La colonne des coordonnées de $w(y)$ est $AY$, donc $\langle x, w(y) \rangle = X^\top G A Y$ et $\langle w(x), y \rangle = (AX)^\top G Y = X^\top A^\top G Y$. L'endomorphisme $w$ est autoadjoint si et seulement si pour toutes colonnes $X$, $Y$, $X^\top (GA - A^\top G) Y = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $GA = A^\top G$ (prendre pour $X$ et $Y$ les colonnes de la base canonique donne les coefficients de la matrice).

Si $C$ est orthonormée, $G = I_n$ et la condition devient $A^\top = A$ : on retrouve la caractérisation du cours.

**Correction de l'exercice 9.14** **Énoncé p. 4**

**1)** D'après les formules de produit du cours, $R(\theta)S(\alpha) = S(\alpha+\theta)$ et $S(\alpha)R(\theta) = S(\alpha-\theta)$. Une isométrie vectorielle de matrice $S(\beta)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la réflexion par rapport à la droite Vect $\left(\cos\frac{\beta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\beta}{2}\, e_2\right)$. Donc $r_\theta \circ s_\alpha$ est la réflexion d'axe dirigé par $\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\alpha+\theta}{2}\, e_2$, et $s_\alpha \circ r_\theta$ celle d'axe dirigé par $\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\alpha-\theta}{2}\, e_2$. Les deux axes se déduisent de celui de $s_\alpha$ par rotation d'angle $\frac{\theta}{2}$ et $-\frac{\theta}{2}$.
**2)** Soit $r_\theta$ une rotation et $s_\alpha$ une réflexion quelconque. On cherche $\beta$ tel que $s_\beta \circ s_\alpha = r_\theta$, soit $S(\beta)S(\alpha) = R(\beta-\alpha) = R(\theta) : \beta = \alpha + \theta$ convient. De même $s_\alpha \circ s_{\alpha-\theta}$ a pour matrice $S(\alpha)S(\alpha-\theta) = R(\theta)$. Ainsi $r_\theta = s_{\alpha+\theta} \circ s_\alpha = s_\alpha \circ s_{\alpha-\theta}$ : la réflexion $s_\alpha$ peut être choisie à droite ou à gauche.
**3)** D'après la classification des isométries vectorielles du plan, une isométrie vectorielle de $E$ est une rotation ou une réflexion. Une réflexion est composée d'une seule réflexion, et une rotation de deux d'après la question précédente. L'identité est $r_0 = s_\alpha \circ s_\alpha$ pour tout $\alpha$.

**Correction de l'exercice 9.15** **Énoncé p. 4**

**1)** Dans une base orthonormée directe, la matrice de $r$ est $R(\theta)$, donc

$$\chi_r = \begin{vmatrix} X - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & X - \cos\theta \end{vmatrix} = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1.$$

**2)** Le discriminant de $\chi_r$ est $4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta \leq 0$. Il y a une racine réelle si et seulement si $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$. Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $r = \mathrm{Id}_E$ ; si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, alors $r = -\mathrm{Id}_E$. Dans les deux cas la valeur propre, 1 ou $-1$, est double.
**3)** Les racines complexes de $X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$ sont $\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$, distinctes puisque $\sin\theta \neq 0$. Pour $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$$R(\theta)\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\\ \sin\theta - \mathrm{i}\cos\theta\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix},$$

car $-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -\mathrm{i}\cos\theta + \sin\theta$. En conjuguant, $\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. La matrice $R(\theta)$ a deux valeurs propres complexes distinctes, donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elle n'a pas de valeur propre réelle, donc elle n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
**4)** Les sous-espaces $\{0_E\}$ et $E$ sont stables. Une droite stable par $r$ serait engendrée par un vecteur propre réel, ce qui est exclu par la question 2. Donc les seuls sous-espaces stables sont $\{0_E\}$ et $E$.

**Correction de l'exercice 9.16** **Énoncé p. 4**

**1)** Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif, donc toute matrice $R(\alpha)$ convient. Soit $S(\alpha)$ une matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ de déterminant $-1$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\alpha)R(\theta) = S(\alpha-\theta)$ et $R(\theta)S(\alpha) = S(\alpha+\theta)$ ; ces matrices sont égales si et seulement si $\alpha - \theta \equiv \alpha + \theta \pmod{2\pi}$, soit $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ par exemple, $S(\alpha)$ ne commute pas

avec $R(\theta)$. Les matrices cherchées sont donc exactement celles de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
**2)** D'après la question 1, une telle matrice est un $R(\theta)$. Elle doit commuter avec $S(0)$ : $S(0)R(\theta) = S(-\theta)$ et $R(\theta)S(0) = S(\theta)$, égales si et seulement si $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$, soit $R(\theta) = \pm I_2$. Réciproquement $I_2$ et $-I_2$ commutent avec toute matrice. Les matrices cherchées sont $I_2$ et $-I_2$.
**3)** Notons $\gamma = \cos\theta$, $\sigma = \sin\theta \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On calcule

$$MR(\theta) = \begin{pmatrix} a\gamma + b\sigma & -a\sigma + b\gamma \\ c\gamma + d\sigma & -c\sigma + d\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R(\theta)M = \begin{pmatrix} \gamma a - \sigma c & \gamma b - \sigma d \\ \sigma a + \gamma c & \sigma b + \gamma d \end{pmatrix}.$$

L'égalité des coefficients d'indices $(1,1)$ donne $b\sigma = -\sigma c$, soit $c = -b$ ; celle des coefficients d'indices $(1,2)$ donne $-a\sigma = -\sigma d$, soit $d = a$. Réciproquement, si $c = -b$ et $d = a$, les deux produits valent $\begin{pmatrix} a\gamma + b\sigma & b\gamma - a\sigma \\ -b\gamma + a\sigma & a\gamma + b\sigma \end{pmatrix}$. Les matrices qui commutent avec $R(\theta)$ sont donc les

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aI_2 - bR\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ce sont les matrices $\rho R(\varphi)$ avec $\rho \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ : si $(a,b) \neq (0,0)$, on écrit $(a,-b) = \rho(\cos\varphi, \sin\varphi)$ avec $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$.
Une matrice qui commute avec toutes les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ commute en particulier avec $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc est de la forme ci-dessus ; réciproquement une telle matrice est combinaison linéaire de $I_2$ et de $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$, qui commutent avec tout $R(\theta)$ par commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. L'ensemble cherché est donc $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

**Correction de l'exercice 9.17** **Énoncé p. 4**

**1)** Pour $X, Y \in E$, $X^\top AY$ est une matrice $1 \times 1$, identifiée à un réel. La linéarité en $X$ et en $Y$ vient de celle du produit matriciel. Pour la symétrie, $X^\top AY$ est égal à sa transposée, donc

$$\varphi_A(X,Y) = \left(X^\top AY\right)^\top = Y^\top A^\top X = Y^\top AX = \varphi_A(Y,X),$$

puisque $A^\top = A$.
**2)** La forme $\varphi_A$ est bilinéaire symétrique. C'est un produit scalaire si et seulement si elle est de plus positive, $X^\top AX \geq 0$ pour tout $X$, et définie, $X^\top AX = 0 \implies X = 0$. C'est exactement la définition de $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
**3)** *Unicité.* Si $A$ convient, alors pour les colonnes $E_i, E_j$ de la base canonique, $\langle E_i, E_j \rangle = E_i^\top AE_j = a_{i,j}$ : les coefficients de $A$ sont imposés.
*Existence.* Posons $A = \left(\langle E_i, E_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Elle est symétrique par symétrie du produit scalaire. Pour $X = \sum_i x_i E_i$ et $Y = \sum_j y_j E_j$, par bilinéarité,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle E_i, E_j \rangle = \sum_{i,j} x_i a_{i,j} y_j = X^\top AY.$$

Ainsi $\varphi_A = \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire, et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question 2.
**4)** Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$\varphi_A(X,Y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Les valeurs propres de $A$ sont 1 et 3, strictement positives, donc c'est bien un produit scalaire. Les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifient $\varphi_A(U,V) = 2 - 1 + 1 - 2 = 0$, $\varphi_A(U,U) = 2 - 1 - 1 + 2 = 2$ et $\varphi_A(V,V) = 2 + 1 + 1 + 2 = 6$. Une base orthonormée pour $\varphi_A$ est donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}U, \frac{1}{\sqrt{6}}V\right)$. On a choisi des vecteurs propres de $A$ : pour deux vecteurs propres $U, V$ associés à des valeurs propres distinctes, $U^\top AV = \lambda_V U^\top V = 0$ par le théorème spectral.

## Correction de l'exercice 9.18

Énoncé p. 5

**1)** On a $E_i^\top AE_i = a_{i,i}$. Comme $A$ est positive, $a_{i,i} \geq 0$. Si $A$ est définie positive, $E_i \neq 0$ donne $a_{i,i} = E_i^\top AE_i > 0$.
**2)** Pour $t \in \mathbb{R}$ et $X = E_i + tE_j$, par bilinéarité et symétrie,

$$X^\top AX = E_i^\top AE_i + 2tE_i^\top AE_j + t^2 E_j^\top AE_j = a_{i,i} + 2ta_{i,j} + t^2 a_{j,j} \geq 0.$$

Si $a_{j,j} > 0$, ce polynôme du second degré en $t$ est positif sur $\mathbb{R}$, donc son discriminant $4a_{i,j}^2 - 4a_{i,i}a_{j,j}$ est négatif, d'où $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$. Si $a_{j,j} = 0$, le polynôme $a_{i,i} + 2ta_{i,j}$ est affine en $t$ et positif sur $\mathbb{R}$, donc $a_{i,j} = 0$, et l'inégalité $0 \leq a_{i,i} \cdot 0$ est vraie.
**3)** Si $a_{i,i} = 0$, la question 2 donne $a_{i,j}^2 \leq 0$ pour tout $j \neq i$, donc $a_{i,j} = 0$ : la ligne $i$ est nulle, et la colonne $i$ aussi par symétrie.
**4)** On a $\operatorname{tr} A = \sum_i a_{i,i}$ avec $a_{i,i} \geq 0$. Si la trace est nulle, tous les $a_{i,i}$ sont nuls, donc toutes les lignes de $A$ sont nulles d'après la question 3 : $A = 0$.
Par les valeurs propres : d'après le théorème spectral, $A = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D$ diagonale, dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $A$, positives. Alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D = \sum_i \lambda_i = 0$ impose $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, soit $D = 0$ et $A = 0$.

## Correction de l'exercice 9.19

Énoncé p. 5

**1)** On a $A^\top = \lambda(X^\top)^\top X^\top = \lambda XX^\top = A$. Pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AY = \lambda(X^\top Y)X$ est colinéaire à $X$, donc $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Vect}(X)$, et $AX = \lambda \|X\|^2 X \neq 0$ : $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(X)$ et $\operatorname{rg} A = 1$.
Le calcul $AX = \lambda \|X\|^2 X$ montre que $\lambda \|X\|^2$ est valeur propre, de sous-espace propre contenant $\operatorname{Vect}(X)$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A = n - 1$ et 0 est valeur propre, avec $\operatorname{Ker} A = \{Y, X^\top Y = 0\} = \operatorname{Vect}(X)^\perp$ pour le produit scalaire usuel. Comme $\operatorname{Vect}(X) \oplus \operatorname{Vect}(X)^\perp = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il n'y a pas d'autre valeur propre : $\operatorname{Sp} A = \{0, \lambda \|X\|^2\}$ (si $n \geq 2$), avec $E_0(A) = \operatorname{Vect}(X)^\perp$ et $E_{\lambda\|X\|^2}(A) = \operatorname{Vect}(X)$.
**2)** D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^\top$. Le rang de $A$ est celui de $D$, c'est-à-dire le nombre de $\lambda_i$ non nuls : un seul, disons $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ et $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. En notant $X_1, \ldots, X_n$ les colonnes de $P$, qui forment une base orthonormée,

$$A = PDP^\top = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i X_i^\top = \lambda X_1 X_1^\top,$$

et $X_1$ est unitaire. (L'égalité $PDP^\top = \sum_i \lambda_i X_i X_i^\top$ se vérifie coefficient par coefficient : le coefficient $(k,l)$ des deux membres vaut $\sum_i p_{k,i}\lambda_i p_{l,i}$.)
**3)** D'après la question 1, les valeurs propres de $\lambda XX^\top$ sont 0 et $\lambda \|X\|^2$. Par la caractérisation spectrale, la matrice est positive si et seulement si $\lambda > 0$.

**4)** Avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$, on a $XX^\top = (ij)_{1\leq i,j\leq n} = M$. D'après la question 1, les valeurs propres de $M$ sont 0, de sous-espace propre l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n ix_i = 0$, et $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, de sous-espace propre $\mathrm{Vect}(X)$.

## Correction de l'exercice 9.20

Énoncé p. 5

**1)** Les valeurs propres de $A$ sont strictement positives, donc 0 n'en est pas une et $A$ est inversible. On a $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} = A^{-1}$, donc $A^{-1}$ est symétrique. Si $\lambda$ est valeur propre de $A$ avec $AX = \lambda X$, $X \neq 0$, alors $A^{-1}X = \lambda^{-1}X$ : les valeurs propres de $A^{-1}$ sont les inverses de celles de $A$, strictement positives. Donc $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
**2)** D'après le théorème spectral, $A = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où les $\lambda_i$ sont positifs. Alors $A^k = PD^kP^\top$, car $P^\top P = I_n$, et $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$. La matrice $A^k$ est symétrique, $(A^k)^\top = (A^\top)^k = A^k$, et ses valeurs propres sont les $\lambda_i^k \geq 0$ : $A^k \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $A$ est définie positive, les $\lambda_i$ sont strictement positifs, $A^k = PD^kP^\top$ a encore un sens pour $k \in \mathbb{Z}$ par la question 1, et ses valeurs propres $\lambda_i^k$ sont strictement positives : $A^k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
**3)** La matrice $A+B$ est symétrique, et pour tout $X$, $X^\top(A+B)X = X^\top AX + X^\top BX \geq 0$. Si de plus $A$ est définie positive et $X \neq 0$, alors $X^\top(A+B)X \geq X^\top AX > 0$. De même si $B$ est définie positive.
**4)** Non. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont symétriques de valeurs propres positives ($\{0, 1\}$ et $\{0, 2\}$), et $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique. La matrice $AB$ est symétrique si et seulement si $AB = (AB)^\top = BA$, c'est-à-dire si $A$ et $B$ commutent.

## Correction de l'exercice 9.21

Énoncé p. 5

Soit $s$ une symétrie (donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$).
**1)** Supposons que $s$ soit une isométrie vectorielle. Soit $B$ une base orthonormée, alors $S = \mathrm{Mat}_B(s)$ est orthogonale, donc

$$S^{-1} = S^\top.$$

Mais $s$ est une symétrie, donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, donc

$$S^2 = I_n, \qquad \text{soit} \qquad S^{-1} = S.$$

Donc $S^\top = S$, et comme $B$ est une base orthonormée, $s$ est bien autoadjoint.
**Autre démonstration :** supposons que $s$ soit une isométrie vectorielle, donc que $s$ préserve le produit scalaire. Soit $(x, y) \in E^2$, alors

$$\langle s(x),\, y\rangle = \big\langle s\big(s(x)\big),\, s(y)\big\rangle = \big\langle s^2(x),\, s(y)\big\rangle\,.$$

Puis, $s$ est une symétrie, donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Donc

$$\langle s(x),\, y\rangle = \big\langle s^2(x),\, s(y)\big\rangle = \langle x,\, s(y)\rangle\,.$$

C'est vrai pour tout $(x, y) \in E^2$, donc $s$ est autoadjoint.
Supposons que $s$ est autoadjoint. Alors, si $B$ est une base orthonormée, $S = \mathrm{Mat}_B(s)$ est une matrice symétrique :

$$S^\top = S.$$

Mais $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, donc

$$S^2 = I_n, \qquad \text{soit} \qquad S^{-1} = S.$$

Donc $S^{-1} = S^\top$, donc $S$ est une matrice orthogonale. Comme $B$ est une base orthonormée, $s$ est bien une isométrie vectorielle.
**Autre démonstration :** supposons que $s$ est autoadjoint. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$, comme $s$ est autoadjoint,

$$\langle s(x),\, s(y)\rangle = \big\langle x,\, s\big(s(y)\big)\big\rangle = \big\langle x,\, s^2(y)\big\rangle\,.$$

Puis, $s^2 = \mathrm{Id}_E$, donc

$$\langle s(x),\, s(y)\rangle = \big\langle x,\, s^2(y)\big\rangle = \langle x,\, y\rangle\,.$$

Donc $s$ préserve le produit scalaire, donc est une isométrie vectorielle.
**2)** Supposons que $s$ soit autoadjoint, donc ses espaces propres sont orthogonaux (deux à deux, mais il n'y en a que deux), et donc

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)}_{=E_1(s)} \perp \underbrace{\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)}_{=E_{-1}(s)}, \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)^\perp.$$

Mais, comme $s$ est une symétrie, on a

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E),$$

donc

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)\big).$$

Puis, $E$ est euclidien, donc

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)^\perp\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)\big).$$

Par conséquent,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)^\perp\big).$$

On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut donc conclure :

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)^\perp,$$

donc $s$ est une symétrie orthogonale.
Supposons que $s$ soit une symétrie orthogonale, autrement dit que

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)^\perp.$$

Comme $s$ est une symétrie,

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

Puis, si $B_1$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $B_2$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, alors $B = B_1 \sqcup B_2$ est une base orthonormée de $E$ :

- Pour tout $x \in B$, soit $x \in B_1$ et alors $\|x\| = 1$ car tout élément de $B_1$ est normé, soit $x \in B_2$, et alors $\|x\| = 1$ car tout élément de $B_2$ est normé.
- Pour tout $x$ et $y \in B$ avec $x \neq y$, quatre cas sont possibles :
  - $x \in B_1$ et $y \in B_1$, alors $x \perp y$ car $B_1$ est une famille orthogonale,
  - $x \in B_2$ et $y \in B_2$, alors $x \perp y$ car $B_2$ est une famille orthogonale,
  - $x \in B_1$ et $y \in B_2$, alors $x \perp y$ car $x \in B_1 \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $y \in B_2 \subset \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$
  - $x \in B_2$ et $y \in B_1$, alors $x \perp y$ car $y \in B_1 \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $x \in B_2 \subset \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
- $B$ est une base de $E$ car $B_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $B_2$ est une base de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ (car $s$ symétrie).

De plus, la base $B$ de $E$ est formée de vecteurs propres de $s$ (car $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = E_1(s)$, $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = E_{-1}(s)$). Donc, $\mathrm{Mat}_B(s)$ est alors une matrice diagonale, donc symétrique, et comme $B$ est une base orthonormée, on en déduit que $s$ est autoadjoint.

**Remarque**

En toute rigueur, il faudrait traiter à part $s = \mathrm{Id}_E$ et $s = -\mathrm{Id}_E$, pour exclure le cas où $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$ ou $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$.

**Autre démonstration :** supposons que

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)^{\perp}.$$

Comme $s$ est une symétrie, on a

$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s).$$

Donc, pour tout $x \in E$, il existe $x_1 \in E_1(s)$ et $x_2 \in E_{-1}(s)$ avec $x = x_1 + x_2$, et alors

$$s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2.$$

Notons aussi, pour $y \in E$, $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in E_1(s)$ et $y_2 \in E_{-1}(s)$. Alors

$$s(y) = y_1 - y_2.$$

Et donc

$$\langle s(x),\, y\rangle = \langle x_1 - x_2,\, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1,\, y_1\rangle + \underbrace{\langle x_1,\, y_2\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle x_2,\, y_1\rangle}_{=0} - \langle x_2,\, y_2\rangle = \langle x_1,\, y_1\rangle - \langle x_2,\, y_2\rangle$$

(car $x_1 \in E_1(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, $y_2 \in E_{-1}(s) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, et que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \perp \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, donc en particulier $x_1 \perp y_2$, soit $\langle x_1,\, y_2\rangle = 0$. De même pour $\langle x_2,\, y_1\rangle = 0$). Et de même,

$$\langle x,\, s(y)\rangle = \langle x_1 + x_2,\, y_1 - y_2\rangle = \langle x_1,\, y_1\rangle - \underbrace{\langle x_1,\, y_2\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_2,\, y_1\rangle}_{=0} - \langle x_2,\, y_2\rangle = \langle x_1,\, y_1\rangle - \langle x_2,\, y_2\rangle$$

On a donc

$$\langle s(x),\, y\rangle = \langle x,\, s(y)\rangle$$

pour tout $(x, y) \in E^2$, donc $s$ est autoadjoint.

**3)** Supposons que $s$ soit une symétrie orthogonale, alors $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur, car

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s + \mathrm{Id}_E)^2 = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \mathrm{Id}_E) = \frac{1}{4}(2s + 2\,\mathrm{Id}_E) = p,$$

puisque $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ ($s$ symétrie). Et on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

**Remarque**

Si $s$ est la symétrie par rapport à $F$, parallèlement à $G$ (avec donc $F = E_1(s), G = E_{-1}(s)$), alors $p$ est le projecteur sur $F$, parallèlement à $G$ (avec donc $F = E_1(p), G = E_0(p)$).

Puis, pour tout $(x, y) \in E^2$, comme $s$ est autoadjoint (par la question 2), par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle p(x),\, y\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\big(s(x) + x\big),\, y \right\rangle = \frac{1}{2}\langle s(x),\, y\rangle + \frac{1}{2}\langle x,\, y\rangle = \frac{1}{2}\langle x,\, s(y)\rangle + \frac{1}{2}\langle x,\, y\rangle = \left\langle x,\, \frac{1}{2}\big(s(y) + y\big)\right\rangle = \langle x,\, p(y)\rangle\,.$$

Donc $p$ est autoadjoint. Mais c'est aussi un projecteur, donc c'est un projecteur orthogonal.
Si $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ avec $p$ projecteur orthogonal, alors $s$ est une symétrie car

$$s \circ s = (2p - \mathrm{Id}_E)^2 = 4p \circ p - 4p + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E,$$

puisque $p \circ p = p$.

**Remarque**

Si $p$ est le projecteur sur $F$, parallèlement à $G$ (avec donc $F = E_1(p), G = E_0(p)$), alors $s$ est la symétrie par rapport à $F$, parallèlement à $G$ (avec donc $F = E_1(s), G = E_{-1}(s)$).

Puis, pour tout $(x, y) \in E^2$, comme $p$ est autoadjoint (car projecteur orthogonal), par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle s(x),\, y\rangle = \langle 2p(x) - x,\, y\rangle = 2\langle p(x),\, y\rangle - \langle x,\, y\rangle = 2\langle x,\, p(y)\rangle - \langle x,\, y\rangle = \langle x,\, 2p(y) - y\rangle = \langle x,\, s(y)\rangle\,.$$

Donc $s$ est autoadjoint. Donc la question 2 conclut.

**Correction de l'exercice 9.22** **Énoncé p. 5**

Première façon : on vérifie que

$$A^\top A = B^\top B = C^\top C = I_3.$$

Deuxième façon : on dit que les colonnes de $A$ (ou de $B$ ou de $C$) forment une famille orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et donc $A$ (ou $B$ ou $C$) sera la matrice de passage entre la base canonique (qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel) et une autre base orthonormée, donc $A$ (ou $B$ ou $C$) sera bien orthogonale.

Illustrons la deuxième façon :

$$\sqrt{\frac{1}{6}(1^2+1^2+(-2)^2)} = \sqrt{\frac{1}{6}\left((-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+0^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{6}\left((\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2\right)} = 1,$$

donc les colonnes de $A$ sont de norme 1. Puis, si on note $C_i$ la $i$-ième colonne de $A$ (pour $i \in \{1,2,3\}$),

$$\langle C_1, C_2\rangle = C_1^\top C_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}(-\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 0, \qquad \langle C_1, C_3\rangle = \frac{1}{6}(\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}) = 0$$

et

$$\langle C_2, C_3\rangle = \frac{1}{6}(-\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{2}+0) = 0,$$

d'où l'assertion.
On fait de même pour $B$ et $C$.

**Remarque**

La deuxième méthode fait moins de calcul que la première, mais si on remarque que $A^\top A$ est une matrice symétrique (et donc qu'il suffit de calculer les coefficients d'indice $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$ avec $j \geq i$), on se ramène à faire exactement les mêmes calculs dans la première méthode.

**Correction de l'exercice 9.23** **Énoncé p. 5**

1. Soit $u$ et $v$ deux vecteurs unitaires (donc $\|u\| = \|v\| = 1$). Alors, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,
$$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle + \underbrace{\langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle}_{=0} - \langle v, v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1-1 = 0.$$
2. Soit $u$ et $v$ unitaires, on a alors :
$$\langle f(u+v), f(u-v)\rangle = 0$$
car $f$ conserve l'orthogonalité (on a $\langle u+v, u-v\rangle = 0$ d'après la question précédente).
Par linéarité de $f$, on a donc
$$\langle f(u)+f(v), f(u)-f(v)\rangle = 0.$$
On a donc
$$\|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = 0$$
(en développant, comme à la question 1), donc
$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$
(car une norme est un réel positif).
3. Fixons $u$ un vecteur unitaire, et notons $k = \|f(u)\|$ (alors $k \in \mathbb{R}_+$). Soit $x \in E$ avec $x \neq \vec{0}$.
Le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire, donc
$$\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = k$$

par la question précédente. Ainsi, par linéarité de $f$, puis homogénéité de la norme, on a :

$$k = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\|x\|} f(x)\right\| = \left|\frac{1}{\|x\|}\right| \|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|}\|f(x)\|$$

(car une norme est positive). On en déduit (en multipliant par $\|x\|$) :

$$\|f(x)\| = k\|x\|.$$

C'est vrai pour tout $x \in E$ avec $x \neq \vec{0}$, mais cette égalité reste clairement vraie pour $x = \vec{0}$ (car $f(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\left\|\vec{0}\right\| = 0$).
Si $k \neq 0$, $\frac{1}{k} f$ est alors une isométrie vectorielle. Si $k = 0$, $f = 0$.

**Remarque**

On a donc montré que, si $f$ préserve l'orthogonalité, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ et $g \in \mathrm{O}(E)$ ($g$ quelconque si $f = 0$) tels que $f = k\,g$. La réciproque se voit facilement.

**Correction de l'exercice 9.24** **Énoncé p. 6**

1. Soit $x \in E$, alors $f(x)$ est une combinaison linéaire de $x$ et de $v$ (car $\langle x, v\rangle \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$), et comme $v \in E$ aussi et que $E$ est stable par combinaison linéaire, $f(x) \in E$. Donc $f$ va de $E$ dans $E$.
Pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$f(\alpha x+y) = \alpha x+y+\lambda\langle \alpha x + y, v\rangle v = \alpha x+y+\lambda\big(\alpha\langle x, v\rangle+\langle y, v\rangle\big)v = \alpha\big(x+\lambda\langle x, v\rangle v\big)+y+\lambda\langle y, v\rangle v = \alpha f(x)+f(y)$$

Donc $f$ est linéaire.
Donc $f$ est un endomorphisme de $E$.
Soit $(x, y) \in E^2$, on a par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \langle x + \lambda\langle x, v\rangle v, y + \lambda\langle y, v\rangle v\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + 2\lambda\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle + \lambda^2\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=\|v\|^2} \\ &= \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle\left(2 + \lambda\|v\|^2\right)\end{aligned}$$

Donc, si $f \in \mathrm{O}(E)$, alors pour $x = y = v$, on a

$$\|v\|^2 = \|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle = \|v\|^2 + \lambda\left(\|v\|^2\right)^2\left(2 + \lambda\|v\|^2\right),$$

ce qui force

$$\lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$$

(car $v \neq \vec{0}$, donc $\|v\| \neq 0$).
Réciproquement, si $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$, alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Donc $f$ est une isométrie vectorielle.
Donc

$$f \in \mathrm{O}(E) \text{ si et seulement si } \boxed{\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -\tfrac{2}{\|v\|^2}}.$$

2. Si $\lambda = 0$ alors $f = \mathrm{Id}_E$, cas sans intérêt.
Si $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$, alors pour tout $x \in E$,

$$f(x) = x - 2\left\langle x, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|}.$$

Il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(v)^\perp$. En effet :
Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} f\big(f(x)\big) &= x - \tfrac{2}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v - \tfrac{2}{\|v\|^2}\left\langle x - \tfrac{2}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v, v\right\rangle v \\ &= x - \tfrac{2}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v - \tfrac{2}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v + \tfrac{4}{\|v\|^4}\langle x, v\rangle \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=\|v\|^2} v \\ &= x = \mathrm{Id}_E(x) \end{aligned}$$

Donc $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, et donc $f$ est une symétrie.
Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in E_1(f) &\Leftrightarrow f(x) = x \\ &\Leftrightarrow x - \frac{2}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v = x \\ &\Leftrightarrow \langle x, v\rangle v = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \langle x, v\rangle = 0 \end{aligned}$$

car $v \neq \vec{0}$. Donc

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}(v)^\perp.$$

Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in E_{-1}(f) &\Leftrightarrow f(x) = -x \\ &\Leftrightarrow x - \frac{2}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v = -x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle v \\ &\Rightarrow x \in \mathrm{Vect}(v) \end{aligned}$$

(car $\frac{1}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle \in \mathbb{R}$). Donc

$$E_{-1}(f) \subset \mathrm{Vect}(v).$$

Puis, si $x \in \mathrm{Vect}(v)$, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ avec $x = \mu v$, et alors

$$f(x) = \mu v - \frac{2}{\|v\|^2}\langle \mu v, v\rangle v = \mu v - 2\mu v = -\mu v = -x,$$

donc $x \in E_{-1}(f)$. Donc

$$\mathrm{Vect}(v) \subset E_{-1}(f).$$

Par double inclusion,

$$E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(v).$$

Donc $f$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(v)^\perp$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$. Comme $\mathrm{Vect}(v)^\perp$ est un hyperplan (car $\dim\big(\mathrm{Vect}(v)\big) = 1$ puisque $v \neq \vec{0}$), $f$ est une **réflexion**.

**Autre façon :** pour $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$, on a, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = x - 2\left\langle x, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|}.$$

Or, $\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(v)$, donc le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(v)$ est

$$q : x \in E \mapsto \left\langle x, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|} \in E.$$

Or, le projecteur orthogonal $p$ sur $\mathrm{Vect}(v)^\perp$ vérifie $p + q = \mathrm{Id}_E$, donc

$$p : x \in E \mapsto x - \left\langle x, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|} \in E.$$

Enfin, $f = 2p - \mathrm{Id}_E$, et donc $f$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(v)^\perp$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$ (relation entre symétrie orthogonale et projecteur orthogonal).

**Correction de l'exercice 9.25** **Énoncé p. 6**

Ce sont les matrices diagonales n'ayant que des 1 ou des $-1$ sur la diagonale.
Première façon :
**Analyse :** soit $T$ une telle matrice, $T = (C_1|C_2|\dots|C_n)$. On montre alors par récurrence **forte** sur $i \in [\![1, n]\!]$, que $C_i$ est $\pm E_i$, si l'on note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
**Initialisation :** comme $T$ est triangulaire supérieure, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $C_1 = \alpha E_1$. Comme $T$ est orthogonale, $\|C_1\|^2 = 1$ (pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), et donc

$$1 = \|C_1\|^2 = \alpha^2 \|E_1\|^2 = \alpha^2,$$

donc $\alpha = \pm 1$. D'où l'initialisation.
**Hérédité :** soit $i \in [\![1, n-1]\!]$, supposons qu'il existe $(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_i) \in \{\pm 1\}^i$ avec

$$C_1 = \mathrm{e}_1 E_1 \ , \quad \dots \ , \quad C_i = \mathrm{e}_i E_i.$$

Comme $T$ est triangulaire supérieure, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}) \in \mathbb{R}^{i+1}$ avec

$$C_{i+1} = \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k E_k.$$

Comme $T$ est orthogonale, $C_{i+1} \perp C_j$ pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, et donc

$$0 = \langle C_{i+1}, C_j\rangle = \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k \mathrm{e}_j \langle E_k, E_j\rangle = \alpha_j \mathrm{e}_j,$$

donc $\alpha_j = 0$. Puis, $C_{i+1} = \alpha_{i+1}E_{i+1}$ est de norme 1, donc

$$1 = \|C_{i+1}\|^2 = \alpha_{i+1}^2 \|E_{i+1}\|^2 = \alpha_{i+1}^2.$$

Donc $\alpha_{i+1} = \pm 1$. Donc $C_{i+1} = \pm E_{i+1}$. D'où l'hérédité.
**Conclusion :** pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $C_i = \pm E_i$.
**Synthèse :** réciproquement, une telle matrice convient (elle est diagonale, donc triangulaire, et son inverse est bien sa transposée (qui est elle-même, car c'est une matrice diagonale), c'est direct).
Deuxième façon :
**Analyse :** soit $T$ une telle matrice, alors $T$ est inversible. Si on note $\mathcal{T}_n$ l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\phi : U \in \mathcal{T}_n \mapsto TU \in \mathcal{T}_n$$

est une application bien définie (le produit de deux matrices triangulaires supérieures en est encore une), linéaire (par bilinéarité du produit matriciel), injective (car $TU = 0_n \Rightarrow U = 0_n$, puisque $T$ est inversible (on multiplie par $T^{-1}$ à gauche)), $\mathcal{T}_n$ est de dimension finie, donc les espaces de départ et d'arrivée de $\phi$ ont même dimension finie. Alors (par le cours de PCSI), on sait que $\phi$ est bijective.
Par conséquent, comme $I_n \in \mathcal{T}_n$, il existe $U$ triangulaire supérieure avec $TU = I_n$, donc $U = T^{-1}$.
Mais, comme $T$ est orthogonale, $T^{-1} = T^\top$. On obtient donc que $T^\top = U$ est une matrice triangulaire supérieure, or $T$ aussi. Cela donne directement que $T$ est diagonale, donc égale à sa transposée, et donc

$$I_n = T^\top T = T^2.$$

$T$ est donc une matrice diagonale de la forme $T = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_i^2 = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc

$$T = \mathrm{diag}(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$$

avec $\mathrm{e}_i = \pm 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
**Synthèse :** réciproquement, une telle matrice convient.

**Correction de l'exercice 9.26** **Énoncé p. 6**

*Dans cet exercice, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ la matrice telle que*

$$(\overline{M})_{i,j} = \overline{M_{i,j}}$$

*pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$. Comme la conjugaison complexe préserve l'addition et le produit, on a directement : pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$,*

$$\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}$$

*et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$,*

$$\overline{\lambda \cdot M} = \overline{\lambda} \cdot \overline{M} \qquad \text{et} \qquad (^\top\overline{M}) = \overline{M^\top}.$$

Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Toute matrice a au moins une valeur propre complexe.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé à $\lambda$, alors

$$AX = \lambda X \qquad \text{et} \qquad X \neq 0_{n,1}.$$

Donc

$$\overline{AX}^{\top} AX = \overline{\lambda X}^{\top} \lambda X = \overline{\lambda X^{\top}} \lambda X = \overline{\lambda} \lambda \overline{X}^{\top} X = |\lambda|^2 \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \dots & \overline{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 .$$

Comme $X \neq 0_{n,1}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$$

(en effet, si $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i|^2 = 0$, car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul, et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = 0$, ce qui donne $X = 0_{n,1}$).
Puis,

$$\overline{AX}^{\top} AX = \left(\overline{A} \times \overline{X}\right)^{\top} AX = \overline{X}^{\top} \overline{A}^{\top} AX = \overline{X}^{\top} I_n X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

car $A$ est orthogonale à coefficients réels, donc

$$\overline{A}^{\top} A = A^{\top} A = I_n.$$

En simplifiant par $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ (qui est bien non nul), il vient

$$|\lambda|^2 = 1,$$

donc $\lambda$ est bien de module 1.

**Correction de l'exercice 9.27** **Énoncé p. 6**

**1)** Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Notons $X$ et $Y$ les matrices-colonnes coordonnées de $x$ et $y$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $AX$ et $A^{\top} Y$ sont celles de $f(x)$ et $g(y)$, et comme le produit scalaire considéré est le produit scalaire usuel (donc la base canonique est **orthonormée** pour ce produit scalaire), on a

$$\langle g(y),\, x \rangle = \left(A^{\top} Y\right)^{\top} X \qquad \text{et} \qquad \langle y,\, f(x) \rangle = Y^{\top} \left(AX\right)$$

Or, par propriétés de la transposition, on a

$$\left(A^{\top} Y\right)^{\top} = Y^{\top} \left(A^{\top}\right)^{\top} = Y^{\top} A,$$

ce qui donne bien l'égalité

$$\langle g(y),\, x \rangle = Y^{\top} AX = \langle y,\, f(x) \rangle$$

(par associativité du produit matriciel).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Il suffit ensuite de prendre $y = f(x)$ dans cette dernière égalité pour obtenir

$$\langle g \circ f(x),\, x\rangle = \langle f(x),\, f(x)\rangle = \|f(x)\|^2 .$$

**2)** Soit $z \in \mathrm{Im}(g)$, alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ avec $z = g(y)$. Donc, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$, en appliquant l'égalité de la question 1,

$$\langle z,\, x\rangle = \langle g(y),\, x\rangle = \langle y,\, f(x)\rangle = \left\langle y,\, \vec{0}\right\rangle = 0$$

donc $z \in \mathrm{Ker}(f)^\perp$. Donc

$$\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)^\perp.$$

Puis, comme une matrice et sa transposée ont même rang,

$$\begin{aligned}
\dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) &= \mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\
&= \dim(\mathbb{R}^n) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) && \text{(par le théorème du rang)} \\
&= \dim\big(\mathrm{Ker}(f)^\perp\big) && \text{(car } \mathbb{R}^n \text{ est euclidien)}
\end{aligned}$$

On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, ce qui permet bien de conclure à l'égalité

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)^\perp.$$

**3)** Soit $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, prenons $y = f(z)$ dans la première égalité de la question 1, alors on a

$$\langle g \circ f(z),\, x\rangle = \langle f(z),\, f(x)\rangle .$$

En intervertissant les rôles de $x$ et $z$, on a

$$\langle g \circ f(x),\, z\rangle = \langle f(x),\, f(z)\rangle .$$

La symétrie du produit scalaire (utilisée deux fois) donne alors

$$\langle g \circ f(z),\, x\rangle = \langle f(z),\, f(x)\rangle = \langle f(x),\, f(z)\rangle = \langle g \circ f(x),\, z\rangle = \langle z,\, g \circ f(x)\rangle .$$

Cette égalité est vraie pour tout $(x, z) \in (\mathbb{R}^n)^2$, donc $g \circ f$ est bien autoadjoint.

**Remarque**

Une autre possibilité aurait été de remarquer que $A^\top A$ est la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, que c'est une matrice symétrique car

$$({}^\top A^\top A) = A^\top({}^\top A^\top) = A^\top A,$$

et que la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire usuel, donc on pouvait bien en conclure que $g \circ f$ est autoadjoint.

**4)** Par le théorème spectral, tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre, et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. Alors

$$g \circ f(x) = \lambda x \qquad \text{et} \qquad x \neq \vec{0}.$$

Et donc, en utilisant la deuxième égalité de la première question,

$$\|f(x)\|^2 = \langle g \circ f(x),\, x\rangle = \langle \lambda x,\, x\rangle = \lambda \langle x,\, x\rangle = \lambda \|x\|^2 .$$

Comme $x$ est non nul, $\|x\| \neq 0$, et donc

$$\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

Donc toute valeur propre de $g \circ f$ est positive ou nulle.

**Correction de l'exercice 9.28** **Énoncé p. 6**

$\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ par définition.
Soit $f : x \in E \mapsto \vec{0} \in E$ l'endomorphisme nul, alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x),\, y\rangle = \left\langle \vec{0},\, y\right\rangle = 0 = \left\langle x,\, \vec{0}\right\rangle = \langle x,\, f(y)\rangle\,.$$

Donc $f \in \mathcal{S}(E)$.
Soit $(u, v) \in \mathcal{S}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $(x, y) \in E^2$, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle (\lambda u + v)(x),\, y\rangle = \langle \lambda u(x) + v(x),\, y\rangle = \lambda\,\langle u(x),\, y\rangle + \langle v(x),\, y\rangle \underset{(\star)}{=} \lambda\,\langle x,\, u(y)\rangle + \langle x,\, v(y)\rangle = \langle x,\, \lambda u(y) + v(y)\rangle = \langle x,\, (\lambda$$

(l'égalité $(\star)$ provenant de ce que $u$ et $v$ sont autoadjoints). Donc

$$\lambda u + v \in \mathcal{S}(E).$$

Donc $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

**Correction de l'exercice 9.29** **Énoncé p. 6**

Les matrices $A$ et $B$ sont symétriques réelles, donc d'après le théorème spectral, c'est possible.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 1 \\ 4-\lambda & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} (\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} + 0 \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-4)\lambda(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_A = (X-3)(X-4)X.$$

$A$ a donc trois valeurs propres différentes : 0, 3 et 4, toutes simples (donc les espaces propres sont de dimension 1).

Une recherche des espaces propres donne

$$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right), \qquad E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_4(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

(et comme chaque espace propre est de dimension 1, toute famille génératrice d'un espace propre, formée d'un seul vecteur, sera une base de l'espace propre en question. Donc, chaque vecteur dans un Vect ci-dessus est une base de l'espace propre à gauche du Vect).
Mais, pour construire $P$ orthogonale, il faut avoir une base orthonormée de chaque espace propre. Pour cela, on applique le procédé de Gram-Schmidt autant de fois qu'il y a de valeurs propres : on l'applique à une base de chaque espace propre.
Comme ici chaque base est de cardinal 1, seule la première étape du procédé est à appliquer : on divise l'unique vecteur de la base par sa norme, pour avoir une base orthonormée de l'espace propre considéré.
$\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$, donc

$$\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\right)$$

est une base orthonormée de $E_0$.
$\left\|\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$, donc

$$\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right)$$

est une base orthonormée de $E_3$.
$\left\|\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, donc

$$\left(\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}\right)$$

est une base orthonormée de $E_4$.
Comme $A$ est symétrique à coefficients réels, et qu'on a trouvé une base orthonormée de chaque espace propre, on peut alors affirmer que (par exemple) les matrices

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

vérifient

$$P^{-1}AP = D \qquad \text{avec} \qquad P \text{ orthogonale}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_3 - B) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ \lambda+1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{=} (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2}{=} (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ \lambda+1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-5)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_B = (X+1)^2(X-5).$$

$B$ a donc deux valeurs propres différentes : $-1$ et $5$, $-1$ étant valeur propre double (donc $\dim\left(E_{-1}(B)\right) = 2$, car on sait $B$ diagonalisable), $5$ étant valeur propre simple (donc $\dim\left(E_5(B)\right) = 1$).
Une recherche des espaces propres donne

$$E_{-1}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_5(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Les familles génératrices ci-dessus sont en fait des bases des espaces propres considérés, car $\dim\left(E_{-1}(B)\right) = 2$ et $\dim\left(E_5(B)\right) = 1$.
Mais, pour construire $P$ orthogonale, il faut avoir une base orthonormée de chaque espace propre. Pour cela, on applique le procédé de Gram-Schmidt autant de fois qu'il y a de valeurs propres : on l'applique à une base de chaque espace propre.
Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_5(B)$ formée d'un seul vecteur, seule la première étape du procédé de Gram-Schmidt est à appliquer. Or, $\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$, donc on pose

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

et $(W)$ est une base orthonormée de $E_5(B)$.
Par contre, la famille

$$\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $E_{-1}(B)$ formée de deux vecteurs, il faut donc appliquer les deux premières étapes du procédé de Gram-Schmidt.
$\left\|\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, donc on pose

$$U = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Puis,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, U\right\rangle U = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\times 1+0\times 1+1\times 0)\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

et $\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, donc on pose

$$V = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

et alors on sait que $(U,V)$ est une base orthonormée de $E_{-1}(B)$.
Comme on sait que $B$ est symétrique réelle, et qu'on a trouvé une base orthonormée de chaque espace propre, on peut affirmer que les matrices

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W\end{array}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}}$$

vérifient

$$P^{-1}BP = D \qquad \text{avec} \qquad P \text{ orthogonale}$$

**Correction de l'exercice 9.30** **Énoncé p. 6**

1. (a) $S = {}^tA^tA$ est une matrice symétrique, car

$$S^t = ({}^tA^tA) = A^t({}^tA^t) = A^tA = S,$$

et à coefficients réels, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (théorème spectral).
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de $S = A^tA$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à $\lambda$. On a alors $A^tAX = \lambda X$, donc

$$X^tA^tAX = \lambda X^tX.$$

Or,

$$X^\top A^\top AX = ({}^\top AX)AX = \|AX\|^2 \qquad \text{et} \qquad X^\top X = \|X\|^2,$$

pour la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi on a :

$$\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

et comme $\|X\| \neq 0$ (puisque $X$ est un vecteur propre, donc est non nul), on a donc

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Donc les valeurs propres de $A^\top A$ sont positives ou nulles.
Donc $S = A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

(b) Comme $A^\top A$ est symétrique réelle, le théorème spectral donne qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top A = PDP^{-1}$$

où $D$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1$, …, $\lambda_n$.
On a, en passant à la trace dans l'égalité précédente :

$$\mathrm{tr}(A^\top A) = \mathrm{tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{tr}(D)$$

(car deux matrices semblables ont même trace). Or,

$$\mathrm{tr}(A^\top A) = \sum_{j=1}^{n} (A^\top A)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (A^\top)_{j,i} A_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$$

et comme $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$\mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

En reportant, on a bien l'égalité voulue.

(c) Si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors toutes les valeurs propres de $S$ sont réelles et strictement positives. Donc $0 \notin \mathrm{Sp}(S)$, donc $S$ est inversible. Par conséquent,

$$0 \neq \det(S) = \det(A^\top A) = \det(A^\top)\det(A) = \det(A)^2,$$

et donc $\det(A) \neq 0$, autrement dit $A$ est inversible.
Réciproquement, si $A$ est inversible, $A^\top$ aussi, puis par produit, $S$ aussi. Donc $0 \notin \mathrm{Sp}(S)$.
La question 1a donne que les valeurs propres de $S$ sont toutes réelles et positives. Comme elles ne sont pas nulles, on a alors que les valeurs propres de $S$ sont toutes réelles et strictement positives. Donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
**Conclusion :**

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ est inversible.}$$

2. Comme $S$ est une matrice symétrique réelle, le théorème spectral donne qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$S = PDP^\top$$

avec $D$ une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls, puisque ce sont des valeurs propres de $S$ (et car $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$).
On a :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} S &= PDP^\top \\ &= P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top \\ &= \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:A} \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:A} \end{aligned}$$

car $P^\top P = I_n$, puisque $P$ est une matrice orthogonale. On a donc $S = A^2$, avec

$$A^\top = {}^t\left({}^\top P^\top\right) \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = A,$$

donc

$$S = A^\top A.$$

**Correction de l'exercice 9.31** **Énoncé p. 7**

Le théorème du rang donne

$$\operatorname{rg}(A) = n - \dim\left(\operatorname{Ker}(A)\right) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(A^\top A) = n - \dim\left(\operatorname{Ker}(A^\top A)\right),$$

car $A$ et $A^\top A$ ont le même nombre $n$ de colonnes. Donc

$$\operatorname{rg}\left(A^\top A\right) = \operatorname{rg}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \dim\left(\operatorname{Ker}(A)\right) = \dim\left(\operatorname{Ker}(A^\top A)\right) \quad \Leftarrow \quad \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^\top A).$$

(on fait attention : le dernier symbole est celui d'une implication, pas d'une équivalence !). Montrons donc l'égalité de ces deux noyaux.
$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \operatorname{Ker}(A)$, on a alors $AX = 0_{n,1}$, donc :

$$A^\top AX = A^\top(AX) = A^\top 0_{n,1} = 0_{n,1},$$

donc $X \in \operatorname{Ker}(A^\top A)$. On a donc

$$\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^\top A).$$

$\boxed{\supset}$ Soit $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, on a alors $A^\top AX = 0_{n,1}$, donc :

$$\|AX\|^2 = ({}^\top AX)AX = X^\top A^\top AX = X^\top (A^\top AX) = X^\top 0_{n,1} = 0,$$

où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme c'est une norme, on en déduit $AX = 0_{n,1}$, donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Donc

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) \subset \mathrm{Ker}(A).$$

Par double inclusion, on a

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A),$$

puis avec ce qui précède,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A).$$

**Correction de l'exercice 9.32** **Énoncé p. 7**

**1)** Existence :
Comme $A$ est une matrice symétrique réelle, par le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PDP^\top$$

avec $D$ une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls puisque ce sont des valeurs propres de $A$ (et qu'elles sont positives ou nulles puisque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$).
On a :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} A &= PDP^\top \\ &= P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top \\ &= \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:C} \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:C} \end{aligned}$$

car $P^\top P = I_n$. On a donc $A = C^2$, avec

$$C^\top = ({}^\top P^\top) \, {}^t \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = C,$$

donc $C$ est symétrique.
Enfin, $P$ étant orthogonale, $C$ est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$, donc ses valeurs propres sont les réels $\sqrt{d_1}$, …, $\sqrt{d_n}$, qui sont tous positifs.
Donc la matrice $C$ vérifie

$$A = C^2$$

et $C$ est symétrique avec toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$. Donc $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Donc cette matrice $C$ convient. D'où l'existence.
Unicité :
Montrons d'abord le cas diagonal :
On a $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i \geq 0$), et $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$, et soit une matrice $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc symétrique réelle à valeurs propres toutes positives, telle que $N^2 = D$. Alors on veut montrer $N = \Delta$.
Commençons par remarquer que, par construction, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(D)$, on a

$$\sqrt{\lambda} \in \mathrm{Sp}(\Delta) \qquad \text{et} \qquad E_\lambda(D) = E_{\sqrt{\lambda}}(\Delta)$$

(*si on note $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $E_\lambda(D)$ est l'espace engendré par les $E_i$ tels que $D_{i,i} = \lambda$, et $E_{\sqrt{\lambda}}(\Delta)$ est l'espace engendré par les $E_i$ tels que $\Delta_{i,i} = \sqrt{\lambda}$, donc ce sont les mêmes puisque, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$ et $D_{i,i} = \Delta_{i,i}^2$*).
Puis, la matrice $N$ est symétrique réelle, donc diagonalisable : il existe $(X_1, \dots, X_n) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^n$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$NX_i = \alpha_i X_i.$$

Les $\alpha_i$ (pour $i \in [\![1, n]\!]$) sont alors des valeurs propres de $N$, donc sont des réels positifs.
Puis, $N^2 = D$, donc pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\alpha_i^2 X_i = N^2 X_i = DX_i,$$

autrement dit $\alpha_i^2$ est une valeur propre de $D$ et $X_i \in E_{\alpha_i^2}(D) = E_{\sqrt{\alpha_i^2}}(\Delta)$. Comme $\alpha_i \geq 0$, on a $\sqrt{\alpha_i^2} = \alpha_i$, et donc $X_i \in E_{\alpha_i}(\Delta)$, soit

$$\Delta X_i = \alpha_i X_i = NX_i.$$

Donc les applications linéaires

$$f : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto NX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad g : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto \Delta X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

(ce sont les applications canoniquement associées à $N$ et $\Delta$) coïncident sur une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (à savoir $(X_1, \dots, X_n)$), donc sont égales, donc ont même matrice dans la base canonique. Autrement dit, on a bien $N = \Delta$.
D'où l'unicité dans le cas diagonal.
Cas général : reprenons les notations de la démonstration de l'existence : on a

$$A = PDP^\top, \qquad C = P\Delta P^\top \qquad \text{et} \qquad C^2 = A$$

avec $P$ matrice orthogonale. Soit $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc symétrique réelle avec toutes les valeurs propres positives, telle que

$$R^2 = A.$$

Notons $N = P^\top RP$. Alors les règles $({}^\top TU) = U^\top T^\top$ et $({}^\top T^\top) = T$ (valables pour toutes matrices $T$ et $U$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) donnent :

$$N^\top = ({}^\top P^\top RP) = P^\top R^\top ({}^\top P^\top) = P^\top RP = N$$

(car $R$ est symétrique), donc $N$ est une matrice symétrique réelle. Puis, la matrice $P$ est orthogonale, donc $P^\top = P^{-1}$, donc

$$N = P^{-1}RP \qquad \text{puis} \qquad N^2 = P^{-1}RPP^{-1}RP = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = P^{-1}(PDP^\top)P = D$$

(car $P^\top P = I_n$, puisque $P$ est orthogonale).
Enfin, $N = P^{-1}RP$, donc $N$ et $R$ sont semblables, donc

$$\mathrm{Sp}(N) = \mathrm{Sp}(R).$$

Comme toutes les valeurs propres de $R$ sont positives, on en déduit que toutes les valeurs propres de $N$ sont positives.
L'étude du cas diagonal donne alors $N = \Delta$. Et donc

$$\Delta = P^{-1}RP \qquad \text{soit} \qquad R = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^\top = C.$$

D'où l'unicité.
**2)** On a $P$ orthogonale, donc $P^\top = P^{-1}$.
On a

$$A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs deux à deux distinctes de sorte que

$$\{d_1, \dots, d_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\},$$

et notons $(L_1, \dots, L_r)$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. On a alors, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$L_i \in \mathbb{R}_{r-1}[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Notons $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} L_i.$$

On a alors

$$Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

(car $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par combinaison linéaire), et pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}.$$

Puis, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $d_j = \lambda_i$, et donc

$$Q(d_j) = Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{d_j}.$$

Ainsi,

$$Q(A) = PQ(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} Q(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q(d_n) \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}P^{-1} = C.$$

Donc le polynôme $Q$ convient.

**Correction de l'exercice 9.33** **Énoncé p. 7**

Le fait que $\phi$ va de $E$ dans $E$ est immédiat : si $X \in E$,$X^\top$ est encore une matrice carrée de taille $n$, et comme $A \in E$, et que $E$ est stable par produit,

$$AX^\top A \in E.$$

$\phi$ est linéaire : pour tout $(X, Y) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en utilisant que la transposition est linéaire, et la bilinéarité du produit matriciel, on a

$$\phi(\lambda X + Y) = A({}^\top\lambda X + Y)A = A(\lambda X^\top + Y^\top)A = \lambda AX^\top A + AY^\top A = \lambda\phi(X) + \phi(Y)$$

$\phi$ est autoadjoint : pour tout $(X, Y) \in E^2$,

$$\langle \phi(X),\, Y\rangle = \operatorname{tr}\left(\phi(X)^\top Y\right) = \operatorname{tr}\left(({}^\top AX^\top A)Y\right) = \operatorname{tr}\left(A^\top({}^\top X^\top)A^\top Y\right) = \operatorname{tr}\left(A^\top XA^\top Y\right)$$

et

$$\langle X,\, \phi(Y)\rangle = \operatorname{tr}\left(X^\top\phi(Y)\right) = \operatorname{tr}\left(X^\top AY^\top A\right)$$

Or, une matrice et sa transposée ont même trace, et comme $\left(A^\top XA^\top Y\right)^\top = Y^\top\left(A^\top\right)^\top X^\top\left(A^\top\right)^\top = Y^\top AX^\top A$, on en déduit

$$\langle \phi(X),\, Y\rangle = \operatorname{tr}\left(Y^\top AX^\top A\right).$$

En notant $P = Y^\top A$ et $Q = X^\top A$, la propriété $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$ donne

$$\langle \phi(X),\, Y\rangle = \operatorname{tr}\left(X^\top AY^\top A\right) = \langle X,\, \phi(Y)\rangle\,.$$

Donc $\phi$ est bien autoadjoint.

**Deuxième approche pour montrer que $\phi$ est autoadjoint :** comme la base canonique $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est orthonormée pour le produit scalaire considéré, cela revient à montrer que la matrice de $\phi$ dans cette base est symétrique, autrement dit que pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$, le coefficient de $\phi(E_{i,j})$ selon $E_{k,\ell}$ est égal au coefficient de $\phi(E_{k,\ell})$ selon $E_{i,j}$.

Or, le coefficient de $\phi(E_{i,j})$ selon $E_{k,\ell}$ est

$$\left(\phi(E_{i,j})\right)_{k,\ell} = \left(AE_{i,j}^\top A\right)_{k,\ell} = \sum_{p=1}^{n} a_{k,p}\left(E_{i,j}^\top A\right)_{p,\ell} = \sum_{p=1}^{n} a_{k,p}\sum_{q=1}^{n}\left(E_{i,j}^\top\right)_{p,q}a_{q,\ell} = \sum_{p=1}^{n} a_{k,p}\sum_{q=1}^{n}\left(E_{i,j}\right)_{q,p}a_{q,\ell} = a_{k,j}a_{i,\ell}$$

car $\left(E_{i,j}\right)_{q,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } q=i \text{ et } p=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
En échangeant le rôle de $i$ et $k$, et de $j$ et $\ell$, le coefficient de $\phi(E_{k,\ell})$ selon $E_{i,j}$ est $a_{i,\ell}a_{k,j}$, et donc c'est bien égal.

**Correction de l'exercice 9.34** **Énoncé p. 7**

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car symétrique réelle. De plus $\operatorname{rg}(A) = 1$ donc

$$\boxed{\dim(E_0(A)) = n-1}$$

par le théorème du rang.
Comme $A$ est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec $D = P^{-1}AP$ diagonale, et sur la diagonale, il y a les valeurs propres de $A$, autant de fois que leur multiplicité, donc que la dimension de l'espace propre associé (puisque $A$ est diagonalisable). Donc, sur la diagonale de $D$, il y a $n-1$ fois 0. Notons $\lambda$ le dernier coefficient de $D$, alors

$$\lambda = \lambda + (n-1)\times 0 = \operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A) = n$$

(car deux matrices semblables ont même trace).
Donc $A$ est semblable à

$$D = \operatorname{diag}(0,\dots,0,n).$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{0,n\}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\dim\left(E_n(A)\right) = 1}$$

(car deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres et mêmes dimensions d'espaces propres).
On a

$$\boxed{E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ x_1+\dots+x_n = 0\right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

et

$$\boxed{E_n(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

En effet, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie

$$AU = nU$$

car la somme de chaque ligne de $A$ fait $n$, donc $U \in E_n(A)$. Et comme $U \neq 0_{n,1}$ et $\dim\left(E_n(A)\right) = 1$, on en déduit que $(U)$ est une base de $E_n(A)$.

**Correction de l'exercice 9.35** **Énoncé p. 7**

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x$ un vecteur propre associé. Alors

$$0 \leq \langle u(x),\, x\rangle = \langle \lambda x,\, x\rangle = \lambda \langle x,\, x\rangle = \lambda \|x\|^2 .$$

Or, $\|x\|^2 > 0$ car $x \neq \vec{0}$ (puisque c'est un vecteur propre). Donc

$$\lambda = \frac{\langle u(x),\, x\rangle}{\|x\|^2} \geq 0$$

(comme quotient de deux réels positifs). Ainsi $\lambda \geq 0$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Comme $u$ est autoadjoint, le théorème spectral donne que $u$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $E$ : il existe donc $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de $E$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(u)$, donc $\lambda_i \geq 0$ (par hypothèse).
Soit $x \in E$, il existe donc $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et alors, par linéarité de $u$,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i .$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on a alors :

$$\langle u(x),\, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i,\, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \lambda_i \left\langle e_i,\, e_j\right\rangle .$$

Or $\left\langle e_i,\, e_j\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, car $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée. On a donc :

$$\langle u(x),\, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} x_i^2 \geq 0.$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien $(i)$.

**Remarque**

C'est la version endomorphisme de la propriété

« $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $S$ est symétrique et $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ »

vue en cours.

**Correction de l'exercice 9.36** **Énoncé p. 7**

**1)** $f$ est autoadjoint, donc par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ formée de vecteurs propres de $f$. Donc, pour $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ avec $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Puis, pour $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et par linéarité de $f$, on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i,$$

et donc (comme $B$ est orthonormée)

$$\langle f(x),\, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i,\, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \lambda_i x_j \underbrace{\langle e_i,\, e_j\rangle}_{=\begin{cases}0 & \text{si } i \neq j\\ 1 & \text{si } i = j\end{cases}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda \leq \lambda_i \leq \mu$, et comme $x_i^2 \geq 0$,

$$\lambda x_i^2 \leq \lambda_i x_i^2 \leq \mu x_i^2.$$

En sommant, on a alors

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \mu x_i^2 = \mu \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Or, comme $B$ est orthonormée, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, donc on obtient bien, pour tout $x \in E$,

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle f(x),\, x\rangle \leq \mu \|x\|^2.$$

**2)** Munissons $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel, pour lequel la base canonique est orthonormée, et notons $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à $A$. Comme $A$ est symétrique et que la base canonique est orthonormée, $f$ est autoadjoint, et ses valeurs propres sont celles de $A$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle f(X),\, X\rangle = (AX)^\top X = X^\top A^\top X = X^\top A X \qquad \text{et} \qquad \|X\|^2 = X^\top X,$$

donc la question 1 donne

$$\lambda X^\top X \leq X^\top A X \leq \mu X^\top X.$$

**Autre rédaction pour la question 2 :** $A$ est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale avec $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. Alors

$$X^\top A X = X^\top P D P^\top X = \left(P^\top X\right)^\top D P^\top X = Y^\top D Y$$

en notant $Y = P^\top X$. Puis, comme $P$ est orthogonale, $PP^\top = I_n$, et donc

$$Y^\top Y = X^\top ({}^\top P^\top) P^\top X = X^\top P P^\top X = X^\top I_n X = X^\top X.$$

Notons alors $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a alors

$$Y^\top D Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \qquad \text{et} \qquad Y^\top Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \leq \lambda_i \leq \mu$, et comme $y_i^2 \geq 0$,

$$\lambda y_i^2 \leq \lambda_i y_i^2 \leq \mu y_i^2.$$

En sommant, on a alors

$$\lambda X^\top X = \lambda Y^\top Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = Y^\top D Y = X^\top A X \leq \sum_{i=1}^{n} \mu y_i^2 = \mu Y^\top Y = \mu X^\top X.$$

## Correction de l'exercice 9.37

Énoncé p. 7

Par définition de la trace, on a

$$\operatorname{tr}(S^\top S) = \sum_{j=1}^{n} (S^\top S)_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (S^\top)_{j,i} S_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} s_{i,j}^2.$$

Or, comme $S$ est orthogonale, $S^\top S = I_n$, donc

$$\operatorname{tr}(S^\top S) = \operatorname{tr}(I_n) = n.$$

D'où l'égalité.

**Remarque**

On peut aussi dire que $\sum_{i=1}^{n} s_{i,j}^2 = 1$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, puisque c'est le carré de la norme du vecteur formé par la $j$-ième colonne de $S$, qui est unitaire puisque $S$ est orthogonale, puis on somme $n$ fois 1.

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la formule du produit matriciel donne :

$$X^\top S X = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(X^\top)_{1,i}}_{=1} (SX)_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} \underbrace{X_{j,1}}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{i,j},$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$),

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} \right| = \left| X^\top S X \right| = |\langle X, SX \rangle| \leq \|X\| \, \|SX\| .$$

Or, comme $S$ est orthogonale, $\|SX\| = \|X\|$, donc

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} \right| \leq \|X\|^2 = 1^2 + \cdots + 1^2 = n.$$

## Correction de l'exercice 9.38

Énoncé p. 7

**1)** Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$,

$$1 = \left\| x_i - x_j \right\|^2 = \|x_i\|^2 + \left\| x_j \right\|^2 - 2 \left\langle x_i, x_j \right\rangle = 1 + 1 - 2 \left\langle x_i, x_j \right\rangle ,$$

donc

$$\boxed{\langle x_i,\, x_j\rangle = \frac{1}{2}}.$$

**2)** $A$ symétrique (par symétrie du produit scalaire) et à coefficients réels, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si on note

$$J = (1)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$A = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J.$$

Or, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est clairement vecteur propre de $J$ associé à $n$ (car la somme de chaque ligne de $J$ fait $n$) :

$$JX = nX$$

(et $X \neq 0_{n,1}$), donc

$$\dim\left(E_n(J)\right) \geq 1,$$

et comme $J$ est de rang 1, 0 est valeur propre de $J$ avec

$$\dim\left(E_0(J)\right) = n - 1$$

(par le théorème du rang). Comme

$$\dim\left(E_n(J)\right) + \dim\left(E_0(J)\right) \geq 1 + (n-1) = n = \text{taille de } J,$$

on en déduit que $J$ est diagonalisable (mais vu que $J$ est symétrique réelle, ce n'est pas surprenant), et surtout que

$$\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\},$$

avec donc

$$\dim\left(E_n(J)\right) = 1.$$

Par conséquent, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}JP = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, n).$$

Alors

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}P^{-1}I_nP + \frac{1}{2}P^{-1}JP = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}\mathrm{diag}(0,\dots,0,n) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right).$$

Donc

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

$0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, donc $A$ est inversible.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, si $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \vec{0}$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, par bilinéarité du produit scalaire, puis par définition du produit matriciel,

$$0 = \left\langle x_i,\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left\langle x_i,\, x_j\right\rangle = (AX)_{i,1}$$

où $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Donc

$$AX = 0_{n,1},$$

et comme $A$ est inversible,

$$X = A^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1},$$

et donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

**Correction de l'exercice 9.39** **Énoncé p. 8**

La matrice $A$ est symétrique réelle, donc le théorème spectral donne qu'il existe une matrice orthogonale $P$ telle que $P^{-1}AP = P^{\top}AP$ soit diagonale. Notons $d_i$ le $i$-ième coefficient diagonal (réel) de $P^{-1}AP$, donc

$$D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix},$$

alors $d_i$ est une valeur propre de $A$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}.$$

**1)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $A^k = I_n$, alors

$$D^k = \left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}I_nP = I_n,$$

donc $d_i^k = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, comme $d_i$ est réel, si $k$ est impair, $d_i = 1$ (et donc $D = I_n$, donc $A = I_n$), et si $k$ est pair, $d_i \in \{1, -1\}$, et donc $d_i^2 = 1$ (et donc $D^2 = I_n$).
Dans les deux cas, on a $D^2 = I_n$, donc

$$P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = D^2 = I_n,$$

et en multipliant par $P$ à gauche, $P^{-1}$ à droite, il vient

$$A^2 = PI_nP^{-1} = I_n.$$

**2)**Supposons $A^k = 0_n$, alors

$$D^k = \left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}0_nP = 0_n,$$

donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i^k = 0$, soit $d_i = 0$. Donc

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0, \dots, 0) = 0_n,$$

et donc en multipliant par $P$ à gauche, et $P^{-1}$ à droite, il vient

$$A = P0_nP^{-1} = 0_n.$$

**Correction de l'exercice 9.40** **Énoncé p. 8**

**1)** Comme $f$ est linéaire, et par bilinéarité du produit scalaire, on a : pour tout $(u, v) \in E^2$,

$$0 = \langle u+v,\, f(u+v)\rangle = \langle u+v,\, f(u)+f(v)\rangle = \underbrace{\langle u,\, f(u)\rangle}_{=0} + \langle u,\, f(v)\rangle + \underbrace{\langle v,\, f(v)\rangle}_{=0} + \langle v,\, f(u)\rangle\,,$$

donc

$$\langle f(u),\, v\rangle = -\langle u,\, f(v)\rangle\,.$$

**2a)** Soit $u$ un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$, alors

$$\lambda \underbrace{\langle u,\, u\rangle}_{=\|u\|^2} = \langle \lambda u,\, u\rangle = \langle f(u),\, u\rangle = -\langle u,\, f(u)\rangle = -\langle u,\, \lambda u\rangle = -\lambda \underbrace{\langle u,\, u\rangle}_{=\|u\|^2},$$

donc

$$2\lambda \|u\|^2 = 0,$$

et comme $u$ est un vecteur propre, $u \neq \vec{0}$ et donc $\|u\| \neq 0$, donc

$$\lambda = 0.$$

**Analyse :** si $f$ était diagonalisable, il existerait une base $B$ telle que la matrice de $f$ dans $B$ serait diagonale, et les coefficients diagonaux seraient des valeurs propres de $f$, donc seraient nuls. Donc on aurait

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0) = 0_n.$$

Or, si la matrice de $f$ est nulle, c'est que $f = 0$.
**Synthèse :** réciproquement, si $f = 0$, il vérifie bien la relation « pour tout $u \in E$, $\langle f(u),\, u\rangle = 0$ », et $f$ est diagonalisable.
**Conclusion :** donc, parmi les endomorphismes étudiés, seul l'endomorphisme nul est diagonalisable.
**2b)** Pour tout $(x, y) \in E^2$, grâce à la question 1 (en posant $u = f(x)$ et $v = y$), on a

$$\langle f \circ f(x),\, y\rangle = -\langle f(x),\, f(y)\rangle\,.$$

Puis, toujours grâce à la question 1 (en posant ce coup-ci $u = x$ et $v = f(y)$), on a

$$-\langle f(x),\, f(y)\rangle = \langle x,\, f \circ f(y)\rangle\,.$$

Donc, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\langle f \circ f(x),\, y\rangle = \langle x,\, f \circ f(y)\rangle\,.$$

Donc $f \circ f$ est autoadjoint, donc diagonalisable.
Si on prend $y = x$ dans l'égalité précédente, pour tout $x \in E$, on a

$$\langle f \circ f(x),\, x\rangle = -\langle f(x),\, f(x)\rangle = -\|f(x)\|^2\,.$$

Or, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ f)$, il existe $x \in E$ non nul avec $f \circ f(x) = \lambda x$, et donc

$$\langle f \circ f(x),\, x\rangle = \langle \lambda x,\, x\rangle = \lambda \langle x,\, x\rangle = \lambda \|x\|^2\,.$$

Comme $x \neq \vec{0}$, on a $\|x\| \neq 0$, et donc

$$\lambda = -\frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0.$$

**3)** Montrons $\mathrm{Ker}(f) \subset \big(\mathrm{Im}(f)\big)^\perp$ : soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $v \in E$ tel que $y = f(v)$, et donc

$$\langle u,\, y\rangle = \langle u,\, f(v)\rangle = -\langle f(u),\, v\rangle = -\left\langle \vec{0},\, v\right\rangle = 0$$

(car $u \in \mathrm{Ker}(f)$), soit $u \perp y$. Comme c'est vrai pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, on a $u \in \mathrm{Im}(f)^\perp$. Comme c'est vrai pour tout $u \in \mathrm{Ker}(f)$, on a

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \big(\mathrm{Im}(f)\big)^\perp.$$

Par le théorème du rang, on a

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Comme $E$ est un espace euclidien, on a

$$\dim\big(\big(\mathrm{Im}(f)\big)^\perp\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big),$$

donc

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim\big(\big(\mathrm{Im}(f)\big)^\perp\big).$$

Une inclusion et l'égalité des dimensions donne bien l'égalité :

$$\mathrm{Ker}(f) = \big(\mathrm{Im}(f)\big)^\perp.$$

**4)** Si on prend une base orthonormée $B_1$ de $\mathrm{Ker}(f)$, et une base orthonormée $B_2$ de $\mathrm{Im}(f)$, grâce à la question 3 et au fait que $F \oplus F^\perp = E$ pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ (car $E$ est euclidien), on a que la réunion $B = B_1 \sqcup B_2$ est une base de $E$ (car $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)^\perp$), formée de vecteurs de norme 1 (car tous les vecteurs de $B_1$ et $B_2$ le sont), et orthogonale, car si $(u, v) \in B^2$ avec $u \neq v$, quatre cas sont possibles :

- si $u$ et $v$ dans $B_1$, alors $u \perp v$ car $B_1$ orthogonale,
- si $u$ et $v$ dans $B_2$, alors $u \perp v$ car $B_2$ orthogonale,
- si $u \in B_1$ et $v \in B_2$, alors $u \in \mathrm{Ker}(f) = \big(\mathrm{Im}(f)\big)^\perp$ et $v \in \mathrm{Im}(f)$, donc $u \perp v$,
- si $v \in B_1$ et $u \in B_2$, alors $v \in \mathrm{Ker}(f) = \big(\mathrm{Im}(f)\big)^\perp$ et $u \in \mathrm{Im}(f)$, donc $u \perp v$.

Donc $B$ convient.

**5a)** Notons $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Par construction, pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Mais, comme la base $B$ est orthonormée, les coordonnées d'un vecteur s'obtiennent grâce au produit scalaire, et on a donc, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$a_{i,j} = \left\langle f(e_j),\, e_i\right\rangle,$$

et donc

$$a_{j,i} = \left\langle f(e_i),\, e_j\right\rangle = \left\langle e_j,\, f(e_i)\right\rangle.$$

Le résultat de la question 1 donne alors

$$a_{i,j} = -a_{j,i}$$

pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, donc $A$ est antisymétrique.
**5b)** Soit $(u, v) \in E^2$. Notons

$$U = \mathrm{Mat}_B(u) \qquad \text{et} \qquad V = \mathrm{Mat}_B(v)$$

les matrices-colonnes des coordonnées de $u$ et $v$ dans la base $B$.
Comme de plus $A = \mathrm{Mat}_B(f)$, on a alors

$$AU = \mathrm{Mat}_B\big(f(u)\big) \qquad \text{et} \qquad AV = \mathrm{Mat}_B\big(f(v)\big).$$

Alors, comme la base $B$ est orthonormée, on peut exprimer le produit scalaire à l'aide des matrices coordonnées : on a

$$\langle f(u),\, v\rangle = ({}^\top AU)V = U^\top A^\top V.$$

Comme $A$ est antisymétrique, $A^\top = -A$, et donc

$$\langle f(u),\, v\rangle = -U^\top(AV) = -\langle u,\, f(v)\rangle .$$

Si $u = v$, on a donc $\langle u,\, f(u)\rangle = -\langle f(u),\, u\rangle$, et donc

$$\langle u,\, f(u)\rangle = 0.$$

C'est vrai pour tout $u \in E$, donc $f$ vérifie bien la condition étudiée dans cet exercice.
**6)** 0 est la seule valeur propre réelle possible de $f$, donc 1 et $-1$ ne le sont pas, donc

$$\mathrm{Id}_E + f \in \mathrm{GL}(E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Id}_E - f \in \mathrm{GL}(E).$$

Donc l'endomorphisme

$$v = \big(\mathrm{Id}_E - f\big) \circ \big(\mathrm{Id}_E + f\big)^{-1}$$

est un isomorphisme, comme composée d'isomorphismes.
Alors

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{SO}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad v \text{ est une isométrie vectorielle et } \det(v) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (I_n - M)(I_n + M)^{-1} \text{ est orthogonale et son déterminant vaut } 1 \end{aligned}$$

(où $M$ matrice de $f$ dans une base **orthonormée**, qui vérifie donc $M^\top = -M$ d'après la question précédente).
Or,

$$\det(I_n - M) = \det\big({}^\top I_n - M)\big) = \det(I_n + M)$$

(puisque $M^\top = -M$) (et c'est non nul grâce au début de la question), donc $\det(v) = 1$.
Enfin,

$$\begin{aligned} \big((I_n - M)(I_n + M)^{-1}\big)^\top &= \big((I_n + M)^{-1}\big)^\top({}^\top I_n - M) \\ &= \big({}^\top I_n + M)\big)^{-1}({}^\top I_n - M) \\ &= (I_n - M)^{-1}(I_n + M) \\ &= \big((I_n + M)^{-1}(I_n - M)\big)^{-1} \end{aligned}$$

(puisque $M^\top = -M$). Pour conclure que $(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ est orthogonale, il suffit de remarquer que $(I_n - M)$ et $(I_n + M)^{-1}$ commutent.
Or, pour $A$ une matrice carrée inversible et $B$ une matrice carrée quelconque, si $AB = BA$, alors en multipliant par $A^{-1}$ à gauche et à droite, on a $BA^{-1} = A^{-1}B$. Donc, si $A$ et $B$ commutent, alors $A^{-1}$ et $B$ commutent.
Puis, $(I_n + M)$ et $(I_n - M)$ commutent (c'est direct), donc $(I_n + M)^{-1}$ et $(I_n - M)$ commutent aussi, ce qui conclut.

**Correction de l'exercice 9.41** **Énoncé p. 8**

**1)** Par symétrie du produit scalaire, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$,

$$a_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle = \langle u_j, u_i \rangle = a_{j,i},$$

donc $A$ est symétrique.
De plus, un produit scalaire est un réel, donc $A$ est à coefficients réels.
Puis, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a

$$X^\top AX = \sum_{j=1}^{p} x_j (AX)_j = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} x_i = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} x_i x_j \langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i u_i, \sum_{j=1}^{p} x_j u_j \right\rangle = \left\| \sum_{j=1}^{p} x_j u_j \right\|^2 \geq 0$$

par bilinéarité du produit scalaire.
Donc $A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
**2)** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0_{p,1}$, puis

$$0 = X^\top 0_{p,1} = X^\top AX = \left\| \sum_{j=1}^{p} x_j u_j \right\|^2$$

par le calcul précédent.
Donc

$$\sum_{j=1}^{p} x_j u_j = \vec{0}.$$

Réciproquement, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Si

$$\sum_{j=1}^{p} x_j u_j = \vec{0},$$

alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{p} x_j \langle u_j, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{p} x_j u_j, u_i \right\rangle = \langle \vec{0}, u_i \rangle = 0$$

par linéarité à gauche du produit scalaire. Donc $AX = 0_{p,1}$, soit

$$X \in \mathrm{Ker}(A).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ , \ \sum_{j=1}^{p} x_j u_j = \vec{0} \right\}.$$

Et donc

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{0_{p,1}\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{la famille } (u_1, \dots, u_p) \text{ est libre.}$$

**3)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Soit, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $u_i = X^{i-1}$. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$,

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1}\,\mathrm{d}t = \left[ \frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+j-1} = H_{i,j},$$

donc la question 1 donne que $H \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, et comme la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre (c'est la base canonique de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$), la question 2 donne que la matrice $H$ est inversible.
Donc $0 \notin \mathrm{Sp}(H)$, et comme les valeurs propres de $H$ sont toutes positives, on en déduit qu'elles sont toutes strictement positives. Donc on a bien $H \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

## Correction de l'exercice 9.42

Énoncé p. 8

En utilisant les règles sur la transposition, on a

$$A = ({}^{\top}A^{\top}) = ({}^{\top}A^2) = (A^{\top})^2 = (A^2)^2 = A^4.$$

Comme $A$ est inversible, on obtient (en multipliant par $A^{-1}$) :

$$I_n = A^3 = AA^2 = AA^{\top},$$

donc $A$ est orthogonale.

## Correction de l'exercice 9.43

Énoncé p. 8

Comme $E$ est euclidien, la question revient à montrer que

$$\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^{\perp}.$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, alors $f(x) = x$, et soit $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$, alors il existe $z \in E$ avec $y = f(z) - z$. Puis, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) - z \rangle = \langle x, f(z) \rangle - \langle x, z \rangle = \langle f(x), f(z) \rangle - \langle x, z \rangle = 0$$

car $f$ est une isométrie vectorielle.
Donc

$$\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \subset \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^{\perp}.$$

Puis, le théorème du rang donne

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)\right) = \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)\right).$$

Et, comme $E$ est euclidien,

$$\dim\left(\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)\right).$$

Par conséquent,

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{Id}_E\right)\right)=\dim\left(\operatorname{Im}\left(f-\mathrm{Id}_E\right)^{\perp}\right).$$

On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions. On peut alors conclure :

$$\operatorname{Ker}\left(f-\mathrm{Id}_E\right)=\operatorname{Im}\left(f-\mathrm{Id}_E\right)^{\perp}.$$

**Correction de l'exercice 9.44** **Énoncé p. 8**

1. On élève au carré l'égalité $M^{\top}=M^2$, et on obtient

$$M^4=(M^2)^2=(M^{\top})^2=({}^{\top}M^2)=({}^{\top}M^{\top})=M.$$

2. On passe au déterminant dans la relation initiale :

$$\det(M^{\top})=\det(M^2)=\det(M)^2,$$

or

$$\det(M^{\top})=\det(M),\qquad\text{donc}\qquad\det(M)=\det(M)^2,$$

donc

$$\det(M)=0\qquad\text{ou}\qquad\det(M)=1.$$

On sait que toute matrice admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.
Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de $M$ et $X\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé, donc

$$X\neq 0_{2,1}\qquad\text{et}\qquad MX=\lambda X.$$

Alors

$$M^2X=M\times MX=M\times\lambda X=\lambda MX=\lambda\cdot\lambda X=\lambda^2X,$$

et de même,

$$M^3X=MM^2X=M\lambda^2X=\lambda^3X,$$

et enfin

$$M^4X=MM^3X=M\lambda^3X=\lambda^4X.$$

Alors

$$0_{2,1}=0_2\times X=(M^4-M)X=M^4X-MX=\lambda^4X-\lambda X=(\lambda^4-\lambda)X,$$

donc $\lambda^4-\lambda=0$, puisque $X\neq 0_{2,1}$. Or,

$$\lambda^4=\lambda\quad\Leftrightarrow\quad\lambda\in\{0,1,j,j^2\}$$

où $j=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On a donc

$$\boxed{\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)\subset\{0,1,j,j^2\}},\qquad\text{et}\qquad\boxed{\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(M)\subset\{0,1\}}.$$

**Remarque**

Pour $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, il ne peut sûrement pas y avoir égalité, puisque $M$ est de taille 2, donc a **au plus** deux valeurs propres distinctes.

3. Si l'on suppose $M$ inversible : multiplions l'égalité $M^4 = M$ par $M^{-1}$, on a

$$M^3 = I_2.$$

Or

$$M^3 = M^2 \times M = M^\top M,$$

donc on a

$$M^\top M = I_2,$$

autrement dit, $M$ est une matrice orthogonale.
Comme de plus $\det(M) = 1$ (car non nul, puisque $M$ est supposée inversible), on a bien

$$M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

$M$ est donc la matrice d'une rotation d'angle $\theta$ (à déterminer), soit

$$M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Faisons un raisonnement par analyse/synthèse :
**Analyse :** supposons que $M$ soit une telle matrice. Alors [a]

$$M^3 = R(\theta)^3 = R(3\theta)$$

est la matrice d'une rotation d'angle $3\theta$, mais comme $M^3 = I_2$, on a aussi que c'est une rotation d'angle 0, donc

$$R(3\theta) = R(0),$$

soit

$$3\theta = 0 \qquad \text{modulo } 2\pi,$$

donc

$$\boxed{\theta \text{ est un multiple de } \tfrac{2\pi}{3}}.$$

On obtient alors que

- $M = R(0) = I_2$ (si $\theta = 0$ modulo $2\pi$), ou
- $M = R\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (si $\theta = \frac{2\pi}{3}$ modulo $2\pi$) ou
- $M = R\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (si $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ modulo $2\pi$).

**Synthèse :** réciproquement une telle matrice vérifie

$$M^\top = M^2.$$

Cela peut se voir par calcul direct, sinon on dit : $M = R(\theta)$, donc (par le cours, $M$ est une matrice orthogonale, et)

$$M^\top = M^{-1} = R(-\theta), \qquad M^2 = R(2\theta),$$

et l'on a bien

$$-\theta = 2\theta \qquad \text{modulo } 2\pi$$

si $3\theta = 0$ modulo $2\pi$.
**Conclusion :** dans ce cas, on voit que géométriquement, les solutions sont

l'identité, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$.

**Remarque**

Cela ne dépend pas de l'orientation choisie, car un changement d'orientation change le signe de l'angle de la rotation, et ici cela laisse stable l'ensemble des solutions (par contre, ça échange deux solutions).

4. Si $f$ n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre de $f$ donc de $M$. Il existe donc $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec

$$MU = 0_{2,1} \qquad \text{et} \qquad U \neq 0_{2,1}.$$

Donc la famille $(U)$ est libre, et par le théorème de la base incomplète, on peut trouver $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $(U, V)$ soit une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (puisque $\dim\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) = 2$). Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$MV = aU + bV$$

(et $MU = 0 \cdot U + 0 \cdot V$). Donc la matrice de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à $M$

— dans la base $(U, V)$ est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

— dans la base canonique est $M$,

donc $M$ est bien semblable à $T$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (deux matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes sont semblables).
Enfin, on a $T$ triangulaire, donc ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres, donc

$$b \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$$

(cette dernière égalité provient du fait que $M$ est semblable à $T$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), donc $b \in \{0, 1\}$ d'après la question 2.

**Remarque**

Le polynôme caractéristique $\chi_M$ est de degré deux et admet la racine réelle 0 (car 0 est valeur propre), donc est forcément scindé dans $\mathbb{R}$ ($\chi_M = X(X - b)$ où $b \in \mathbb{R}$). Par application du théorème de trigonalisation, on en déduit que $M$ est semblable à une matrice triangulaire. De plus, cette matrice triangulaire doit avoir 0 et $b$ sur la diagonale, mais pour répondre à la question, il faut justifier que ce n'est pas $\begin{pmatrix} b & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et ça demande un peu plus de travail...

5. Si $b = 0$, alors

$$T^2 = 0_2.$$

Or, il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ avec

$$M = PTP^{-1}$$

(car $M$ et $T$ sont semblables), donc

$$M^2 = PT^2P^{-1} = P0_2P^{-1} = 0_2,$$

donc

$$M^\top = M^2 = 0_2, \qquad \text{soit} \qquad M = 0_2,$$

donc $f = 0$ (l'endomorphisme nul).

6. Si $b = 1$, alors $f$ admet deux valeurs propres distinctes (0 et 1), et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc $f$ est diagonalisable et

$$\dim\big(E_0(f)\big) = \dim\big(E_1(f)\big) = 1.$$

Donc $M$ est semblable à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

par conséquent il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ avec

$$M = PDP^{-1}.$$

Alors,

$$M^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = M$$

(car $D^2 = D$), donc

$$f^2 = f,$$

autrement dit, $f$ est un projecteur.
Enfin, on a alors

$$M^\top = M^2 = M,$$

donc $M$ est symétrique. Comme $M$ est la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et que la base canonique est orthonormée, on en déduit que $f$ est autoadjoint.
$f$ est donc un projecteur autoadjoint, autrement dit,

$$\boxed{f \text{ est un projecteur orthogonal}}$$

(différent de Id et de l'endomorphisme nul, qui n'ont qu'une seule valeur propre).

**Remarque**

Réciproquement, si $f$ est un projecteur différent de Id et de l'endomorphisme nul, il admet 0 et 1 comme valeurs propres, il n'est donc pas inversible, et si de plus c'est un projecteur orthogonal, il est autoadjoint, et donc sa matrice $M$ dans la base canonique est symétrique (car la base canonique est orthonormée), ce qui donne bien

$$M^\top = M = M^2.$$

*a.* On utilise la propriété de cours : pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$

**Correction de l'exercice 9.45** **Énoncé p. 9**

**1)** Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\langle x,\ a\rangle \in \mathbb{R}$ et $\langle x,\ b\rangle \in \mathbb{R}$, donc $u(x)$ est une combinaison linéaire de $a$ et $b$. Comme $a$ et $b$ sont dans $\mathbb{R}^3$, et que $\mathbb{R}^3$ est stable par combinaison linéaire, on a alors $u(x) \in \mathbb{R}^3$.
Puis, le produit scalaire est linéaire à gauche, donc : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) &= \langle \lambda x + y,\ a\rangle\, b + \langle \lambda x + y,\ b\rangle\, a \\ &= \big(\lambda \langle x,\ a\rangle + \langle y,\ a\rangle\big) b + \big(\lambda \langle x,\ b\rangle + \langle y,\ b\rangle\big) a \\ &= \lambda\big(\langle x,\ a\rangle\, b + \langle x,\ b\rangle\, a\big) + \langle y,\ a\rangle\, b + \langle y,\ b\rangle\, a \\ &= \lambda u(x) + u(y) \end{aligned}$$

donc $u$ est linéaire.
Donc $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a :

$$\langle u(y),\ x\rangle = \langle \langle y,\ a\rangle\, b + \langle y,\ b\rangle\, a,\ x\rangle = \langle y,\ a\rangle \langle b,\ x\rangle + \langle y,\ b\rangle \langle a,\ x\rangle,$$

et

$$\langle u(x),\ y\rangle = \langle \langle x,\ a\rangle\, b + \langle x,\ b\rangle\, a,\ y\rangle = \langle x,\ a\rangle \langle b,\ y\rangle + \langle x,\ b\rangle \langle a,\ y\rangle.$$

La symétrie du produit scalaire permet alors bien de conclure :

$$\langle u(y),\ x\rangle = \langle u(x),\ y\rangle.$$

Donc $u$ est autoadjoint.
On peut en déduire que l'endomorphisme $u$ est diagonalisable, et même qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $u$ (théorème spectral).
**2)** On a $(a, b)$ libre, donc

$$x \in \mathrm{Ker}(u) \quad\Leftrightarrow\quad \langle x,\ a\rangle\, b + \langle x,\ b\rangle\, a = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \langle x,\ a\rangle = 0 \\ \langle x,\ b\rangle = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x \in \mathrm{Vect}(a, b)^{\perp}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(a, b)^{\perp}}.$$

De manière directe, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Puis, le théorème du rang donne

$$\dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Vect}(a, b)^{\perp}\big).$$

Mais $\mathbb{R}^3$ est euclidien, donc

$$\dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\mathrm{Vect}(a, b)^{\perp}\big) = \dim\big(\mathrm{Vect}(a, b)\big).$$

On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut conclure :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(a, b)}.$$

On a $a \in \mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Im}(u)$. Si $u$ est un projecteur, alors $a = u(a)$, soit

$$a = \langle a,\ a\rangle\, b + \langle a,\ b\rangle\, a$$

ou encore $\langle a,\ a\rangle = 0$ et $\langle a,\ b\rangle = 1$ par liberté de $(a, b)$. Mais $a \neq \vec{0}$ (car $(a, b)$ est libre), donc $\langle a,\ a\rangle \neq 0$, contradiction.
Donc $u$ n'est pas un projecteur.

**Correction de l'exercice 9.46** **Énoncé p. 9**

**1)** Comme $A^\top A = I_3$, on a $A - I_3 = A(I_3 - A^\top) = A(I_3 - A)^\top$, donc

$$\det(A - I_3) = \det A \cdot \det(I_3 - A)^\top = \det(I_3 - A),$$

puisque $\det A = 1$ et qu'une matrice a même déterminant que sa transposée. Or $I_3 - A = -(A - I_3)$ est de taille 3, donc $\det(I_3 - A) = (-1)^3 \det(A - I_3) = -\det(A - I_3)$. Ainsi $\det(A - I_3) = -\det(A - I_3)$, soit $\det(A - I_3) = 0$ : la matrice $A - I_3$ n'est pas inversible et 1 est valeur propre de $A$.
**2)** L'endomorphisme $f$ est une isométrie vectorielle, sa matrice dans la base canonique, orthonormée, étant orthogonale. Soit $x \in P$. Comme $f$ conserve le produit scalaire, $\langle f(x), a\rangle = \langle f(x), f(a)\rangle = \langle x, a\rangle = 0$, donc $f(x) \in P$ : le plan $P$ est stable par $f$.
Notons $g$ l'endomorphisme de $P$ induit par $f$. Il conserve la norme, donc c'est une isométrie vectorielle du plan euclidien $P$. Soit $(b, c)$ une base orthonormée de $P$ ; alors $\mathcal{B} = (a, b, c)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et, par stabilité de $P$ et $f(a) = a$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad M = \mathrm{Mat}_{(b,c)}(g).$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs donne $1 = \det f = \det M = \det g$. Donc $g$ est une rotation vectorielle de $P$.
**3)** D'après le cours, la matrice d'une rotation vectorielle d'un plan euclidien dans une base orthonormée est de la forme $R(\theta)$ : $M = R(\theta)$ pour un réel $\theta$, d'où la forme annoncée pour $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. La trace ne dépend pas de la base, donc $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\theta$, soit

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}.$$

**4)** Les colonnes de $A$ sont de norme $\frac{1}{3}\sqrt{4 + 4 + 1} = 1$ et deux à deux orthogonales ($\frac{1}{9}(-2 + 4 - 2) = 0$, $\frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0$, $\frac{1}{9}(-2 - 2 + 4) = 0$), donc $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, et en développant selon la première ligne,

$$\det A = \frac{1}{27}\left(2(4 + 2) + 1(4 - 1) + 2(4 + 2)\right) = \frac{27}{27} = 1.$$

Donc $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Ensuite

$$A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le système $AX = X$ s'écrit $-x - y + 2z = 0$, $2x - y - z = 0$, $-x + 2y - z = 0$. La différence des deux premières équations donne $3x - 3z = 0$, soit $x = z$, puis la première donne $y = z$. Donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$ : l'axe de $f$ est dirigé par $(1, 1, 1)$. Enfin $\operatorname{tr} A = 2$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta \equiv \pm\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$, le signe dépendant de l'orientation choisie sur $P$.
**5)** Si $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det A = -1$, alors $-A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det(-A) = (-1)^3 \det A = 1$ : $-A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. D'après la question 1, 1 est valeur propre de $-A$, donc $-1$ est valeur propre de $A$. En appliquant la question 3 à $-A$, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de $f$ est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}.$$

**Correction de l'exercice 9.47** **Énoncé p. 10**

**1)** Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $X \in E_\lambda(u)$. Alors $u(v(X)) = ABX = BAX = B(\lambda X) = \lambda v(X)$, donc $v(X) \in E_\lambda(u)$.
**2)** Notons $F = E_\lambda(u)$ et $w$ l'endomorphisme de $F$ induit par $v$. Pour $X, Y \in F$, $\langle w(X), Y\rangle = \langle v(X), Y\rangle = \langle X, v(Y)\rangle = \langle X, w(Y)\rangle$, car $v$ est autoadjoint, sa matrice $B$ dans la base canonique, orthonormée, étant symétrique. Donc $w$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $F$. Le théorème spectral fournit une base orthonormée de $F$ formée de vecteurs propres de $w$, qui sont des vecteurs propres de $v$.
**3)** Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $u$. Comme $u$ est autoadjoint, $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ et ces sous-espaces sont deux à deux orthogonaux. Pour chaque $k$, la question 2 donne une base orthonormée $\mathcal{B}_k$ de $E_{\lambda_k}(u)$ formée de vecteurs propres de $v$. La réunion $\mathcal{B}$ des $\mathcal{B}_k$ est une base orthonormée de $E$ : chaque vecteur est unitaire, deux vecteurs d'une même $\mathcal{B}_k$ sont orthogonaux, et deux vecteurs de $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{B}_l$ avec $k \neq l$ le sont par orthogonalité des sous-espaces propres. Tout vecteur de $\mathcal{B}$ est propre pour $u$ et pour $v$. Si $P$ est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, alors $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1} = P^\top$, et $P^\top AP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u), P^\top BP = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales.
**4)** Si $A = PDP^\top$ et $B = PD'P^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D, D'$ diagonales, alors

$$AB = PDP^\top PD'P^\top = PDD'P^\top = PD'DP^\top = PD'P^\top PDP^\top = BA,$$

car deux matrices diagonales commutent.
**5)** Par la question 3, $A = PDP^\top$ et $B = PD'P^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, où les $\lambda_i$ et les $\mu_i$ sont des valeurs propres de $A$ et de $B$, donc positives. Alors $AB = PDD'P^\top$ avec $DD' = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$. La matrice $AB$ est symétrique, $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA = AB$, et ses valeurs propres sont les $\lambda_i\mu_i \geq 0$ : $AB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**Correction de l'exercice 9.48** **Énoncé p. 10**

**1)** D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^\top$, les $\lambda_i$ étant les valeurs propres de $A$, positives. Alors, par la propriété $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$,

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\left(PDP^\top B\right) = \mathrm{tr}\left(DP^\top BP\right) = \mathrm{tr}(DB').$$

La matrice $B' = P^\top BP$ est symétrique, $B'^\top = P^\top B^\top P = B'$, et pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top B'X = (PX)^\top B(PX) \geq 0$. Donc $B' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
**2)** Notons $b'_{i,j}$ les coefficients de $B'$. Comme $D$ est diagonale, le coefficient diagonal d'indice $i$ de $DB'$ est $\lambda_i b'_{i,i}$, donc

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b'_{i,i}.$$

Or $b'_{i,i} = E_i^\top B'E_i \geq 0$, où $E_i$ est la $i$-ième colonne de la base canonique, et $\lambda_i \geq 0$. Donc $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$.
**3)** Tous les termes étant positifs,

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b'_{i,i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b'_{j,j}\right) = \mathrm{tr}(D)\,\mathrm{tr}(B') = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B),$$

la trace étant invariante par changement de base.

**4)** Si $A$ est définie positive, les $\lambda_i$ sont strictement positifs. L'égalité $\sum_i \lambda_i b'_{i,i} = 0$ avec des termes positifs impose $b'_{i,i} = 0$ pour tout $i$. Montrons que $B'$ est alors nulle. Soient $i \neq j$ et $t \in \mathbb{R}$ ; avec $X = E_i + tE_j$,

$$0 \leq X^\top B' X = b'_{i,i} + 2tb'_{i,j} + t^2 b'_{j,j} = 2tb'_{i,j}.$$

Cette quantité est positive pour $t = 1$ et pour $t = -1$, donc $b'_{i,j} = 0$. Ainsi $B' = 0$, puis $B = PB'P^\top = 0$.

## Correction de l'exercice 9.49 — Énoncé p. 10

**1)** Si $\det M = -1$, le cours donne $M = S(\beta)$ pour un réel $\beta$, et $M^2 = S(\beta)S(\beta) = R(0) = I_2$. L'équation impose alors $R(\theta) = I_2$, soit $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Par contraposée, si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors $\det M = 1$ et $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
**2)** Cherchons d'abord les solutions dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ : $M = R(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$, et $M^2 = R(2\varphi)$. Par unicité de l'angle modulo $2\pi$, $R(2\varphi) = R(\theta)$ si et seulement si $2\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}$, soit $\varphi \equiv \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$. Cela donne deux matrices : $R\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $R\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = -R\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, la question 1 montre qu'il n'y a pas d'autre solution : l'équation a exactement deux solutions, $\pm R\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, l'équation s'écrit $M^2 = I_2$. Les solutions dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont $\pm I_2$, et toutes les matrices $S(\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, sont aussi solutions puisque $S(\beta)^2 = I_2$. L'équation a une infinité de solutions : $I_2$, $-I_2$ et toutes les matrices de réflexion.
**3)** Soit $M = R(\varphi) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On a $M^n = R(n\varphi)$, et $R(n\varphi) = R(\theta)$ si et seulement si $n\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$. Les solutions sont les matrices

$$M_k = R\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Deux entiers $k$ et $k'$ donnent la même matrice si et seulement si $\frac{2(k-k')\pi}{n} \equiv 0 \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire si et seulement si $n$ divise $k - k'$. Les matrices $M_0, \dots, M_{n-1}$ sont donc deux à deux distinctes et toute solution est l'une d'elles : l'équation a exactement $n$ solutions.
**4)** Si $M = R(\varphi)$, alors $M^3 = R(3\varphi)$ est de déterminant 1, et ne peut valoir $S(\alpha)$, de déterminant $-1$. Donc $M = S(\beta)$ pour un réel $\beta$, et $M^3 = S(\beta)^2 S(\beta) = S(\beta)$. L'équation devient $S(\beta) = S(\alpha)$, soit $\beta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. L'unique solution est $M = S(\alpha)$.

## Correction de l'exercice 9.50 — Énoncé p. 10

**1)** La matrice $M^\top M$ est symétrique, $(M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top M^\top MX = (MX)^\top (MX) = \|MX\|^2 \geq 0$, et cette quantité est nulle si et seulement si $MX = 0$, c'est-à-dire $X = 0$ puisque $M$ est inversible. Donc $M^\top M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
**2)** On a $\det(S)^2 = \det(S^2) = \det(M^\top M) = \det(M)^2 \neq 0$, donc $S$ est inversible. Alors

$$O^\top O = (S^{-1})^\top M^\top M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n,$$

car $S^{-1}$ est symétrique comme inverse d'une matrice symétrique. Donc $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
**3)** *Existence.* Soit $S$ la racine carrée de $M^\top M$ dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $O = MS^{-1}$. Alors $M = OS$, $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par la question 2, et $S$ est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de $S$ : ses valeurs propres sont strictement positives et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

*Unicité.* Supposons $M = OS = O_1S_1$ avec $O, O_1 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S, S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors

$$M^\top M = S^\top O^\top OS = S^2 \qquad \text{et de même} \qquad M^\top M = S_1^2.$$

Les matrices $S$ et $S_1$ sont deux racines carrées de $M^\top M$ dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc $S = S_1$ par unicité. Puis $O = MS^{-1} = O_1$.

**4)** Appliquons la question 3 à $M^\top$, qui est inversible : $M^\top = O_2S_2$ avec $O_2 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En transposant, $M = S_2^\top O_2^\top = S_2O_2^\top$, et $O_2^\top \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On peut aussi écrire, à partir de $M = OS$, $M = (OSO^{-1})O$ avec $OSO^{-1} = OSO^\top \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ : symétrique, et $X^\top OSO^\top X = (O^\top X)^\top S(O^\top X) > 0$ pour $X \neq 0$.

**5)** On a $\det M = -1 + 4 = 3 \neq 0$ et

$$M^\top M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $(X-5)^2 - 16 = (X-1)(X-9)$, avec $E_9 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, $M^\top M = P\,\mathrm{diag}(9,1)P^\top$ et la racine carrée positive est

$$S = P\,\mathrm{diag}(3,1)P^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $S^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Enfin $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$O = MS^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R\left(\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi $M = R\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 9.51

Énoncé p. 10

**1)** On a $\det(C)^2 = \det(C^2) = \det A \neq 0$, car $A$ est inversible, ses valeurs propres étant strictement positives. Donc $C$ est inversible. Ensuite $(CBC)^\top = C^\top B^\top C^\top = CBC$, car $B$ et $C$ sont symétriques.

**2)** On a $C(CBC)C^{-1} = C^2B = AB$. La matrice $AB$ est donc semblable à la matrice symétrique réelle $CBC$, qui est diagonalisable à valeurs propres réelles par le théorème spectral. Deux matrices semblables ayant les mêmes valeurs propres et l'une étant diagonalisable si et seulement si l'autre l'est, $AB$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres sont réelles.

**3)** Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top CBCX = (CX)^\top B(CX) \geq 0$ si $B$ est positive, donc $CBC \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres, qui sont celles de $AB$, sont positives. Si $B$ est définie positive et $X \neq 0$, alors $CX \neq 0$ car $C$ est inversible, donc $X^\top CBCX > 0$ : $CBC \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et les valeurs propres de $AB$ sont strictement positives.

**4)** Non. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas symétrique. Elle est diagonalisable à valeurs propres réelles, $\pm\sqrt{2}$, comme prévu.

**Correction de l'exercice 9.52** **Énoncé p. 12**

1. On a $\overline{Z}^\top Z = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} z_i = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$, somme de réels positifs : c'est un réel positif, nul si et seulement si tous les $|z_i|$ sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si $Z = 0$.
2. Le polynôme caractéristique $\chi_A$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels, donc complexes. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il admet une racine $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\det(A - \lambda I_n) = 0$, donc la matrice $A - \lambda I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas inversible et son noyau contient un vecteur $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul : $AZ = \lambda Z$.
3. La matrice $A$ est à coefficients réels, donc en conjuguant coefficient par coefficient l'égalité $AZ = \lambda Z$, on obtient $A\overline{Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$. En transposant, et comme $A^\top = A$,
$$\overline{Z}^\top A = \overline{\lambda}\overline{Z}^\top.$$
On calcule alors $\overline{Z}^\top AZ$ de deux façons :
$$\overline{Z}^\top (AZ) = \lambda \overline{Z}^\top Z \qquad \text{et} \qquad (\overline{Z}^\top A)Z = \overline{\lambda}\overline{Z}^\top Z.$$
Donc $(\lambda - \overline{\lambda})\overline{Z}^\top Z = 0$. Comme $Z \neq 0$, la question 1 donne $\overline{Z}^\top Z \neq 0$, donc $\lambda = \overline{\lambda}$ : $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Comme $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_n$ est à coefficients réels, et son déterminant est nul (le déterminant ne dépend pas du corps dans lequel on le calcule). Elle n'est donc pas inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ : il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$. Comme $u$ est autoadjoint et $\mathcal{B}$ orthonormée, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique réelle (proposition « Matrice d'un endomorphisme autoadjoint »). Soit $X$ comme ci-dessus et $x \in E$ le vecteur de coordonnées $X$ dans $\mathcal{B}$. Alors $x \neq 0$ et les coordonnées de $u(x)$ sont $AX = \lambda X$, donc $u(x) = \lambda x$ : $\lambda$ est valeur propre de $u$.
5. Notons $u_F$ l'endomorphisme de $F$ induit par $u$ : pour $x \in F$, $u_F(x) = u(x)$. Pour $x, y \in F$,
$$\langle u_F(x),\, y\rangle = \langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u(y)\rangle = \langle x,\, u_F(y)\rangle\,,$$
donc $u_F$ est autoadjoint pour le produit scalaire de $E$ restreint à $F$. La stabilité de $F^\perp$ est la proposition « Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable » du cours : pour $y \in F^\perp$ et $x \in F$, $\langle u(y),\, x\rangle = \langle y,\, u(x)\rangle = 0$ car $u(x) \in F$.
6. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « pour tout espace euclidien $E$ de dimension $n$ et tout $u \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormée de $E$ formée de vecteurs propres de $u$ ».
*Initialisation.* Si $\dim E = 1$, soit $e_1$ un vecteur unitaire de $E$. Alors $(e_1)$ est une base orthonormée de $E$, et $u(e_1) \in E = \mathrm{Vect}(e_1)$ : $e_1$ est un vecteur propre de $u$.
*Hérédité.* Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{S}(E)$. D'après la question 4, $u$ admet une valeur propre $\lambda$ ; soit $x$ un vecteur propre associé et $e_1 = x/\|x\|$, vecteur propre unitaire. La droite $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par $u$, donc $H = D^\perp$ est stable par $u$ (question 5). C'est un espace euclidien de dimension $n$, et l'endomorphisme $u_H$ induit par $u$ est autoadjoint (question 5). Par $\mathcal{P}(n)$, il existe une base orthonormée $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ de $H$ formée de vecteurs propres de $u_H$, donc de $u$. Comme $e_1$ est unitaire et orthogonal à $H$, la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est orthonormée, donc libre, et compte $n+1 = \dim E$ vecteurs : c'est une base orthonormée de $E$, formée de vecteurs propres de $u$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ formée de vecteurs propres de $u$. Chaque $e_i$ appartient à un sous-espace propre, donc la somme des sous-espaces propres contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$ : cette somme est $E$. L'orthogonalité de deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est le lemme du cours : si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ avec $\lambda \neq \mu$, alors $\lambda \langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu \langle x, y\rangle$, donc $\langle x, y\rangle = 0$.
8. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé, autoadjoint pour le produit scalaire usuel puisque la base canonique est orthonormée. D'après la question 6, $u$ est diagonalisable : il existe une base dans laquelle sa matrice est $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les $\lambda_i$ réels, et $\chi_A = \chi_D = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
9. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$ formée de vecteurs propres de $v$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale, donc symétrique. D'après la proposition « Matrice d'un endomorphisme autoadjoint », il suffit d'une base orthonormée dans laquelle la matrice est symétrique pour que $v$ soit autoadjoint.
10. (a) Pour $x = 0$ l'inégalité est une égalité. Pour $x \neq 0$, le vecteur $x/\|x\|$ est unitaire, donc $\langle u(x/\|x\|), x/\|x\|\rangle \leq \mu$, et par bilinéarité $\langle u(x), x\rangle \leq \mu \|x\|^2$.

    (b) Comme $u$ est autoadjoint, $\langle u(x_0), y\rangle = \langle x_0, u(y)\rangle = \langle u(y), x_0\rangle$, d'où par bilinéarité

    $$\langle u(x_0 + ty), x_0 + ty\rangle = \mu + 2t \langle u(x_0), y\rangle + t^2 \langle u(y), y\rangle,$$

    et, comme $x_0 \perp y$, le théorème de Pythagore donne $\|x_0 + ty\|^2 = 1 + t^2 \|y\|^2$. La question (a) appliquée à $x_0 + ty$ s'écrit

    $$\mu + 2t \langle u(x_0), y\rangle + t^2 \langle u(y), y\rangle \leq \mu + \mu t^2 \|y\|^2,$$

    soit $2t \langle u(x_0), y\rangle \leq t^2 \left(\mu \|y\|^2 - \langle u(y), y\rangle\right)$. Pour $t > 0$, en divisant par $t$ puis en faisant tendre $t$ vers $0^+$, il vient $2 \langle u(x_0), y\rangle \leq 0$. Pour $t < 0$, en divisant par $t$ (ce qui renverse l'inégalité) puis en faisant tendre $t$ vers $0^-$, il vient $2 \langle u(x_0), y\rangle \geq 0$. Donc $\langle u(x_0), y\rangle = 0$.

    (c) D'après (b), $u(x_0)$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Vect}(x_0)^\perp$, donc $u(x_0) \in (\mathrm{Vect}(x_0)^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(x_0)$ : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = \alpha x_0$. Alors $\mu = \langle u(x_0), x_0\rangle = \alpha \|x_0\|^2 = \alpha$, donc $u(x_0) = \mu x_0$ : $x_0$ est un vecteur propre de $u$ associé à $\mu$, qui est donc une valeur propre réelle de $u$. Cette voie évite le passage par $\mathbb{C}$, et montre de plus que $\mu$ est la plus grande valeur propre de $u$, puisque pour un vecteur propre unitaire $x$ associé à $\lambda$, $\lambda = \langle u(x), x\rangle \leq \mu$.

**Correction de l'exercice 9.53** **Énoncé p. 13**

1. Soient $x, y \in E$. Comme $u$ est une bijection qui conserve le produit scalaire, $\langle u(x), y\rangle = \left\langle u(x), u(u^{-1}(y))\right\rangle = \left\langle x, u^{-1}(y)\right\rangle$. En appliquant cette identité à $u^{-1}(x)$ et $u(y)$, on obtient aussi $\left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle = \langle x, u(y)\rangle$. Donc

   $$\langle v(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle = \left\langle x, u^{-1}(y)\right\rangle + \langle x, u(y)\rangle = \langle x, v(y)\rangle :$$

   $v$ est autoadjoint.
2. D'après le théorème spectral, $v$ est diagonalisable, donc admet au moins une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$ et un vecteur propre associé $x \neq 0$ : $u(x) + u^{-1}(x) = \mu x$. En appliquant $u$, $u(u(x)) + x = \mu u(x)$, soit $u(u(x)) = \mu u(x) - x$.

Les images des deux générateurs de $F$ sont $u(x) \in F$ et $u(u(x)) = \mu\, u(x) - x \in F$ ; par linéarité, $u(F) \subset F$. Enfin $F$ est engendré par deux vecteurs dont le premier est non nul, donc $\dim F \in \{1, 2\}$.

3. Si $\dim F = 1$, alors $F = \mathrm{Vect}(x)$ et $u(x) \in F$ : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha x$. Comme $u$ conserve la norme, $\|x\| = \|u(x)\| = |\alpha|\,\|x\|$ et $x \neq 0$, donc $|\alpha| = 1$ : $u(x) = \pm x$.

4. (a) Pour $y \in F$, $\|u_F(y)\| = \|u(y)\| = \|y\|$ : $u_F$ est une isométrie vectorielle de $F$, donc $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. D'après la question 2, $u_F^2(x) = \mu\, u_F(x) - x$ ; en appliquant $u$, $u_F^2(u(x)) = u(\mu\, u(x) - x) = \mu\, u_F(u(x)) - u(x)$. L'endomorphisme $u_F^2 - \mu u_F + \mathrm{Id}_F$ s'annule donc sur $x$ et $u(x)$, qui forment une base de $F$ puisque $\dim F = 2$ : il est nul, et $M^2 - \mu M + I_2 = 0$.

   (b) Le théorème de Cayley-Hamilton donne $M^2 - (\operatorname{tr} M)M + (\det M)I_2 = 0$. En soustrayant l'égalité de (a),

   $$(\operatorname{tr} M - \mu)M = (\det M - 1)I_2.$$

   Si $\operatorname{tr} M \neq \mu$, alors $M$ est une matrice scalaire : $u_F = \alpha\, \mathrm{Id}_F$ pour un réel $\alpha$, donc $u(x) = \alpha x$ et $\dim F = 1$, ce qui est exclu. Donc $\operatorname{tr} M = \mu$, puis $(\det M - 1)I_2 = 0$ : $\det M = 1$.

   (c) Ainsi $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ : il existe $\theta$ avec $-\pi < \theta \leq \pi$ tel que $M = R(\theta)$, et $\mu = \operatorname{tr} M = 2\cos\theta$. Si $\theta \in \{0, \pi\}$, $M = \pm I_2$ est scalaire, ce qui est exclu comme en (b). Donc $\theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$. Si $\theta < 0$, on échange les deux vecteurs de $\mathcal{C}$ : avec $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$, on a $u(c_1) = \cos\theta\, c_1 + \sin\theta\, c_2$ et $u(c_2) = -\sin\theta\, c_1 + \cos\theta\, c_2$, donc dans la base orthonormée $(c_2, c_1)$ la matrice de $u_F$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(-\theta)$. Quitte à remplacer $\theta$ par $-\theta$, on a donc $\theta \in ]0, \pi[$, et $\mu = 2\cos\theta$ est inchangé.

5. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « pour tout espace euclidien $E$ de dimension $n$ et tout $u \in \mathrm{O}(E)$, il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ a la forme annoncée ». Montrons $\mathcal{P}(n)$ par récurrence forte.

   *Initialisation.* Si $\dim E = 1$, alors $u = \pm\, \mathrm{Id}_E$ (question 3 avec $x$ unitaire), et sa matrice dans la base $(x)$ est $I_1$ ou $-I_1$.

   *Hérédité.* Soit $n \geq 2$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $E$ de dimension $n$ et $u \in \mathrm{O}(E)$. La partie I fournit un sous-espace $F$ stable par $u$, de dimension $d \in \{1, 2\}$, et une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $F$ dans laquelle la matrice de $u_F$ est $(1)$, $(-1)$ ou $R(\theta)$ avec $\theta \in ]0, \pi[$. Comme $u$ est une isométrie vectorielle et $F$ est stable par $u$, le sous-espace $F^\perp$ est stable par $u$ (proposition « Stabilité de l'orthogonal » du cours). L'endomorphisme induit $u_{F^\perp}$ conserve la norme, comme $u$ : c'est une isométrie vectorielle de $F^\perp$ (exercice 9.11), qui est de dimension $n - d \in [\![1, n-1]\!]$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\mathcal{C}'$ de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $u_{F^\perp}$ est de la forme annoncée. Comme $E = F \oplus F^\perp$ avec $F \perp F^\perp$, la concaténation de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ est une base orthonormée de $E$, dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs, de blocs la matrice de $u_F$ et celle de $u_{F^\perp}$. En réordonnant les vecteurs de la base pour placer d'abord les vecteurs des blocs 1, puis ceux des blocs $-1$, puis ceux des blocs de rotation, on obtient la forme annoncée. D'où $\mathcal{P}(n)$.

6. Le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale par blocs est le produit

de ceux des blocs, et $\chi_{R(\theta)} = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$. Donc

$$\chi_u = (X-1)^p (X+1)^q \prod_{i=1}^{r} \left(X^2 - 2\cos\theta_i\, X + 1\right).$$

Pour $\theta_i \in ]0, \pi[$, le discriminant $4\cos^2\theta_i - 4 < 0$ : le facteur $X^2 - 2\cos\theta_i\, X + 1$ n'a pas de racine réelle, et ses racines complexes sont $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_i}$. Ainsi $p$ est la multiplicité de la racine 1 de $\chi_u$ et $q$ celle de $-1$ ; et les racines non réelles de partie imaginaire strictement positive sont les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}$, qui déterminent les $\theta_i$, avec multiplicité, à l'ordre près. Ces quantités ne dépendent donc que de $u$.

Dans la base $\mathcal{B}$, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ se lit sur $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) - I_n$, diagonale par blocs de blocs $0_p$, $-2I_q$ et $R(\theta_i) - I_2$. Les blocs $-2I_q$ et $R(\theta_i) - I_2$ sont inversibles (ce dernier a pour déterminant $2 - 2\cos\theta_i \neq 0$), donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ est engendré par les $p$ premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ : $\dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) = p$. De même $\dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E) = q$, les blocs $R(\theta_i) + I_2$ étant de déterminant $2 + 2\cos\theta_i \neq 0$. Enfin $\det u = 1^p (-1)^q \prod_i \det R(\theta_i) = (-1)^q$.

7. Si $n = 3$ et $\det u = 1$, alors $q$ est pair et $p + q + 2r = 3$, d'où $(p, q, r) \in \{(3,0,0), (1,2,0), (1,0,1)\}$. Les matrices correspondantes sont $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(0) \end{pmatrix}$, $\mathrm{diag}(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\pi) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta_1) \end{pmatrix}$ : dans tous les cas la forme annoncée, avec $\theta \in [0, \pi]$. C'est le résultat de l'exercice 9.46.

   Si $\det u = -1$, alors $q$ est impair, d'où $(p, q, r) \in \{(2,1,0), (0,3,0), (0,1,1)\}$. En plaçant le vecteur du bloc $-1$ en premier, les matrices sont $\mathrm{diag}(-1,1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(0) \end{pmatrix}$ (une réflexion), $-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\pi) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta_1) \end{pmatrix}$. Dans ce dernier cas, $u$ est la composée de la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ et de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_1)$ et d'angle $\theta_1$, qui commutent.

8. Soit $u \neq \mathrm{Id}_E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée donnée par la question 5. Comme $u \neq \mathrm{Id}_E$, on a $q + 2r \geq 1$.

   Pour chaque indice $j$ correspondant à un bloc $-1$, notons $s_j$ la réflexion par rapport à l'hyperplan $e_j^\perp$ : $s_j(e_j) = -e_j$ et $s_j$ fixe les autres vecteurs de $\mathcal{B}$.

   Pour chaque bloc $R(\theta_i)$, porté par le plan $F_i = \mathrm{Vect}(e_a, e_b)$, notons $\sigma_i$ et $\sigma_i'$ les endomorphismes de $E$ qui coïncident avec l'identité sur $F_i^\perp$ et dont les matrices dans la base $(e_a, e_b)$ de $F_i$ sont respectivement $S(0)$ et $S(\theta_i)$. Leurs matrices dans $\mathcal{B}$ sont orthogonales (diagonales par blocs, à blocs orthogonaux), donc $\sigma_i, \sigma_i' \in \mathrm{O}(E)$ ; comme $S(0)^2 = S(\theta_i)^2 = I_2$, ce sont des symétries, donc des symétries orthogonales (proposition « Symétries orthogonales »). Le sous-espace $\mathrm{Ker}(\sigma_i + \mathrm{Id}_E)$ est inclus dans $F_i$ et y correspond à $\mathrm{Ker}(S(0) + I_2)$, de dimension 1 ; de même pour $\sigma_i'$, puisque $S(\theta_i)$ a pour valeurs propres 1 et $-1$. Ainsi $\sigma_i$ et $\sigma_i'$ sont des réflexions, et $\sigma_i' \circ \sigma_i$ a pour matrice $S(\theta_i)S(0) = R(\theta_i)$ sur $F_i$ et l'identité sur $F_i^\perp$.

   Les endomorphismes $s_j$, $\sigma_i' \circ \sigma_i$ agissent sur des sous-espaces deux à deux orthogonaux de $\mathcal{B}$ et fixent les autres vecteurs : leur composée, dans n'importe quel ordre, a pour matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Donc $u$ est la composée de $q + 2r \leq p + q + 2r = n$ réflexions.

9. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé, isométrie vectorielle pour le produit scalaire usuel. D'après la question 6, les racines complexes de $\chi_A = \chi_u$ sont 1, $-1$ et les $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta_i}$, toutes de module 1.

Si $r = 0$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale : $u$ est diagonalisable, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^2 = I_n$, donc $u$ est une symétrie, et une isométrie vectorielle, donc une symétrie orthogonale. Si $r \geq 1$, $\chi_u$ a une racine non réelle, donc n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et $u$ n'est pas diagonalisable. Enfin une symétrie orthogonale est diagonalisable (ses sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires). Donc $u$ est diagonalisable si et seulement si $u$ est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire si et seulement si $r = 0$.

10. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée donnée par la question 5. Comme $\det u = 1$, $q$ est pair, et l'on regroupe les vecteurs des blocs $-1$ deux par deux : $-I_2 = R(\pi)$. La matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$ est donc $\Delta = \mathrm{diag}(I_p, R(\theta_1), \dots, R(\theta_s))$ avec $s = r + q/2$ et $0 < \theta_i \leq \pi$. La matrice de passage $P$ de la base canonique à $\mathcal{B}$ est orthogonale (proposition « Matrices de passage entre bases orthonormées »), et la formule de changement de base donne $A = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^{\top}$.

Posons, pour $t \in [0, 1]$,

$$\gamma(t) = P \,\mathrm{diag}\left(I_p, R(t\theta_1), \dots, R(t\theta_s)\right) P^{\top}.$$

Alors $\gamma(0) = PI_nP^{\top} = I_n$ et $\gamma(1) = A$. Pour tout $t$, la matrice centrale est orthogonale (ses blocs le sont) de déterminant $\prod_i \det R(t\theta_i) = 1$, donc $\gamma(t) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ comme produit de matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant total $\det P \cdot 1 \cdot \det P^{\top} = (\det P)^2 = 1$. Enfin chaque coefficient de $\gamma(t)$ est une combinaison linéaire, à coefficients fixes, des $\cos(t\theta_i)$, $\sin(t\theta_i)$ et de constantes : c'est une fonction continue de $t$.

**Correction de l'exercice 9.54** **Énoncé p. 14**

1. La matrice $A$ est inversible, donc ses colonnes forment une famille libre de $n$ vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension $n$ : c'est une base. Le procédé de Gram-Schmidt construit $Q_1 = C_1/\|C_1\|$ puis, pour $k \geq 2$,

$$Q_k = \frac{C'_k}{\|C'_k\|} \qquad \text{avec} \qquad C'_k = C_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle C_k, Q_i\rangle Q_i,$$

le vecteur $C'_k$ étant non nul car $C_k \notin \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{k-1}) = \mathrm{Vect}(Q_1, \dots, Q_{k-1})$. Par construction, $Q_k \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k)$ pour tout $k$, d'où $\mathrm{Vect}(Q_1, \dots, Q_k) \subset \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k)$, avec égalité car les deux familles sont libres de même cardinal. Enfin $C_k = C'_k + \sum_{i<k} \langle C_k, Q_i\rangle Q_i$ avec $Q_k \perp Q_i$ pour $i < k$, donc $\langle C_k, Q_k\rangle = \langle C'_k, Q_k\rangle = \|C'_k\| > 0$.

2. Les colonnes de $Q$ forment une famille orthonormée, donc $Q^{\top}Q = I_n$ et $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k$, $C_k \in \mathrm{Vect}(Q_1, \dots, Q_k)$ et $(Q_1, \dots, Q_n)$ est orthonormée, donc

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} \langle C_k, Q_i\rangle Q_i = \sum_{i=1}^{k} \langle C_k, Q_i\rangle Q_i.$$

Posons $r_{i,k} = \langle C_k, Q_i\rangle$ si $i \leq k$ et $r_{i,k} = 0$ si $i > k$, et $R = (r_{i,k})$. Alors $R$ est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux $r_{k,k} = \langle C_k, Q_k\rangle$ sont strictement positifs d'après la question 1, et la $k$-ième colonne de $QR$ est $\sum_{i=1}^{n} r_{i,k}Q_i = C_k$. Donc $A = QR$.

3. Supposons $QR = Q'R'$. Les matrices $R$ et $R'$ sont inversibles (triangulaires à coefficients diagonaux non nuls), et $U = R'R^{-1} = {Q'}^{\top}Q$. L'inverse d'une matrice

triangulaire supérieure à coefficients diagonaux $d_k$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux $1/d_k$, et le produit de deux matrices triangulaires supérieures l'est encore, avec pour coefficients diagonaux les produits : $U$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Par ailleurs $U = Q'^{\top} Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $U^{-1} = U^{\top}$ est triangulaire inférieure ; mais $U^{-1}$ est aussi triangulaire supérieure, donc $U^{-1}$ est diagonale, et $U$ aussi. Une matrice diagonale orthogonale a ses coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ ; ceux de $U$ sont strictement positifs, donc $U = I_n$. Ainsi $R' = R$, puis $Q' = Q$.

4. Les colonnes de $A$ sont $C_1 = (1,1,0)^{\top}$, $C_2 = (1,0,1)^{\top}$, $C_3 = (0,1,1)^{\top}$, et $\det A = -2 \neq 0$. On applique le procédé de Gram-Schmidt.
   - $\|C_1\| = \sqrt{2}$, donc $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\top}$.
   - $\langle C_2, Q_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $C_2' = C_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} Q_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^{\top}$, de norme $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, donc $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\top}$.
   - $\langle C_3, Q_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle C_3, Q_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$, et $C_3' = C_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} Q_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^{\top}$, de norme $\frac{2}{\sqrt{3}}$, donc $Q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\top}$.

   Les coefficients de $R$ sont les $r_{i,k} = \langle C_k, Q_i \rangle$ pour $i \leq k$, avec $r_{k,k} = \left\| C_k' \right\|$ :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

   On vérifie que $\det R = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 = |\det A|$.

5. De $A = QR$ on tire $\det A = \det Q \det R = \pm \prod_{k=1}^{n} r_{k,k}$, donc $|\det A| = \prod_{k=1}^{n} r_{k,k}$. Pour résoudre $AX = B$, on écrit $QRX = B$, soit, en multipliant par $Q^{\top} = Q^{-1}$, $RX = Q^{\top} B$ : un système triangulaire, que l'on résout en remontant à partir de la dernière équation.

6. La matrice $A^{\top} A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique : $(A^{\top} A)^{\top} = A^{\top} (A^{\top})^{\top} = A^{\top} A$. Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $X^{\top} A^{\top} A X = (AX)^{\top} (AX) = \|AX\|^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $AX = 0$. Or $\operatorname{rg} A = p$ : l'application $X \mapsto AX$ est injective (son noyau est de dimension $p - \operatorname{rg} A = 0$), donc $AX = 0$ impose $X = 0$. Ainsi $X^{\top} A^{\top} A X > 0$ pour $X \neq 0$ : $A^{\top} A \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

7. $F$ est l'image de l'application linéaire $X \mapsto AX$, donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension $\operatorname{rg} A = p$. Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on écrit $AX - B = (AX - p_F(B)) + (p_F(B) - B)$ ; le premier vecteur est dans $F$ et le second dans $F^{\perp}$, donc, par le théorème de Pythagore,

$$\|AX - B\|^2 = \|AX - p_F(B)\|^2 + \|p_F(B) - B\|^2 \geq \|p_F(B) - B\|^2,$$

   avec égalité si et seulement si $AX = p_F(B)$. Comme $p_F(B) \in F$, il existe $X_0$ tel que $AX_0 = p_F(B)$, et il est unique par injectivité de $X \mapsto AX$. Le minimum de $\|AX - B\|$ est donc atteint en $X_0$ et seulement en $X_0$.

8. Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ : $AX = p_F(B)$ si et seulement si $AX \in F$ et $AX - B \in F^{\perp}$ (caractérisation de la projection orthogonale), c'est-à-dire si et seulement si $AX - B$ est orthogonal à tous les $AY$, $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ (AY)^{\top}(AX - B) = Y^{\top} A^{\top} (AX - B) = 0 &\iff A^{\top}(AX - B) = 0 \\ &\iff A^{\top} A X = A^{\top} B. \end{aligned}$$

Ce système admet une unique solution puisque $A^\top A$ est inversible (question 6), et c'est $X_0$ d'après la question 7.

9. D'après la question 8, $X_0 = (A^\top A)^{-1} A^\top B$, donc $p_F(B) = AX_0 = PB$ pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ : $P$ est la matrice de $p_F$ dans la base canonique. Directement, en utilisant que $A^\top A$ est symétrique donc son inverse aussi,

$$P^\top = (A^\top)^\top \left((A^\top A)^{-1}\right)^\top A^\top = A(A^\top A)^{-1} A^\top = P$$

et

$$P^2 = A(A^\top A)^{-1}(A^\top A)(A^\top A)^{-1} A^\top = P.$$

10. Posons

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}), \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors $AX - B$ a pour coefficients les $at_i + b - y_i$, et $\|AX - B\|^2 = \sum_{i=1}^n (at_i + b - y_i)^2$. Les deux colonnes de $A$ ne sont pas colinéaires, car la première n'est pas constante : $\operatorname{rg} A = 2 = p$.

11. On calcule

$$A^\top A = \begin{pmatrix} \sum t_i^2 & \sum t_i \\ \sum t_i & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum t_i^2 & n\overline{t} \\ n\overline{t} & n \end{pmatrix}, \qquad A^\top B = \begin{pmatrix} \sum t_i y_i \\ n\overline{y} \end{pmatrix}.$$

Les équations normales s'écrivent

$$\begin{cases} a \sum t_i^2 + n\overline{t}\, b = \sum t_i y_i, \\ n\overline{t}\, a + nb = n\overline{y}. \end{cases}$$

La seconde donne $b = \overline{y} - a\,\overline{t}$ ; en reportant dans la première, $a\left(\sum t_i^2 - n\overline{t}^2\right) = \sum t_i y_i - n\overline{t}\,\overline{y}$. Or

$$\sum_{i=1}^n (t_i - \overline{t})^2 = \sum t_i^2 - n\overline{t}^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n (t_i - \overline{t})(y_i - \overline{y}) = \sum t_i y_i - n\overline{t}\,\overline{y},$$

en développant et en utilisant $\sum t_i = n\overline{t}$, $\sum y_i = n\overline{y}$. Le premier est strictement positif car les $t_i$ ne sont pas tous égaux, d'où la formule pour $a$. L'égalité $b = \overline{y} - a\,\overline{t}$ signifie que $\overline{y} = a\,\overline{t} + b$ : la droite de régression passe par le point $(\overline{t}, \overline{y})$.

12. Ici $n = 4$, $\overline{t} = \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{3}{2}$, $\overline{y} = \frac{1+3+4+4}{4} = 3$, $\sum t_i^2 = 14$ et $\sum t_i y_i = 0 + 3 + 8 + 12 = 23$. Donc

$$a = \frac{23 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3}{14 - 4 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{5}{5} = 1, \qquad b = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

La droite de régression a pour équation $y = t + \frac{3}{2}$. Les écarts $at_i + b - y_i$ valent $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, et le minimum de la somme des carrés vaut $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

**Correction de l'exercice 9.55** **Énoncé p. 15**

1. La matrice $A_k$ est symétrique, comme sous-matrice d'une matrice symétrique prise sur les mêmes indices de lignes et de colonnes. Soit $Y \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ non nul, et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne obtenue en complétant $Y$ par $n-k$ zéros. Alors $X \neq 0$ et, les coefficients de $X$ d'indice $> k$ étant nuls, $X^\top AX = Y^\top A_k Y$. Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $Y^\top A_k Y > 0$ : $A_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$. Par la caractérisation spectrale, les valeurs propres de $A_k$ sont strictement positives, et $\Delta_k = \det A_k$, produit des valeurs propres comptées avec multiplicité, est strictement positif.

2. Comme $A'$ est symétrique, $A'^{-1}$ l'est aussi et $(C^\top A'^{-1})^\top = A'^{-1}C$, donc $L^\top = \begin{pmatrix} I_{n-1} & A'^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule par blocs :

$$L\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ C^\top A'^{-1}A' & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ C^\top & s \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ C^\top & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & A'^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & C \\ C^\top & C^\top A'^{-1}C + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & C \\ C^\top & d \end{pmatrix} = M.$$

Les matrices $L$ et $L^\top$ sont triangulaires à diagonale formée de 1, donc de déterminant 1, et la matrice centrale est diagonale par blocs : $\det M = \det A' \cdot s$.

3. Posons $D = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, symétrique. Comme $\det L = 1$, l'application $X \mapsto L^\top X$ est une bijection de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et pour tout $X$, $X^\top MX = (L^\top X)^\top D\,(L^\top X)$. Donc $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Pour $Y = \begin{pmatrix} Y' \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $Y' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, on a $Y^\top DY = Y'^\top A'Y' + sy_n^2$. Si $s > 0$ et $Y \neq 0$ : soit $Y' \neq 0$ et le premier terme est strictement positif, le second positif ; soit $Y' = 0$, $y_n \neq 0$ et $Y^\top DY = sy_n^2 > 0$. Donc $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $s \leq 0$, le vecteur $E_n$ de la base canonique donne $E_n^\top DE_n = s \leq 0$, et $D \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ : « toute $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les $\Delta_k$, $1 \leq k \leq n$, sont strictement positifs appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ».
*Initialisation.* Pour $n = 1$, $A = (a)$ avec $a = \Delta_1 > 0$, et $X^\top AX = ax^2 > 0$ pour $X = (x) \neq 0$.
*Hérédité.* Soit $n \geq 2$. On suppose $\mathcal{P}(n-1)$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\Delta_1, \ldots, \Delta_n > 0$. Écrivons $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^\top & d \end{pmatrix}$. Les déterminants principaux dominants de $A_{n-1}$ sont $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$, strictement positifs, donc $A_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ par $\mathcal{P}(n-1)$. La question 2 s'applique avec $A' = A_{n-1}$ : $\Delta_n = \det A = s\Delta_{n-1}$, donc $s = \Delta_n/\Delta_{n-1} > 0$, et la question 3 donne $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'où $\mathcal{P}(n)$.

5. (a) On a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = X^\top AX$ avec $X = (x, y, z)^\top$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ici $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2-1 = 1$ et $\Delta_3 = 1\cdot(6-1) - 1\cdot(3-0) = 2$, tous strictement positifs : $A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$ par le critère de Sylvester, donc $X^\top AX > 0$ pour $X \neq 0$.

(b) Non : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, mais $E_2^\top A E_2 = -1 < 0$. Le critère avec des inégalités larges ne caractérise pas $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

6. La matrice $A$ est symétrique réelle : par le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^\top$, et les $\lambda_i$ sont positifs puisque $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = \Delta P^\top$, on a $B^\top B = P\Delta^2 P^\top = A$ (exercice 9.30). Alors $(\det B)^2 = \det A > 0$, donc $B$ est inversible et admet une décomposition QR : $B = QR$ avec $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $R$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Alors

$$A = B^\top B = R^\top Q^\top Q R = R^\top R,$$

et $T = R$ convient.

7. Supposons $A = T^\top T = T'^\top T'$ avec $T$, $T'$ triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. Ces matrices sont inversibles, et l'égalité donne $T'T^{-1} = (T'^\top)^{-1} T^\top$. Le membre de gauche est triangulaire supérieur, le membre de droite triangulaire inférieur (produit de deux matrices triangulaires inférieures) : la matrice $D = T'T^{-1}$ est diagonale, à coefficients diagonaux strictement positifs comme quotients de tels coefficients. Alors $T' = DT$ et $T^\top T = T^\top D^2 T$, d'où $D^2 = I_n$ en simplifiant par $T^\top$ à gauche et $T$ à droite. Les coefficients diagonaux de $D$ sont donc égaux à 1 : $D = I_n$ et $T' = T$.

8. Notons $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} \\ 0 & 0 & t_{3,3} \end{pmatrix}$. Le coefficient $(i, j)$ de $T^\top T$ est $\sum_{k \le \min(i,j)} t_{k,i} t_{k,j}$.
En identifiant avec $A$ colonne par colonne :
   - $t_{1,1}^2 = 4$, donc $t_{1,1} = 2$ ; puis $t_{1,1}t_{1,2} = 2$ et $t_{1,1}t_{1,3} = -2$ donnent $t_{1,2} = 1$ et $t_{1,3} = -1$ ;
   - $t_{1,2}^2 + t_{2,2}^2 = 2$, donc $t_{2,2} = 1$ ; puis $t_{1,2}t_{1,3} + t_{2,2}t_{2,3} = 0$ donne $t_{2,3} = 1$ ;
   - $t_{1,3}^2 + t_{2,3}^2 + t_{3,3}^2 = 3$, donc $t_{3,3} = 1$.

   Ainsi
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   et l'on vérifie que $T^\top T = A$. Enfin $\det A = \det(T^\top)\det(T) = (\det T)^2 = (2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 4$.

9. Le coefficient $(j, j)$ de $T^\top T$ est $a_{j,j} = \sum_{i=1}^{j} t_{i,j}^2$, somme des carrés des coefficients de la $j$-ième colonne de $T$. Donc $a_{j,j} \ge t_{j,j}^2$, avec égalité si et seulement si $t_{i,j} = 0$ pour tout $i < j$. En multipliant ces inégalités entre réels strictement positifs,

$$\det A = (\det T)^2 = \prod_{j=1}^{n} t_{j,j}^2 \le \prod_{j=1}^{n} a_{j,j},$$

   avec égalité si et seulement si $t_{i,j} = 0$ pour tous $i < j$, c'est-à-dire si et seulement si $T$ est diagonale, ce qui équivaut à $A = T^\top T$ diagonale (si $A$ est diagonale, $T = \mathrm{diag}(\sqrt{a_{j,j}})$ convient et c'est l'unique décomposition).
   Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ n'est pas définie positive, 0 est valeur propre de $A$, donc $\det A = 0$, tandis que $a_{j,j} = E_j^\top A E_j \ge 0$ pour tout $j$ : l'inégalité $\det A \le \prod a_{j,j}$ reste vraie.

10. Si $M$ n'est pas inversible, $\det M = 0$ et l'inégalité est évidente. Sinon, $S = M^\top M$ est symétrique et, pour $X \neq 0$, $X^\top S X = \|MX\|^2 > 0$ puisque $M$ est inversible : $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (exercice 9.30, ou la question 6 de l'exercice 9.54). Son coefficient $(j,j)$ est $C_j^\top C_j = \|C_j\|^2$. La question 9 donne

$$(\det M)^2 = \det S \leq \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|^2,$$

d'où le résultat en prenant la racine carrée. L'égalité a lieu si et seulement si $S$ est diagonale, c'est-à-dire si et seulement si $C_i^\top C_j = 0$ pour $i \neq j$ : les colonnes de $M$ sont deux à deux orthogonales.

11. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ les valeurs propres de $A$, comptées avec multiplicité, de sorte que $\det A = \prod \lambda_i$ et $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$. Si l'une d'elles est nulle, $\det A = 0 \leq \left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n$. Sinon, toutes sont strictement positives, et la concavité du logarithme donne

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n},$$

soit, le logarithme étant croissant, $\left(\prod \lambda_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum \lambda_i$. En élevant à la puissance $n$, $\det A \leq \left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n$.