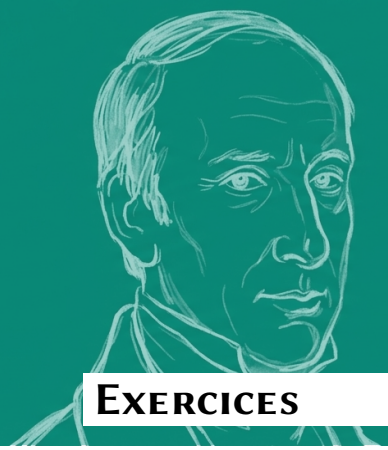


10 Séries entières

Exercices

Parcours conseillés

Piste verte
- 10.1 Calculs de rayons de convergence
- 10.12 Prolongement de $\arctan(x)/x$
- 10.29 Dérivées successives en 0
- 10.32 Sommes de séries numériques

Piste bleue
- 10.4 Rayon et somme de séries entières
- 10.26 Somme et produit de Cauchy
- 10.28 Calcul d'une somme de série entière
- 10.10 Problème de Cauchy (d'après PT 2008)

Piste rouge
- 10.33 Développements de $\sqrt{1+x}$ et arcsin
- 10.20 Suite récurrente linéaire (CCP 2011)
- 10.7 Développer quatre fonctions
- 10.8 Équation différentielle d'ordre 2

Piste noire
- 10.37 Coefficients entiers, périodiques
- 10.19 Intégrale de $\ln(1+t)/t$ sur $[0,1]$
- 10.36 Nombres de Catalan
- 10.42 Dérivées positives et tangente

Exercice 10.1 • Correction p. 14

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, lorsque

1. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$
2. $a_n = \mathrm{e}^{-n^2}$
3. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$
4. $a_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{65537}\right)$
5. $a_n = n!$
6. $a_{2n} = \alpha^n$, $a_{2n+1} = \beta^n$, $0 < \alpha < \beta$
7. $a_{2n} = \frac{1}{(1+n)^n}$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_{2n+1} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$, avec $a_1 = 1$.
8. $a_n = \frac{(-i)^n (n!)^n}{(2n+1)!}$

Exercice 10.2 • Correction p. 18

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes (avec $a > 0$) :

$$\sum \frac{(2n)!}{n^n n!} x^{2n}, \qquad \sum \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^{3n} \qquad \text{et} \qquad \sum a^n x^{n!}.$$

Exercice 10.3 • Correction p. 19

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Exercice 10.4 • Correction p. 20

Déterminer le rayon de convergence R et la somme des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n z^n$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta)\ x^n$, où $\theta \in \mathbb{R}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta) x^n}{n}$

Exercice 10.5 ○ Correction p. 23

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$.

Exercice 10.6 • Correction p. 24

Donner le rayon de convergence et calculer : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\ x^n}{(2n+1)!}$.

Exercice 10.7 •• Correction p. 27

1. Développer en série entière $x \mapsto \cos^3(x)$. Préciser son rayon de convergence.
2. Développer en série entière $x \mapsto \ln(2 + 3x + x^2)$. Préciser son rayon de convergence.
3. Développer en série entière $x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$. Préciser son rayon de convergence.
4. Développer en série entière $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t$. Préciser son rayon de convergence. *Indication : On commencera par trouver une équation différentielle vérifiée par f.*

Exercice 10.8 •• Correction p. 31

On considère l'équation différentielle suivante pour $t \in]-1, 1[$

$$(E) : \quad (1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$$

1. Déterminer les séries entières solutions de l'équation différentielle (E).
2. Après avoir calculé leurs rayons de convergence, exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires.
3. A-t-on ainsi toutes les solutions ?

Exercice 10.9 •• Correction p. 34

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) \quad ty'' + 2y' - ty = 0$

1. Trouver une solution y_0 de (E) développable en série entière.
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ en les cherchant sous la forme $y : t \mapsto y_0(t)z(t)$, avec z à déterminer (*c'est une méthode générale lorsque l'on connaît une solution d'une équation homogène linéaire d'ordre 2*).

Exercice 10.10 • Correction p. 37

d'après PT 2008.
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y' = xy + 1, \qquad y(0) = 0.$$

1. Soit $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geq 1$, a_{n+1} à a_{n-1}.
2. Pour tout entier naturel $p \geq 0$, en déduire la valeur de a_{2p}. Déterminer R.
3. Montrer, pour tout entier naturel $p \geq 0$, $a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}$.

Exercice 10.11 •• Correction p. 40

On pose $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0. Préciser son rayon de convergence.
2. Chercher une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
3. En déduire les coefficients du développement en série entière de f.
4. En déduire le développement en série entière de $\arcsin^2(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 10.12 ○ Correction p. 43

Montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

Exercice 10.13 • Correction p. 44

On note (E) l'équation différentielle $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

1. Chercher les solutions développables en série entière de (E).
2. Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 10.14 • Correction p. 46

Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

1. $y' - x^2 y = 0, y(0) = 1$
2. $xy'' + 2y' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
3. $xy' - y = \frac{x^2}{1-x}$
4. $xy'' + 2y' - xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Exercice 10.15 • Correction p. 51

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes.

1. $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$
2. $\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$

3. $\frac{2}{x^2-4x+3}$
4. $\frac{1}{x^2+x+1}$

Exercice 10.16 ●● Correction p. 54

Déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \ln^2(1+x)$ à l'aide d'une équation différentielle.

Exercice 10.17 ● Correction p. 56

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.
2. Donner le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, puis montrer que f est solution sur $]-R, R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.
3. En déduire f.

Exercice 10.18 ● Correction p. 57

1. Soit le polynôme $P(X) = (1+X)^3$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{P(n)}{n!} z^n$.
2. Déterminer des réels a, b, c, d tels que : $P(X) = aX(X-1)(X-2) + bX(X-1) + cX + d$.
3. En déduire que la somme de la série entière $\sum \frac{P(n)}{n!} z^n$ est de la forme $Q(z)\mathrm{e}^z$, où Q est un polynôme que l'on déterminera.
4. Plus généralement, P désignant un polynôme complexe quelconque, prouver que la somme de la série entière $\sum \frac{P(n)}{n!} z^n$ est de la forme $Q(z)\mathrm{e}^z$ où Q est un certain polynôme.

Exercice 10.19 ●● Correction p. 58

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (on admettra $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 10.20 ● Correction p. 60

CCP 2011 Officiel de la Taupe.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$. On pose $b_n = a_{n+1} - a_n$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} - b_n = 0$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = -4 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k$.
   (b) Déterminer la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On souhaite retrouver ce résultat grâce aux séries entières.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 2^{n+2}$.
   (b) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est non nul.

(c) Soit $\rho = \min\left(\frac{1}{2}, R\right)$ et $x \in]-\rho, \rho[$. On pose $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Montrer que $S(x) = \frac{-4+6x+6x^2}{(x+1)(x-1)^2}$ et qu'il existe trois réels a, b, c tels que $S(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$.

(d) Déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10.21 • Correction p. 63

CCP 2012 Officiel de la Taupe - exo 2.
Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est développable en série entière et donner son rayon de convergence.

Exercice 10.22 •• Correction p. 64

CCP PC 2019 (RMS 130 exo 1370) - 2014 (ODLT).

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t - 1}$ (*en 2019, il était donné :* $f(t) = 1 + t + t^2 + \frac{5}{6}t^3 + \mathrm{o}(t^3)$). En déduire $f^{(k)}(0)$ pour $0 \leq k \leq 3$.
2. On pose $p_0 = 1$ et $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.
   Calculer p_1, p_2, p_3 puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq n!$.
3. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0} \frac{p_n}{n!} x^n$ est non nul. On note F sa somme quand elle est définie.
4. Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $F'(x) = \mathrm{e}^x F(x)$ et en déduire que $f^{(n)}(0) = p_n$.

Exercice 10.23 ○ Correction p. 66

1. Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. On définit la suite (a_n) par $a_n = 2^n$ si n est le carré d'un entier, et $a_n = 0$ sinon. Déterminer, par la définition, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 10.24 • Correction p. 67

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente. En déduire le rayon de convergence R de la série entière.
2. Étudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ pour $z = 1$, puis pour $z = \mathrm{i}$.

Exercice 10.25 • Correction p. 67

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants.

1. $a_0 = 0$ et $a_n = n^{(-1)^n}$ pour $n \geqslant 1$; vérifier que la règle de d'Alembert ne s'applique pas.
2. $a_n = \sin(n)$; on montrera que la suite $(\sin(n))$ ne tend pas vers 0.
3. $a_0 = 0$ et $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

Exercice 10.26 • Correction p. 68

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum(2^n + 3^n)x^n$.
2. Calculer les coefficients du produit de Cauchy de $\sum x^n$ par $\sum(-1)^n x^n$. En déduire, pour $x \in]-1, 1[$, la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p}$.

3. Pour $n \geqslant 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et l'on pose $H_0 = 0$. Montrer que la série entière $\sum H_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 10.27 ○ Correction p. 69

À l'aide des développements en série entière de cos et de sin, montrer que les fonctions $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{x-\sin(x)}{x^3}$, définies sur $\mathbb{R}^\star$, se prolongent en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et donner la valeur en 0 de ces prolongements.

Exercice 10.28 • Correction p. 69

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$, et l'on note S sa somme.

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Pour $x \in]-R, R[$, on pose $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$. En primitivant le développement de $x \mapsto -\ln(1-x)$, exprimer T à l'aide des fonctions usuelles.
3. En déduire $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 10.29 ○ Correction p. 70

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants.

1. $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$.
2. $f = \arctan$.

Exercice 10.30 • Correction p. 70

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, et l'on admet (exemple du cours) que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $g = f + \cos$.

1. Déterminer la série de Taylor de g et son rayon de convergence.
2. Montrer que g n'est développable en série entière sur aucun intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

Exercice 10.31 • Correction p. 70

1. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que ch est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et retrouver son développement.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer de même que $x \mapsto \cos(x + a)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et donner son développement. Le retrouver à partir des développements de cos et de sin.

Exercice 10.32 ○ Correction p. 71

Calculer les sommes suivantes à l'aide des développements usuels.

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,3^n}$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$

Exercice 10.33 • Correction p. 72

1. Développer en série entière $x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur $]-1,1[$, en exprimant les coefficients à l'aide de $\binom{2n}{n}$.
2. À l'aide du développement de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u}}$ donné dans le cours, développer en série entière $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, puis arcsin, sur $]-1,1[$. Préciser les rayons de convergence.

Exercice 10.34 ○ Correction p. 73

1. À l'aide du développement en série entière de l'exponentielle complexe, montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|\mathrm{e}^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|} \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{e}^z - 1| \leqslant |z|\,\mathrm{e}^{|z|}.$$
2. Montrer que $\frac{\mathrm{e}^z-1}{z} \xrightarrow[z\to 0]{} 1$, la variable z décrivant $\mathbb{C}^\star$.

Exercice 10.35 ○ Correction p. 73

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $\exp(z) \neq 0$ et que $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nz) = \exp(z)^n$.
3. En déduire que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Exercice 10.36 •• Correction p. 73

On définit la suite (C_n) par $C_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ (nombres de Catalan). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} a_n$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. On note T sa somme.
2. À l'aide du binôme de Newton généralisé, montrer que, pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,
$$\sqrt{1-4x} = 1 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}.$$
3. Montrer que, pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, $xT(x)^2 - T(x) + 1 = 0$.
4. En déduire que $a_n = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 10.37 •• Correction p. 75

Soit (a_n) une suite d'entiers relatifs, et soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. On suppose $R > 1$. Montrer que $a_n = 0$ à partir d'un certain rang : la somme de la série entière est une fonction polynomiale.
2. On suppose que la suite (a_n) n'est pas nulle à partir d'un certain rang. Montrer que $R \leqslant 1$, et que $R = 1$ si de plus la suite (a_n) est bornée.
3. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $a_{n+p} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite (a_n) n'est pas la suite nulle. On pose $P(z) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k$. Montrer que $R = 1$ et que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{P(z)}{1-z^p}.$$

4. Calculer la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{3k} = 1$, $a_{3k+1} = -1$ et $a_{3k+2} = 0$.

Exercice 10.38 ●●● Correction p. 75

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme sur $]-R, R[$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_{n+p} x^n$ a pour rayon R et que, si $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$, alors $S(x) = x^p g(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$, où g est la somme de cette série entière.
2. On suppose qu'il existe une suite (x_k) d'éléments non nuls de $]-R, R[$, de limite nulle, telle que $S(x_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$. On admet que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est développable en série entière sur aucun intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.
4. Déterminer les séries entières $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ dont la somme S vérifie $S\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} < R$. Préciser leur rayon.

Exercice 10.39 ●● Correction p. 76

Déterminer les séries entières $\sum a_n x^n$ à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme S vérifie

$$\forall x \in \left]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right[, \quad S(2x) = S(x)^2,$$

avec la convention $\frac{R}{2} = +\infty$ si $R = +\infty$. On procédera ainsi.

1. Montrer que $a_0 \in \{0, 1\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n a_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$.
2. On suppose $a_0 = 0$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose $a_0 = 1$, et l'on pose $a = a_1$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $(2^n - 2)a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$, puis que $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Conclure.

Exercice 10.40 ●● Correction p. 77

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, puis que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.
2. Pour $x \in]-1, 1[$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\sin^2(t)}.$$

   Justifier que F est bien définie sur $]-1, 1[$, puis montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n} x^n$.
3. En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)}$.

Exercice 10.41 ●● Correction p. 78

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et l'on pose $H_0 = 0$.

1. Montrer que $1 \leqslant H_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum H_n x^n$.
2. À l'aide d'un produit de Cauchy, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.
3. En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{2}\ln^2(1-x)$.

4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)\,2^{n+1}}$.

Exercice 10.42 ● ● ● Correction p. 79

Soit $a > 0$, et soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, a[$,

$$f^{(n)}(t) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \left|f^{(n)}(-t)\right| \leqslant f^{(n)}(t).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-a, a[$, on pose $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a, a[$,

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, et x, y deux réels tels que $0 \leqslant x < y < a$. Montrer que

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

3. Montrer que $|R_n(-x)| \leqslant R_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, a[$. En déduire que f est développable en série entière sur $]-a, a[$.
4. *Application.* On note $\tan^{(n)}$ la dérivée n-ième de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes à coefficients positifs tels que $\tan^{(n)} = P_n \circ \tan$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan^{(n)}(-t) = (-1)^{n+1} \tan^{(n)}(t).$$

   (c) En déduire que tan est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que les coefficients d'indice pair de ce développement sont nuls, et calculer ceux d'indices 1, 3 et 5.



10 Séries entières

★ Pour aller plus loin

Exercice 10.43 ★ Correction p. 80

Le théorème d'Abel radial.
L'étude de la somme d'une série entière au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme. Cet exercice démontre que, si la série numérique $\sum a_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. La **partie I** le démontre par une transformation d'Abel, la **partie II** en tire des sommes de séries, et la **partie III** étudie la réciproque.
Dans les parties I et II, (a_n) est une suite de nombres complexes telle que la série $\sum a_n$ converge. On note $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ le reste d'ordre n ; on pose $r_{-1} = A$.

Partie I — Le théorème

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$. On note alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in [0, 1[$.
2. Soit $x \in [0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$. Vérifier que $a_n = r_{n-1} - r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que
$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = A - (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} r_n x^n - r_N x^N.$$
3. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum r_n x^n$ converge et
$$S(x) - A = -(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} r_n x^n.$$
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|r_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$,
$$|S(x) - A| \leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |r_n| + \varepsilon.$$
En déduire le **théorème d'Abel radial** :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$
c'est-à-dire que la fonction qui à $x \in [0, 1[$ associe $S(x)$ et à 1 associe A est continue sur $[0, 1]$.

Partie II — Applications

5. À l'aide des développements de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de arctan sur $]-1, 1[$, montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes de nombres complexes. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
On suppose que la série $\sum c_n$ converge. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n+1-k)} = \frac{2H_{n+1}}{n+2}.$$
   (b) Montrer que la suite $\left(\frac{H_{n+1}}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.
   (c) En déduire que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{H_{n+1}}{n+2} = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Partie III — La réciproque

8. Soit $a_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, sa somme sur $[0,1[$ et la limite de celle-ci en 1^-. La série $\sum a_n$ converge-t-elle ?
9. Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et soit S sa somme sur $[0,1[$. On suppose que $S(x)$ a une limite finie L quand x tend vers 1^-.
   (a) Montrer que S est croissante sur $[0,1[$, puis que $S(x) \leqslant L$ pour tout $x \in [0,1[$.
   (b) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$.

Exercice 10.44 ★ Correction p. 83

Développement en tout point et zéros isolés.
Le cours étudie les développements en série entière au voisinage de 0. Cet exercice montre que la somme d'une série entière se développe aussi en série entière de la variable $x - x_0$ au voisinage de tout point x_0 de l'intervalle ouvert de convergence, puis en déduit que cette somme, si elle n'est pas nulle, ne peut s'annuler sur une suite de points convergeant vers un point de l'intervalle ouvert de convergence. La **partie I** établit le développement, la **partie II** le principe des zéros isolés, et la **partie III** en donne deux conséquences.
Dans tout l'exercice, $\sum a_n x^n$ est une série entière de la variable réelle, à coefficients complexes, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$, et S est sa somme sur $]-R,R[$. Pour $c \in]-R,R[$, on note $\eta_c = R - |c|$ si R est fini, et $\eta_c = +\infty$ si $R = +\infty$.

Partie I — Développement au voisinage d'un point

1. Montrer que la série entière $\sum |a_n| x^n$ a pour rayon de convergence R. On note T sa somme sur $]-R,R[$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $T^{(k)}$ est positive et croissante sur $[0,R[$, et que $\left|S^{(k)}(x)\right| \leqslant T^{(k)}(|x|)$ pour tout $x \in]-R,R[$.
2. Soient $\rho \in [0,R[$ et $\delta \geqslant 0$ tels que $\rho + \delta < R$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{N} \frac{T^{(k)}(\rho)}{k!}\delta^k \leqslant T(\rho+\delta).$$

3. Avec les notations de la question 2, montrer que, pour tous entiers $M \leqslant N$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{T^{(k)}(\rho)}{k!}\delta^k \geqslant \sum_{n=0}^{M} |a_n|\,(\rho+\delta)^n.$$

En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^{(k)}(\rho)}{k!}\delta^k = T(\rho+\delta)$.

4. Soit $x_0 \in]-R,R[$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \eta_{x_0}$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| S(x_0+h) - \sum_{k=0}^{N} \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}h^k \right| \leqslant T(|x_0|+|h|) - \sum_{k=0}^{N} \frac{T^{(k)}(|x_0|)}{k!}\,|h|^k\,.$$

En déduire que la série entière $\sum \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$ de la variable h a un rayon de convergence supérieur ou égal à η_{x_0}, et que, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \eta_{x_0}$,

$$S(x_0+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}h^k.$$

5. Dans cette question, $S\colon x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$. Soit $x_0 \in]-1,1[$. Calculer $S^{(k)}(x_0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$. Comparer ce rayon à η_{x_0}.

Partie II — Le principe des zéros isolés

6. Soit $c \in]-R,R[$ tel que $S^{(k)}(c) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $S(c+h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < \eta_c$.
7. Soit $c \in]-R,R[$. On suppose qu'il existe une suite (x_p) d'éléments de $]-R,R[$, tous différents de c, de limite c, telle que $S(x_p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On suppose par l'absurde que les $S^{(k)}(c)$ ne sont pas tous nuls, et l'on note m le plus petit entier tel que $S^{(m)}(c) \neq 0$.
   (a) On pose $b_k = \frac{S^{(k)}(c)}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la série entière $\sum_{j\geqslant 0} b_{m+j}h^j$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à η_c et que, si g désigne sa somme, $S(c+h) = h^m g(h)$ pour tout h tel que $|h| < \eta_c$.
   (b) Conclure à une contradiction. On a donc $S^{(k)}(c) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
8. Soient $c \in]-R,R[$ et $\eta > 0$ tels que $]c-\eta,c+\eta[\subset]-R,R[$ et que S soit nulle sur $]c-\eta,c+\eta[$. On suppose par l'absurde qu'il existe $y \in [c,R[$ tel que $S(y) \neq 0$, et l'on note s la borne supérieure de l'ensemble

$$E = \{x \in [c,R[\ :\ S \text{ est nulle sur } [c,x]\}\,.$$

   (a) Justifier l'existence de s, et montrer que $c < s \leqslant y$ et que S est nulle sur $]c-\eta,s[$.
   (b) Montrer que $S^{(k)}(s) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis aboutir à une contradiction.
   (c) En déduire que S est nulle sur $]-R,R[$, puis que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. En déduire le **principe des zéros isolés** : si S s'annule en tous les termes d'une suite d'éléments de $]-R,R[$ différents de c et de limite $c \in]-R,R[$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie III — Deux conséquences

10. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence supérieurs ou égaux à $r > 0$, de sommes f et g sur $]-r,r[$. On suppose que $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in]-r,r[$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$. On admet que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On pose $\psi(x) = \varphi(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\varphi\psi$, et en déduire que φ n'est développable en série entière sur aucun intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

Exercice 10.45 ★ Correction p. 85

Les nombres de Bernoulli.
On définit une suite de rationnels par une relation de récurrence, on montre que la série entière associée a pour somme $x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, puis on en déduit une formule pour les sommes $\sum_{j=1}^{n} j^p$. La **partie I** étudie la suite, la **partie II** la fonction génératrice, et la **partie III** les sommes de puissances.
On définit la suite (b_n) par $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n+1-k)!} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n+1-k)!}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = n!\, b_n$: ce sont les **nombres de Bernoulli**.

Partie I — La suite

1. Calculer b_1, b_2, b_3 et b_4, puis B_1, B_2, B_3 et B_4.
2. Montrer que $|b_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum b_n x^n$ vérifie $\rho \geqslant 1$. On note B sa somme sur $]-\rho, \rho[$.

Partie II — La fonction génératrice

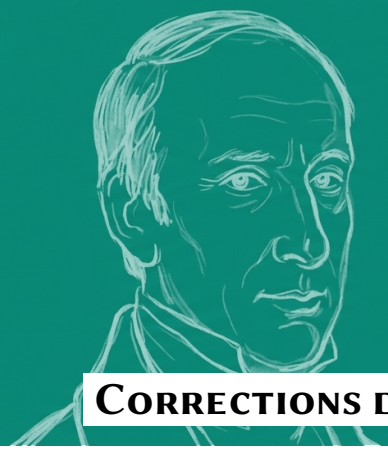
3. Montrer que la série entière $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ a un rayon de convergence infini. On note G sa somme. Montrer que $x\,G(x) = \mathrm{e}^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $G(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $G(x)B(x) = 1$ pour tout $x \in]-\rho, \rho[$. En déduire que $B(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ pour tout $x \in]-\rho, \rho[$ non nul.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto B(x) + \frac{x}{2}$ est paire sur $]-\rho, \rho[$. En déduire que $b_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
6. On suppose par l'absurde que $\rho > 2\pi$. En considérant le produit de Cauchy des séries entières $\sum \frac{z^n}{(n+1)!}$ et $\sum b_n z^n$ de la variable complexe z au point $z = 2i\pi$, aboutir à une contradiction. On a donc $1 \leqslant \rho \leqslant 2\pi$.

Partie III — Sommes de puissances

7. Soient $m \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{j=0}^{m-1} j^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k\, m^{p+1-k},$$

   avec la convention $0^0 = 1$. On pourra développer en série entière les deux membres de l'égalité $\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}^{jx} = \frac{\mathrm{e}^{mx}-1}{x} \cdot \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, valable pour $x \neq 0$.
8. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, les valeurs de $\sum_{j=1}^{n} j$, $\sum_{j=1}^{n} j^2$ et $\sum_{j=1}^{n} j^3$.



10

Séries entières

Corrections des exercices

Correction de l'exercice 10.1 **Énoncé p. 1**

On notera pour chaque série entière étudiée R son rayon de convergence.

1. On utilise la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Comme la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|\ell|}{|\ell|}\,|x| = |x|\,.$$

Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

- converge absolument si $|x| < 1$, donc $R \geq 1$,
- et diverge grossièrement si $|x| > 1$, donc $R \leq 1$.

Donc

$$\boxed{R = 1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)^2}}{\mathrm{e}^{-n^2}}\,|x| = \mathrm{e}^{-2n-1}\,|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Donc $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit

$$\boxed{R = +\infty}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \left|\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n x^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n |x| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x| = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)|x| \\ &= \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)|x| = \exp\left(1 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)\right)|x| \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(1)\,|x| = \mathrm{e}\,|x|\end{aligned}$$

(par continuité de la fonction exponentielle en 1).
Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

- converge absolument si $|x| < \frac{1}{\mathrm{e}}$, donc $R \geq \frac{1}{\mathrm{e}}$,
- et diverge grossièrement si $|x| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, donc $R \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Donc

$$\boxed{R = \frac{1}{\mathrm{e}}}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq 1.$$

Donc $a_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(1)$, donc, par comparaison (proposition du cours), R est supérieur ou égal au rayon de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1 \cdot x^n$, qui vaut 1 (rayon de la série géométrique). Donc

$$R \geq 1.$$

D'autre part, la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 65537-périodique et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{65537k} = 1.$$

Donc la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge grossièrement, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 1^n$ diverge, donc

$$R \leq |1| = 1.$$

Ainsi

$$\boxed{R = 1}.$$

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n > 0$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = (n+1)\,|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty > 1,$$

donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ diverge grossièrement d'après la règle de d'Alembert. On a donc $R \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit

$$\boxed{R = 0}.$$

6. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. Étudions le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n x^{2n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta^n x^{2n+1}$. Notons R_a et R_b leur rayon de convergence respectifs.
Calcul de R_a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, comme $\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha^n x^{2n} \neq 0,$$

puis

$$\left|\frac{\alpha^{n+1}x^{2n+2}}{\alpha^n x^{2n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\alpha|\left|x^2\right|.$$

Ainsi, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n x^{2n}$

- converge absolument si $|\alpha|\left|x^2\right| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, donc $R_a \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$,

— et diverge grossièrement si $|\alpha|\left|x^2\right| > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$, donc $R_a \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Donc

$$R_a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Remarque

On peut aussi remarquer que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n x^{2n}$ est une série géométrique de raison αx^2, donc converge si et seulement si $\left|\alpha x^2\right| < 1$, donc si et seulement si $|x| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, et on retrouve

$$R_a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

(*c'est bien une égalité, car on a une équivalence*).

En procédant de la même façon,

$$R_b = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

Comme la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est la somme des deux séries entières précédentes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha^n x^{2n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta^n x^{2n+1},$$

alors, le rayon de la somme de deux séries entières étant au moins égal au minimum de leurs rayons, avec égalité si ces rayons sont distincts (proposition du cours), la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$ ce qui est le cas ici, puisque $R_b < R_a$. D'où

$$\boxed{R = R_b = \frac{1}{\sqrt{\beta}}}.$$

7. Étudions le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(1+n)^n} x^{2n}$ et celui R_b de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} x^{2n+1}$.

Étude de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{(n+1)^n} x^{2n}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)^n} x^{2n} \neq 0$. Puis,

$$\left|\frac{x^{2(n+1)}}{(1+n+1)^{n+1}} \times \frac{(1+n)^n}{x^{2n}}\right| = |x|^2 \left|\frac{1}{(2+n)\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^2}{ne} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Remarque

En effet,

$$\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{1+n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{1+n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{1+n}\right)\right)\right) = \exp\left(1+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$$

par continuité de la fonction exponentielle en 1.

Donc, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+1)^n}x^{2n}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, ainsi $R_a \geq |x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, soit

$$R_a = +\infty.$$

Étude de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}x^{2n+1}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $x\neq 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}x^{2n+1}\neq 0$. Puis, comme pour la limite de la remarque,

$$\left|\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}x^{2(n+1)+1}}{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}x^{2n+1}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}|x|^2 = |x|^2.$$

Donc, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}x^{2n+1}$

- converge absolument si $|x|^2<1$, c'est-à-dire si $|x|<1$, donc $R_b\geq 1$,
- et diverge grossièrement si $|x|^2>1$, c'est-à-dire si $|x|>1$, donc $R_b\leq 1$.

D'où

$$R_b = 1.$$

Comme la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n$ est la somme des deux séries entières précédentes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+1)^n}x^{2n} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}x^{2n+1},$$

et le rayon de la somme de deux séries entières étant au moins égal au minimum de leurs rayons, avec égalité si ces rayons sont distincts (proposition du cours), la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R\geq \min(R_a,R_b)$ avec égalité si $R_a\neq R_b$ ce qui est le cas ici, puisque $R_a>R_b$. D'où

$$\boxed{R = R_b = 1}.$$

8. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a $a_n\neq 0$. Puis, pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $x\neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(2n+3)(2n+2)}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty > 1,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ diverge grossièrement. On a donc $R\leq |x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, soit

$$\boxed{R = 0}.$$

Correction de l'exercice 10.2 **Énoncé p. 1**

On notera pour chaque série entière étudiée R son rayon de convergence.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(2n)!}{n^n n!} x^{2n} \neq 0.$$

Puis,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(2n+2)! x^{2n+2} n^n n!}{(n+1)^{n+1}(n+1)!(2n)! x^{2n}}\right| = \left|\frac{(2n+2)(2n+1)x^2}{(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right| = \left|\frac{2(2n+1)x^2}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4|x|^2}{\mathrm{e}}$$

(car

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(1 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$$

par continuité de la fonction exponentielle en 1).

D'où, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!}{n^n n!} x^{2n}$

- converge absolument si $|x|^2 < \frac{\mathrm{e}}{4}$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$, donc $R \geq \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$,
- et diverge grossièrement si $|x|^2 > \frac{\mathrm{e}}{4}$, c'est-à-dire si $|x| > \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$, donc $R \leq \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

Ainsi

$$\boxed{R = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^{3n} \neq 0.$$

Puis,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(2n)!(n+1)^{2n+2} x^{3n+3}}{n^{2n}(2n+2)! x^{3n}}\right| = \left|\frac{(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} x^3}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \left|\frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} x^3}{2(2n+1)}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^2|x|^3}{4}.$$

(car

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(2n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(2 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2$$

par continuité de la fonction exponentielle en 2).

D'où, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^{3n}$

- converge absolument si $\frac{\mathrm{e}^2|x|^3}{4} < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \left(\frac{4}{\mathrm{e}^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, donc $R \geq \left(\frac{4}{\mathrm{e}^2}\right)^{\frac{1}{3}}$,

— et diverge grossièrement si $\frac{e^2|x|^3}{4} > 1$, c'est-à-dire $|x| > \left(\frac{4}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, donc $R \leq \left(\frac{4}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Ainsi

$$\boxed{R = \left(\frac{4}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n x^{n!} \neq 0$ (car $a > 0$). Puis, comme $a > 0$,

$$\left|\frac{a^{n+1}x^{(n+1)!}}{a^n x^{n!}}\right| = a|x|^{nn!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases}.$$

Donc, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n x^{n!}$

— converge absolument si $|x| < 1$, donc $R \geq 1$,
— et diverge grossièrement si $|x| > 1$, donc $R \leq 1$.

On a donc

$$\boxed{R = 1}.$$

Correction de l'exercice 10.3

Énoncé p. 1

Notons R_1 et R_2 les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^\alpha a_n z^n$.

Soit $\rho \in \mathbb{R}$ avec $\rho > 0$ tel que la suite numérique $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée. Soit $\rho' \in]0, \rho[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n n^\alpha \rho'^n = \underbrace{(a_n\rho^n)}_{\text{bornée}} \underbrace{n^\alpha \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(la limite provenant d'une croissance comparée, car $\left|\frac{\rho'}{\rho}\right| < 1$). Donc la suite numérique $(a_n n^\alpha \rho'^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Donc (par définition même du rayon de convergence),

$$R_2 \geq \rho',$$

et cela étant vrai pour tout $\rho' \in]0, \rho[$,

$$R_2 \geq \rho.$$

Or, cela est vrai pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée, donc pour tout $\rho \in]0, R_1[$. Donc

$$R_2 \geq R_1.$$

Soit $\rho \in \mathbb{R}$ avec $\rho > 0$ tel que la suite numérique $(a_n n^\alpha \rho^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée. Soit $\rho' \in]0, \rho[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n \rho'^n = \underbrace{(a_n n^\alpha \rho^n)}_{\text{bornée}} \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

(comme précédemment). Donc la suite numérique $(a_n\rho'^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. On a donc (comme précédemment)

$$R_1 \geq R_2.$$

Ainsi

$$R_1 = R_2.$$

Correction de l'exercice 10.4 **Énoncé p. 1**

1. Rayon de convergence : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n-1)!} \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n-1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{(n-1)!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit

$$\boxed{R = +\infty}.$$

Calcul de la somme : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \underset{k=n-1}{=} x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \boxed{xe^x}.$$

2. Rayon de convergence : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n^2 \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left|\frac{(n+1)^2x^{n+1}}{n^2x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^2x^n$

- converge absolument si $|x| < 1$, donc $R \geq 1$,
- et diverge grossièrement si $|x| > 1$, donc $R \leq 1$.

Donc

$$\boxed{R = 1}.$$

Calcul de la somme : la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour rayon 1, donc la somme de cette série entière est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et sur cet intervalle on peut dériver terme à terme (proposition du cours). Comme cette somme est la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant, pour $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = 0 + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

D'où, pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2},$$

puis

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-2} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

(des deux côtés, pour $n = 1$, on a x à ajouter), ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

puis

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \boxed{\frac{x^2+x}{(1-x)^3}}.$$

3. Calcul du rayon de convergence : Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{1}{(n-1)!} \neq 0$. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left| \frac{x^{2n+1}}{n!} . \frac{(n-1)!}{x^{2n-1}} \right| = \frac{\left|x^2\right|}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Ainsi, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit

$$\boxed{R = +\infty}.$$

Calcul de la somme : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!} = x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} - 1 \right) = \boxed{x \mathrm{e}^{x^2} - x}.$$

4. Rayon de convergence :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}.$$

En effet, la série diverge grossièrement en $z = \frac{1}{4}$ (les termes d'indices pairs valent 1, ils ne tendent pas vers 0), donc $R \leqslant \frac{1}{4}$ (proposition du cours). Le calcul de la somme qui suit montre que la série converge pour $|z| < \frac{1}{4}$, donc $R \geqslant \frac{1}{4}$.
Calcul de la somme : pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \frac{1}{4}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (4z)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^{2n+1} = \boxed{\frac{1}{1-(4z)^2} + \frac{2z}{1-(2z)^2}},$$

les séries convergeant bien, car on a des séries géométriques de raison $(4z)^2$ et $(2z)^2$, avec $\left|(4z)^2\right| < 1$ et $\left|(2z)^2\right| < 1$ puisque $|z| < \frac{1}{4}$.

5. On a

$$\boxed{R = 1}.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\cos(n\theta)| \leq 1$, donc, par comparaison (proposition du cours), R est supérieur ou égal au rayon de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1 \cdot x^n$, qui est de rayon 1 (série géométrique), donc

$$R \geq 1.$$

Puis, la suite numérique $\big(\cos(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (car sinon, $\cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, absurde, puisqu'en tant que suite extraite, on devrait avoir $\cos(2n\theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) , donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(n\theta)x^n$ diverge pour $x = 1$, donc

$$R \leq |1| = 1.$$

Calcul de la somme : pour tout $x \in]-1,1[$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(e^{i\theta}x\right)^n$ converge (série géométrique de raison $e^{i\theta}x$, avec $\left|e^{i\theta}x\right| = |x| < 1$), donc en prenant sa partie réelle :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta)\ x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}x\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{i\theta}x\right)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - xe^{i\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\big(1 - \cos(\theta)x\big) - i\sin(\theta)x}\right) \\
&= \frac{1 - \cos(\theta)x}{\big(1 - \cos(\theta)x\big)^2 + x^2\sin^2(\theta)}
\end{aligned}$$

Donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta)\ x^n = \frac{1 - x\cos(\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos(\theta)}}.$$

6. Calcul du rayon de convergence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos(n\theta)x^n}{n}\right) = \cos(n\theta)x^{n-1},$$

donc, une série entière ayant même rayon de convergence que sa série primitive (proposition du cours), la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)x^n}{n}$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \cos(n\theta)x^{n-1}$, donc (multiplier par x ne change pas le rayon) que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos(n\theta)x^n$, qui vaut 1 (vu à la question précédente). Donc

$$\boxed{R = 1}.$$

Calcul de la somme : Pour tout $x \in]-1,1[$, notons

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)x^n}{n}.$$

Comme c'est la somme d'une série entière de rayon 1, sur $]-1,1[$ la fonction S est de classe C^∞ et on peut la dériver terme à terme. Donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\ x^{n-1},$$

puis, grâce à la question précédente (le terme d'indice $n = 0$ manque),

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\ x^n = \frac{1 - x\cos(\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos(\theta)} - 1 = \frac{1 - x\cos(\theta) - x^2 - 1 + 2x\cos(\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos(\theta)},$$

donc (en divisant par x), pour $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ (pour ne pas diviser par 0),

$$S'(x) = \frac{-x + \cos(\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos(\theta)}.$$

Cette formule reste vraie pour $x = 0$, puisque

$$S'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta)\ 0^{n-1} = \cos(\theta)$$

($0^0 = 1$, et $0^{n-1} = 0$ pour $n \geq 2$), et

$$\left.\frac{-x + \cos(\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos(\theta)}\right|_{x=0} = \cos(\theta).$$

L'égalité étant valable sur **l'intervalle** $]-1,1[$, en intégrant (c'est de la forme $\frac{u'}{u}$ à constante près) : il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2 - 2x\cos(\theta)\right) + K$$

(les deux membres ont même dérivée sur un intervalle). Or $S(0) = 0$, d'où $K = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{S(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2 - 2x\cos(\theta)\right)}.$$

Correction de l'exercice 10.5 **Énoncé p. 2**

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

(développement usuel de exp, valable sur $\mathbb{R}$, proposition du cours), donc

$$t\,\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!}.$$

Cette série entière converge donc pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, donc est de rayon infini.
Or, une série entière de rayon R converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R,R[$ (proposition du cours), donc ici sur tout segment inclus dans $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$, donc sur $[0,x]$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0, x]$ (car polynomiale).
La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[0, x]$ (on vient de le justifier à l'aide du rayon de convergence).
D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment (chapitre « Suites et séries de fonctions ») :

$$\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$$

Autre méthode : pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ (développement usuel de exp, valable sur $\mathbb{R}$, proposition du cours), donc

$$t\,\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!}.$$

Cette série entière converge donc pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, donc est de rayon infini.
Donc la fonction

$$\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto t\,\mathrm{e}^t$$

est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Or, comme la fonction ϕ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et $0 \in \mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse donne que

$$\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de ϕ sur $\mathbb{R}$. Donc, en tant que primitive d'une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$, Φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et son développement s'obtient, à constante près, en primitivant terme à terme celui de ϕ (proposition du cours). Ainsi, il existe $K \in \mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = K + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}.$$

Puis, en évaluant en $x = 0$, comme $\Phi(0) = 0$, on obtient $K = 0$ (car $0^{n+2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), et donc on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}.$$

Correction de l'exercice 10.6 **Énoncé p. 2**

Calcul du rayon de convergence : Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{2n}{(2n+1)!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{2n}\,|x| = \frac{1}{(2n)(2n+3)}\,|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Donc $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit

$$\boxed{R = +\infty}.$$

Calcul de la somme : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1-1)x^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$$

(les deux séries de droite convergent : par la règle de d'Alembert, ce sont des séries entières de rayon infini).
Si $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{x}) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Si $x < 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{-x}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^n}{(2n+1)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}) - \dfrac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) - \dfrac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque

La fonction de droite étant égale à la somme d'une série entière de rayon infini, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en particulier au voisinage de 0, ce que son expression ne montre pas directement.

Autre méthode pour le calcul de la somme : notons

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^n}{(2n+1)!},$$

puis

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto xf(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{et} \qquad h : x \in \mathbb{R} \mapsto xf(-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les fonctions g et h sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ (une fois que l'on sait que f l'est), donc on peut les dériver terme à terme : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)!} = x\operatorname{sh}(x)$$

et

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n+1)(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1)!} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+2}}{(2k+1)!} = -x\sin(x).$$

Puis, en intégrant par parties,

$$\int^x t\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = [t\,\mathrm{ch}(t)]^x - \int^x \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$$

et

$$\int^x -t\sin(t)\,\mathrm{d}t = [t\cos(t)]^x - \int^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = x\cos(x) - \sin(x).$$

Comme les fonctions g et $x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$ ont même dérivée sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ **est un intervalle**, on en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) + K.$$

Or,

$$K = g(0) = 0f(0^2) = 0,$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(x^2) = g(x) = x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x),$$

soit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x^2) = \mathrm{ch}(x) - \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}.$$

De même, comme les fonctions h et $x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$ ont même dérivée sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ **est un intervalle**, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = x\cos(x) - \sin(x) + C.$$

Or,

$$C = h(0) = 0f(-0^2) = 0,$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(-x^2) = h(x) = x\cos(x) - \sin(x),$$

soit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x^2) = \cos(x) - \frac{\sin(x)}{x}.$$

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}^2\right) = \mathrm{ch}(\sqrt{x}) - \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$f(x) = f\left(-\sqrt{-x}^2\right) = \cos(\sqrt{-x}) - \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}.$$

Autre méthode pour le calcul de la somme : notons

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nx^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^n}{(2n+1)!},$$

puis

$$g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(x^2)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{(2n+1)!} \qquad \text{et} \qquad h : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(-x^2)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Les fonctions g et h sont les restrictions à $\mathbb{R}^*$ de fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ (une fois que l'on sait que f l'est), donc on peut les intégrer terme à terme : les fonctions

$$G : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{sh}(x) - x}{x} \qquad \text{et} \qquad H : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(x) - x}{x}$$

sont des primitives de g et h respectivement.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \frac{x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x^2) = xg(x) = \operatorname{ch}(x) - \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad f(-x^2) = xh(x) = \cos(x) - \frac{\sin(x)}{x}.$$

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}^2\right) = \operatorname{ch}(\sqrt{x}) - \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$f(x) = f\left(-\sqrt{-x}^2\right) = \cos(\sqrt{-x}) - \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}.$$

Correction de l'exercice 10.7 **Énoncé p. 2**

1) La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 donc par produit, la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$ est développable en série entière au voisinage de 0.
Comme le développement de cos a pour rayon de convergence $R = +\infty$, celui de $\cos^3$ a aussi pour rayon $+\infty$ (il est au moins égal à $+\infty$ par produit de Cauchy, proposition

du cours). Puis, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8} \\
&= \frac{\cos(3x)}{4}+\frac{3}{4}\cos(x) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n}}{(2n)!}+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(9^n+3)}{4(2n)!}x^{2n}}
\end{aligned}$$

(en utilisant le développement usuel de cos, valable sur $\mathbb{R}$, proposition du cours).
2) On a, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

Donc pour x « proche de 0 » (pour que $1+x>0$ et $2+x>0$),

$$\ln(2+3x+x^2)=\ln(1+x)+\ln(2+x)$$

(dans le cas général, il faut écrire $\ln(2+3x+x^2)=\ln|1+x|+\ln|2+x|$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $2+3x+x^2>0$, donc si $x<-2$ ou $x>-1$).
Or les fonctions

$$x \mapsto \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \ln(2+x)$$

sont développables en série entière au voisinage de 0 et donc la fonction $x \mapsto \ln(x^2+3x+2)$ est développable en série entière au voisinage de 0 par combinaison linéaire.
Et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

puis pour tout $x \in]-2,2[$,

$$\ln(2+x)=\ln(2)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=\ln(2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n n}.$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(x^2+3x+2)=\boxed{\ln(2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n}.$$

Le rayon de convergence est $R=1$: on additionne deux séries entières de rayons différents, 1 et 2, et le rayon de la somme vaut alors $\min(1,2)=1$ (proposition du cours).

3) Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont développables en série entière au voisinage de 0, les deux sont de rayon infini. Par produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence infini (proposition du cours), la fonction

$$x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$$

est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, de rayon infini.
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(1+i)x}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n\right)$$

(car $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, proposition du cours). Or $1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. On a donc en réinjectant :

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \mathrm{e}^{in\frac{\pi}{4}}}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{\sqrt{2}^n \mathrm{e}^{in\frac{\pi}{4}}}{n!} x^n\right) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) x^n}.$$

4) Pour tout réel $u \in \mathbb{R}$, on sait $\mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$. Donc, pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, comme $2t^2$ est encore réel, on peut remplacer u par $2t^2$, et donc

$$\mathrm{e}^{2t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} t^{2n}.$$

C'est la somme d'une série entière, de rayon infini puisque cette somme existe pour tout réel t. Donc la fonction

$$\phi : t \mapsto \mathrm{e}^{2t^2}$$

admet un développement en série entière en 0 de rayon infini.
Puis, la fonction ϕ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et $0 \in \mathbb{R}$, donc le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$\Phi : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$.
Or, la fonction ϕ est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon infini, donc la fonction Φ, primitive de ϕ, aussi (proposition du cours).
De même que pour ϕ, la fonction

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2}$$

est développable en série entière au voisinage de 0 de rayon infini.
Donc, par produit de Cauchy (proposition du cours), la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, de rayon (au moins) infini.
En particulier, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x^2}\Phi(x) + \mathrm{e}^{-2x^2}\Phi'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t + 1.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -4xf(x) + 1.$$

Comme la fonction f est développable en série entière de rayon infini, il existe $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Or, la somme d'une série entière de rayon R est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et sur cet intervalle on peut dériver terme à terme (proposition du cours). Ici, $R = +\infty$, donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(le 0 est la dérivée du terme d'indice $n = 0$). En réinjectant dans l'équation différentielle trouvée : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

soit en posant $k = n - 1$ et $p = n + 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + 4 \sum_{p=1}^{\infty} a_{p-1} x^p = 1,$$

puis

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \big((n+1)a_{n+1} + 4a_{n-1}\big) x^n = 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0.x^n.$$

L'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc par unicité des coefficients (corollaire du cours), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)a_{n+1} + 4a_{n-1} = 0$$

et $a_1 = 1$.
On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} = \frac{-4}{n+1} a_{n-1}. \tag{10.1}$$

On a aussi $a_0 = f(0) = 0$.
Montrons alors par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.
Initialisation : pour $p = 0$, $a_{2\cdot 0} = a_0 = 0$, d'où l'initialisation.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $a_{2p} = 0$. En prenant $n = 2p + 1$ dans la relation (10.1), alors

$$a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \frac{-4}{2p+2} a_{2p} = 0.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

Remarque

On aurait aussi pu remarquer que f était impaire pour dire que tous les a_{2p} étaient nuls.

Puis, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2p+1} = \frac{-4}{2p+1} a_{2p-1} = \frac{(-4)^2}{(2p+1)(2p-1)} a_{2p-3} = \cdots = \frac{(-4)^p}{(2p+1)(2p-1)\ldots 5.3} a_1$$

(au dénominateur, le produit des impairs). On multiplie au numérateur et au dénominateur par les termes pairs :

$$a_{2p+1} = \frac{(-4)^p 2^p p!}{(2p+1)!} a_1 = \frac{(-4)^p 2^p p!}{(2p+1)!}.$$

Montrons donc cette formule par récurrence sur p.
Initialisation : pour $p = 0$, $a_{2.0+1} = a_1 = 1$, et

$$\frac{(-4)^0 2^0 0!}{(2.0+1)!} a_1 = \frac{1.1.1}{1}.1 = 1,$$

d'où l'initialisation.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $a_{2p-1} = \frac{(-4)^{p-1} 2^{p-1} (p-1)!}{(2p-1)!} a_1$. En prenant $n = 2p$ dans la relation (10.1), alors

$$a_{2p+1} = \frac{-4}{2p+1} a_{2p-1} = \frac{-4}{2p+1} \frac{(-4)^{p-1} 2^{p-1} (p-1)!}{(2p-1)!} = \frac{-4(2p)}{(2p)(2p+1)} \frac{(-4)^{p-1} 2^{p-1} (p-1)!}{(2p-1)!} = \frac{(-4)^p 2^p p!}{(2p+1)!},$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = \frac{(-4)^p 2^p p!}{(2p+1)!}$.
On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-4)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}}.$$

Correction de l'exercice 10.8 **Énoncé p. 2**

1. Soit

$$f : t \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction f est alors de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et on peut dériver terme à terme sur cet intervalle (proposition du cours). Pour tout $t \in]-R, R[$,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^{n-1}, \qquad tf'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^n \qquad \text{et} \qquad f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R, R[&\Leftrightarrow \forall t \in]-R, R[,\ (1-t^2) f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in]-R, R[,\ (1-t^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t \in]-R, R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^n \\
&\Leftrightarrow \forall t \in]-R, R[,\ 2a_2 + 6a_3 t - 2a_1 t + 2a_0 + 2a_1 t + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} -
\end{aligned}$$

Ceci étant valable sur $]-R,R[$ avec $R>0$ (donc intervalle non trivial contenant 0), par unicité des coefficients (corollaire du cours), alors

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[\quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_2 + 2a_0 = 0 \\ 6a_3 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)(n+2)a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_3 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ a_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1} a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall p \geq 1,\ a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \geq 0,\ a_{2p} = \dfrac{-1}{2p-1} a_0 \end{cases}$$

En effet, en distinguant les indices pairs et impairs, la condition « pour tout $n \geq 2$, $a_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1} a_n$ » devient :

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = \dfrac{2p-1}{2p+1} a_{2p} \\ a_{2(p+1)+1} = a_{(2p+1)+2} = \dfrac{2p}{2p+2} a_{2p+1} \end{cases}$$

avec comme condition initiale : $a_3 = 0$ (donc a_1 et a_0 quelconques).
Donc, pour tout $t \in]-R,R[$,

$$f(t) = a_1 t + a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1}{2p-1} t^{2p}.$$

Déterminons le rayon de convergence R de f si $a_0 \neq 0$.
Si $a_0 \neq 0$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \dfrac{-1}{2p-1} a_0 \neq 0$, et donc pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \frac{a_{2p+2} t^{2p+2}}{a_{2p} t^{2p}} \right| = \left| \frac{2p-1}{2p+1} t^2 \right| \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} t^2.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{N}} a_{2p} t^{2p}$

- converge si $t^2 < 1$, c'est-à-dire si $|t| < 1$. Donc
$$R \geq 1,$$
- diverge si $t^2 > 1$, c'est-à-dire si $|t| > 1$. Donc
$$R \leq 1.$$

Donc
$$R = 1.$$

Donc ce qui précède assure que, pour tout $a_1 \in \mathbb{R}$ et $a_0 \in \mathbb{R}^*$, la fonction

$$t \mapsto a_1 t + a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1}{2p-1} t^{2p}$$

est la somme d'une série entière de rayon 1, donc est définie et de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et est solution de (E) sur $]-1,1[$.
Et, si $a_0 = 0$, alors la fonction

$$t \mapsto a_1 t$$

est solution sur $\mathbb{R}$, pour tout $a_1 \in \mathbb{R}$.
On a donc bien trouvé des solutions développables en série entière sur $]-1,1[$.
Elles sont toutes de la forme :

$$\boxed{t \in]-1,1[\mapsto a_1 t + a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1}{2p-1} t^{2p}}$$

pour $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$. Leur rayon de convergence est 1 si $a_0 \neq 0$ (et l'infini si $a_0 = 0$, car alors on a un polynôme).

2. Soit $t \in]-1,1[$. Exprimons $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2p-1}$ à l'aide des fonctions usuelles.

$$\ln(1+t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} t^n \qquad \text{et} \qquad -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n},$$

donc en distinguant les indices pairs et impairs,

$$\begin{aligned}
\ln(1+t) - \ln(1-t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} t^n \\
&= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n=2k \text{ pair}}} \frac{1-(-1)^n}{n} t^n + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n=2p+1 \text{ impair}}} \frac{1-(-1)^n}{n} t^n \\
&= 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1} \\
&\underset{n=p+1}{=} 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1}
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n-1} = \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1}$$

(en multipliant par $\dfrac{t}{2}$ et en tenant compte du premier terme qui manquait dans la formule précédente).
Donc les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$\boxed{t \in]-1,1[\mapsto a_1 t - a_0 \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + a_0}$$

pour $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$.

3. La fonction
$$f_1 : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n-1}$$
est solution de (E) sur $]-1,1[$. De plus, elle est linéairement indépendante avec la fonction
$$f_2 : t \mapsto t$$
car l'une est paire et l'autre est impaire (la seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle).
Sur l'intervalle $]-1,1[$, le coefficient $1-t^2$ de y'' ne s'annule pas, donc (E) équivaut à
$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}\,y' + \frac{2}{1-t^2}\,y = 0.$$
Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{2t}{1-t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{2}{1-t^2}$ sont continues sur l'intervalle $]-1,1[$, donc l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ est un espace vectoriel de dimension 2 (résultat hors programme, à connaître : proposition du cours).
La famille (f_1, f_2) est une famille libre de deux solutions de (E) sur $]-1,1[$, dont l'ensemble est de dimension 2 : c'en est une base.
Les solutions sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions de la forme
$$t \in]-1,1[\mapsto \alpha t + \beta \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p-1} t^{2p} = \boxed{\alpha t + \beta\left(\frac{t}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1\right)}$$
avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$: on les a toutes trouvées, et elles sont toutes développables en série entière.

Correction de l'exercice 10.9 **Énoncé p. 2**

1. Soit
$$f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$
une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R > 0$. Alors la fonction f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$, et on peut dériver terme à terme sur $]-R,R[$ (proposition du cours). On a donc, pour tout $t \in]-R,R[$,
$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$
En réinjectant dans (E) :
$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[&\iff \forall t \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} = 0 \\ &\iff \forall t \in]-R,R[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n = \\ &\iff \forall t \in]-R,R[,\ 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)(n+2)a_{n+1} - a_{n-1}\big) t^n = 0 \end{aligned}$$
Ceci étant valable sur $]-R,R[$ avec $R > 0$ (donc intervalle non trivial contenant

0), par unicité des coefficients (corollaire du cours), alors

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[\quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)(n+2)a_{n+1} - a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall p \geq 0,\ a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \geq 0,\ a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p+1)!} \end{cases}$$

En effet, $(n+1)(n+2)a_{n+1} - a_{n-1} = 0$ se réécrit

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)},$$

et donc en distinguant les indices pairs et impairs, « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ » devient :

$$\text{« pour tout } p \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{2(p+1)} = a_{(2p+1)+1} = \dfrac{1}{(2p+2)(2p+3)} a_{2p} \\ a_{2(p+1)+1} = a_{(2p+2)+1} = \dfrac{1}{(2p+3)(2p+4)} a_{2p+1} \end{cases} \text{ »}$$

avec comme condition initiale : $a_1 = 0$ (donc a_0 quelconque).
Ainsi on a :

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0\, t^{2p}}{(2p+1)!} = \begin{cases} a_0 \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ a_0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et on a $R = +\infty$ (par la règle de d'Alembert, ou parce que le développement usuel de sh (proposition du cours) donne

$$\mathrm{sh}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui assure la convergence de la série pour tout $t \in \mathbb{R}^*$).
Comme le rayon de cette série entière est bien strictement positif, on en déduit que la fonction f est bien une solution développable en série entière de (E), et c'est sur $\mathbb{R}$ car $R = +\infty$.
Donc la fonction

$$y_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p+1)!} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

répond à la question.

Remarque

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. On vient de prouver que

$$\mathrm{Vect}(y_0) \subset \mathcal{S}.$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ne sont pas toutes des restrictions de fonctions développables en série entière : la question 2 montre que $t \mapsto \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}$ appartient à $\mathcal{S}$, et cette fonction tend vers $+\infty$ en 0^+, alors que la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ est continue en 0 (proposition du cours). Ainsi

$$\mathrm{Vect}(y_0) \subsetneq \mathcal{S}.$$

2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y_0(t) = \frac{\mathrm{sh}(t)}{t}$$

(avec $y_0(0) = 1$), puis si on note

$$z = \frac{y}{y_0}$$

(qui est une fonction bien définie, car la fonction y_0 ne s'annule jamais), alors la fonction z est deux fois dérivable par quotient de fonctions qui le sont, dont celle du dénominateur qui ne s'annule pas.
Donc,

$$y = y_0 z, \qquad y' = y_0 z' + y_0' z \qquad \text{et} \qquad y'' = y_0 z'' + 2y_0' z' + y_0'' z,$$

ce qui donne

$$ty''+2y'-ty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ty_0 z''+(2ty_0'+2y_0)z' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z'' = -2\left(\frac{y_0'}{y_0} + \frac{1}{t}\right) z'$$

(car y_0 ne s'annule pas) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme la fonction

$$A : t \mapsto \ln|y_0(t)| + \ln(t)$$

est une primitive de la fonction continue

$$a : t \mapsto \frac{y_0'(t)}{y_0(t)} + \frac{1}{t}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$, et que la dernière équivalence traduit une équation différentielle d'ordre 1 dont z' est solution :

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ z' : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2\ln|y_0(t)|-2\ln(t)} = \frac{\lambda}{t^2 y_0(t)^2} = \frac{\lambda}{\mathrm{sh}^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ z : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mu - \lambda \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \boxed{y : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mu \frac{\mathrm{sh}(t)}{t} - \lambda \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}}$$

Autre rédaction possible : on part d'une fonction z et l'on pose $y = y_0 z$.
Soit $z : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et posons

$$y : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto y_0(t) z(t).$$

Alors, comme produit, la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et (par le même calcul que précédemment),

$$y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ y : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mu \frac{\mathrm{sh}(t)}{t} - \lambda \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}.$$

On a ainsi obtenu les solutions de la forme $y = y_0 z$ avec z deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour conclure que ce sont toutes les solutions, soit on vérifie que toute solution est de cette forme (ce qui provient de ce que y_0 ne s'annule pas sur

$\mathbb{R}_+^*$: c'est la première rédaction), soit on utilise la dimension de l'espace des solutions, comme ci-dessous.

Notons f et g les fonctions

$$f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t)}{t} \qquad \text{et} \qquad g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\mathrm{ch}(t)}{t}.$$

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme (E) est une équation différentielle linéaire **homogène**, on sait que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.

Comme

- $\mathbb{R}_+^*$ est un **intervalle**,
- les coefficients de (E) sont les fonctions

  $$t \mapsto t, \qquad t \mapsto 2 \qquad \text{et} \qquad t \mapsto -t,$$

  donc sont des fonctions **continues** sur $\mathbb{R}_+^*$,
- le coefficient devant y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en divisant par ce coefficient, (E) s'écrit $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ avec a et b **continues** sur $\mathbb{R}_+^*$,

l'ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension 2 :

$$\dim(\mathcal{S}) = 2$$

(résultat hors programme, à connaître : proposition du cours).

Enfin, la famille (f, g) est libre, puisque, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $af + bg = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 = af(t) + bg(t) = a\frac{\mathrm{sh}(t)}{t} + b\frac{\mathrm{ch}(t)}{t} \qquad \text{donc} \qquad 0 = a\,\mathrm{sh}(t) + b\,\mathrm{ch}(t).$$

Comme $0 \notin \mathbb{R}_+^*$, on fait tendre t vers 0^+ : par continuité de sh et ch en 0, alors

$$0 = \lim_{t\to 0^+} 0 = \lim_{t\to 0^+} \big(a\,\mathrm{sh}(t) + b\,\mathrm{ch}(t)\big) = a\,\mathrm{sh}(0) + b\,\mathrm{ch}(0) = b.$$

En reportant, alors $a\,\mathrm{sh}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc $a = 0$ (car sh n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$). Donc la famille (f, g) est bien libre.

Donc la famille (f, g) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{S}$, et $\dim(\mathcal{S}) = 2$, donc (f, g) est une base de $\mathcal{S}$.

Conclusion : on a bien trouvé toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

On a le même résultat sur $\mathbb{R}_-^*$, par le même calcul. Les seules solutions qui se prolongent par continuité en 0 sont alors celles avec $\lambda = 0$ et le même μ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ (il est alors la valeur en 0 du prolongement), et on sait alors (grâce à la question 1) qu'elles sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 10.10 **Énoncé p. 3**

1) F est la somme d'une série entière de rayon R, donc la fonction F est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et sur cet intervalle on peut dériver terme à terme (proposition du

cours), soit pour $x \in]-R, R[$,

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Puis, pour $x \in]-R, R[$,

$$xF(x) + 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$$

(après un changement d'indice), donc (comme $]-R, R[$ est un intervalle non trivial puisque $R > 0$, et contenant 0), par unicité des coefficients (corollaire du cours),

$$F \text{ est solution sur }]-R, R[\text{ de l'équation différentielle } y' = xy + 1 \text{ avec } y(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(0) = 0 \text{ et } \forall x \in]-R, R[,\ F$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = F(0) = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Remarque

1. L'énoncé ne demandait qu'une implication (on supposait que F était solution) ; les mêmes calculs donnent l'équivalence.
2. Remarquons que ce système définit de manière unique une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) En distinguant les indices pairs et impairs, soit $n = 2p$ (avec $p \geq 1$ pour avoir $n \in \mathbb{N}^*$) et $n = 2p + 1$ (avec $p \geq 0$ pour avoir $n \in \mathbb{N}^*$),

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n+1}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+2} = \frac{a_{2p}}{2p+2} \\ \\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{2p+1} \end{cases}$$

Montrons alors par récurrence que $a_{2p} = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $p = 0$, $a_0 = 0$ car $a_0 = F(0) = 0$.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $a_{2p} = 0$, alors

$$a_{2p+2} = \frac{1}{2p+2}a_{2p} = \frac{1}{2p+2} \times 0 = 0,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.
Donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$F(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}x^{2p+1},$$

avec $a_1 = 1$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2p+1} = \frac{a_{2p-1}}{2p+1}.$$

Montrons alors par récurrence que $a_{2p+1} > 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ (pour pouvoir utiliser la règle de d'Alembert).

Initialisation : pour $p = 0$, $a_1 = 1 > 0$.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $a_{2p-1} > 0$, alors

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} a_{2p-1} > 0$$

comme produit de deux réels strictement positifs, d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} > 0$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1}x^{2p+1} \neq 0$. Or,

$$\left|\frac{a_{2p+1}x^{2p+1}}{a_{2p-1}x^{2p-1}}\right| = \frac{x^2}{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{2p+1}x^{2p+1}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc

$$\boxed{R = +\infty}.$$

Remarque

Et grâce aux équivalences de la question 1, la fonction F définie ainsi est alors solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, en itérant la relation,

$$a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)(2p-1)\dots 5.3} a_1 = \frac{2p(2p-2)\dots 4.2}{(2p+1)!} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}$$

(en multipliant/divisant par les pairs). Montrons-le par récurrence sur p.
Initialisation : pour $p = 0$, $a_1 = 1$ et

$$\frac{2^0 0!}{(2.0+1)!} = \frac{1.1}{1} = 1,$$

on a bien égalité.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $a_{2p-1} = \frac{2^{p-1}(p-1)!}{\left(2(p-1)+1\right)!} = \frac{2^{p-1}(p-1)!}{(2p-1)!}$. Alors

$$a_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} a_{2p-1} = \frac{1}{2p+1} \frac{2^{p-1}(p-1)!}{(2p-1)!} = \frac{2p}{(2p)(2p+1)} \frac{2^{p-1}(p-1)!}{(2p-1)!} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!},$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{2^p p!}{(2p+1)!}}.$$

Et donc, la fonction

$$F : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy considéré.

Correction de l'exercice 10.11 **Énoncé p. 3**

1. Par le binôme de Newton généralisé (proposition du cours), la fonction

$$u \mapsto (1+u)^{-\frac{1}{2}}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$. Ainsi, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, pour tout $u \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n.$$

Remarque

On sait calculer les coefficients a_n pour $n \in \mathbb{N}$, mais on n'en a pas besoin ici.

Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $-x^2 \in]-1,1[$, donc « on peut poser $u = -x^2$ », et donc pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-1)^n x^{2n}.$$

Donc la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

admet un développement en série entière au voisinage de 0 de rayon au moins 1 (*en fait, exactement* 1).
On en déduit : comme arcsin est une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

la fonction arcsin admet un développement en série entière au voisinage de 0, de rayon au moins 1 (proposition du cours) (*là encore, exactement* 1*, puisque le précédent vaut exactement* 1).
Donc, par produit de Cauchy (proposition du cours), la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière au voisinage de 0, de rayon R au moins égal à 1 : $R \geq 1$. De plus

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la série entière de somme f sur $]-1,1[$ a une limite infinie en 1^-, donc ne peut pas avoir $R > 1$ (sinon, comme la somme d'une série entière de rayon R est continue sur $]-R,R[$ (proposition du cours), elle serait continue en $1 \in]-R,R[$, donc aurait une limite finie en 1). Donc $R \leq 1$. Donc

$$\boxed{R = 1}.$$

2. La fonction f étant développable en série entière sur $]-1,1[$, elle est de classe C^∞ sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\frac{-2x\ \arcsin(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}f(x).$$
Ainsi la fonction f est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
$$\boxed{(1-x^2)y' - xy = 1} \qquad (E).$$

3. On détermine d'abord les sommes de séries entières solutions de (E), puis on utilise la question 1.
Soit
$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction f est donc de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et sur cet intervalle on peut dériver terme à terme (proposition du cours). On a donc : pour tout $x \in]-R,R[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \qquad \text{puis} \qquad x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n.$$
Or, pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, et donc
$$xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$
(après changement d'indice).
En réinjectant dans (E) :
$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ f'(x) - x^2 f'(x) - xf(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{\infty} \big((n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\big) x^n + a_1 + 2a_2 x - a_0 x = 1 = \end{aligned}$$
Ainsi, (comme $]-R,R[$ est un intervalle non trivial, puisque $R > 0$, contenant 0), par unicité des coefficients (corollaire du cours),
$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ 2a_2 - a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} a_0 \\ \forall n \geq 2,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1} \end{cases} . \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Si n est pair, $n = 2p$ (avec $p \geq 1$ pour que $n \geq 1$) : on a $a_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} a_{2p-1}$ et $a_3 = \dfrac{2\,a_1}{3}$. Donc en itérant,

$$a_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)\dots 3} a_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

(en multipliant/divisant par les pairs). Montrons-le par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $p = 0$, $a_1 = 1$ et

$$\frac{(2^0 0!)^2}{(2.0+1)!} = \frac{(1.1)^2}{1} = 1,$$

il y a égalité.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $a_{2p-1} = \dfrac{\left(2^{p-1}(p-1)!\right)^2}{\left(2(p-1)+1\right)!} = \dfrac{\left(2^{p-1}(p-1)!\right)^2}{(2p-1)!}$, alors

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \frac{\left(2^{p-1}(p-1)!\right)^2}{(2p-1)!} = \frac{2p}{2p+1} \frac{2p}{2p} \frac{\left(2^{p-1}(p-1)!\right)^2}{(2p-1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!},$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}}.$$

D'autre part, pour n impair, $n = 2p+1$ (avec $p \geq 0$ pour avoir $n \geq 1$), $a_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} a_{2p}$. Donc, si $a_0 = 0$, alors

$$a_{2p} = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$ (récurrence directe).
Ainsi, la somme f d'une série entière de rayon $R > 0$ est solution de (E) sur $]-R, R[$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ (qui donne $a_0 = 0$) si et seulement si

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}}$$

pour tout $x \in]-R, R[$.
Comme la fonction

$$x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

est développable en série entière sur $]-1, 1[$, solution de (E) sur $]-1, 1[$ et nulle en zéro, c'est donc la fonction précédente.

Remarque

La règle de d'Alembert, appliquée à la série numérique $\sum a_{2p+1} x^{2p+1}$, redonne $R = 1$ à partir des formules ci-dessus.

4. La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, donc par produit, la fonction $\arcsin^2$ aussi, et on a
$$\left(\arcsin^2\right)' = 2f$$
sur $]-1,1[$.
Or la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc par primitivation (proposition du cours), la fonction $\arcsin^2$ aussi, et on peut primitiver terme à terme : pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\arcsin^2(x) = \arcsin^2(0) + 2\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}\frac{x^{2p+2}}{2p+2} = \boxed{\sum_{p=0}^{\infty} 2\frac{(2^p p!)^2}{(2p+2)!}x^{2p+2}}.$$

Correction de l'exercice 10.12 **Énoncé p. 3**

Par le développement usuel de arctan (proposition du cours), on a pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$
Donc pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$,
$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}.$$
Notons
$$g : x \in]-1,1[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}.$$
Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x)$ est la somme d'une série convergente (qui vaut $f(x)$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$), donc la fonction g est la somme d'une série entière de rayon au moins 1. Donc la fonction g est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ (proposition du cours).
De plus,
$$f = g \text{ sur }]-1,1[\setminus \{0\}.$$
Ainsi, la fonction g est un prolongement de la fonction f en 0, et il est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, ce qui répond à la question.
Autre façon de le présenter : pour $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$,
$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1,$$
donc la fonction f se prolonge par continuité en 0. Notons $\tilde{f}$ ce prolongement, il est donc défini par : pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$
Puis, pour tout $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$,
$$\tilde{f}(x) = f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}.$$

Et, en $x = 0$,

$$\tilde{f}(0) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{2n+1},$$

car

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{2n+1} = \frac{(-1)^0 0^0}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{2n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1$$

(car $0^0 = 1$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0^{2n} = 0$).
Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}.$$

La fonction $\tilde{f}$ est donc sur $]-1, 1[$ la somme d'une série entière, et cette série entière est au moins de rayon 1 puisqu'elle converge sur $]-1, 1[$ (son rayon est exactement 1, par la règle de d'Alembert), donc sa somme, soit $\tilde{f}$, est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.
Donc on a bien prolongé f en une fonction de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

Correction de l'exercice 10.13 **Énoncé p. 3**

1. Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sur $]-R, R[$, la fonction f est de classe C^∞, et on peut dériver terme à terme (proposition du cours). Donc, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Donc, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$x(x+1)f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \qquad \text{et} \qquad x^2 f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

En réinjectant dans (E) :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution sur }]-R, R[&\iff \forall x \in]-R, R[,\ x^2 f''(x) + x(x+1)f'(x) - f(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &\iff \forall x \in]-R, R[,\ a_1 x - a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big(n(n-1) a_n + (n-1) a_{n-1} + n a_n - a_n\big) x \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients (corollaire du cours), puisque $]-R, R[$ est un inter-

valle non trivial ($R > 0$),

$$f \text{ est solution sur }]-R,R[\quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 - a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ n(n-1)a_n + (n-1)a_{n-1} + na_n - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ a_n = -\dfrac{n-1}{n^2-1}a_{n-1} = -\dfrac{1}{n+1}a_{n-1} \end{cases}$$

(on peut diviser par $n^2 - 1$, car $n \geq 2$).
Donc

$$f \text{ est solution sur }]-R,R[\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}2}{(n+1)!}a_1 \end{cases}$$

(la première relation donne $a_2 = \dfrac{-1}{3}a_1$). Donc

$$f \text{ est solution sur }]-R,R[\ \Leftrightarrow \forall x \in]-R,R[,\ f(x) = 2a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n,$$

où R est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n$ (si $a_1 \neq 0$).
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \neq 0$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}x^n}\right| = \frac{|x|}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n$ converge pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$. Donc $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire

$$R = +\infty.$$

Donc les solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions

$$\boxed{x \in \mathbb{R} \mapsto 2a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n}$$

pour $a_1 \in \mathbb{R}$ quelconque.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$$

(série exponentielle privée de ses deux premiers termes). D'où

$$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{(n+1)!} = -1 + x + \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc

$$\boxed{f(x) = 2a_1 \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1 + x}{x}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (et $f(0) = 0$).

Correction de l'exercice 10.14 **Énoncé p. 3**

Soit

$$y : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. La fonction y est alors de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et sur cet intervalle, on peut dériver terme à terme (proposition du cours) : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad \text{et} \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \underset{n=k-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}.$$

1) Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$y'(x) - x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} \big((n+1)a_{n+1} - a_{n-2}\big) x^n,$$

donc (comme $]-R, R[$ est un intervalle non trivial puisque $R > 0$, contenant 0), par unicité des coefficients (corollaire du cours),

$$\begin{cases} \forall x \in]-R, R[, \ y'(x) - x^2 y(x) = 0 = 0 + 0 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 0.x^n \\ \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \forall n \geq 2, \ (n+1) a_{n+1} = a_{n-2} \\ a_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ a_{3n+1} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_{3n+2} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ a_{3n} = \frac{1}{(3n)(3n-3)\ldots 3} a_0 = \frac{1}{3^n n!} \end{cases}$$

(les expressions des suites s'obtenant facilement par récurrence sur n, en distinguant les indices de la forme $3n+1$, $3n+2$ et $3n$, puisque : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{3(n+1)} = a_{3n+3} = \frac{1}{3n+3} a_{3n} = \frac{1}{3(n+1)} a_{3n} \\ a_{3(n+1)+1} = a_{3n+4} = \frac{1}{3n+4} a_{3n+1} \\ a_{3(n+1)+2} = a_{3n+5} = \frac{1}{3n+5} a_{3n+2} \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$).

Comme, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \left|a_{3n} x^{3n}\right| = \frac{\left|x^3\right|^n}{3^n n!} \leq \frac{\left|x^3\right|^n}{n!}$$

et que la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\left|x^3\right|^n}{n!}$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (série exponentielle de somme $e^{|x^3|}$), par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{3n} x^{3n}$$

converge absolument (donc converge) pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit

$$R = +\infty.$$

Donc ce qui précède donne que la fonction

$$y : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n!} = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}$$

a un rayon de convergence infini, et est solution du problème de Cauchy considéré sur $\mathbb{R}$, et c'est la seule solution développable en série entière.

Remarque

L'équation est linéaire d'ordre 1, sous forme normalisée, et $x \mapsto -x^2$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, qui contient 0 : par le cours de première année, ce problème de Cauchy a une unique solution sur $\mathbb{R}$. C'est donc la seule solution sur $\mathbb{R}$, développable en série entière ou non.

2) Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \big((n+1)na_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\big)x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \big((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}\big)x^n \end{aligned}$$

donc (comme $]-R, R[$ est un intervalle non trivial puisque $R > 0$, contenant 0), par unicité des coefficients,

$$\begin{cases} \forall x \in]-R, R[,\ xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0 = 0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 0.x^n \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \\ a_0 = y(0) = 1 \\ a_1 = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_0 = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \end{cases}$$

(les expressions des suites s'obtenant facilement par récurrence sur n, en distinguant les indices pairs et impairs, puisque : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{2(n+1)} = a_{(2n+1)+1} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}a_{2n} \\ a_{2(n+1)+1} = -\frac{1}{(2n+3)(2n+4)}a_{2n+1} \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$).

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \neq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{\big(2(n+1)+1\big)!} x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}} \right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$

donc la règle de d'Alembert donne que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc le rayon R de la série entière associée vérifie $R \geq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc

$$R = +\infty.$$

Donc la fonction

$$y : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

a un rayon de convergence infini, et est solution du problème de Cauchy considéré sur $\mathbb{R}$, et c'est la seule solution développable en série entière.

Remarque

L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, admise dans la méthode du cours, ne s'applique pas ici : le coefficient de y'' s'annule en $x = 0$, où sont prises les conditions initiales. On a seulement montré que la solution développable en série entière est unique.

Puis, on reconnaît un développement en série entière usuel : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{y(x) = \frac{\sin(x)}{x}}$$

(et $y(0) = 1$).
3) Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{x^2}{1-x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

(série géométrique de raison x). Et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$xy'(x) - y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n x^n,$$

donc, en notant $S = \min(1, R) > 0$, (comme $]-S, S[$ est un intervalle non trivial puisque $S > 0$, contenant 0), par unicité des coefficients,

$$\forall x \in]-S,S[,\ xy'(x) - y(x) = \tfrac{x^2}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in]-S,S[,\ -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in]-S,S[,\ -a_0 + (1-1)a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n x^n = 0 + 0.x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ (1-1)a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ (n-1)a_n = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ a_n = \frac{1}{n-1} \end{cases}$$

Donc

$$y \text{ est solution sur }]-S,S[\Leftrightarrow \forall x \in]-S,S[,\ y(x) = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} \underset{k=n-1}{=} a_1 x + x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \boxed{a_1 x - x\ln(1-x)}$$

(en reconnaissant un développement en série entière usuel). Or, on sait que la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc on en déduit que $R = 1$ (ce que redonne aussi la règle de d'Alembert) et donc $S = 1$, et donc ce qui précède donne que les solutions développables en série entière sont les fonctions

$$x \mapsto a_1 x - x\ln(1-x),$$

et elles sont solutions et développables en série entière sur $]-1,1[$.
4) Pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned} xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)na_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}\right)x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+1} - a_{n-1}\right)x^n \end{aligned}$$

donc (comme $]-R,R[$ est un intervalle non trivial puisque $R>0$, contenant 0), par unicité des coefficients,

$$\begin{cases} \forall x\in\,]-R,R[,\ \ xy''(x)+2y'(x)-xy(x)=0=0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}0.x^n \\ \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2a_1=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ (n+1)(n+2)a_{n+1}-a_{n-1}=0 \\ a_0=y(0)=1 \\ a_1=y'(0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a_1=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ \ a_{2n+1}=0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ \ a_{2n}=\frac{1}{(2n+1)!}a_0=\frac{1}{(2n+1)!} \end{cases}$$

(les expressions des suites s'obtenant facilement par récurrence sur n, en distinguant les indices pairs et impairs, puisque : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{2(n+1)}=a_{(2n+1)+1}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}a_{2n} \\ a_{2(n+1)+1}=\frac{1}{(2n+3)(2n+4)}a_{2n+1} \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=0 \end{cases}$).

Puis, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{(2n+1)!}\neq 0$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ avec $x\neq 0$,

$$\left|\frac{\frac{1}{\big(2(n+1)+1\big)!}x^{2(n+1)}}{\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n}}\right|=\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0<1,$$

donc la règle de d'Alembert donne que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, donc le rayon R de la série entière associée vérifie $R\geq|x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, donc

$$R=+\infty.$$

Donc la fonction

$$y:x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

a un rayon de convergence infini, et est solution du problème de Cauchy considéré sur $\mathbb{R}$, et c'est la seule solution développable en série entière.

Remarque

L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, admise dans la méthode du cours, ne s'applique pas ici : le coefficient de y'' s'annule en $x=0$, où sont prises les conditions initiales. On a seulement montré que la solution développable en série entière est unique.

Puis, on reconnaît un développement en série entière usuel : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\boxed{y(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}}$$

(et $y(0) = 1$).

Correction de l'exercice 10.15 **Énoncé p. 3**

1) On se place pour x proche de 0, donc $1 + x > 0$ et $1 - x > 0$ (concrètement, pour $x \in]-1, 1[$). Donc en séparant les termes pairs et impairs,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{k}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}+1}{2k}x^k \\ &= \sum_{\substack{k\geq 1 \\ k=2n \text{ pair}}}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}+1}{2k}x^k + \sum_{\substack{k\geq 1 \\ k=2n+1 \text{ impair}}}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}+1}{2k}x^k \\ &= 0 + \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \end{aligned}$$

pour $x \in]-1, 1[$ (développements usuels, proposition du cours).

Remarque

Le rayon de convergence vaut 1 par la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

2) Notons

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right),$$

la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, donc sur $]-1, 1[$, donc la fonction f aussi par composition.
Pour $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \sqrt{2}\frac{1-x^2-(-2x)x}{(1-x^2)^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{2}\frac{1+x^2}{1+x^4}.$$

Or, pour tout $u \in \mathbb{C}$, si $|u| < 1$, alors

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty}(-u)^n$$

(série géométrique de raison $-u$ avec $|-u| < 1$). Et, pour $x \in]-1,1[$, on a $\left|x^4\right| < 1$, donc « on peut poser $u = x^4$ », ce qui donne, pour $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sqrt{2}(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+2}$$

C'est l'écriture d'une somme d'une série entière, c'est valable pour $x \in]-1,1[$, donc la fonction f' est développable en série entière sur (au moins) $]-1,1[$ (*en fait, c'est exactement sur* $]-1,1[$*, car en* 1*, la série diverge*).
Comme la fonction f est une primitive de f', et que la fonction f' est développable en série entière sur $]-1,1[$, la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et on peut primitiver terme à terme (proposition du cours) : comme $f(0) = 0$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+3}x^{4n+3} \\ &= \boxed{\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+3}x^{4n+3}} \end{aligned}$$

3) Pour tout $x \in]-1,1[$ (ainsi $|x| < 1$ et $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, pour utiliser l'expression d'une série géométrique de raison x et de raison $\frac{x}{3}$),

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x^2-4x+3} \\ &= \frac{2}{(x-1)(x-3)} \\ &= -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}x^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n} \end{aligned}$$

Remarque

Le rayon de convergence vaut 1, comme somme d'une série entière de rayon 1 et d'une autre de rayon 3 (proposition du cours).

4) Notons $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. Alors pour $x \in]-1,1[$ (ainsi $\left|\frac{x}{j}\right| = |x| < 1$ et $\left|\frac{x}{\overline{j}}\right| = |x| < 1$, pour utiliser l'expression d'une série géométrique de raison $\frac{x}{j}$ et $\frac{x}{\overline{j}}$) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{(x-j)(x-\overline{j})} \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}}\frac{1}{x-j} - \frac{1}{i\sqrt{3}}\frac{1}{x-\overline{j}} \\
&= -\frac{1}{i\sqrt{3}j}\frac{1}{1-\frac{x}{j}} + \frac{1}{i\sqrt{3}\,\overline{j}}\frac{1}{1-\frac{x}{\overline{j}}} \\
&= -\frac{1}{i\sqrt{3}j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{j^n} + \frac{1}{i\sqrt{3}\,\overline{j}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\overline{j}^n} \\
&= -\frac{1}{i\sqrt{3}j}\sum_{n=0}^{\infty} j^{2n}x^n + \frac{1}{i\sqrt{3}\,\overline{j}}\sum_{n=0}^{\infty} j^n x^n
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{j} = j^2$ et $\frac{1}{\overline{j}} = j$.
Donc

$$f(x) = \frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(j^{n+1} - j^{2n-1}\right)x^n.$$

— Si $n = 3k$ (avec $k \in \mathbb{N}$),

$$\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(j^{n+1} - j^{2n-1}\right) = 1.$$

— Si $n = 3k+1$ (avec $k \in \mathbb{N}$),

$$\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(j^{n+1} - j^{2n-1}\right) = -1.$$

— Si $n = 3k+2$ (avec $k \in \mathbb{N}$),

$$\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(j^{n+1} - j^{2n-1}\right) = 0.$$

D'où finalement, pour $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} - \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k+1}}.$$

Autre façon : de l'écriture

$$f(x) = -\frac{1}{i\sqrt{3}j}\frac{1}{1-\frac{x}{j}} + \frac{1}{i\sqrt{3}\,\overline{j}}\frac{1}{1-\frac{x}{\overline{j}}},$$

on sait que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 (comme somme de deux sommes de séries entières, qui s'écrivent comme des séries géométriques qui convergent pour $x \in]-1,1[$).

Par conséquent, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x+x^2)f(x) = 1,$$

donc

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = a_0 + (a_0+a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n + a_{n-1} + a_{n-2})x^n.$$

Par unicité des coefficients (corollaire du cours, l'égalité ayant lieu sur $]-1,1[$), on a $a_0 = 1$, $a_1 = -a_0 = -1$, et pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2}.$$

On vérifie alors que $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $a_5 = 0$, etc. (on montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que « $a_{3k} = 1$, $a_{3k+1} = -1$, $a_{3k+2} = 0$ » pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Correction de l'exercice 10.16 **Énoncé p. 4**

La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ par opérations usuelles.
Pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = 2\frac{\ln(1+x)}{1+x}, \qquad f''(x) = 2\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2},$$

donc

$$\boxed{(1+x)f''(x) + f'(x) = \frac{2}{1+x}}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière au voisinage de 0 (de rayon 1), par produit de Cauchy (proposition du cours), la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0, de rayon au moins 1. Il existe donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

De plus, la fonction f étant la somme d'une série entière sur $]-1,1[$ (donc de rayon au moins 1), elle est de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et sur cet intervalle on peut dériver terme à terme (proposition du cours). Alors, pour $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

Donc pour tout $x \in]-1,1[$, en utilisant la série géométrique (valable car $|-x| < 1$),

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^n = \frac{2}{1+x} &= (1+x)f''(x) + f'(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ &= 2a_2 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\big((n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1}\big)x^n\end{aligned}$$

Donc par unicité des coefficients (corollaire du cours, l'égalité étant vraie sur un intervalle non réduit à un point, à savoir $]-1,1[$, qui contient 0),

$$\begin{cases} 2a_2 + a_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} = 2\frac{(-1)^n}{n+1} \end{cases}$$

et on a $a_0 = f(0) = 0$, $a_1 = f'(0) = 0$, donc $a_2 = 1$.
Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = na_n$ et $v_n = u_{n+2} + u_{n+1} = 2\frac{(-1)^n}{n+1}$, alors pour tout $n \geq 3$,

$$\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k v_k = \sum_{k=1}^{n-2}\left((-1)^k u_{k+2} - (-1)^{k-1}u_{k+1}\right) = (-1)^{n-2}u_n - \underbrace{u_2}_{=2}$$

car on a une somme télescopique. Par conséquent, pour $n \geq 3$,

$$(-1)^n u_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k 2\frac{(-1)^k}{k+1} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

soit

$$a_n = 2\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

On vérifie directement que cela reste vrai pour $n = 2$. Et donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{\ln^2(1+x) = \sum_{n=2}^{\infty} 2\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)x^n.}$$

Correction de l'exercice 10.17 **Énoncé p. 4**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} &= -(-1)^n \tfrac{n+1}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}\\ &= -(-1)^n \tfrac{n+1}{2n+1}\tfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\\ &= -(-1)^n \tfrac{n+1}{2n+1}\tfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}\\ &= -\tfrac{n+1}{2n+1}\tfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}(2n-1)a_n\\ &= -2(2n-1)a_n\end{aligned}$$

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{2(2n-1)}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|x|.$$

Donc, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

- converge absolument si $4|x| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < \dfrac{1}{4}$, donc $R \geq \frac{1}{4}$,
- et diverge grossièrement si $4|x| > 1$, c'est-à-dire si $|x| > \dfrac{1}{4}$, donc $R \leq \frac{1}{4}$.

Donc

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}.$$

Puis, la fonction f est la somme d'une série entière de rayon R, donc est de classe C^∞ sur $]-R,R[$, et sur cet intervalle on peut dériver terme à terme (proposition du cours). Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < R = \frac{1}{4}$ on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2(2n-1)a_n x^n = 2f(x) - 4\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = 2f(x) - 4xf'(x).$$

Donc la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$\boxed{(1+4x)y' = 2y}$$

sur $]-R,R[$.

3) Les solutions de cette équation différentielle sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ (intervalle sur lequel $1+4x$ ne s'annule pas) sont les fonctions

$$y : x \mapsto A\exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+4x)\right) = A\sqrt{1+4x}$$

pour $A \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) = a_0 = -1$, on en déduit que

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{1+4x}}$$

pour tout $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$.

Correction de l'exercice 10.18 **Énoncé p. 4**

1) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3,$$

donc pour $n \in \mathbb{N}$ grand on a $P(n) \neq 0$, et

$$\left|\frac{\frac{P(n+1)z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{P(n)z^n}{n!}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^3}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Donc, par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P(n)}{n!}z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, donc le rayon R cherché vérifie $R \geq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, donc

$$\boxed{R = +\infty}.$$

2) On a

$$(1+X)^3 = X(X-1)(X-2) + 6X(X-1) + 7X + 1,$$

donc

$$\boxed{a = 1,\ b = 6,\ c = 7 \text{ et } d = 1}$$

(on résout le système obtenu en développant $aX(X-1)(X-2) + bX(X-1) + cX + d$ et en identifiant les coefficients avec ceux de P).

3) Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1}{n!}z^n \\
&= 0 + 0 + 0 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!}z^n + 6\left(0 + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}z^n\right) + 7\left(0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}z^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n \\
&\qquad \text{(sous réserve de convergence de ces s} \\
&\underset{\substack{k=n-3\\p=n-2\\q=n-1}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+3}}{k!} + 6\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{p+2}}{p!} + 7\sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^{q+1}}{q!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
&= \boxed{\left(z^3 + 6z^2 + 7z + 1\right)\mathrm{e}^z}
\end{aligned}$$

car on reconnaît des séries exponentielles (après changement d'indice), donc convergentes.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$N_k = X(X-1)\dots(X-k+1),$$

et $N_0 = 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{C}_p[X]$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(N_k) = k$, la famille $(N_k)_{k\in[\![0,p]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_p[X]$ (famille échelonnée en degré, donc libre, et de cardinal $p+1 = \dim\left(\mathbb{C}_p[X]\right)$), donc il existe $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k N_k.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{N_k(n)}{n!} = \begin{cases} \frac{1}{(n-k)!} & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_k(n)}{n!} z^n = \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} z^n \underset{j=n-k}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j+k}}{j!} = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k \mathrm{e}^z,$$

et la série initiale converge, comme combinaison linéaire de séries convergentes (séries exponentielles). Donc en posant

$$Q = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k,$$

on a bien le résultat, et de plus $\deg(Q) = p = \deg(P)$ (car $a_p \neq 0$, car N_p est le seul polynôme de degré au moins p parmi les N_k pour $k \in [\![0, p]\!]$, et que P est de degré p).

Correction de l'exercice 10.19 **Énoncé p. 4**

Remarquons que la fonction

$$t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$$

se prolonge en une fonction f continue sur le segment $[0, 1]$ (en posant $f(0) = 1$), donc l'intégrale a du sens (elle converge).
Pour $t \in]0, 1[$, le développement usuel de $t \mapsto \ln(1+t)$ (proposition du cours) donne

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k+1},$$

et cette formule reste valable pour $t = 0$ (avec le prolongement).
Or, la série entière

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{t^k}{k+1}$$

converge pour tout $t \in [0, 1[$, donc est de rayon au moins 1, donc converge normalement (donc uniformément) sur $[0, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$ (proposition du cours).

Remarque

On le retrouve rapidement, car si $t \in [0, a]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| (-1)^k \frac{t^k}{k+1} \right| \leq \frac{a^k}{k+1} \leq a^k,$$

et que la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$ converge (série géométrique de raison a avec $a \in]-1, 1[$).

Comme de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction

$$t \mapsto (-1)^k \frac{t^k}{k+1}$$

est continue sur $[0,1[$, donc sur $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$, le théorème d'intégration terme à terme sur un segment s'applique, et donne : pour tout $a \in [0,1[$,

$$\int_0^a \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^a (-1)^k \frac{t^k}{k+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in [0,1]$,

$$\left|(-1)^k \frac{a^{k+1}}{(k+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(k+1)^2},$$

donc si on note

$$f_k : a \in [0,1] \mapsto (-1)^k \frac{a^{k+1}}{(k+1)^2},$$

on a

$$\|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Or, la série numérique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(k+1)^2} \underset{p=k+1}{=} \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$$

converge (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_\infty$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge normalement sur $[0,1]$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est continue sur $[0,1]$ (car polynomiale).

Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

est continue sur $[0,1]$. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(a) \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

En effet,

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2}}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}} = \sum_{\substack{1\leq n\leq 2N \\ n=2k \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1\leq n\leq 2N \\ n=2k+1 \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Puis

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{\substack{1\leq n\leq 2N \\ n=2k \text{ pair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{\substack{1\leq n\leq 2N \\ n=2k+1 \text{ impair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{4} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}}_{\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{8}}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^2}\underset{n=k+1}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=-\frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Or, la fonction f est continue sur $[0,1]$, donc

$$\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{a\to1}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{a\to1}\int_0^a\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t=\lim_{a\to1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{k+1}}{(k+1)^2}=\boxed{\frac{\pi^2}{12}}.$$

Remarque

On est passé par les segments $[0,a]$ car on n'a pas convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^k}{k+1}$$

sur $[0,1]$ (car $\left\|(-1)^k\frac{t^k}{k+1}\right\|_{\infty,[0,1]}=\frac{1}{k+1}$ est le terme d'une série divergente).
Le critère spécial des séries alternées donne cependant la convergence uniforme sur $[0,1]$, ce qui permet d'intervertir directement intégrale sur $[0,1]$ et série, sans passer par les intégrales sur $[0,a]$.

Correction de l'exercice 10.20

Énoncé p. 4

1a) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$b_{n+2}-b_n=a_{n+3}-a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=0$$

d'après la relation vérifiée par (a_n).
Montrons ensuite la relation demandée par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $n=1$,

$$-4+\sum_{k=0}^{1-1}b_k=-4+b_0=-4+a_1-a_0=a_1$$

car $a_0=-4$, donc l'initialisation est vraie.
Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons $a_n=-4+\sum_{k=0}^{n-1}b_k$. Alors

$$-4+\sum_{k=0}^{(n+1)-1}b_k=-4+b_n+\sum_{k=0}^{n-1}b_k=a_n+b_n=a_{n+1},$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$a_n=-4+\sum_{k=0}^{n-1}b_k.$$

Remarque

L'égalité reste vraie pour $n=0$, si on prend comme convention qu'une somme vide vaut 0.

1b) Par récurrence directe (ou en remarquant que $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raison 1),

$$b_{2n} = b_0 = a_1 - a_0 = 6 \qquad \text{et} \qquad b_{2n+1} = b_1 = a_2 - a_1 = 2$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, en distinguant les indices pairs et impairs dans la somme,

$$a_{2n} = -4+\sum_{k=0}^{n-1} b_{2k}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} = -4+6n+2n = \boxed{-4+8n} \qquad \text{et} \qquad a_{2n+1} = -4+\sum_{k=0}^{n} b_{2k}+\sum_{k=0}^{n-1} b_{2k+1} = -4+6(n+1)+2n =$$

2a) On le montre par récurrence triple sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : D'après les valeurs données pour a_0, a_1, a_2, c'est vrai au rang $n = 0, 1$ et 2 :

$$|a_0| \leq 2^2 = 4, \qquad |a_1| \leq 2^3 = 8 \qquad \text{et} \qquad |a_2| \leq 2^4 = 16.$$

Hérédité : puis, soit $n \in \mathbb{N}$. Si $|a_n| \leq 2^{n+2}$, $|a_{n+1}| \leq 2^{n+3}$ et $|a_{n+2}| \leq 2^{n+4}$, alors par inégalité triangulaire,

$$|a_{n+3}| = |a_{n+2} + a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+2}|+|a_{n+1}|+|a_n| \leq 2^{n+4}+2^{n+3}+2^{n+2} = 2^{n+2}(4+2+1) \leq 2^{n+2}\times 8 = 2^{(n+3)+2}$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : par récurrence triple, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq 2^{n+2}.$$

2b) Grâce à la question précédente, la suite numérique $\left(\frac{a_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (sa valeur absolue est majorée par 4), donc, par définition du rayon de convergence, R vérifie

$$R \geq \frac{1}{2}.$$

Autre rédaction possible : comme $|a_n| \leq 2^{n+2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par comparaison (proposition du cours), le rayon R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{n+2}x^n = 4\sum_{n\in\mathbb{N}} (2x)^n,$$

or cette dernière série converge si (et seulement si) $|2x| < 1$, donc son rayon est au moins (en fait égal à) $\frac{1}{2}$, donc

$$R \geq \frac{1}{2}.$$

2c) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$(x+1)(x-1)^2 = x^3 - x^2 - x + 1,$$

donc pour tout $x \in]-\rho, \rho[$,

$$\begin{aligned}
(x+1)(x-1)^2 S(x) &= (x^3 - x^2 - x + 1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+3} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&\underset{\substack{p=k+3\\ n=k+2\\ q=k+1}}{=} \sum_{p=3}^{\infty} a_{p-3} x^p - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - \sum_{q=1}^{\infty} a_{q-1} x^q + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (a_{k-3} - a_{k-2} - a_{k-1} + a_k) x^k \\
&= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} 0 \cdot x^k \\
&= -4 + 6x + 6x^2
\end{aligned}$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient (pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$) :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} = \frac{(a+c)x^2 + (b-2c)x + (b-a+c)}{(x+1)(x-1)^2}$$

en identifiant, on veut $\begin{cases} a + c = 6 \\ b - 2c = 6 \\ b - a + c = -4 \end{cases}$, soit

$$\boxed{a = 7,\ b = 4,\ c = -1}.$$

2d) On utilise ensuite que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{x-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

(en reconnaissant des séries géométriques de raison x et $-x$, et géométrique dérivée de raison x, qui convergent pour $x \in]-1, 1[$).
On a alors, pour tout $x \in]-\rho, \rho[$,

$$S(x) = -7 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \big(-7 + 4(n+1) - (-1)^n \big) x^n.$$

Ceci étant valable sur $]-\rho, \rho[$ au moins (intervalle non trivial, puisque $\rho > 0$, contenant 0), par unicité des coefficients (corollaire du cours), alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_n = -7 + 4(n+1) - (-1)^n}.$$

Correction de l'exercice 10.21 **Énoncé p. 5**

Soit

$$g : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t},$$

la fonction g est définie et continue sur $]-1,+\infty[\setminus \{0\}$ par quotient de fonctions continues, dont celle du dénominateur qui ne s'annule pas sur cet ensemble, la fonction g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car

$$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t, \qquad \text{donc} \qquad g(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

La fonction g est alors continue sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, et $0 \in]-1,+\infty[$, donc le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t,$$

est l'unique primitive de g sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0.
Donc la fonction f est définie et dérivable (au moins) sur $]-1,+\infty[$.

Remarque

On peut se demander si la fonction f existe en -1, autrement dit si l'intégrale

$$I = \int_0^{-1} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

converge. Or, par le théorème de changement de variable, avec le changement affine $u = 1+t$, l'intégrale I a la même nature (et si convergence, même valeur) que l'intégrale

$$\int_1^0 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u.$$

Or, la fonction

$$u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$$

est continue sur $]0,1]$ et

$$\frac{\ln(u)}{u-1} \underset{u\to 0}{\sim} -\ln(u),$$

et on sait que la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, donc il y a convergence de l'intégrale, donc la fonction f est définie sur $[-1,+\infty[$.
Par contre, pour $x < -1$, $f(x)$ n'existe pas, car la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ n'est pas définie sur $]x,-1[$.

Puis, on peut développer la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ en série entière sur $]-1,1[$ (proposition du cours), ce qui donne, pour tout $t \in]-1,1[\setminus \{0\}$,

$$g(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \underset{p=n-1}{=} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} t^p.$$

Cette égalité reste vraie en $t = 0$ (avec le prolongement de g que l'on a fait avant), et donc la fonction g est développable en série entière sur $]-1,1[$ (puisque c'est la somme d'une série entière sur $]-1,1[$).

Donc la fonction f aussi, en tant que primitive d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$ (proposition du cours), et son développement a même rayon que celui de $f' = g$ (proposition du cours), donc 1 (règle de d'Alembert).

Remarque

De plus, on peut primitiver terme à terme : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2} x^{p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2} x^{p+1}.$$

L'égalité reste vraie si $x = \pm 1$: cela relève du théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions (chapitre « Suites et séries de fonctions »).

Correction de l'exercice 10.22 **Énoncé p. 5**

1) Par le développement limité usuel de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^3).$$

Puis, $\mathrm{e}^t - 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc par composition de DL,

$$f(t) = 1 + \left(\mathrm{e}^t - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t - 1\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^t - 1\right)^3 + \underset{t\to 0}{o}\left(\left(\mathrm{e}^t - 1\right)^3\right).$$

Puis,

$$\left(\mathrm{e}^t - 1\right)^3 \underset{t\to 0}{\sim} t^3, \qquad \text{donc} \qquad \underset{t\to 0}{o}\left(\left(\mathrm{e}^t - 1\right)^3\right) = \underset{t\to 0}{o}(t^3).$$

Enfin,

$$\left(\mathrm{e}^t - 1\right)^3 = t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3) \qquad \text{et} \qquad \left(\mathrm{e}^t - 1\right)^2 = t^2 + t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3),$$

donc

$$f(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2}(t^2 + t^3) + \frac{1}{6}t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3) = \boxed{1 + t + t^2 + \frac{5}{6}t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)}.$$

Or, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$), donc par la formule de Taylor-Young,

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2}t^2 + \frac{f'''(0)}{6}t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3).$$

Par unicité du DL, on en déduit

$$\boxed{f(0) = 1 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 2 \qquad f'''(0) = 5}.$$

2) $p_1 = \binom{0}{0} p_0 = p_0 = \boxed{1}$.

$p_2 = \binom{1}{0} p_0 + \binom{1}{1} p_1 = p_0 + p_1 = \boxed{2}$.

$p_3 = \binom{2}{0} p_0 + \binom{2}{1} p_1 + \binom{2}{2} p_2 = p_0 + 2p_1 + p_2 = \boxed{5}$.

Montrons par récurrence **forte** sur $n \in \mathbb{N}$ que $p_n \leq n!$.
Initialisation : pour $n = 0$,

$$p_0 = 1 \leq 1 = 0!,$$

donc la proposition est vraie si $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $p_k \leq k!$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(n-k)! \geq 1$, donc $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$, et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1,$$

ce qui donne

$$p_{n+1} \leq n! \times (n+1) = (n+1)!.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien montré par récurrence sur n que $p_n \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) De la question précédente, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{p_n}{n!} \leq 1$$

(la positivité est immédiate par récurrence forte aussi), donc la suite numérique

$$\left(\frac{p_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{p_n}{n!} 1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est bornée. Or, par définition,

$$R = \sup \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, \text{ la suite } \left(\frac{p_n}{n!} x^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\},$$

donc $R \geq 1$, ce qui assure bien $R > 0$.
4) La fonction F est la somme d'une série entière de rayon R, donc est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et sur cet intervalle on peut dériver terme à terme (proposition du cours). Donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n.$$

Puis, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, donc par produit de Cauchy (proposition du cours) de séries numériques absolument convergentes (les séries entières convergent absolument en tout point de l'intervalle ouvert de convergence), pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\mathrm{e}^x F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{p_k}{k!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \right) x^n$$

En utilisant la définition de p_{n+1} pour $n \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\mathrm{e}^x F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n = F'(x)$$

pour tout $x \in]-R, R[$.
La fonction F est donc solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle linéaire

$$y' = \mathrm{e}^x y.$$

Comme la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur l'intervalle $]-R, R[$ et admet $x \mapsto \mathrm{e}^x$ comme primitive sur cet intervalle, on sait résoudre directement cette équation différentielle, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$F : x \in]-R, R[\mapsto \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}.$$

Puis, en évaluant en 0,

$$\lambda \mathrm{e} = F(0) = p_0 = 1, \qquad \text{donc} \qquad \lambda = \mathrm{e}^{-1},$$

et donc

$$F : x \in]-R, R[\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1} = f(x).$$

Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

(ici on utilise que $R > 0$). Or, comme la fonction F est la somme d'une série entière, on sait calculer les coefficients de la série entière en fonction des dérivées successives de F en 0 (une fonction développable en série entière au voisinage de 0 est la somme de sa série de Taylor, proposition du cours) : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{p_n}{n!} = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ceci donne bien

$$p_n = f^{(n)}(0)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 10.23 **Énoncé p. 5**

1) La série $\sum a_n$ converge, donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Une suite convergente est bornée : la suite $(a_n 1^n)$ est bornée. Par le lemme d'Abel (du cours), appliqué avec $z_0 = 1$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2) Soit $r \geqslant 0$. Si n n'est pas un carré, $a_n r^n = 0$; si $n = k^2$ avec $k \in \mathbb{N}$, $a_n r^n = 2^{k^2} r^{k^2} = (2r)^{k^2}$.

- Si $r \leqslant \frac{1}{2}$, alors $0 \leqslant (2r)^{k^2} \leqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$: la suite $(a_n r^n)$ est bornée par 1.
- Si $r > \frac{1}{2}$, alors $2r > 1$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $k^2 \geqslant k$, donc $(2r)^{k^2} \geqslant (2r)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$: la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée.

L'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que $(a_n r^n)$ est bornée est $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, de borne supérieure $\frac{1}{2}$. Le rayon de convergence est $R = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10.24 Énoncé p. 5

1) La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et de limite nulle : par critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Elle ne converge pas absolument, puisque $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{1/2}}$ et que la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge ($\frac{1}{2}\leqslant 1$). Elle est donc semi-convergente : la série entière est semi-convergente en $z_0=-1$, donc $R=|-1|=1$ (proposition du cours).
2) Pour $z=1$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente.
Pour $z=\mathrm{i}$, posons $u_n=\frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{n}}$ pour $n\geqslant 1$. Comme $\mathrm{i}^{2p}=(-1)^p$ et $\mathrm{i}^{2p+1}=(-1)^p\mathrm{i}$, on a, pour tout p,

$$\mathrm{Re}(u_{2p})=\frac{(-1)^p}{\sqrt{2p}},\quad \mathrm{Re}(u_{2p+1})=0,\quad \mathrm{Im}(u_{2p})=0,\quad \mathrm{Im}(u_{2p+1})=\frac{(-1)^p}{\sqrt{2p+1}}.$$

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)_{p\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right)_{p\geqslant 0}$ sont décroissantes et de limite nulle : par critère spécial des séries alternées, les séries $\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^p}{\sqrt{2p}}$ et $\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{\sqrt{2p+1}}$ convergent. Les termes d'indice impair de $\sum\mathrm{Re}(u_n)$ étant nuls, ses sommes partielles sont celles de $\sum_{p\geqslant 1}\frac{(-1)^p}{\sqrt{2p}}$, chacune répétée : la série $\sum\mathrm{Re}(u_n)$ converge. De même, les termes d'indice pair de $\sum\mathrm{Im}(u_n)$ étant nuls, la série $\sum\mathrm{Im}(u_n)$ converge. La série $\sum u_n$ converge donc. Elle ne converge pas absolument, puisque $|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 10.25 Énoncé p. 5

1) Les coefficients a_n, $n\geqslant 1$, sont non nuls. Pour n pair, $a_n=n$ et $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n(n+1)}$; pour n impair, $a_n=\frac{1}{n}$ et $a_{n+1}=n+1$, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}=n(n+1)$. Le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 0 le long des indices pairs et vers $+\infty$ le long des indices impairs : il n'a pas de limite, et la règle de d'Alembert (proposition du cours) ne s'applique pas.
Pour tout $n\geqslant 1$, $\frac{1}{n}\leqslant a_n\leqslant n$.

- On a $a_n=\mathrm{O}(n)$: par comparaison (proposition du cours) avec $\sum nz^n$, de rayon 1, $R\geqslant 1$.
- On a $\frac{1}{n}=\mathrm{O}(a_n)$: par comparaison avec $\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$, de rayon 1, $1\geqslant R$.

Donc $R=1$.
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\sin(n)|\leqslant 1$, donc $a_n=\mathrm{O}(1)$, et par comparaison avec $\sum z^n$, de rayon 1, $R\geqslant 1$.
Supposons par l'absurde que $\sin(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sin(n+1)=\sin(n)\cos(1)+\cos(n)\sin(1)$, donc

$$\cos(n)\sin(1)=\sin(n+1)-\sin(n)\cos(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Comme $0<1<\pi$, $\sin(1)\neq 0$, donc $\cos(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Alors $1=\cos^2(n)+\sin^2(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, ce qui est absurde. La suite $(\sin(n)1^n)$ ne tend pas vers 0 : la série $\sum\sin(n)1^n$ diverge grossièrement, donc $R\leqslant 1$ (proposition du cours). Donc $R=1$.
3) Comme $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$. Par comparaison avec $\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$, de rayon 1, $R=1$.

Correction de l'exercice 10.26 **Énoncé p. 5**

1) Les coefficients de $\sum 2^n x^n$ sont non nuls et $\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$: par la règle de d'Alembert (du cours), son rayon est $R_a = \frac{1}{2}$. De même, le rayon de $\sum 3^n x^n$ est $R_b = \frac{1}{3}$. Comme $R_a \neq R_b$, le rayon de la somme de ces deux séries entières est le plus petit des deux (proposition du cours) : le rayon de $\sum (2^n + 3^n)x^n$ est

$$R = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Pour $|x| < \frac{1}{3}$, on a $|2x| < 1$ et $|3x| < 1$; la somme de la série entière $\sum (2^n + 3^n)x^n$ est alors la somme des sommes des deux séries (même proposition), et par la somme d'une série géométrique,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}.$$

2) Les coefficients du produit de Cauchy sont, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot (-1)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Les séries entières $\sum x^n$ et $\sum (-1)^n x^n$ ont pour rayon 1, et pour $x \in]-1, 1[$ leurs sommes sont $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$ (proposition du cours). Comme produit de Cauchy de deux séries entières de rayon 1, la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon au moins égal à 1, et sa somme est le produit des sommes sur $]-1, 1[$ (proposition du cours) : pour tout $x \in]-1, 1[$, les termes d'indice impair étant nuls,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}.$$

3) On pose $a_0 = 0$ et $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 1$. La série entière $\sum a_k x^k$ a pour rayon 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ (proposition du cours). Le produit de Cauchy de $\sum a_k x^k$ et de $\sum x^n$ a pour coefficients $c_0 = a_0 = 0 = H_0$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n.$$

Comme produit de Cauchy de deux séries entières de rayon 1, la série entière $\sum H_n x^n$ a un rayon $R \geqslant 1$, et sa somme est le produit des sommes sur $]-1, 1[$ (proposition du cours) : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H_n x^n = -\ln(1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Enfin, pour $n \geqslant 1$, $H_n \geqslant 1$, donc $1 = O(H_n)$, et par comparaison avec $\sum x^n$ (proposition du cours), $R \leqslant 1$. Donc $R = 1$.

Correction de l'exercice 10.27 **Énoncé p. 6**

Par les développements usuels de cos et de sin, valables sur $\mathbb{R}$ (proposition du cours), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1-\cos(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad x - \sin(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. En divisant par x^2, puis en posant $p = n-1$,

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+2)!}.$$

La série entière $\sum (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+2)!}$ converge donc en tout $x \neq 0$, et en $x = 0$; son rayon est $+\infty$ (proposition du cours). Sa somme g, somme d'une série entière de rayon $+\infty$, est continue sur $\mathbb{R}$ (proposition du cours), et coïncide avec $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^\star$. Cette fonction se prolonge donc en la fonction continue g, avec

$$g(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

De même, pour $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$\frac{x-\sin(x)}{x^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p+3)!},$$

série entière qui converge en tout point de $\mathbb{R}$, donc de rayon $+\infty$, et dont la somme h est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{x-\sin(x)}{x^3}$ se prolonge en h, avec $h(0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 10.28 **Énoncé p. 6**

1) On a $\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$: par comparaison (proposition du cours) avec $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$, de rayon 1, on obtient $R = 1$.
2) Par le développement usuel de $\ln(1-t)$ (proposition du cours), pour tout $t \in]-1,1[$, $-\ln(1-t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{t^m}{m}$, avec une série entière de rayon 1. Une série entière s'intègre terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence (proposition du cours) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x -\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{m+1}}{m(m+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = T(x),$$

en posant $n = m-1$. Par le changement de variable $u = 1-t$,

$$\int_0^x -\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{1-x} \ln(u)\,\mathrm{d}u = [u\ln(u) - u]_1^{1-x} = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $T(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$.
3) Pour tout $x \in]-1,1[$, $T(x) = x^2 S(x)$. Donc $S(0) = \frac{1}{2}$ et, pour $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$,

$$S(x) = \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{x^2}.$$

Correction de l'exercice 10.29

Énoncé p. 6

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $f^{(n)}(0) = n!\,a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (proposition du cours).

1) Par le développement usuel de l'exponentielle, valable sur $\mathbb{R}$ (proposition du cours), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{x^m}{(m-2)!},$$

et cette série entière converge en tout point de $\mathbb{R}$, donc a pour rayon $+\infty$: f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec $a_0 = a_1 = 0$ et $a_m = \frac{1}{(m-2)!}$ pour $m \geqslant 2$. Donc $f(0) = f'(0) = 0$ et, pour $m \geqslant 2$, $f^{(m)}(0) = \frac{m!}{(m-2)!} = m(m-1)$. Cette formule vaut aussi pour $m \in \{0,1\}$: pour tout $m \in \mathbb{N}$, $f^{(m)}(0) = m(m-1)$.

2) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$ (développement usuel, proposition du cours) : arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$, avec $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2p+1}$ pour $p \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\arctan^{(2p)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \arctan^{(2p+1)}(0) = (2p+1)!\,\frac{(-1)^p}{2p+1} = (-1)^p (2p)!.$$

Correction de l'exercice 10.30

Énoncé p. 6

1) La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions de classe C^∞, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) + \cos^{(n)}(0) = \cos^{(n)}(0)$. La série de Taylor de g est donc celle de cos. Comme cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (proposition du cours), sa série de Taylor est son développement (proposition du cours) : la série de Taylor de g est $\sum (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$, de rayon $+\infty$, et sa somme est cos.

2) Supposons par l'absurde qu'il existe $r > 0$ tel que g soit développable en série entière sur $]-r,r[$. Une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ y est la somme de sa série de Taylor (proposition du cours) : par la question précédente, $g(x) = \cos(x)$ pour tout $x \in]-r,r[$, c'est-à-dire $f(x) = 0$. Or $\frac{r}{2} \in]-r,r[$ et $f\left(\frac{r}{2}\right) = e^{-\frac{4}{r^2}} > 0$, ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 10.31

Énoncé p. 6

1) La fonction ch est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ch}^{(2k)} = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{ch}^{(2k+1)} = \mathrm{sh}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $r = |x|$. Pour tout t du segment d'extrémités 0 et x, on a $|t| \leqslant r$ et

$$|\mathrm{sh}(t)| = \frac{\left|e^t - e^{-t}\right|}{2} \leqslant \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}(|t|) \leqslant \mathrm{ch}(r),$$

la fonction ch étant paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\left|\mathrm{ch}^{(n)}(t)\right| \leqslant \mathrm{ch}(r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral (proposition du cours) en 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{ch}^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

En majorant $\left|\mathrm{ch}^{(n+1)}\right|$ par $\mathrm{ch}(r)$ sur le segment d'extrémités 0 et x,

$$|R_n(x)| \leqslant \mathrm{ch}(r)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

car $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ est le terme général de la série convergente $\sum \frac{|x|^n}{n!}$. La série de Taylor de ch converge donc en x, et sa somme vaut $\mathrm{ch}(x)$. Comme $\mathrm{ch}^{(2k)}(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{ch}^{(2k+1)}(0) = \mathrm{sh}(0) = 0$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Cette série entière converge en tout point de $\mathbb{R}$, donc a pour rayon $+\infty$ (proposition du cours) : ch est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2) Notons $\varphi : x \mapsto \cos(x+a)$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(n)}(t) = \cos\left(t + a + n\frac{\pi}{2}\right)$. Pour $n = 0$, c'est la définition de φ. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\varphi^{(n)}(t) = \cos\left(t + a + n\frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En dérivant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^{(n+1)}(t) = -\sin\left(t + a + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(t + a + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

ce qui est la propriété au rang $n+1$.
Ainsi $\left|\varphi^{(n)}(t)\right| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Le raisonnement de la question précédente, avec le majorant 1 au lieu de $\mathrm{ch}(r)$, montre que φ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(a + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!} x^n.$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, $\cos(a + p\pi) = (-1)^p \cos(a)$ et $\cos\left(a + p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a + p\pi) = -(-1)^p \sin(a)$. Les coefficients d'indice pair de ce développement sont donc ceux de la série entière $\cos(a)\sum(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$, et ceux d'indice impair ceux de la série entière $-\sin(a)\sum(-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$, toutes deux de rayon $+\infty$. La somme de ces deux séries entières se calcule terme à terme, et leurs sommes sont données par les développements usuels de cos et de sin (propositions du cours et du cours) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x+a) &= \cos(a)\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} - \sin(a)\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\\ &= \cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x),\end{aligned}$$

ce qui est la formule d'addition du cosinus.

Correction de l'exercice 10.32 Énoncé p. 6

1) Comme $\frac{1}{3} \in]-1,1[$, le développement de $\ln(1+x)$ (proposition du cours) donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,3^n} = \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

2) Comme $\frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}\,3^n}$, le développement de arctan (même proposition) donne

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}, \qquad \text{donc} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n} = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

3) Le développement de sin en $x = 1$ (proposition du cours) donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin(1)$.
4) Comme $\left(\sqrt{2}\right)^{2n} = 2^n$, le développement de ch en $x = \sqrt{2}$ (même proposition) donne $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = \mathrm{ch}\left(\sqrt{2}\right)$.
5) Pour $n \geqslant 1$, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$. Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!}$ et $\sum \frac{1}{n!}$ convergent, de somme e (développement de l'exponentielle en $x = 1$), donc par linéarité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} + \mathrm{e} = 2\mathrm{e}.$$

Correction de l'exercice 10.33

Énoncé p. 7

1) Par le binôme de Newton généralisé (proposition du cours) avec $\alpha = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, la série entière $\sum \binom{1/2}{n} x^n$ a pour rayon 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} x^n$. Pour $n \geqslant 1$,

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right) = \frac{1}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (1-2k) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1).$$

En multipliant et en divisant par les facteurs pairs $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$, on a $\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, donc $\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!\,(2n-1)}$, et

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n},$$

formule encore vraie pour $n = 0$. Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$$

2) Par le binôme de Newton généralisé avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, appliqué en $-u$ (développement donné dans le cours), pour tout $u \in]-1, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} u^n$. Soit $x \in]-1, 1[$. On a $x^2 \in]-1, 1[$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n}.$$

Rayon de cette série entière : pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n} \neq 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} x^2 = \frac{2n+1}{2(n+1)} x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2.$$

Par la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$: le rayon est 1 (proposition du cours).
La fonction arcsin est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$ qui s'annule en 0. Une série entière s'intègre terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, et sa série primitive a le même rayon (propositions du cours et du cours) : pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n (2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1},$$

avec une série entière de rayon 1.

Correction de l'exercice 10.34 **Énoncé p. 7**

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^n}{n!}.$$

Comme $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ (proposition du cours), le membre de gauche tend vers $|\mathrm{e}^z|$ quand N tend vers $+\infty$, le module étant continu, et le membre de droite tend vers $\mathrm{e}^{|z|}$. Par passage à la limite, $|\mathrm{e}^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}$.
De même, $\mathrm{e}^z - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, et

$$|\mathrm{e}^z - 1| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} \leqslant |z| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} = |z|\,\mathrm{e}^{|z|},$$

puisque $n! \geqslant (n-1)!$ pour $n \geqslant 1$, les séries considérées étant convergentes.
2) Pour $z \in \mathbb{C}^\star$, en posant $m = n - 1$,

$$\frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{(m+1)!}.$$

La série entière $\sum \frac{z^m}{(m+1)!}$ converge en tout point de $\mathbb{C}$, donc a pour rayon $+\infty$ (proposition du cours). Sa somme g, somme d'une série entière sur son disque ouvert de convergence $\mathbb{C}$, est continue sur $\mathbb{C}$ (proposition du cours), en particulier en 0, et $g(0) = 1$. Comme $\frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = g(z)$ pour $z \neq 0$, on obtient $\frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} \xrightarrow[z \to 0]{} g(0) = 1$.

Correction de l'exercice 10.35 **Énoncé p. 7**

1) Par la relation $\exp(u)\exp(v) = \exp(u+v)$, valable pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ (corollaire du cours), $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$. Donc $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.
2) Montrons le résultat par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\exp(0) = 1 = \exp(z)^0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\exp(nz) = \exp(z)^n$. Par la relation $\exp(u)\exp(v) = \exp(u+v)$ (corollaire du cours),

$$\exp((n+1)z) = \exp(nz + z) = \exp(nz)\exp(z) = \exp(z)^n \exp(z) = \exp(z)^{n+1}.$$

Par récurrence, $\exp(nz) = \exp(z)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par définition de l'exponentielle complexe, $\exp(\mathrm{i}\theta) = \mathrm{e}^0(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ et, de même, $\exp(\mathrm{i}n\theta) = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$. La question précédente, appliquée à $z = \mathrm{i}\theta$, donne

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \exp(\mathrm{i}n\theta) = \exp(\mathrm{i}\theta)^n = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n.$$

Correction de l'exercice 10.36 **Énoncé p. 7**

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{2(2n+1)}{n+2}.$$

Les a_n sont non nuls et $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4$. Par la règle de d'Alembert (proposition du cours), le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $\frac{1}{4}$.

2) Par le binôme de Newton généralisé (proposition du cours) avec $\alpha = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, pour tout $u \in]-1,1[$, $\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} u^n$. Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. On a $-4x \in]-1,1[$, donc

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n, \qquad \text{avec} \qquad d_n = \binom{1/2}{n}(-4)^n.$$

On a $d_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{1/2}{n+1} = \binom{1/2}{n} \frac{\frac{1}{2}-n}{n+1}$, donc

$$d_{n+1} = d_n \cdot \frac{(-4)\left(\frac{1}{2}-n\right)}{n+1} = \frac{2(2n-1)}{n+1} d_n.$$

Montrons par récurrence que $d_{n+1} = -2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $d_1 = -4\binom{1/2}{1} = -2 = -2a_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $d_{n+1} = -2a_n$. Alors, par la relation précédente et la question 1,

$$d_{n+2} = \frac{2(2n+1)}{n+2} d_{n+1} = -2 \cdot \frac{2(2n+1)}{n+2} a_n = -2a_{n+1}.$$

Par récurrence, $d_{n+1} = -2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\sqrt{1-4x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x^{n+1} = 1 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}.$$

3) Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. Par la question 2, $2xT(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1 - \sqrt{1-4x}$, donc $(1-2xT(x))^2 = 1-4x$, soit

$$1 - 4xT(x) + 4x^2T(x)^2 = 1 - 4x, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 4x\left(xT(x)^2 - T(x) + 1\right) = 0.$$

Si $x \neq 0$, on obtient $xT(x)^2 - T(x) + 1 = 0$. Si $x = 0$, on a $T(0) = a_0 = 1$ et $0 - 1 + 1 = 0$.
4) Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum c_n x^n$, produit de Cauchy de $\sum a_n x^n$, de rayon $\frac{1}{4}$, par elle-même, a un rayon au moins égal à $\frac{1}{4}$, et sa somme est le produit des sommes (proposition du cours) : $T(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. Par la question 3, pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = T(x) = 1 + xT(x)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+1}.$$

La série entière $1 + \sum c_n x^{n+1}$ converge en tout point où $\sum c_n x^n$ converge, donc a un rayon au moins égal à $\frac{1}{4}$ (proposition du cours). Les deux séries entières ont des sommes qui coïncident sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$: par unicité des coefficients (corollaire du cours, avec $r = \frac{1}{4}$), on a $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

La suite (a_n) vérifie donc la même relation que (C_n), avec la même valeur initiale. Montrons par récurrence forte que $a_n = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $a_0 = 1 = C_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $a_k = C_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} = C_{n+1}.$$

Par récurrence forte, $a_n = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrons par récurrence forte que $C_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $C_0 = 1 \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $C_k \in \mathbb{N}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$; alors C_{n+1} est une somme de produits d'entiers naturels, donc $C_{n+1} \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} = (n+1)a_n = (n+1)C_n$ avec $C_n \in \mathbb{N}$: $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Correction de l'exercice 10.37 **Énoncé p. 7**

1) Comme $|1| < R$, la série numérique $\sum a_n$ converge absolument (proposition du cours), donc son terme général tend vers 0 : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| < 1$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $n \geqslant N$, a_n est un entier de valeur absolue strictement inférieure à 1, donc $a_n = 0$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$: la somme est une fonction polynomiale.
2) Si l'on avait $R > 1$, la suite (a_n) serait nulle à partir d'un certain rang par la question 1, ce qui est exclu. Donc $R \leqslant 1$. Si de plus (a_n) est bornée, la suite $(a_n 1^n)$ est bornée, donc $R \geqslant 1$ par définition du rayon de convergence, et $R = 1$.
3) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ que $a_{m+qp} = a_m$. C'est vrai pour $q = 0$. Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose $a_{m+qp} = a_m$. Alors $a_{m+(q+1)p} = a_{(m+qp)+p} = a_{m+qp} = a_m$. La propriété est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de n par p s'écrit $n = qp + m$ avec $m \in [\![0, p-1]\!]$, donc $a_n = a_m$ et $|a_n| \leqslant \max\left(|a_0|, \dots, |a_{p-1}|\right)$: la suite (a_n) est bornée. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m \neq 0$, qui existe car (a_n) n'est pas la suite nulle. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $a_{m+qp} = a_m \neq 0$: la suite (a_n) n'est nulle à partir d'aucun rang. Par la question 2, $R = 1$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n \geqslant p} a_{n-p} z^n$ convergent, la seconde étant, au facteur z^p près, la première : $\sum_{n=p}^{+\infty} a_{n-p} z^n = z^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Par linéarité, et comme $a_n - a_{n-p} = 0$ pour $n \geqslant p$,

$$(1 - z^p) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n + \sum_{n=p}^{+\infty} (a_n - a_{n-p}) z^n = P(z).$$

Comme $|z^p| = |z|^p < 1$, on a $1 - z^p \neq 0$, d'où le résultat.
4) La suite vérifie $a_{n+3} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et n'est pas la suite nulle. La question 3 avec $p = 3$ et $P(z) = 1 - z$ montre que le rayon vaut 1 et que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, comme $1 - z^3 = (1 - z)(1 + z + z^2)$ et $z \neq 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1 - z}{1 - z^3} = \frac{1}{1 + z + z^2}.$$

Correction de l'exercice 10.38 **Énoncé p. 8**

1) Notons R' le rayon de $\sum_{n \geqslant 0} a_{n+p} x^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. La série $\sum_{n \geqslant 0} a_{n+p} x^n$ converge si et seulement si $\sum_{n \geqslant 0} a_{n+p} x^{n+p}$ converge (on multiplie par $x^p \neq 0$), c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{m \geqslant p} a_m x^m$ converge, ou encore si et seulement si $\sum a_m x^m$ converge, les deux séries ne différant que par un nombre fini de termes.
Si $0 < |x| < R$, la série $\sum a_m x^m$ converge (proposition du cours), donc $\sum a_{n+p} x^n$ converge et $R' \geqslant |x|$ (proposition du cours) ; ceci valant pour tout tel x, $R' \geqslant R$. Si $R < +\infty$ et $|x| > R$, la série $\sum a_m x^m$ diverge, donc $\sum a_{n+p} x^n$ diverge et $R' \leqslant |x|$; ceci valant pour tout x tel que $|x| > R$, $R' \leqslant R$. Donc $R' = R$.
Supposons $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$, et soit $x \in]-R, R[$. Par ce qui précède, la série $\sum a_{n+p} x^n$ converge, et

$$S(x) = \sum_{m=p}^{+\infty} a_m x^m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} x^{n+p} = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+p} x^n = x^p g(x).$$

2) Raisonnons par l'absurde, en supposant que les a_n ne sont pas tous nuls. Soit p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. Par la question 1, $S(x) = x^p g(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$, où g est la somme d'une série entière de rayon R : g est donc continue sur $]-R, R[$ (proposition du cours), en particulier en 0, et $g(0) = a_p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k^p g(x_k) = S(x_k) = 0$ et $x_k \neq 0$, donc $g(x_k) = 0$. Comme $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, la continuité de g en 0 donne $g(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} g(0) = a_p$, donc $a_p = 0$, ce qui contredit la définition de p. Ainsi $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Supposons qu'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum b_n x^n$, de rayon $R_b \geqslant r$, de somme T, tels que $f(x) = T(x)$ pour tout $x \in]-r, r[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $x_k = -\frac{r}{k+2}$: c'est un élément non nul de $]-r, r[\subset]-R_b, R_b[$, et $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Comme $x_k < 0$, $T(x_k) = f(x_k) = 0$. Par la question 2, $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc T est nulle. Mais $\frac{r}{2} \in]-r, r[$ et $T\left(\frac{r}{2}\right) = f\left(\frac{r}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{2}{r}} > 0$: c'est absurde. Donc f n'est développable en série entière sur aucun intervalle $]-r, r[$.
4) *Analyse.* Soit $\sum a_n x^n$ une telle série entière, de rayon $R > 0$ et de somme S. Pour tout $x \in]-1, 1[$, par le développement de $\frac{1}{1+x}$ (proposition du cours),

$$h(x) = \frac{x}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \qquad b_0 = 0, \quad b_n = (-1)^{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1,$$

et la série entière $\sum b_n x^n$ a pour rayon 1 (ses coefficients sont de module 1 à partir du rang 1, proposition du cours). Posons $\rho = \min(R, 1) > 0$. Le rayon de la différence de deux séries entières est au moins égal au minimum de leurs rayons, et sa somme est la différence des sommes (proposition du cours) : la série entière $\sum (a_n - b_n) x^n$ a un rayon $R'' \geqslant \rho$, et sa somme vaut $S(x) - h(x)$ pour tout $x \in]-\rho, \rho[$.
Soit N un entier tel que $N \geqslant 1$ et $\frac{1}{N} < \rho$. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $x_k = \frac{1}{N+k}$: c'est un élément non nul de $]-\rho, \rho[\subset]-R'', R''[$, de limite nulle. Comme $\frac{1}{N+k} < R$, l'hypothèse donne

$$S(x_k) - h(x_k) = \frac{1}{N+k+1} - \frac{\frac{1}{N+k}}{1 + \frac{1}{N+k}} = \frac{1}{N+k+1} - \frac{1}{N+k+1} = 0.$$

Par la question 2 appliquée à $\sum (a_n - b_n) x^n$, on a $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la série entière est $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} x^n$, de rayon 1.
Synthèse. La série entière $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} x^n$ a pour rayon $1 > 0$ et pour somme h sur $]-1, 1[$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} < 1$, $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+1/n} = \frac{1}{n+1}$.
Il y a donc une seule série entière solution, $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} x^n$, de rayon 1 et de somme $x \mapsto \frac{x}{1+x}$.

Correction de l'exercice 10.39

Énoncé p. 8

1) Soit $x \in]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}[$. On a $2x \in]-R, R[$, donc la série $\sum a_n (2x)^n = \sum 2^n a_n x^n$ converge et $S(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_n x^n$. La série entière $\sum 2^n a_n x^n$ converge donc en tout point de $]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}[$: son rayon est au moins égal à $\frac{R}{2}$ (proposition du cours).
Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. La série entière $\sum c_n x^n$, produit de Cauchy de $\sum a_n x^n$ par elle-même, a un rayon au moins égal à R, et sa somme est le produit des sommes (proposition du cours) : $S(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$. Les séries entières $\sum 2^n a_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont des rayons au moins égaux à $\frac{R}{2}$ et leurs sommes coïncident sur $]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}[$. Par unicité des coefficients (corollaire du cours), $2^n a_n = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $a_0 = a_0^2$, donc $a_0 \in \{0, 1\}$.
2) Montrons par récurrence forte que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $a_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Dans la somme $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k}$, chaque terme est nul : si $k \leqslant n$, $a_k = 0$, et si $k = n+1$, $a_{n+1-k} = a_0 = 0$. Donc $2^{n+1} a_{n+1} = c_{n+1} = 0$ et $a_{n+1} = 0$. Par récurrence forte, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $n \geqslant 1$. Dans la somme c_n, les termes d'indices $k = 0$ et $k = n$ sont distincts et valent chacun $a_0 a_n = a_n$, donc

$$2^n a_n = 2a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}, \qquad \text{soit} \qquad (2^n - 2)a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$$

Pour $n = 1$, cette relation s'écrit $0 = 0$. Pour $n \geqslant 2$, on a $2^n - 2 \neq 0$, et a_n est déterminé par $a_1, \dots, a_{n-1}$.
Posons $b_n = \frac{a^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum b_n x^n$ a pour rayon $+\infty$ et pour somme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ (proposition du cours), et $\mathrm{e}^{a(2x)} = (\mathrm{e}^{ax})^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle vérifie donc l'hypothèse de l'énoncé, avec $b_0 = 1$, et ce qui précède s'applique à elle : $(2^n - 2)b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$ pour tout $n \geqslant 2$.
Montrons par récurrence forte que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $a_0 = 1 = b_0$ et $a_1 = a = b_1$. Soit $n \geqslant 1$. On suppose $a_k = b_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $n + 1 \geqslant 2$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1} - 2} \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} = \frac{1}{2^{n+1} - 2} \sum_{k=1}^{n} b_k b_{n+1-k} = b_{n+1},$$

les indices k et $n + 1 - k$ appartenant à $[\![1, n]\!]$. Par récurrence forte, $a_n = \frac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Par les questions précédentes, une série entière solution est la série nulle ou l'une des séries $\sum \frac{a^n}{n!} x^n$ avec $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, la série nulle a pour rayon $+\infty$ et sa somme vérifie $0 = 0^2$, et pour $a \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{a^n}{n!} x^n$ a pour rayon $+\infty$ et pour somme $S : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$, qui vérifie $S(2x) = \mathrm{e}^{2ax} = S(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc la série nulle et les séries $\sum \frac{a^n}{n!} x^n$, $a \in \mathbb{R}$, de sommes la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$.

Correction de l'exercice 10.40

Énoncé p. 8

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, avec les fonctions de classe C^1 $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \sin(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \Big[-\cos(t) \sin^{n+1}(t) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^n(t)\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le crochet est nul, et $\cos^2 = 1 - \sin^2$, donc $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$, soit $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
Montrons par récurrence que $W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $W_0 = \frac{\pi}{2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la formule vraie au rang n. Par la relation précédente au rang $2n$,

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Or $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n}$, donc

$$\frac{1}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \cdot \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n},$$

et la formule est vraie au rang $n + 1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left|x\sin^2(t)\right| \leqslant |x| < 1$, donc $1 - x\sin^2(t) \geqslant 1 - |x| > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-x\sin^2(t)}$ est donc définie et continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $F(x)$ est bien définie.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : t \mapsto x^n \sin^{2n}(t)$, continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout t de ce segment, $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$, donc $\|f_n\|_\infty \leqslant |x|^n$; la série géométrique $\sum |x|^n$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sa somme est donnée par la série géométrique de raison $x\sin^2(t) \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1 - x\sin^2(t)}.$$

Par le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment (chapitre « Suites et séries de fonctions »),

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n} x^n.$$

3) Soit $x \in]-1,1[$. Par les questions 1 et 2, puis le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ obtenu dans le cours par le binôme de Newton généralisé avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ (proposition du cours),

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{1}{2}\sin^2(t) = \frac{1+\cos^2(t)}{2}$. Avec $x = \frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \cos^2(t)} = \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 10.41 Énoncé p. 8

1) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La somme H_n compte n termes, tous strictement positifs et inférieurs ou égaux à 1, le premier valant 1 : $1 \leqslant H_n \leqslant n$. Ainsi $H_n = \mathrm{O}(n)$ et $1 = \mathrm{O}(H_n)$. La série entière $\sum x^n$ a pour rayon 1, et $\sum nx^n$ aussi (proposition du cours). Par comparaison avec ces deux séries entières (proposition du cours), le rayon R de $\sum H_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$ et $1 \geqslant R$: $R = 1$.
2) Posons $a_n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont pour rayon 1, et pour tout $x \in]-1,1[$ (proposition du cours),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = -\ln(1-x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$, y compris pour $n = 0$. La somme du produit de Cauchy de ces deux séries entières de rayon 1 est le produit de leurs sommes sur $]-1,1[$ (proposition du cours) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

3) La série entière $\sum H_n x^n$, de rayon 1, s'intègre terme à terme sur $]-1,1[$ (proposition du cours) : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \left(-\frac{\ln(1-t)}{1-t}\right) \mathrm{d}t.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2}\ln^2(1-t)$ est dérivable sur $]-1,1[$, avec $\varphi'(t) = \ln(1-t)\cdot\frac{-1}{1-t}$, et $\varphi(0) = 0$. L'intégrale vaut donc $\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{1}{2}\ln^2(1-x)$, et le terme d'indice 0 de la série est nul puisque $H_0 = 0$.
4) Comme $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, la question 2 donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{2^n} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\ln 2,$$

et la question 3 donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)\,2^{n+1}} = \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln^2 2.$$

Correction de l'exercice 10.42 **Énoncé p. 9**

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-a,a[$. Par la formule de Taylor avec reste intégral en 0 (proposition du cours), f étant de classe C^{n+1} sur l'intervalle $]-a,a[$,

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $t = xu$, de classe C^1, avec $u \in [0,1]$, donne $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$ et $(x-xu)^n = x^n(1-u)^n$, d'où

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{x^n(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,x\,\mathrm{d}u = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u.$$

2) La dérivée de $f^{(n+1)}$ est $f^{(n+2)}$, positive sur $[0,a[$: la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante sur $[0,a[$. Pour tout $u \in [0,1]$, on a $0 \leqslant xu \leqslant yu < a$, donc $0 \leqslant f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(yu)$. En multipliant par $(1-u)^n \geqslant 0$ et en intégrant sur $[0,1]$,

$$0 \leqslant \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u = \frac{n!}{y^{n+1}} R_n(y),$$

par la question 1, puisque $y > 0$. En multipliant par $\frac{x^{n+1}}{n!} \geqslant 0$ et en utilisant la question 1 en x,

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y).$$

Enfin, les $f^{(k)}(0)$ sont positifs et $y > 0$, donc $R_n(y) = f(y) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k \leqslant f(y)$, d'où la dernière inégalité, puisque $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \geqslant 0$.
3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,a[$. Par la question 1 en $-x$, puis l'hypothèse avec $t = xu \in [0,a[$,

$$\begin{aligned} |R_n(-x)| &\leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \left|f^{(n+1)}(-xu)\right| \mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u = R_n(x). \end{aligned}$$

Soit $x \in]-a,a[$. Posons $s = |x| \in [0,a[$ et $y = \frac{s+a}{2}$, de sorte que $s < y < a$. Si $x \geqslant 0$, $R_n(x) = R_n(s)$; si $x < 0$, $|R_n(x)| = |R_n(-s)| \leqslant R_n(s)$. Dans les deux cas, par la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n(x)| \leqslant R_n(s) \leqslant \left(\frac{s}{y}\right)^{n+1} f(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

car $0 \leqslant \frac{s}{y} < 1$. La série de Taylor de f converge donc en x, et sa somme vaut $f(x)$. Ceci valant pour tout $x \in]-a,a[$, le rayon de la série de Taylor de f est au moins égal à $|x|$ pour tout $x \in]-a,a[$ (proposition du cours), donc au moins égal à a : f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

4a) Posons $P_0 = X$ et $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est à coefficients positifs et $\tan^{(n)} = P_n \circ \tan$. Pour $n = 0$, $P_0 = X$ convient. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n. En dérivant, comme $\tan' = 1 + \tan^2$,

$$\tan^{(n+1)} = (P_n \circ \tan)' = \tan' \cdot (P_n' \circ \tan) = (1+\tan^2)(P_n' \circ \tan) = P_{n+1} \circ \tan\,.$$

Si $P_n = \sum_k c_k X^k$ avec des c_k positifs, alors $P_n' = \sum_{k\geqslant 1} k c_k X^{k-1}$ est à coefficients positifs, ainsi que le produit $(1+X^2)P_n'$. La propriété est vraie au rang $n+1$; par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4b) Montrons la propriété par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est l'imparité de tan. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\tan^{(n)}(-t) = (-1)^{n+1}\tan^{(n)}(t)$ pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. En dérivant cette égalité par rapport à t, $-\tan^{(n+1)}(-t) = (-1)^{n+1}\tan^{(n+1)}(t)$, soit $\tan^{(n+1)}(-t) = (-1)^{n+2}\tan^{(n+1)}(t)$: c'est la propriété au rang $n+1$. Par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4c) La fonction tan est de classe C^∞ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On a $\tan(t) \geqslant 0$, et P_n est à coefficients positifs, donc $\tan^{(n)}(t) = P_n(\tan(t)) \geqslant 0$. Par la question 4b, $\left|\tan^{(n)}(-t)\right| = \left|\tan^{(n)}(t)\right| = \tan^{(n)}(t)$. Les hypothèses sont satisfaites avec $a = \frac{\pi}{2}$: par la question 3, tan est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, et son développement est sa série de Taylor $\sum \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n$ (proposition du cours).
Pour $k \in \mathbb{N}$, la question 4b en $t = 0$ donne $\tan^{(2k)}(0) = -\tan^{(2k)}(0)$, donc $\tan^{(2k)}(0) = 0$: les coefficients d'indice pair sont nuls. Par ailleurs $\tan^{(n)}(0) = P_n(0)$, et

$$P_1 = 1+X^2, \quad P_2 = 2X+2X^3, \quad P_3 = 2+8X^2+6X^4, \quad P_4 = 16X+40X^3+24X^5,$$

puis $P_5 = (1+X^2)(16+120X^2+120X^4)$, de sorte que $P_1(0) = 1$, $P_3(0) = 2$ et $P_5(0) = 16$. Les coefficients d'indices 1, 3 et 5 sont donc $\frac{1}{1!} = 1$, $\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$ et $\frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$: pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{\tan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Correction de l'exercice 10.43 **Énoncé p. 10**

1. La série $\sum a_n$ converge, donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la suite $(a_n 1^n)$ est bornée. Par le lemme d'Abel (du cours) appliqué avec $z_0 = 1$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout x tel que $|x| < 1$. La série entière convergeant en tout $x \in]-1,1[$, $R \geqslant |x|$ pour tout $x \in]-1,1[$ (proposition du cours), donc $R \geqslant 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $r_{n-1} = a_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = a_n + r_n$ (pour $n = 0$, c'est $A = a_0 + r_0$).

Donc

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} r_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{N} r_n x^n = \sum_{n=-1}^{N-1} r_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} r_n x^n$$
$$= r_{-1} + \sum_{n=0}^{N-1} r_n \left(x^{n+1} - x^n\right) - r_N x^N = A - (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} r_n x^n - r_N x^N.$$

3. La suite (r_n) tend vers 0, car c'est la suite des restes d'une série convergente ; elle est donc bornée par un réel M. Soit $x \in [0,1[$. Pour tout n, $|r_n x^n| \leqslant Mx^n$, et la série géométrique $\sum Mx^n$ converge : par critère de comparaison, $\sum r_n x^n$ converge absolument. De plus $\left|r_N x^N\right| \leqslant |r_N| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. En faisant tendre N vers $+\infty$ dans la question 2, où le membre de gauche tend vers $S(x)$ puisque $R \geqslant 1$, on obtient $S(x) = A - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} r_n x^n$.

4. Soit $x \in [0,1[$. Par la question 3 et l'inégalité triangulaire,

$$|S(x) - A| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} |r_n|\, x^n + (1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} |r_n|\, x^n.$$

Comme $0 \leqslant x^n \leqslant 1$, la première somme est majorée par $\sum_{n=0}^{N-1} |r_n|$. Pour $n \geqslant N$, $|r_n|\, x^n \leqslant \varepsilon x^n$, et $(1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^n = x^N \leqslant 1$, donc le second terme est majoré par ε. D'où l'inégalité demandée.
Notons $M_N = \sum_{n=0}^{N-1} |r_n|$ et $\alpha = \frac{\varepsilon}{M_N+1} > 0$. Pour tout $x \in [0,1[$ tel que $1-x \leqslant \alpha$, $|S(x) - A| \leqslant \alpha M_N + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$. Comme un tel N existe pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} A$. La fonction S, somme d'une série entière de rayon R, est continue sur $[0,1[\subset]-R,R[$ (proposition du cours), et la limite précédente donne la continuité en 1 de son prolongement par A.

5. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et de limite nulle : par critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. Par le développement usuel de $\ln(1+x)$ (proposition du cours), pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$. Par le théorème d'Abel radial et la continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 1,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

De même, la suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle, donc $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge. Posons $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $a_{2n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les sommes partielles de $\sum a_m$ sont celles de $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, chacune répétée deux fois, donc $\sum a_m$ converge et a la même somme. Pour $x \in [0,1[$, $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m = \arctan(x)$ par le développement usuel de arctan (proposition du cours). Par le théorème d'Abel radial et la continuité de arctan en 1,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1^-} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Par la question 1, les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à 1, puisque les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent. Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ayant un rayon au

moins égal à 1, la somme de leur produit de Cauchy $\sum c_n x^n$ est le produit de leurs sommes sur $]-1,1[$ (proposition du cours) : pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

Par le théorème d'Abel radial appliqué aux trois séries, le membre de gauche tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ et le membre de droite vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$ quand x tend vers 1^-. Par unicité de la limite, ces deux nombres sont égaux.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Comme $(k+1)+(n+1-k) = n+2$,

$$\frac{1}{(k+1)(n+1-k)} = \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+1-k}\right).$$

En sommant sur k, et comme $k \mapsto n-k$ est une bijection de $[\![0,n]\!]$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n+1-k)} = \frac{1}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2H_{n+1}}{n+2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $H_{n+2} = H_{n+1} + \frac{1}{n+2}$ et $H_{n+1} \geqslant 1$, donc

$$(n+2)H_{n+2} = (n+2)H_{n+1} + 1 \leqslant (n+3)H_{n+1},$$

soit $\frac{H_{n+2}}{n+3} \leqslant \frac{H_{n+1}}{n+2}$: la suite est décroissante. Pour $k \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k,k+1]$, donc $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, et en sommant, $H_{n+1} \leqslant 1 + \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln(n+1)$. Ainsi $0 \leqslant \frac{H_{n+1}}{n+2} \leqslant \frac{1+\ln(n+1)}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

(c) Posons $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum a_n$ converge, de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ par la question 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $(-1)^k(-1)^{n-k} = (-1)^n$, la question (a) donne

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n+1-k)} = 2(-1)^n \frac{H_{n+1}}{n+2}.$$

Par la question (b) et le critère spécial des séries alternées, la série $\sum c_n$ converge. La question 6 donne alors $2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{H_{n+1}}{n+2} = (\ln 2)^2$, d'où le résultat.

8. Pour tout $r \geqslant 0$, $|a_n r^n| = r^n$: la suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$, donc le rayon de convergence est 1. Par la somme de la série géométrique de raison $-x$ (proposition du cours), pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1^-. Pourtant la série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement, son terme général ne tendant pas vers 0. L'existence d'une limite finie de la somme en 1^- n'entraîne donc pas la convergence de $\sum a_n$.

9. (a) Soient $0 \leqslant x \leqslant y < 1$. Pour tout n, $a_n x^n \leqslant a_n y^n$ car $a_n \geqslant 0$, et en sommant ces séries convergentes, $S(x) \leqslant S(y)$: S est croissante sur $[0,1[$. Soit $x \in [0,1[$. Pour tout $y \in [x,1[$, $S(x) \leqslant S(y)$; en faisant tendre y vers 1^-, $S(x) \leqslant L$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0,1[$, les termes $a_n x^n$ étant positifs, $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant S(x) \leqslant L$. En faisant tendre x vers 1^- dans cette inégalité entre une fonction polynomiale et une constante, $\sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant L$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ sont majorées : elle converge. Par le théorème d'Abel radial, $S(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, et par unicité de la limite, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$.

Correction de l'exercice 10.44 **Énoncé p. 11**

1. Pour tout $r \geqslant 0$ et tout n, $||a_n|\, r^n| = |a_n r^n|$: la suite $(|a_n|\, r^n)$ est bornée si et seulement si $(a_n r^n)$ l'est. Les deux séries entières ont donc, par définition, le même rayon de convergence R.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions S et T, sommes de séries entières de rayon R, se dérivent k fois terme à terme sur $]-R, R[$ (proposition du cours) : pour tout $x \in]-R, R[$,

   $$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \qquad \text{et} \qquad T^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} |a_n|\, x^{n-k}.$$

   Pour $0 \leqslant x \leqslant y < R$, chaque terme vérifie $0 \leqslant \frac{n!}{(n-k)!} |a_n|\, x^{n-k} \leqslant \frac{n!}{(n-k)!} |a_n|\, y^{n-k}$, et en sommant, $0 \leqslant T^{(k)}(x) \leqslant T^{(k)}(y)$: $T^{(k)}$ est positive et croissante sur $[0, R[$. Pour $x \in]-R, R[$, l'inégalité triangulaire, appliquée aux sommes partielles puis par passage à la limite, donne

   $$\left|S^{(k)}(x)\right| \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} |a_n|\, |x|^{n-k} = T^{(k)}(|x|).$$

2. La fonction T est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, qui contient $[\rho, \rho+\delta]$. Par la formule de Taylor avec reste intégral (du cours) entre ρ et $\rho+\delta$,

   $$T(\rho+\delta) - \sum_{k=0}^{N} \frac{T^{(k)}(\rho)}{k!} \delta^k = \int_\rho^{\rho+\delta} \frac{(\rho+\delta-t)^N}{N!} T^{(N+1)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

   Pour $t \in [\rho, \rho+\delta]$, $(\rho+\delta-t)^N \geqslant 0$ et $T^{(N+1)}(t) \geqslant 0$ par la question 1 ; comme $\rho \leqslant \rho+\delta$, l'intégrale est positive.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, la question 1 donne $\frac{T^{(k)}(\rho)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |a_n|\, \rho^{n-k}$, série à termes positifs. Soient $M \leqslant N$. En ne gardant que les termes d'indice $n \leqslant M$, puis seulement les indices $k \leqslant M$,

   $$\sum_{k=0}^{N} \frac{T^{(k)}(\rho)}{k!} \delta^k \geqslant \sum_{k=0}^{M} \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} |a_n|\, \rho^{n-k} \delta^k.$$

   Cette somme finie porte sur les couples (k, n) tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant M$; en sommant d'abord sur k, et par la formule du binôme,

   $$\sum_{k=0}^{M} \sum_{n=k}^{M} \binom{n}{k} |a_n|\, \rho^{n-k} \delta^k = \sum_{n=0}^{M} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \rho^{n-k} \delta^k = \sum_{n=0}^{M} |a_n|\, (\rho+\delta)^n.$$

   La série $\sum_k \frac{T^{(k)}(\rho)}{k!} \delta^k$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par $T(\rho+\delta)$ (question 2) : elle converge, et sa somme σ vérifie $\sigma \leqslant T(\rho+\delta)$. Pour tout M, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, $\sigma \geqslant \sum_{n=0}^{M} |a_n|\, (\rho+\delta)^n$; en faisant tendre M vers $+\infty$, et comme $\rho+\delta < R$, $\sigma \geqslant T(\rho+\delta)$. Donc $\sigma = T(\rho+\delta)$.

4. On a $|x_0| + |h| < R$, donc $x_0 + h \in]-R, R[$ et, pour tout $u \in [0,1]$, $|x_0 + uh| \leqslant |x_0| + u\,|h| < R$. Par la formule de Taylor avec reste intégral entre x_0 et $x_0 + h$, puis le changement de variable $t = x_0 + uh$,

   $$S(x_0+h) - \sum_{k=0}^{N} \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!} h^k = \frac{h^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-u)^N S^{(N+1)}(x_0+uh)\, \mathrm{d}u.$$

Par la question 1 et la croissance de $T^{(N+1)}$ sur $[0, R[$, pour $u \in [0,1]$,

$$\left|S^{(N+1)}(x_0+uh)\right| \leqslant T^{(N+1)}(|x_0+uh|) \leqslant T^{(N+1)}(|x_0|+u\,|h|).$$

Donc

$$\left|S(x_0+h) - \sum_{k=0}^{N} \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}h^k\right| \leqslant \frac{|h|^{N+1}}{N!}\int_0^1 (1-u)^N T^{(N+1)}(|x_0|+u\,|h|)\,\mathrm{d}u.$$

Le même calcul, appliqué à T entre $|x_0|$ et $|x_0|+|h|$, montre que le membre de droite vaut $T(|x_0|+|h|) - \sum_{k=0}^{N} \frac{T^{(k)}(|x_0|)}{k!}|h|^k$. D'où l'inégalité.
Par la question 3 appliquée avec $\rho = |x_0|$ et $\delta = |h|$, ce majorant tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Donc la série $\sum \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$ converge, de somme $S(x_0+h)$. Ceci valant pour tout h tel que $|h| < \eta_{x_0}$, cette série entière converge en tout point de $]-\eta_{x_0}, \eta_{x_0}[$, et son rayon de convergence est supérieur ou égal à η_{x_0} (proposition du cours).

5. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $S^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ (par récurrence sur k : c'est vrai pour $k=0$; soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose la formule vraie au rang k, et en dérivant, $S^{(k+1)}(x) = \frac{(k+1)k!}{(1-x)^{k+2}}$). Donc $\frac{S^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{1}{(1-x_0)^{k+1}}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, $\frac{h^k}{(1-x_0)^{k+1}} = \frac{1}{1-x_0}\left(\frac{h}{1-x_0}\right)^k$: la série converge si $|h| < 1-x_0$ et diverge grossièrement si $|h| > 1-x_0$. Son rayon de convergence est donc $1-x_0$ (proposition du cours). Si $x_0 \geqslant 0$, ce rayon vaut $1-|x_0| = \eta_{x_0}$; si $x_0 < 0$, il vaut $1+|x_0| > \eta_{x_0}$. La minoration de la question 4 peut donc être stricte.
6. Par la question 4 appliquée en $x_0 = c$, pour tout h tel que $|h| < \eta_c$, $S(c+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(c)}{k!}h^k = 0$.
7. (a) Par la question 4, pour $|h| < \eta_c$, $S(c+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k h^k$, avec $b_k = 0$ pour $k < m$. Soit h tel que $0 < |h| < \eta_c$. La série $\sum_{k \geqslant m} b_k h^k$ converge, donc, en multipliant par h^{-m}, la série $\sum_{j \geqslant 0} b_{m+j}h^j$ converge, et $h^m \sum_{j=0}^{+\infty} b_{m+j}h^j = S(c+h)$. La série entière $\sum b_{m+j}h^j$ convergeant en h, son rayon de convergence est supérieur ou égal à $|h|$ (proposition du cours), pour tout tel h, donc à η_c. Pour $h=0$, $S(c) = b_0$ vaut $0 = 0^m g(0)$ si $m \geqslant 1$, et $g(0) = b_0$ si $m = 0$: l'égalité $S(c+h) = h^m g(h)$ vaut aussi en $h=0$.
   (b) La fonction g, somme d'une série entière de rayon au moins $\eta_c > 0$, est continue en 0 (proposition du cours), et $g(0) = b_m \neq 0$. Il existe donc $\alpha \in]0, \eta_c[$ tel que $g(h) \neq 0$ pour tout h tel que $|h| < \alpha$. Comme $x_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} c$ et $x_p \neq c$, il existe p tel que $0 < |x_p - c| < \alpha$. Alors $S(x_p) = (x_p-c)^m g(x_p-c) \neq 0$, ce qui contredit $S(x_p) = 0$.
8. (a) L'ensemble E contient c, et il est majoré par y : si $x \in E$ vérifiait $x \geqslant y$, S serait nulle en $y \in [c,x]$. Il admet donc une borne supérieure $s \leqslant y$. Comme $c + \frac{\eta}{2} \in]c-\eta, c+\eta[\subset]-R, R[$ et que S est nulle sur $[c, c+\frac{\eta}{2}]$, $c+\frac{\eta}{2} \in E$ et $s \geqslant c+\frac{\eta}{2} > c$. Soit $x \in [c,s[$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x' \in E$ tel que $x' > x$, et S est nulle sur $[c,x']$, donc en x. Ainsi S est nulle sur $[c,s[$, et aussi sur $]c-\eta, c+\eta[$, donc sur leur réunion $]c-\eta, s[$.
   (b) On a $-R < c < s \leqslant y < R$, donc $s \in]-R,R[$. La fonction S est nulle sur l'intervalle ouvert $]c-\eta, s[$, donc toutes ses dérivées y sont nulles. Comme $S^{(k)}$ est continue en s, $S^{(k)}(s) = \lim_{x\to s^-} S^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par la question 6, $S(s+h) = 0$ pour tout h tel que $|h| < \eta_s$. Soit

$t = s + \frac{\eta_s}{2}$ si R est fini et $t = s + 1$ sinon. Alors $s < t < R$, et S est nulle sur $[c, s[$ et sur $[s, t]$: $t \in E$, ce qui contredit $t > s = \sup E$.

(c) Par ce qui précède, S est nulle sur $[c, R[$. La série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$ a pour rayon R (les suites $((-1)^n a_n r^n)$ et $(a_n r^n)$ sont bornées en même temps), et sa somme est $x \mapsto S(-x)$, nulle sur $]-c-\eta, -c+\eta[$. Ce qui précède, appliqué à cette série au point $-c$, montre que $x \mapsto S(-x)$ est nulle sur $[-c, R[$, c'est-à-dire que S est nulle sur $]-R, c[$ et en c. Donc S est nulle sur $]-R, R[$. Les coefficients d'une série entière de rayon $R > 0$ s'expriment à l'aide des dérivées en 0 de sa somme (proposition du cours) : $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Sous ces hypothèses, la question 7 donne $S^{(k)}(c) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Posons $\eta = \eta_c = R - |c|$ si R est fini, et $\eta = 1$ si $R = +\infty$. Alors $]c-\eta, c+\eta[\subset]-R, R[$, et par la question 6, S est nulle sur cet intervalle. La question 8 donne alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Supposons que les b_n ne soient pas tous nuls. Les coefficients d'une série entière de rayon strictement positif s'expriment à l'aide des dérivées en 0 de sa somme (proposition du cours) : $b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$, donc g n'est pas la fonction nulle sur $]-r, r[$: soit $c \in]-r, r[$ tel que $g(c) \neq 0$. Par continuité de g en c (proposition du cours), il existe $\eta > 0$ tel que $]c-\eta, c+\eta[\subset]-r, r[$ et que g ne s'annule pas sur cet intervalle. Comme $fg = 0$, f est nulle sur $]c-\eta, c+\eta[$. La question 8, appliquée à la série entière $\sum a_n x^n$, dont le rayon $R_a \geqslant r$ donne $]c-\eta, c+\eta[\subset]-R_a, R_a[$, montre que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Pour $x > 0$, $\psi(x) = \varphi(-x) = 0$; pour $x < 0$, $\varphi(x) = 0$; et $\varphi(0) = 0$. Donc $\varphi\psi$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Supposons qu'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon au moins r telle que $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$. Alors, pour $x \in]-r, r[$, $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$, et la série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$ a le même rayon. Par la question 10, les a_n sont tous nuls ou les $(-1)^n a_n$ sont tous nuls ; dans les deux cas φ est nulle sur $]-r, r[$, ce qui contredit $\varphi\left(\frac{r}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{2}{r}} > 0$.

Correction de l'exercice 10.45

Énoncé p. 13

1. Par la relation de récurrence,

$$b_1 = -\frac{b_0}{2!} = -\frac{1}{2}, \qquad b_2 = -\left(\frac{b_0}{3!} + \frac{b_1}{2!}\right) = -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12},$$
$$b_3 = -\left(\frac{b_0}{4!} + \frac{b_1}{3!} + \frac{b_2}{2!}\right) = -\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = 0,$$
$$b_4 = -\left(\frac{b_0}{5!} + \frac{b_1}{4!} + \frac{b_2}{3!} + \frac{b_3}{2!}\right) = -\left(\frac{6}{720} - \frac{15}{720} + \frac{10}{720}\right) = -\frac{1}{720}.$$

Donc $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$ et $B_4 = -\frac{24}{720} = -\frac{1}{30}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $|b_k| \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ ». On a $|b_0| = 1$, d'où $\mathcal{P}(0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Par la relation de récurrence et l'inégalité triangulaire, puis le changement d'indice $j = n + 2 - k$,

$$|b_{n+1}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|b_k|}{(n+2-k)!} \leqslant \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j!} \leqslant \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e} - 2 \leqslant 1,$$

la somme de la série venant du développement de l'exponentielle en $x = 1$ (proposition du cours), et $e \leqslant 3$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$. Par récurrence, $|b_n| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi la suite $(b_n 1^n)$ est bornée, donc 1 appartient à l'ensemble dont ρ est la borne supérieure : $\rho \geqslant 1$.

3. Pour $x \neq 0$, $\frac{|x|^{n+1}/(n+2)!}{|x|^n/(n+1)!} = \frac{|x|}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$: par la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon est infini (proposition du cours). Pour $x \in \mathbb{R}$, par le développement usuel de l'exponentielle (proposition du cours),
$$x\,G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$
On a $G(0) = 1 > 0$. Pour $x \neq 0$, $G(x) = \frac{e^x-1}{x}$, et $e^x - 1$ est du signe de x par stricte croissance de l'exponentielle : $G(x) > 0$.

4. Le produit de Cauchy de $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ et de $\sum b_n x^n$ a pour coefficients $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n-k+1)!}$: $c_0 = b_0 = 1$, et $c_n = 0$ pour $n \geqslant 1$ par définition de (b_n). Comme $\min(+\infty, \rho) = \rho$, la somme de ce produit de Cauchy est le produit des sommes sur $]-\rho, \rho[$ (proposition du cours) : pour tout $x \in]-\rho, \rho[$,
$$G(x)B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 1.$$
Pour $x \in]-\rho, \rho[$ non nul, $G(x) = \frac{e^x-1}{x} \neq 0$, donc $B(x) = \frac{1}{G(x)} = \frac{x}{e^x-1}$.

5. Notons $h(x) = B(x) + \frac{x}{2}$ pour $x \in]-\rho, \rho[$. On a $h(0) = b_0 = 1$. Pour x non nul,
$$h(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x\,(e^x + 1)}{2(e^x - 1)},$$
et, en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x,
$$h(-x) = \frac{-x\,(e^{-x} + 1)}{2(e^{-x} - 1)} = \frac{-x\,(1 + e^x)}{2(1 - e^x)} = h(x).$$
La fonction h est donc paire. Elle est la somme sur $]-\rho, \rho[$ de la série entière $\sum h_n x^n$, avec $h_1 = b_1 + \frac{1}{2} = 0$ et $h_n = b_n$ pour $n \neq 1$, de rayon ρ. Pour $x \in]-\rho, \rho[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} h_n x^n = h(x) = h(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n h_n x^n$. Par unicité des coefficients (corollaire du cours), $h_n = (-1)^n h_n$ pour tout n, donc $h_n = 0$ pour n impair : $b_{2k+1} = h_{2k+1} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$.

6. Les séries entières $\sum \frac{z^n}{(n+1)!}$ et $\sum b_n z^n$ ont pour rayons $+\infty$ et ρ (le rayon ne dépend pas de ce que la variable soit réelle ou complexe). La somme de leur produit de Cauchy est le produit de leurs sommes pour $|z| < \min(+\infty, \rho) = \rho$ (proposition du cours) ; avec le calcul des c_n de la question 4, on obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$,
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1.$$
Par le développement $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ (proposition du cours), pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) - 1$. En $z = 2i\pi$, $\exp(2i\pi) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$, donc $2i\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2i\pi)^n}{(n+1)!} = 0$, et comme $2i\pi \neq 0$, cette somme est nulle. Si $\rho > 2\pi$, l'égalité précédente en $z = 2i\pi$, de module $2\pi < \rho$, donne $0 = 1$: c'est absurde. Donc $\rho \leqslant 2\pi$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$, par le développement usuel de l'exponentielle (proposition du cours), $\mathrm{e}^{jx} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{j^p}{p!} x^p$ pour chaque $j \in [\![0, m-1]\!]$ (avec $0^0 = 1$), et en sommant ces m séries convergentes,

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}^{jx} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{m-1} j^p \right) \frac{x^p}{p!}.$$

De même, $\mathrm{e}^{mx} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m^n x^n}{n!}$, donc pour $x \neq 0$, $\frac{\mathrm{e}^{mx}-1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} x^n$, série entière de rayon infini (le rapport de deux termes consécutifs est $\frac{m|x|}{n+2}$). Soit $x \in]-\rho, \rho[$ non nul. Comme $\mathrm{e}^x \neq 1$, la somme géométrique de raison e^x donne

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}^{jx} = \frac{\mathrm{e}^{mx} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^{mx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^{mx} - 1}{x} B(x)$$

par la question 4. Le produit de Cauchy de ces deux séries entières, de rayons $+\infty$ et ρ, a pour somme le produit de leurs sommes sur $]-\rho, \rho[$ (proposition du cours) :

$$\frac{\mathrm{e}^{mx} - 1}{x} B(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} d_p x^p, \qquad d_p = \sum_{k=0}^{p} b_k \frac{m^{p+1-k}}{(p+1-k)!}.$$

L'égalité $\sum_p \left(\sum_{j=0}^{m-1} j^p \right) \frac{x^p}{p!} = \sum_p d_p x^p$ a lieu pour $x \in]-\rho, \rho[$ non nul, et aussi en $x = 0$, où les deux membres valent $m = d_0$. Par unicité des coefficients (corollaire du cours), pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{m-1} j^p = p!\, d_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!\,(p+1-k)!} B_k\, m^{p+1-k} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k\, m^{p+1-k}.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $p \geqslant 1$, le terme $j = 0$ est nul, donc $\sum_{j=1}^{n} j^p = \sum_{j=0}^{m-1} j^p$ avec $m = n+1$. Avec $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ et $B_3 = 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}\left(m^2 - m\right) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{3}\left(m^3 - \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m\right) = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4}\left(m^4 - 2m^3 + m^2\right) = \frac{m^2(m-1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$