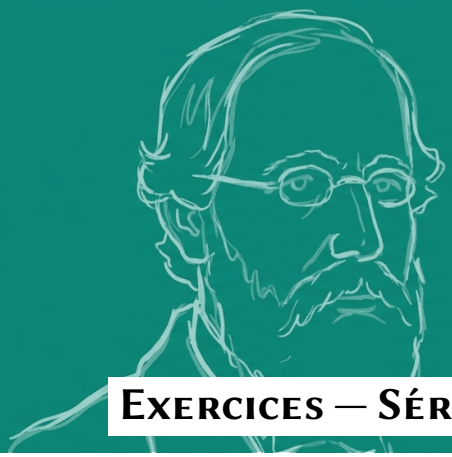


1 Révisions d'analyse

Exercices — Séries numériques

Parcours conseillés

Piste verte
- 1.2 Équivalents et limites de suites
- 1.3 Nature de dix séries
- 1.10 Série des $\frac{n}{(n+1)!}$

Piste rouge
- 1.15 Nature de six séries
- 1.20 Séries déduites de $\sum a_n$
- 1.12 Calcul de six sommes de séries
- 1.23 Constante d'Euler

Piste bleue
- 1.9 Convergence et calcul de dix sommes
- 1.18 Suite $u_{n+1} = \cos(u_n)$
- 1.11 Série des $\ln(1 - 1/n^2)$ (CCP 2013)

Piste noire
- 1.26 Suite d'intégrales et série (CCP 2014)
- 1.22 Produit infini et série
- 1.28 Sommation d'Abel
- 1.27 Série des $(-1)^n \frac{\sin n}{n}$ (EDHEC 2008)

1. Échauffements

Exercice 1.1 ○ Correction p. 8

Recherche de limites. Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^3 - 3}{2n^2 + 1}$
2. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

Exercice 1.2 ○ Correction p. 8

Équivalents et limites. Déterminer un équivalent et la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = -2n^2 + 7n + 3$
2. $u_n = n - \dfrac{3}{n^5}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2 + 2n - 5}{-4n^2 + 3n - 8}$
4. $u_n = (1.1)^n - n^{92} + \mathrm{e}^{-n}$
5. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$
6. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{3n^2 + 2^n - 5^n}{\ln(n) - 4n^2 + 3^n - 8}$
8. $u_n = \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}$
9. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$
10. $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$

Exercice 1.3 ○ Correction p. 9

Déterminer la nature des séries de terme général suivant :

1. $\dfrac{n^5}{2^n}$

2. $\dfrac{4^n - n}{5^n + 2n^3}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $\dfrac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}$
5. $\dfrac{\ln(n)}{n}$
6. $\dfrac{\mathrm{sh}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$
7. $\ln\left(\dfrac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$
8. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$
9. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
10. $\sin\left(n\pi + \dfrac{1}{n}\right)$

2. Calculs d'équivalents et de limites

Exercice 1.4 • Correction p. 11

Recherche de limites. Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n^3 - \ln(n)}{\mathrm{e}^{2n}+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
3. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n - 3^n}{\mathrm{e}^n + n!}$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{bn}$ avec $(a,b) \in]0,+\infty[^2$
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$

Exercice 1.5 • Correction p. 11

Recherche d'équivalents. Donner un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-1/n^2}\right)$
4. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

Exercice 1.6 •• Correction p. 11

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
2. $v_n = \dfrac{n \sin n}{1+n^2}$
3. $w_n = \sqrt[n]{n}$
4. $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
5. $y_n = n^2\left(\cos\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n+1}\right)$
6. $z_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
7. $t_n = \dfrac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$

Exercice 1.7 •• Correction p. 12

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$
2. $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^3-n}$
3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{n}{2^n}\right)\right)$

Exercice 1.8 ●●● Correction p. 13

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant $u_n = o(\sqrt{n})$. On pose

$$v_n = \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-u_n}.$$

Déterminer un équivalent de $\ln(v_n)$ puis en déduire la limite de (v_n).

3. Convergence et calcul de sommes

Exercice 1.9 ● Correction p. 13

Convergence et calculs. Prouver la convergence de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants et calculer sa somme (pour $n \geq 0$, sauf mention contraire).

1. $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + 2^n}{4^n}$
3. $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{-n}$
4. $u_n = (-1)^n n \mathrm{e}^{-2n}$
5. $u_n = \dfrac{n(n+3)}{3^{n+2}}$
6. $u_n = \dfrac{n + 3^n}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2^n n!}$
8. $u_n = \dfrac{2^n}{(n+2)!}$
9. $u_n = \dfrac{1}{4n^2 - 1}$ pour $n \geq 1$
10. $u_n = \dfrac{2}{n(n-2)}$ pour $n \geq 3$

Exercice 1.10 ● Correction p. 14

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a}{n!} + \dfrac{b}{(n+1)!}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Montrer que la série de terme général $(n^2 - 1)u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1.11 ●● Correction p. 15

CCP 2013. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 1.12 ●● Correction p. 15

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme. On pourra utiliser au besoin que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k}$
2. $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{n!}$

5. $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (utiliser la question précédente)

Exercice 1.13 ●●● Correction p. 17

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

4. Nature d'une série

Exercice 1.14 ● Correction p. 17

Nature de séries. Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{n^2-3}{n^\alpha + \ln(n)}$ avec $\alpha > 0$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}(\ln n)^2}{\mathrm{e}^n}$
3. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$

Exercice 1.15 ●● Correction p. 18

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+2n}{n^4+n^3+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+1/n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln(2-\mathrm{e}^{1/n})$

Exercice 1.16 ●● Correction p. 18

Déterminer α et β tels que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}$ soit convergente. Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

Exercice 1.17 ●● Correction p. 19

Préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \dfrac{\ln(1+a^{3n})}{a^n}$, en fonction du réel $a > 0$.

5. Séries et suites associées

Exercice 1.18 ● Correction p. 19

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(1) \leq u_n \leq 1$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leq (1-\cos(1))\sin^{n-1}(1)$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 1.19 • Correction p. 20

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente, et $(a_{\phi(n)})$ une suite extraite de (a_n) (où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante). Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_{\phi(n)}$ est absolument convergente.

Exercice 1.20 •• Correction p. 20

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Étudier la nature des séries de terme général :

1. a_n^2
2. $\dfrac{a_n}{1+a_n}$
3. $\sin(a_n)$
4. $\sqrt{a_n}$
5. $\sqrt{a_n\, a_{n+1}}$

Exercice 1.21 •• Correction p. 20

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. Étudier la convergence de $\sum u_n^2$. On pourra montrer que $u_n^2 \sim u_n - u_{n+1}$.
3. Étudier la convergence de $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 1.22 ••• Correction p. 21

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. On pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \dfrac{x_k}{1+x_k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que (u_n) est monotone convergente, de limite $\ell \in [0, 1[$.
2. Que vaut ℓ lorsque $x_n = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
3. Démontrer, en étudiant $\ln(u_n)$, que $\ell \neq 0 \iff \sum \dfrac{1}{x_k}$ converge.
4. Étudier le cas où (x_n) est définie par $x_0 > 1$ et $x_{n+1} = x_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déterminer ℓ.

6. Résultats et théorèmes classiques

Exercice 1.23 •• Correction p. 22

Constante d'Euler. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge, puis déterminer ses sommes partielles.
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ (dite *constante d'Euler*) telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.24 ● ● ● Correction p. 22

Représenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $a > 0$, $b > 0$ et la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{1 + b^n}$ soit convergente.

Exercice 1.25 ● ● ● Correction p. 23

Règle de Raabe-Duhamel. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs et $\alpha > 0$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1. On pose $v_n = n^\alpha u_n$ et $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$. Montrer que la série $\sum w_n$ converge absolument.
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$, puis conclure sur la nature de $\sum u_n$.

7. Sujets de concours

Exercice 1.26 ● ● ● Correction p. 23

CCP 2014. Soit $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1 - t^2}\ \mathrm{d}t$. On pourra utiliser, sans le démontrer, la relation $a_{n+2} = a_n \cdot \dfrac{n+1}{n+4}$.

1. Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que la suite $(n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante.
3. Montrer que $a_n \sim a_{n+1}$, et en déduire un équivalent de a_n.
4. Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 1.27 ★ Correction p. 25

EDHEC 2008. On se propose de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(n)}{n}$ (pour $n \geq 1$) converge, et de calculer sa somme.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et $\lambda > 0$. Montrer par une intégration par parties que $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t = 0$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\cos(kt)\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{(2k+1)t}{2}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{(2k-1)t}{2}\right)$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos(t/2)}\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2}$.
5. Conclure que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.



1 Révisions d'analyse

★ Pour aller plus loin — Séries numériques

Exercice 1.28 ●● Correction p. 28

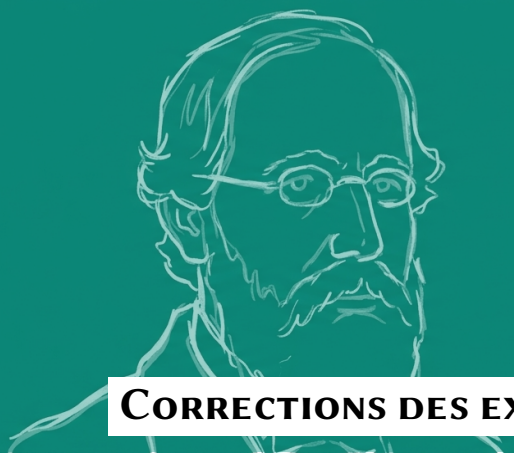
Sommation d'Abel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{e^{\frac{2i\pi}{7}n}}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence de $\sum u_n$ pour $\alpha > 1$, puis pour $\alpha \leq 0$.
2. On suppose maintenant $0 < \alpha \leq 1$. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{7}k}$. Montrer que la suite (A_n) est bornée.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right).$$
4. En déduire la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 1.29 ★ Correction p. 29

Théorème de réarrangement de Riemann. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série réelle convergente mais pas absolument convergente (on dit qu'elle est *semi-convergente*), et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une *permutation* de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)} = \ell$. Autrement dit, en réarrangeant les termes d'une série semi-convergente, on peut obtenir n'importe quelle somme.
On note $P = \{n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0\}$ et $N = \{n \in \mathbb{N} : u_n < 0\}$, et l'on suppose (sans perte de généralité) que ces deux ensembles sont infinis. On note $(p_k)_{k\geq 0}$ et $(q_k)_{k\geq 0}$ les énumérations strictement croissantes de P et N respectivement, et on pose $v_k = u_{p_k} \geq 0$ et $w_k = u_{q_k} < 0$.

1. Montrer que $\sum v_k = +\infty$ et $\sum w_k = -\infty$.
2. Construire φ par récurrence « gloutonne » : à chaque étape, on ajoute des termes positifs (par ordre d'apparition) jusqu'à ce que la somme dépasse ℓ, puis des termes négatifs jusqu'à ce qu'elle repasse en dessous de ℓ, et ainsi de suite. Montrer que chaque phase termine (c'est-à-dire finit par franchir ℓ).
3. Montrer que φ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
4. Soit $(T_N)_{N\geq 0}$ la suite des sommes partielles réarrangées. Montrer que $T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ell$.



1 Révisions d'analyse

Corrections des exercices — Séries numériques

Correction de l'exercice 1.1 Énoncé p. 1

1. $u_n = \dfrac{n^3-3}{2n^2+1} \sim \dfrac{n^3}{2n^2} = \dfrac{n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. On factorise par le terme dominant 3^n au numérateur et au dénominateur :
$$u_n = \frac{3^n\left((2/3)^n-1\right)}{3^n\left((2/3)^n+1\right)} = \frac{(2/3)^n-1}{(2/3)^n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-1}{1} = -1.$$
3. $u_n = -\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.
4. C'est une forme indéterminée « $\infty - \infty$ » : on lève l'indétermination en multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, qui ne s'annule pas :
$$u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$
Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Par décomposition en éléments simples, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, d'où par télescopage
$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
6. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$, donc
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$
Les deux encadrants tendent vers 1, donc par le théorème des gendarmes, $u_n \to 1$.

Correction de l'exercice 1.2 Énoncé p. 1

1. $u_n \sim -2n^2 \to -\infty$.
2. $u_n \sim n \to +\infty$ (car $\dfrac{3}{n^5} \to 0$).
3. $u_n \sim \dfrac{3n^2}{-4n^2} = -\dfrac{3}{4} \to -\dfrac{3}{4}$.
4. Par croissance comparée, $(1.1)^n$ domine n^{92} (car $1.1 > 1$), et $\mathrm{e}^{-n} \to 0$. Donc $u_n \sim (1.1)^n \to +\infty$.

5. $(3/4)^n \to 0$ et $\sqrt{n} \to +\infty$, donc $u_n \sim -\sqrt{n} \to -\infty$.
6. Par croissance comparée, $(3/4)^n\sqrt{n} \to 0$. Un équivalent simple est u_n lui-même (ou on peut écrire $u_n = \sqrt{n} \cdot (3/4)^n$ sans simplifier davantage).
7. Au numérateur, -5^n domine (car $5 > 3 > 2$), donc numérateur $\sim -5^n$. Au dénominateur, 3^n domine, donc dénominateur $\sim 3^n$. Ainsi $u_n \sim \dfrac{-5^n}{3^n} = -\left(\dfrac{5}{3}\right)^n \to -\infty$.
8. $\sqrt{2n+1} \sim \sqrt{2n}$ donc $u_n \sim 2\sqrt{2n} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{n} \to +\infty$.
9. Par la quantité conjuguée, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{2n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{n}} \to 0$.
10. $\ln(1+2/n) \sim 2/n$ donc $u_n \sim n \cdot \dfrac{2}{n} = 2 \to 2$.

Correction de l'exercice 1.3 **Énoncé p. 1**

1. Par croissance comparée (car $2 > 1$), $\lim_{n\to+\infty} n^2 \dfrac{n^5}{2^n} = 0$, donc $\dfrac{n^5}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs, le critère de domination donne que $\sum \dfrac{n^5}{2^n}$ **converge absolument**, donc converge.
2. Par croissance comparée, $n = o(4^n)$ et $2n^3 = o(5^n)$, donc
$$\frac{4^n - n}{5^n + 2n^3} \sim \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$
Or $\sum (4/5)^n$ est une série géométrique de raison $4/5 \in [0,1[$, donc convergente, et à termes positifs. Par le critère d'équivalence, la série $\sum \dfrac{4^n - n}{5^n + 2n^3}$ **converge**.
3. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+u) \sim u$ en 0,
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}.$$
Les deux suites sont positives, et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (harmonique). Par le critère d'équivalence, la série **diverge**.
4. Pour tout $n \geq 1$, $\left|\sin^3(n^2+1)\right| \leq 1$, donc
$$0 \leq \left|\frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$
Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, le critère de comparaison donne que la série **converge absolument**, donc converge.
5. Pour tout $n \geq 3$, on a $\ln(n) \geq 1$, donc $\dfrac{\ln n}{n} \geq \dfrac{1}{n} > 0$. Comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, par le critère de comparaison (contraposée), la série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ **diverge**.

6. On a
$$\frac{\mathrm{sh}(n)}{\mathrm{ch}(2n)} = \frac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{2n} + \mathrm{e}^{-2n}} \sim \mathrm{e}^{-n}.$$
Or $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1} \in [0, 1[$, donc convergente, et à termes positifs. Par le critère d'équivalence, la série **converge absolument**, donc converge.

7. On écrit
$$\ln\left(\frac{n^4 + 3n^2 + n}{n^4 + 2n^2 - n + 1}\right) = \ln\left(1 + \frac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1}\right).$$
Comme $\dfrac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+u) \sim u$ en 0,
$$\ln\left(1 + \frac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1}\right) \sim \frac{n^2 + 2n - 1}{n^4 + 2n^2 - n + 1} \sim \frac{1}{n^2}.$$
Les deux suites sont positives à partir d'un certain rang, et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Par le critère d'équivalence, la série **converge**.

8. On fait un développement asymptotique : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc
$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Puis
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} = \mathrm{e}\left(\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \sim -\frac{\mathrm{e}}{2n}.$$
Posons $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$, alors $-u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2n} > 0$. Comme $\sum \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$ diverge et est à termes positifs, le critère d'équivalence donne que $\sum -u_n$ diverge, donc $\sum u_n$ **diverge**.

9. Par la quantité conjuguée, pour tout $n \geq 0$,
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
Les deux suites sont positives, et $\sum \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge (Riemann, $1/2 \leq 1$). Par le critère d'équivalence, la série **diverge**.

   Alternative. Les sommes partielles sont télescopiques : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1} \to +\infty$.

10. Comme $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, on obtient par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\left(n\pi + \dfrac{1}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

    Faisons un développement : $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, donc
$$\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Or la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (démontré dans les rappels via l'astuce intégrale), et la série $\sum O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge absolument par critère de domination (car $\sum \frac{1}{n^3}$ converge). Par somme de séries convergentes, la série **converge**.

Correction de l'exercice 1.4

Énoncé p. 2

1. Par croissance comparée, $n^3 = o(e^{2n})$, donc numérateur $\sim n^3$ et dénominateur $\sim e^{2n}$. Puis $u_n \sim \frac{n^3}{e^{2n}} \to 0$.
2. Par la quantité conjuguée, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Par croissance comparée, $3^n = o(n!)$ et $e^n = o(n!)$. Donc numérateur $= e^n - 3^n = o(n!)$ et dénominateur $\sim n!$. Ainsi $u_n \to 0$.
4. Écrivons $u_n = \exp\left(bn \ln(1 + a/n)\right)$. Comme $a/n \to 0$, $\ln(1+a/n) \sim a/n$, donc $bn \ln(1+a/n) \sim bn \cdot a/n = ab \to ab$. Par continuité de exp, $u_n \to e^{ab}$.
5. $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$, d'où par télescopage
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$
6. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$, donc
$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n} k \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n} k, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}.$$
Le membre de gauche vaut $\frac{1}{2}$ et celui de droite tend vers $\frac{1}{2}$, donc par le théorème des gendarmes, $u_n \to \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1.5

Énoncé p. 2

1. Mise au même dénominateur : $u_n = \frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$.
2. Par la quantité conjuguée, $u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \sim \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. $e^{-1/n^2} \to 1$, donc $2 - e^{-1/n^2} = 1 + (1 - e^{-1/n^2})$. Comme $1/n^2 \to 0$, on a $1 - e^{-1/n^2} \sim \frac{1}{n^2}$. Puis $\ln(1+x) \sim x$ pour $x \to 0$, donc $u_n = \ln(1 + (1 - e^{-1/n^2})) \sim \frac{1}{n^2}$.
4. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 1.6

Énoncé p. 2

1. 2^n domine (par croissance comparée), donc numérateur $\sim 2^n$ et dénominateur $\sim 3n$. D'où $u_n \sim \frac{2^n}{3n} \to +\infty$.

2. $|v_n| \leq \dfrac{n}{1+n^2} \sim \dfrac{1}{n} \to 0$, donc $v_n \to 0$.
3. $w_n = n^{1/n} = \exp\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. Comme $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$, $w_n \to \mathrm{e}^0 = 1$.
4. $\ln x_n = (n+2)\ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right) = (n+2)\ln\left(1 - \dfrac{2}{n+1}\right)$. Comme $\dfrac{2}{n+1} \to 0$, $\ln(1 - 2/(n+1)) \sim -2/(n+1)$. Donc $\ln x_n \sim -(n+2)\cdot\dfrac{2}{n+1} \to -2$. Par continuité de exp, $x_n \to \mathrm{e}^{-2}$.
5. Avec la formule $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$:

$$\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} = -2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right).$$

La première sin $\sim \dfrac{1}{n}$ (car son argument $\sim \dfrac{1}{n}$), et la seconde sin $\sim \dfrac{1}{2n(n+1)} \sim \dfrac{1}{2n^2}$. D'où

$$\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} \sim -2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{n^3}.$$

Donc $y_n \sim n^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{n^3}\right) = -\dfrac{1}{n} \to 0$.

6. $\ln z_n = n^2 \ln(\cos(1/n))$. Comme $\cos(1/n) = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$ et $\ln(1+x) \sim x$, on a $\ln(\cos(1/n)) \sim -\dfrac{1}{2n^2}$. Donc $\ln z_n \sim -\dfrac{1}{2} \to -\dfrac{1}{2}$, d'où $z_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$.
7. $t_n \sim \dfrac{3n^2}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{3n^2}{n} = 3n \to +\infty$.

Correction de l'exercice 1.7

Énoncé p. 2

1. Comme $\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n} \to 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$ pour $x \to 0$,

$$u_n \sim \frac{1-\sqrt{n}}{1+n}.$$

Or $\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n} \sim \dfrac{-\sqrt{n}}{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Donc $u_n \sim -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2. $\sqrt{n^3 - n}$ domine nettement $\sqrt{n^2+1}$ (car $n^3 \gg n^2$), donc

$$v_n \sim -\sqrt{n^3 - n} \sim -n^{3/2}.$$

3. On utilise $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$:

$$w_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right).$$

Par croissance comparée, $\dfrac{n}{2^n} \to 0$. Donc $\sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right) \sim \dfrac{n}{2^n}$, puis $w_n \sim \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right) \sim \dfrac{n}{2^n}$.

Correction de l'exercice 1.8 **Énoncé p. 3**

Comme $u_n = o(\sqrt{n})$, on a $\dfrac{u_n}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$. Utilisons le développement $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ avec $x = \dfrac{u_n}{n}$:

$$n \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) = n\left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{u_n^2}{n^2}\right)\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2n} + o\left(\frac{u_n^2}{n}\right).$$

Donc

$$\ln v_n = n \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) - u_n = -\frac{u_n^2}{2n} + o\left(\frac{u_n^2}{n}\right) \sim -\frac{u_n^2}{2n}.$$

Comme $u_n = o(\sqrt{n})$, on a $u_n^2 = o(n)$, donc $\dfrac{u_n^2}{n} \to 0$. Ainsi $\ln v_n \to 0$, puis par continuité de exp, $v_n \to 1$.

Correction de l'exercice 1.9 **Énoncé p. 3**

On utilise les formules des séries géométriques et leurs dérivées : pour $|q| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3},$$

ainsi que la série exponentielle $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $\displaystyle\sum \frac{n+1}{2^n} = \sum \frac{n}{2^n} + \sum \frac{1}{2^n}$. Convergence assurée par croissance comparée. Valeurs : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2$. Total = $\boxed{4}$.
2. $\displaystyle\sum \frac{n^2+2^n}{4^n} = \sum \frac{n^2}{4^n} + \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n} = \frac{(1/4)(5/4)}{(3/4)^3} = \frac{5/16}{27/64} = \frac{20}{27}$. Total = $\boxed{\dfrac{20}{27} + 2 = \dfrac{74}{27}}$.
3. $\displaystyle\sum (-1)^n \mathrm{e}^{-n} = \sum (-1/\mathrm{e})^n$, série géométrique de raison $-1/\mathrm{e} \in]-1, 1[$. Somme $= \dfrac{1}{1 + 1/\mathrm{e}} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}}$.
4. $\displaystyle\sum (-1)^n n \mathrm{e}^{-2n} = \sum n(-\mathrm{e}^{-2})^n$. Avec $q = -\mathrm{e}^{-2}$, $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-2}}{(1+\mathrm{e}^{-2})^2} = \boxed{-\frac{\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}^2+1)^2}}.$$

5. $\displaystyle\sum \frac{n(n+3)}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \sum \frac{n^2+3n}{3^n} = \frac{1}{9}\left(\sum \frac{n^2}{3^n} + 3 \sum \frac{n}{3^n}\right)$. Avec $q = 1/3$:

$$\sum \frac{n}{3^n} = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}, \quad \sum \frac{n^2}{3^n} = \frac{(1/3)(4/3)}{(2/3)^3} = \frac{3}{2}.$$

Total : $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{15}{4} = \boxed{\dfrac{5}{12}}$.

6. $\sum \frac{n+3^n}{n!} = \sum \frac{n}{n!} + \sum \frac{3^n}{n!}$. Pour la première, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ pour $n \geq 1$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$. Pour la seconde, $\sum \frac{3^n}{n!} = \mathrm{e}^3$. Total = $\boxed{\mathrm{e} + \mathrm{e}^3}$.

7. Pour $n \geq 2$, $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^n n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n (n-2)!} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k!} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{1/2}}{4}}.$$

8. Changement d'indice $k = n+2$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{k-2}}{k!} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - 1 - 2) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^2 - 3}{4}}.$$

9. $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}.$$

10. $\frac{2}{n(n-2)} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}$. Par télescopage pour $n \geq 3$,

$$\sum_{n=3}^{N} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Correction de l'exercice 1.10 **Énoncé p. 3**

1. Par croissance comparée, $u_n = o(1/n^2)$, donc la série converge absolument par critère de domination (car $\sum 1/n^2$ converge).

2. On cherche a, b tels que $\frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!} = \frac{a(n+1)+b}{(n+1)!} = \frac{an+a+b}{(n+1)!}$. Pour que cela vaille $\frac{n}{(n+1)!}$, il faut $a = 1$ et $a + b = 0$, soit $\boxed{a = 1, b = -1}$. Donc

$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Par télescopage,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \boxed{1}.$$

3. Pour $n \geq 2$,

$$(n^2-1)u_n = \frac{(n-1)(n+1)n}{(n+1)!} = \frac{(n-1)n}{n!} = \frac{n-1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

(la dernière égalité valable pour $n \geq 2$). Pour $n = 0$ et $n = 1$, on vérifie que $(n^2-1)u_n = 0$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-1)u_n = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \boxed{\mathrm{e}}.$$

Correction de l'exercice 1.11 **Énoncé p. 3**

Convergence. $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$, donc $-\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} > 0$. Par équivalent sur séries positives, la série converge.
Calcul. Pour $N \geq 2$,

$$S_N = \sum_{n=2}^{N}\ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N}\left(\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n)\right).$$

Par changements d'indices $p = n+1$ dans la première somme et $q = n-1$ dans la deuxième :

$$S_N = \sum_{p=3}^{N+1}\ln(p)+\sum_{q=1}^{N-1}\ln(q)-2\sum_{n=2}^{N}\ln(n) = \ln(N+1)-\ln(2)-\ln(N)+\ln(1) = -\ln(2)+\ln\left(\frac{N+1}{N}\right).$$

Donc $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2)$, et $\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \boxed{-\ln(2)}$.

Correction de l'exercice 1.12 **Énoncé p. 3**

1. On a $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Par télescopage, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc la série converge et $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-k} = \boxed{1}$.

2. On écrit

$$\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = \ln(k)+\ln(k+2)-2\ln(k+1) = \left(\ln(k+2)-\ln(k+1)\right)-\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right).$$

En posant $a_k = \ln(k+1)-\ln(k)$, on reconnaît $a_{k+1}-a_k$. Par télescopage, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = a_{n+1}-a_2 = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(2)-\ln(3).$$

Donc la série converge et $\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = \boxed{\ln(2)-\ln(3)}$.

3. *Convergence :* par croissance comparée,

$$n^2\left|(-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n}\right| \leq \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $(-1)^n \dfrac{\cos(n)}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série converge absolument par critère de domination.
Calcul : remarquons que $\cos(n) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{in})$, donc

$$(-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(\left(-\frac{\mathrm{e}^i}{2}\right)^n\right).$$

La série géométrique $\sum \left(-\dfrac{\mathrm{e}^i}{2}\right)^n$ converge absolument (raison de module $1/2 < 1$), et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{\mathrm{e}^i}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{\mathrm{e}^i}{2}} = \frac{2}{2+\mathrm{e}^i} = \frac{2(2+\mathrm{e}^{-i})}{(2+\mathrm{e}^i)(2+\mathrm{e}^{-i})} = \frac{4+2\cos(1)-2i\sin(1)}{5+4\cos(1)}.$$

En prenant la partie réelle,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = \boxed{\frac{4+2\cos(1)}{5+4\cos(1)}}.$$

4. *Convergence :* $\dfrac{n^2}{n!} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée, donc la série converge absolument.
   Calcul : pour $n \geq 1$, $\dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{n}{(n-1)!} = \dfrac{(n-1)+1}{(n-1)!}$. Donc, par linéarité sur les séries convergentes,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \mathrm{e} + \mathrm{e} = \boxed{2\mathrm{e}}$$

   en utilisant $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = \mathrm{e}$ (série exponentielle en 1).

5. *Convergence :* $\dfrac{1}{(2p+1)^2} \sim \dfrac{1}{4p^2}$, et $\sum \dfrac{1}{p^2}$ converge. Les deux suites sont positives, donc par critère d'équivalence, $\sum \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ converge.
   Calcul : pour $N \geq 1$, on sépare termes pairs et impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

   En passant à la limite ($N \to +\infty$),

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

   d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

6. *Convergence :* $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc la série converge absolument.
   Calcul : on sépare à nouveau termes pairs et impairs. Pour $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

   Comme la série converge, cette limite donne la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \boxed{-\frac{\pi^2}{12}}.$$

Correction de l'exercice 1.13 — Énoncé p. 4

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!$ pour $n \geq 1$. On a $S_n = n! + S_{n-1}$, donc

$$\frac{S_n}{n!} = 1 + \frac{S_{n-1}}{n!}.$$

Il suffit de montrer que $\dfrac{S_{n-1}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Pour tout $n \geq 3$, décomposons en séparant le dernier terme de S_{n-1} :

$$S_{n-1} = (n-1)! + S_{n-2}.$$

De plus, pour tout $k \leq n-2$, on a $k! \leq (n-2)!$, donc $S_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} k! \leq (n-2)\cdot(n-2)!$.
On en déduit :

$$0 \leq \frac{S_{n-1}}{n!} = \frac{(n-1)! + S_{n-2}}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{(n-2)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

Les deux termes tendent vers 0, donc par encadrement $\dfrac{S_{n-1}}{n!} \to 0$. Ainsi $\dfrac{S_n}{n!} \to 1$, c'est-à-dire $S_n \sim n!$.

Correction de l'exercice 1.14 — Énoncé p. 4

1. Comme $\alpha > 0$, $\ln n = o(n^\alpha)$, donc $n^\alpha + \ln n \sim n^\alpha$. De plus $n^2 - 3 \sim n^2$. D'où $u_n \sim \dfrac{n^2}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha-2}}$. Par équivalent sur suites positives (pour n assez grand), la série a même nature que $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha-2}}$, qui converge (Riemann) si et seulement si $\alpha - 2 > 1$, soit $\boxed{\alpha > 3}$.
2. Par croissance comparée, $u_n = o(1/n^2)$, donc la série converge (absolument) par critère de domination.
3. Montrons que $n^2 e^{-\sqrt{n}} \to 0$. On a $n^2 e^{-\sqrt{n}} = e^{2\ln n - \sqrt{n}}$. Or $2\ln n - \sqrt{n} \to -\infty$ (car $\sqrt{n}$ domine $\ln n$), donc $n^2 e^{-\sqrt{n}} \to 0$, soit $e^{-\sqrt{n}} = o(1/n^2)$. Par domination, la série converge.
4. $|u_n| = \dfrac{1}{n^3}$, et $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $3 > 1$). Donc la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^3}$

converge absolument.

Correction de l'exercice 1.15 **Énoncé p. 4**

1. $\dfrac{n^3+2n}{n^4+n^3+1} \sim \dfrac{n^3}{n^4} = \dfrac{1}{n}$. Par équivalent sur suites positives, la série a même nature que la série harmonique, qui diverge. **Divergente.**
2. $|u_n| = \dfrac{n+2}{n^3+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$. La série des valeurs absolues converge (équivalent à la série de Riemann $\sum 1/n^2$), donc la série converge absolument.
3. $(\ln n/n)^2 = (\ln n)^2/n^2$. Par croissance comparée, $(\ln n)^2 = o(\sqrt{n})$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme $\sum 1/n^{3/2}$ converge (Riemann, $3/2 > 1$), par critère de domination, la série converge.
4. Posons $a_n = u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$. Alors

$$\ln a_n = n\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \sim n\sqrt{n} \cdot \left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -1.$$

   Donc $a_n \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$, et la série diverge grossièrement.
5. $n^{1+1/n} = n \cdot n^{1/n} = n \cdot \mathrm{e}^{\ln n/n}$. Comme $\ln n/n \to 0$, $n^{1/n} \to 1$. Donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$, et par équivalent sur suites positives, la série diverge.
6. Comme $1/n \to 0$, on a $\mathrm{e}^{1/n} = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o(1/n^2)$, donc

$$2 - \mathrm{e}^{1/n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) = 1 + \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

   Par $\ln(1+x) \sim x$, on obtient $\ln(2 - \mathrm{e}^{1/n}) \sim -\dfrac{1}{n}$. Donc $-u_n \sim \dfrac{1}{n} > 0$ (éventuellement), et par équivalent sur séries positives, $\sum -u_n$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

Correction de l'exercice 1.16 **Énoncé p. 4**

Par développement asymptotique, en utilisant $(1+u)^{1/2} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + o(u^2)$:

$$u_n = (1+\alpha+\beta)\sqrt{n} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

- Si $1+\alpha+\beta \neq 0$, $u_n \sim (1+\alpha+\beta)\sqrt{n} \not\to 0$, donc la série diverge grossièrement.
- Si $1+\alpha+\beta = 0$ et $\dfrac{\alpha}{2} + \beta \neq 0$, alors $u_n \sim \left(\dfrac{\alpha}{2} + \beta\right)\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, et la série diverge par équivalent (car $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge).
- Si $1+\alpha+\beta = 0$ et $\dfrac{\alpha}{2} + \beta = 0$, alors $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, et la série converge absolument par critère de domination (car $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge).

Le système $1+\alpha+\beta=0$ et $\frac{\alpha}{2}+\beta=0$ donne $\boxed{\alpha=-2}$ et $\boxed{\beta=1}$.

Calcul de la somme. Avec ces valeurs, $u_n=\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}=(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$. Posons $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=-\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Alors $u_n=a_n-a_{n+1}$ et par télescopage,

$$\sum_{n=0}^{N}u_n=a_0-a_{N+1}=-1-a_{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}-1.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})=\boxed{-1}$.

Correction de l'exercice 1.17 Énoncé p. 4

- Si $0<a<1$, alors $a^n\to 0$, donc $\ln(1+a^{3n})\sim a^{3n}$, puis $u_n\sim a^{2n}>0$. Comme $\sum a^{2n}$ est une série géométrique de raison $a^2\in[0,1[$ convergente, par critère d'équivalence, $\sum u_n$ **converge**.
- Si $a>1$, alors $a^n\to+\infty$, et

$$\ln(1+a^{3n})=3n\ln(a)+\ln(1+a^{-3n})\sim 3n\ln(a),$$

donc $u_n\sim\dfrac{3n\ln(a)}{a^n}>0$. Posons $v_n=\dfrac{n}{a^n}$. Alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{n+1}{an}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{a}\in[0,1[$. Par critère de d'Alembert, $\sum v_n$ converge, puis par équivalent $\sum u_n$ **converge**.
- Si $a=1$, $u_n=\ln(2)$ est constant, donc la série diverge grossièrement.

Correction de l'exercice 1.18 Énoncé p. 4

1. Récurrence. Initialisation : $u_1=\cos(0)=1$. Hérédité : si $\cos(1)\le u_n\le 1$, alors $u_n\in[0,1]$, donc $\cos(1)\le\cos(u_n)=u_{n+1}\le\cos(0)=1$ car cos est décroissante sur $[0,\pi/2]$.
2. Sur $[0,1]$, $|\cos'|=|-\sin|\le\sin(1)$ (car sin est croissante sur $[0,1]$). Par inégalité des accroissements finis, pour $x,y\in[0,1]$, $|\cos(x)-\cos(y)|\le\sin(1)\,|x-y|$. Récurrence sur n :
   - $n=1$: $|u_2-u_1|=1-\cos(1)=(1-\cos(1))\sin^0(1)$. OK.
   - Hérédité : $|u_{n+2}-u_{n+1}|=|\cos(u_{n+1})-\cos(u_n)|\le\sin(1)\,|u_{n+1}-u_n|\le\sin(1)\cdot(1-\cos(1))\sin^{n-1}(1)=(1-\cos(1))\sin^n(1)$.
3. Comme $0\le\sin(1)<1$, la série géométrique $\sum(1-\cos(1))\sin^{n-1}(1)$ converge. Par critère de comparaison, $\sum|u_{n+1}-u_n|$ converge, donc la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument. Donc la suite (u_n) **converge**.

Correction de l'exercice 1.19 **Énoncé p. 5**

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\phi(0), \dots, \phi(N)\}$ est inclus dans $\{0, 1, \dots, \phi(N)\}$. Donc, par positivité des $|a_n|$:

$$\sum_{n=0}^{N} \left|a_{\phi(n)}\right| \leq \sum_{k=0}^{\phi(N)} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| =: K.$$

La suite des sommes partielles de $\sum \left|a_{\phi(n)}\right|$ est donc croissante (car les termes sont positifs) et majorée par K. Donc elle converge, c'est-à-dire $\sum a_{\phi(n)}$ **converge absolument**.

Correction de l'exercice 1.20 **Énoncé p. 5**

Comme $\sum a_n$ converge, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel $0 \leq a_n \leq 1$.

1. Pour $n \geq n_0$, $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ (car $a_n \leq 1$). Par critère de comparaison, $\sum a_n^2$ **converge**.
2. Pour tout n, $1 + a_n \geq 1$, donc $0 \leq \dfrac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$. Par critère de comparaison, la série **converge**.
3. $\sin(a_n) \sim a_n$ car $a_n \to 0$. Les deux suites étant positives, par critère d'équivalence, $\sum \sin(a_n)$ **converge**.
4. *On ne peut pas conclure en général.* Par exemple, si $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\sum a_n$ converge mais $\sum \sqrt{a_n} = \sum \dfrac{1}{n}$ diverge. En revanche, si $a_n = \dfrac{1}{n^4}$, $\sum \sqrt{a_n} = \sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.
5. Par l'inégalité $2\sqrt{xy} \leq x + y$ (qui vient de $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$),

$$0 \leq \sqrt{a_n\, a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Par linéarité, $\sum \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ converge. Par critère de comparaison, $\sum \sqrt{a_n\, a_{n+1}}$ **converge**.

Correction de l'exercice 1.21 **Énoncé p. 5**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$ (car $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$), donc $u_{n+1} \leq u_n$: (u_n) est décroissante. Une récurrence immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout n. Donc (u_n) est décroissante minorée, donc converge vers un $\ell \geq 0$. Par continuité, $\ell = 1 - \mathrm{e}^{-\ell}$. L'étude de $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x$ montre que $g < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc $\ell = 0$.
2. Par développement, comme $u_n \to 0$:

$$u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n} = 1 - \left(1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2),$$

donc $u_n - u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$, soit $u_n^2 \sim 2(u_n - u_{n+1})$.
La série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est télescopique et converge (car (u_n) converge vers 0).
Comme $u_n^2 \geq 0$, par critère d'équivalence, $\sum u_n^2$ **converge**.

3. Série télescopique :

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0).$$

Or $u_n \to 0^+$ donc $\ln(u_n) \to -\infty$. Donc la série **diverge**.

Correction de l'exercice 1.22 **Énoncé p. 5**

1. Pour tout k, $0 < \dfrac{x_k}{1+x_k} < 1$, donc $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x_{n+1}}{1+x_{n+1}} < 1$, soit (u_n) strictement décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers $\ell \geq 0$. De plus $\ell \leq u_0 = \dfrac{x_0}{1+x_0} < 1$.
2. Avec $x_n = n+1$, le produit est télescopique :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\ell = 0$.

3. $\ln(u_n) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right)$. On a : $\ell > 0 \iff (\ln u_n)$ converge (vers $\ln \ell$) $\iff \sum \ln(1+1/x_k)$ converge. Or $x_k \to +\infty$, donc $\ln(1+1/x_k) \sim \dfrac{1}{x_k}$, et les deux séries (à termes positifs) sont de même nature. D'où l'équivalence annoncée.
4. Avec $x_{n+1} = x_n^2$ et $x_0 > 1$, une récurrence immédiate donne $x_n = x_0^{2^n}$. Donc $\dfrac{1}{x_n} = \left(\dfrac{1}{x_0}\right)^{2^n} \leq \left(\dfrac{1}{x_0}\right)^n$ pour $n \geq 0$ (car $2^n \geq n$ et $1/x_0 < 1$). Comme $1/x_0 \in [0,1[$, la série géométrique $\sum (1/x_0)^n$ converge, et par comparaison $\sum \dfrac{1}{x_k}$ converge. Par la question 3, $\ell > 0$.
Calcul de ℓ. Par une récurrence exploitant $(1-x_0^{2^n})(1+x_0^{2^n}) = 1 - x_0^{2^{n+1}}$, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{1-x_0} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}.$$

Comme $x_0 > 1$, $x_0^{2^{n+1}} \to +\infty$, donc $1 - x_0^{2^{n+1}} \sim -x_0^{2^{n+1}}$, puis

$$\frac{u_n}{1-x_0} \sim \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{-x_0^{2^{n+1}}} = -\frac{1}{x_0}.$$

Donc $u_n \to \dfrac{x_0-1}{x_0}$, soit $\ell = \boxed{\dfrac{x_0-1}{x_0}}$.

Correction de l'exercice 1.23 **Énoncé p. 5**

1. Faisons un développement asymptotique. Comme $1/n \to 0$,

$$\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ainsi $u_n = O(1/n^2)$, et comme $\sum 1/n^2$ converge, par critère de domination, $\sum u_n$ converge.

Sommes partielles. Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pour $N \geq 2$,

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n-1) - \ln(n)\big) = (H_N - 1) + (\ln(1) - \ln(N)) = H_N - 1 - \ln(N).$$

2. La série $\sum u_n$ converge, donc la suite $(S_N) = (H_N - 1 - \ln N)$ admet une limite finie L. Posons $\gamma = L + 1$. Alors

$$H_N - \ln N = S_N + 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} L + 1 = \gamma,$$

c'est-à-dire $H_N = \ln N + \gamma + o(1)$.

En particulier, $H_N \sim \ln N$ quand $N \to +\infty$, car $\dfrac{H_N}{\ln N} = 1 + \dfrac{\gamma + o(1)}{\ln N} \to 1$.

Correction de l'exercice 1.24 **Énoncé p. 6**

Distinguons trois cas selon la position de b par rapport à 1.

Cas 1 : $b < 1$. Alors $b^n \to 0$, donc $1 + b^n \to 1$ et $u_n \sim a^n$. La série $\sum a^n$ est géométrique de raison $a > 0$: elle converge si et seulement si $a < 1$.

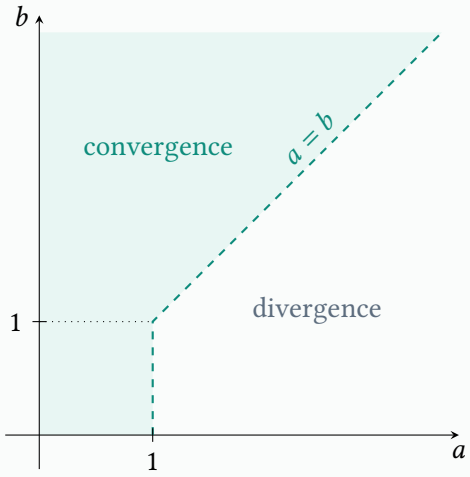
Cas 2 : $b = 1$. Alors $u_n = \dfrac{a^n}{2}$. La série $\sum a^n/2$ converge si et seulement si $a < 1$.

Cas 3 : $b > 1$. Alors $b^n \to +\infty$, donc $1 + b^n \sim b^n$ et $u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. La série géométrique $\sum (a/b)^n$ converge si et seulement si $a/b < 1$, c'est-à-dire $a < b$.

Synthèse. La série converge si et seulement si $a < \max(1, b)$. Dans le plan (a, b) restreint au premier quadrant, la région de convergence est délimitée par :

- la bande verticale $0 < a < 1$ pour $0 < b \leq 1$;
- le triangle $0 < a < b$ pour $b > 1$.

La frontière de la région est la ligne brisée constituée du segment $\{a = 1, 0 < b \leq 1\}$ et de la demi-droite $\{a = b, b \geq 1\}$ (exclues).



Correction de l'exercice 1.25 **Énoncé p. 6**

1. Développement asymptotique :

$$w_n = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Avec $\ln(1+u) = u + O(u^2)$,

$$w_n = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de domination, $\sum w_n$ **converge absolument**.

2. La série $\sum w_n$ est télescopique de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$, donc la suite $(\ln v_n)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par continuité de exp, $v_n \to A := \mathrm{e}^\ell > 0$. Donc $n^\alpha u_n \to A$, c'est-à-dire $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$.

Comme $A > 0$ et que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est à termes positifs, par critère d'équivalence :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

Correction de l'exercice 1.26 **Énoncé p. 6**

1. Pour $n \geq 0$, $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n(t-1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \leq 0$ (l'intégrande est négatif sur $[0,1]$). Donc (a_n) est décroissante.

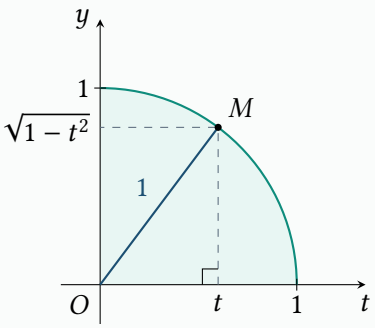
Calcul de $a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$**.** Plutôt que de calculer cette intégrale, identifions la région dont elle mesure l'aire. Soit $t \in [0,1]$ et $M = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$ le point correspondant du graphe. Le triangle de sommets O, $(t,0)$ et M est rectangle en $(t,0)$, et ses côtés de l'angle droit mesurent t et $\sqrt{1-t^2}$; le théorème de Pythagore donne donc :

$$OM^2 = t^2 + \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 = t^2 + 1 - t^2 = 1,$$

c'est-à-dire $OM = 1$. Tous les points du graphe sont donc à distance 1 de

l'origine : le graphe de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ sur $[0,1]$ est exactement le quart de cercle unité du premier quadrant (la racine carrée étant positive, on n'obtient bien que la moitié haute du cercle). L'intégrale a_0 est l'aire du domaine compris entre ce graphe et l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'aire du quart de disque unité :

$$a_0 = \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$



On peut aussi calculer a_0 par le changement de variable $t = \cos(\theta)$; ce calcul est mené en exemple dans la section « Intégrales sur un segment », au paragraphe consacré au changement de variable.

Calcul de a_1. On reconnaît ici la dérivée de $t \mapsto 1 - t^2$ au facteur -2 près :

$$a_1 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

2. Posons $b_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$. En utilisant la relation admise appliquée à $n-1$ ($a_{n+1} = \dfrac{n}{n+3}a_{n-1}$), on calcule

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)(n+2)a_n\left((n+3)a_{n+1} - na_{n-1}\right) = 0.$$

Donc (b_n) est constante, égale à $b_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_1 a_0 = 6 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Notons d'abord que $a_n > 0$ pour tout n : l'intégrande $t \mapsto t^n\sqrt{1-t^2}$ est continu, positif et non identiquement nul sur $[0,1]$. On pourra donc diviser par les a_n sans scrupule.

Montrons que $a_n \sim a_{n+1}$. Par décroissance, $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$. En divisant par $a_n > 0$:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1.$$

Or la relation admise donne $\dfrac{a_{n+2}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par le théorème des gendarmes, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, c'est-à-dire $a_{n+1} \sim a_n$.

Équivalent de a_n. Multiplions cette fois l'encadrement $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$ par $a_{n+1} > 0$:

$$a_{n+2}a_{n+1} \leq a_{n+1}^2 \leq a_{n+1}a_n,$$

et la question 2 donne les deux bornes explicitement : $a_{n+2}a_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$ et $a_{n+1}a_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Attention : il n'existe pas de « théorème des gendarmes pour les équivalents ». Constater que les deux bornes sont équivalentes à $\frac{\pi}{2n^3}$ ne permet donc pas de conclure directement. On revient à la définition d'un équivalent, c'est-à-dire à une limite de quotient : divisons l'encadrement par $\frac{\pi}{2n^3} > 0$,

$$\frac{n^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} \leq \frac{a_{n+1}^2}{\pi/(2n^3)} \leq \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Les deux bornes sont des quotients de polynômes de même degré 3 et de même coefficient dominant : elles tendent toutes les deux vers 1. Le théorème des gendarmes, appliqué cette fois à un quotient (ce qui est parfaitement licite), donne

$$\frac{a_{n+1}^2}{\pi/(2n^3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad a_{n+1}^2 \sim \frac{\pi}{2n^3}.$$

Toutes les quantités étant strictement positives, on peut passer à la racine carrée : $\sqrt{\frac{a_{n+1}^2}{\pi/(2n^3)}} \to \sqrt{1} = 1$ par continuité de la racine en 1, donc $a_{n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n^3}}$. Enfin $a_n \sim a_{n+1}$ d'après la première partie de la question, d'où

$$\boxed{a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n^3}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.}$$

4. Comme $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$ et que $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann, $3/2 > 1$), par critère d'équivalence sur séries positives, $\sum a_n$ **converge**.

Correction de l'exercice 1.27 **Énoncé p. 6**

1. Posons $u = f$ et notons v la fonction définie sur $[a, b]$ par $v(t) = \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$ (c'est licite car $\lambda > 0$). La fonction u est de classe C^1 sur $[a, b]$ par hypothèse, et v l'est également comme composée de fonctions de classe C^1, avec $v'(t) = \frac{\lambda \cos(\lambda t)}{\lambda} = \cos(\lambda t)$. La formule d'intégration par parties s'applique donc et donne :

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t = \frac{f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t.$$

Majorons maintenant chacun des deux termes du membre de droite. Comme $|\sin| \leq 1$, le terme tout intégré vérifie

$$\left|\frac{f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)}{\lambda}\right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{\lambda}.$$

Pour le second terme, la fonction f' est continue sur le segment $[a, b]$ (car f est de classe C^1), donc $M = \int_a^b |f'(t)|\ \mathrm{d}t$ est un réel bien défini, *indépendant de* λ.

L'inégalité triangulaire pour les intégrales et la majoration $|\sin| \leq 1$ donnent alors

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,|\sin(\lambda t)|\ \mathrm{d}t \leq \frac{M}{\lambda}.$$

En posant $C = |f(a)| + |f(b)| + M$, qui ne dépend pas de λ, on obtient par inégalité triangulaire :

$$0 \leq \left|\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Or $\dfrac{C}{\lambda} \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. Par encadrement, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t\right| \to 0$, et donc

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t = 0.}$$

2. Commençons par établir la formule de linéarisation utilisée (on note ici les variables x et y, pour ne pas les confondre avec les bornes a et b de la question 1). Pour tous réels x et y, les formules d'addition donnent

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \text{et} \qquad \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

En additionnant ces deux égalités, les termes en $\sin(x)\sin(y)$ se simplifient et il reste

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y).$$

Appliquons cette identité avec $x = kt$ et $y = \dfrac{t}{2}$. On a alors $x + y = \dfrac{(2k+1)t}{2}$ et $x - y = \dfrac{(2k-1)t}{2}$, d'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right)\right).}$$

3. L'idée est de reconnaître une somme télescopique. Posons, pour $k \geq 1$,

$$c_k = (-1)^{k-1}\cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right).$$

Multiplions l'identité de la question 2 par $(-1)^k$:

$$(-1)^k\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^k\cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + (-1)^k\cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right)\right).$$

Or le premier terme entre parenthèses vaut exactement c_{k+1} (remplacer k par $k+1$ dans la définition de c_k), et le second vaut $-c_k$ puisque $(-1)^k = -(-1)^{k-1}$. Autrement dit, pour tout $k \geq 1$:

$$(-1)^k\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(c_{k+1} - c_k\right).$$

En sommant pour k allant de 1 à n, la somme du membre de droite est télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)=\frac{1}{2}\left(c_{n+1}-c_1\right).$$

Il ne reste qu'à expliciter les deux termes restants : $c_{n+1}=(-1)^n\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$ et $c_1=(-1)^0\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. On obtient bien

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).}$$

4. L'idée est de faire apparaître $\dfrac{\sin(k)}{k}$ comme une intégrale, afin de pouvoir utiliser la question précédente. Pour $k\geq 1$, une primitive de $t\mapsto\cos(kt)$ est $t\mapsto\dfrac{\sin(kt)}{k}$, donc

$$\int_0^1\cos(kt)\ \mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^1=\frac{\sin(k)}{k}.$$

Par ailleurs, pour $t\in[0,1]$ on a $\dfrac{t}{2}\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\subset\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)>0$: on peut diviser l'égalité de la question 3 par $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$, ce qui donne, pour tout $t\in[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)=\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)-\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}=(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$

Toutes les fonctions en présence étant continues sur $[0,1]$, on peut intégrer cette égalité entre 0 et 1. Le membre de gauche donne, par linéarité de l'intégrale et d'après le calcul ci-dessus,

$$\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt)\ \mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\ \mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin(k)}{k},$$

tandis que le membre de droite donne $(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\ \mathrm{d}t-\frac{1}{2}$. D'où, pour tout $n\geq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin(k)}{k}=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\ \mathrm{d}t-\frac{1}{2}.}$$

5. Notons $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin(k)}{k}$ la somme partielle d'ordre n de la série étudiée, et posons $g(t)=\dfrac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ pour $t\in[0,1]$. Comme $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ ne s'annule pas sur

$[0,1]$, la fonction g est de classe C^1 sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. La question 4 se réécrit alors

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 g(t)\cos(\lambda_n t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2}, \qquad \text{où} \qquad \lambda_n = \frac{2n+1}{2}.$$

Comme $\lambda_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, la question 1 appliquée à g sur le segment $[0,1]$ donne (par composition de limites)

$$\int_0^1 g(t)\cos(\lambda_n t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Le facteur $(-1)^n$ étant borné, le produit $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 g(t)\cos(\lambda_n t)\ \mathrm{d}t$ tend lui aussi vers 0 (produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle). Ainsi la suite (S_n) des sommes partielles converge vers $-\frac{1}{2}$: par définition, la série $\sum u_n$ **converge** et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n} = -\frac{1}{2}.}$$

Correction de l'exercice 1.28 **Énoncé p. 7**

1. Si $\alpha > 1$, $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum u_n$ converge absolument.
   Si $\alpha \leq 0$, $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha} \not\to 0$, donc la série diverge grossièrement.
2. A_n est une somme géométrique :
$$A_n = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}} \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}n}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}},$$
   donc
$$|A_n| \leq \frac{2}{\left|1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}\right|} =: M.$$
3. Convenons de poser $A_0 = 0$. Avec cette convention, on a $A_k - A_{k-1} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}k}$ pour tout $k \geq 1$: c'est vrai pour $k \geq 2$ par définition de A_k, et pour $k = 1$ cela donne $A_1 - A_0 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}}$, ce qui est bien exact.
   Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Remplaçons chaque numérateur par cette différence, puis séparons la somme en deux :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - A_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}}{k^\alpha}.$$
   Occupons-nous de la seconde somme. Le changement d'indice $j = k-1$ donne
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j}{(j+1)^\alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{(j+1)^\alpha},$$
   le terme d'indice $j = 0$ étant nul puisque $A_0 = 0$.

Isolons maintenant, dans la première somme, le terme d'indice n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k^\alpha}.$$

En reportant ces deux calculs, les deux sommes qui restent portent sur les mêmes indices : on peut donc les regrouper et mettre A_k en facteur, ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{(k+1)^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right),$$

ce qui est la formule demandée.

4. D'une part, $\left| \frac{A_n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{M}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\alpha > 0$.
   D'autre part, pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{-\alpha} \right) \sim \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}},$$

   et cette quantité est positive. Comme $\alpha > 0$, $\alpha + 1 > 1$, donc $\sum \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ converge. Par critère d'équivalence, la série $\sum \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ converge. Et $\left| A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \right| \leq M \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$, donc par critère de domination, $\sum A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ converge absolument.
   Finalement, la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est la somme de deux suites convergentes, donc converge. **La série converge.**

Correction de l'exercice 1.29 **Énoncé p. 7**

1. On note $V_K = \sum_{k=0}^{K} v_k$ et $W_K = \sum_{k=0}^{K} w_k$. Pour $N \in \mathbb{N}$, en notant S_N la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n$ et Σ_N celle de $\sum |u_n|$:

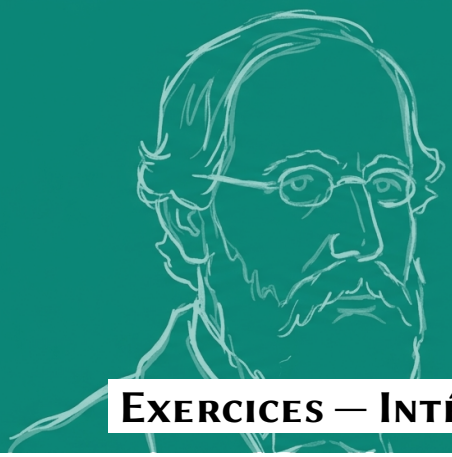
$$S_N = \sum_{\substack{k \\ p_k \leq N}} v_k + \sum_{\substack{k \\ q_k \leq N}} w_k, \qquad \Sigma_N = \sum_{\substack{k \\ p_k \leq N}} v_k - \sum_{\substack{k \\ q_k \leq N}} w_k.$$

   Par hypothèse, $S_N \to S = \sum u_n$ (finie), tandis que $\Sigma_N \to +\infty$ (semi-convergence). En additionnant et soustrayant, $\sum v_k = \frac{S + (+\infty)}{2} = +\infty$ et $\sum w_k = \frac{S - (+\infty)}{2} = -\infty$.
2. Construction formelle : posons $T_0 = 0$ (somme vide). À l'étape suivante, on compare T_n à ℓ :
   - Si $T_n \leq \ell$, on ajoute le prochain terme positif non utilisé.
   - Si $T_n > \ell$, on ajoute le prochain terme négatif non utilisé.

Cela définit $\varphi(n)$ comme le prochain indice positif ou négatif non encore utilisé selon le cas. Chaque « phase » (suite d'ajouts positifs ou suite d'ajouts négatifs) termine par franchir ℓ, car la somme des positifs restants est $+\infty$ (on finit donc toujours par dépasser ℓ), et symétriquement pour les négatifs.

3. Comme les phases alternent et chacune utilise au moins un terme, la construction consomme une infinité de p_k et de q_k. En fait, comme chaque phase ajoute au moins un terme mais termine en un nombre fini d'étapes, tous les p_k et tous les q_k sont finalement utilisés. Comme aucun indice n'est utilisé deux fois, $\varphi : \mathbb{N} \to P \cup N = \mathbb{N}$ est une bijection.
4. À chaque *point de flip* (moment où l'on vient de franchir ℓ et où on change de signe d'ajout), la somme partielle T_n est à distance au plus $\left|u_{\varphi(n)}\right|$ de ℓ (car avant l'ajout du terme qui a fait franchir ℓ, on était de l'autre côté de ℓ). Entre deux flips, la somme reste entre ℓ et T_{flip}, donc aussi à distance au plus $\left|u_{\varphi(n)}\right|$ de ℓ pour tous les n dans la phase.

   Or $u_n \to 0$ (condition nécessaire de convergence de $\sum u_n$), donc $u_{\varphi(n)} \to 0$ (car φ est une bijection avec $\varphi(n) \to +\infty$). Ainsi $|T_n - \ell| \to 0$, et $T_n \to \ell$.



1 Révisions d'analyse

Exercices — Intégrales sur un segment

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 1.30 Calcul par primitives usuelles
  - 1.34 Par parties, changement de variable
  - 1.53 Primitive de $x^2 \ln x$
  - 1.31 Limites de sommes de Riemann
- **Piste rouge**
  - 1.40 Limite d'une suite d'intégrales
  - 1.41 Intégrale sur un segment symétrique
  - 1.45 Fonction majorée par sa primitive
  - 1.67 Trois intégrales liées
- **Piste bleue**
  - 1.35 Majoration d'une intégrale
  - 1.36 Intégrale nulle et signe de la fonction
  - 1.43 Limite d'une intégrale à paramètre
  - 1.46 Fonction définie par une intégrale
- **Piste noire**
  - 1.47 Moyenne d'une fonction lipschitzienne
  - 1.50 Inégalité entre f et f'
  - 1.68 Lemme de Riemann–Lebesgue
  - 1.52 Limite d'une moyenne d'ordre n

Exercice 1.30 ○ Correction p. 39

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 1.31 ● Correction p. 39

En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k/n}$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$

Exercice 1.32 ●● Correction p. 40

Déterminer la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}.$$

Exercice 1.33 • Correction p. 40

CCP 2011. Étudier la convergence et calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

Exercice 1.34 • Correction p. 41

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable :

1. $\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$

Exercice 1.35 • Correction p. 41

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On note $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que :

$$\left| \int_0^1 (f(x) + xf(1-x))\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{3}{2}M.$$

Exercice 1.36 • Correction p. 41

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) > 0$ et $\int_a^b f = 0$. Montrer qu'il existe $x_2 \in [a,b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

Exercice 1.37 • Correction p. 42

Calculer :

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.38 • Correction p. 42

Calculer :

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \int_0^1 |x-a|\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.39 • Correction p. 43

Dans chacun des exemples suivants, montrer que la suite, dont on donne le terme général u_n, converge et calculer sa limite :

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$;
2. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

Exercice 1.40 •• Correction p. 43

Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+x^n}{2-x^{2n}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.41 ●● Correction p. 44

Calculer :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Exercice 1.42 ●● Correction p. 44

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 1.43 ●● Correction p. 44

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{u \to 0^+} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u \sin x} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 1.44 ●● Correction p. 45

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{u \to 0^+} \int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 1.45 ●● Correction p. 45

Déterminer l'ensemble des applications $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues, telles que $f \geq 0$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ f(x) \leq \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 1.46 ●● Correction p. 45

Étude et représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 1.47 ●●● Correction p. 46

Soient $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne. On pose $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que F est $\frac{k}{2}$-lipschitzienne.

Exercice 1.48 ●●● Correction p. 47

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \ xf(y) + yf(x) \leq 1.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 1.49 • • •

Correction p. 47

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$ et : $\forall x \in [a,b],\ 0 \leq f'(x) \leq 1$. Montrer que :

$$\int_a^b f^3 \leq \left(\int_a^b f\right)^2.$$

Exercice 1.50 • • •

Correction p. 48

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

1. On note $F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$\forall x \in [a,b],\ |f(x)| \leq F(x).$$

2. En déduire :

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.51 • • •

Correction p. 48

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On note $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^\star,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2}M_2 a.$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que, en notant $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$, on a :

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Exercice 1.52 ★

Correction p. 49

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer que :

$$\left(\int_a^b (f(x))^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Exercice 1.53 •

Correction p. 50

Calculer une primitive de $x^2 \ln x$.

Exercice 1.54 •

Correction p. 50

Calculer une primitive de $x^2 \cos x$ et de $x^2 \sin x$.

Exercice 1.55 •

Correction p. 50

Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

Exercice 1.56 • Correction p. 50

Calculer une primitive de $\dfrac{x^5+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)}$.

Exercice 1.57 • Correction p. 51

Calculer une primitive de $\dfrac{x^4}{x^{10}+1}$.

Exercice 1.58 •• Correction p. 51

Calculer une primitive de $x\exp(x)\cos(x)$.

Exercice 1.59 •• Correction p. 52

Calculer une primitive de $\cos^4 x$.

Exercice 1.60 •• Correction p. 52

Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.61 •• Correction p. 52

Donner une primitive de $\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$.

Exercice 1.62 •• Correction p. 53

Donner les primitives de

1. $\dfrac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}$,
2. $\dfrac{\exp(x)}{(\exp(x)+1)\ln(\exp(x)+1)}$,
3. $\sqrt{1+\sqrt{x}}$

avec leurs ensembles de validité.

Exercice 1.63 ••• Correction p. 53

Calculer les primitives suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 1.64 ••• Correction p. 54

Calculer :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}.$$

Exercice 1.65 ••• Correction p. 54

Donner une primitive de $\dfrac{1}{3+\mathrm{ch}(x)}$ avec son ensemble de validité.

Exercice 1.66 ••• Correction p. 55

Calculer :

$$I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

pour $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 1.67 • • •
Correction p. 55

Calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x$$

puis :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et enfin :

$$K = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$



1 Révisions d'analyse

★ Pour aller plus loin — Intégrales sur un segment

Exercice 1.68 ●●● Correction p. 55

Moyennisation et lemme de Riemann–Lebesgue. Lorsqu'une fonction oscille de plus en plus vite, elle se comporte, vue à travers une intégrale, comme sa valeur moyenne. C'est ce phénomène que l'on quantifie ici.

1. Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe une constante $C \geq 0$ ne dépendant que de f telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{C}{n}.$$
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique, de valeur moyenne $m = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u$. On note G la primitive de $g - m$ nulle en 0. Montrer que G est 1-périodique, puis qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Soient f de classe C^1 sur $[a,b]$ et g comme à la question précédente. Montrer qu'il existe une constante $C' \geq 0$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t - m\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{C'}{n}.$$
En particulier, $\int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} m\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Applications.
   (a) Vérifier que la question 3 reste valable si g est T-périodique, la valeur moyenne étant alors $m = \frac{1}{T}\int_0^T g(u)\,\mathrm{d}u$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{2+\sin(nt)}$.
   (c) Soit f de classe C^1 sur $[0,1]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 |\sin(n\pi t)|\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1.69 ●● Correction p. 57

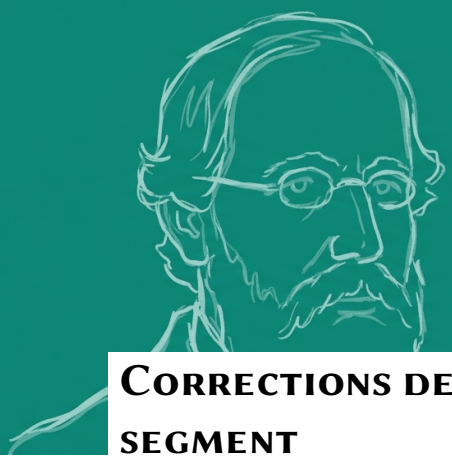
Inégalité de Tchebychev intégrale. Soient $a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On pose, pour $x \in [a,b]$,
$$\Phi(x) = (x-a)\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
1. Justifier que Φ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et calculer $\Phi'(x)$.
2. Montrer que $\Phi'(x) = \int_a^x (f(t)-f(x))\,(g(t)-g(x))\,\mathrm{d}t$. En déduire que si f et g sont toutes deux croissantes,
$$(b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Que devient l'inégalité lorsque f est croissante et g décroissante ?
4. Application. Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$.
   (a) Retrouver, à l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, l'inégalité $\int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f} \geq (b-a)^2$, et préciser le cas d'égalité.
   (b) Redémontrer cette inégalité par la méthode de Φ, et discuter à nouveau le cas d'égalité. Que constate-t-on quant à l'hypothèse de monotonie ?

Exercice 1.70 ★ Correction p. 59

Comment démontrer que $\pi < \frac{22}{7}$. L'approximation $\pi \simeq \frac{22}{7}$ est connue depuis l'Antiquité. Une seule intégrale permet de la contrôler avec précision.

1. Effectuer la division euclidienne de $X^4(1-X)^4$ par $1+X^2$ et en déduire
$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi.$$
2. En déduire que $\pi < \frac{22}{7}$.
3. À l'aide de l'encadrement $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, valable sur $[0,1]$, montrer que
$$\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{630}.$$
4. *Question ouverte : l'irrationalité de* π. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^\pi x^n(\pi-x)^n \sin x\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que $I_n > 0$ et que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) On suppose $\pi = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, et l'on pose $P_n(x) = \frac{q^n x^n (\pi-x)^n}{n!}$. Montrer que $n!\,P_n$ est une fonction polynomiale à coefficients entiers, que $P_n(\pi - x) = P_n(x)$, et enfin que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) On pose $Q_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j P_n^{(2j)}$. Montrer que $Q_n + Q_n'' = P_n$, puis que $q^n I_n = Q_n(0) + Q_n(\pi)$.
   (d) Conclure que π est irrationnel.



1 Révisions d'analyse

Corrections des exercices — Intégrales sur un segment

Correction de l'exercice 1.30 Énoncé p. 31

1. On a
$$\int_0^1 (3t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t = \left[t^3 - t^2 + t\right]_0^1 = 1 - 1 + 1 = 1.$$

2. On utilise $\sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$, d'où
$$\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left(-\cos(\pi) + \cos(0)\right) = \frac{1}{2}.$$

3. On reconnaît la forme $\frac{u'}{1}\cdot u$ avec $u(t) = \ln(t)$:
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.31 Énoncé p. 31

1. C'est une somme de Riemann associée à $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur $[0,1]$:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2.$$

2. C'est une somme de Riemann pour $f(t) = \mathrm{e}^t$ sur $[0,1]$:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1.$$

3. On prend le logarithme :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties ($u' = 1$, $v = \ln(1+t)$) :
$$\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[(1+t)\ln(1+t) - (1+t)\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Donc la limite vaut $\mathrm{e}^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{\mathrm{e}}$.

Correction de l'exercice 1.32 **Énoncé p. 31**

Tous les facteurs sont strictement positifs ; notons P_n le produit élevé à la puissance $\frac{1}{n}$ et passons au logarithme :

$$\ln(P_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}\right).$$

Ce n'est *pas* une somme de Riemann : le terme $\frac{k}{n^2}$ ne s'exprime pas à l'aide de $\frac{k}{n}$ seul, et aucune fonction f ne permet d'écrire le terme général sous la forme $f\left(\frac{k}{n}\right)$. On isole donc la partie qui, elle, en est une :

$$\ln(P_n) = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}_{A_n} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n}}\right)}_{R_n},$$

où l'on a simplement écrit $1 + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} = \left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{k/n^2}{1+k/n}\right)$.
Le terme A_n est la somme de Riemann de la troisième question de l'exercice précédent :

$$A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t = 2\ln(2) - 1.$$

Il reste à montrer que R_n tend vers 0. Posons $x_k = \frac{k/n^2}{1+k/n}$. Comme $k \leq n$, on a $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, et le facteur $\frac{1}{1+k/n}$ est majoré par 1 ; donc $0 \leq x_k \leq \frac{1}{n}$. En utilisant $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$:

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Par encadrement, $R_n \to 0$.
Finalement $\ln(P_n) \to 2\ln(2) - 1$, et par continuité de l'exponentielle :

$$P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

Le point de méthode. Une somme presque de Riemann se traite en deux temps : on extrait la somme de Riemann exacte, puis on *majore* le reste au lieu de le négliger. Ici la perturbation $\frac{k}{n^2}$ est uniformément un $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui suffit ; une perturbation du même ordre que $\frac{k}{n}$ changerait au contraire la limite.

Correction de l'exercice 1.33 **Énoncé p. 31**

On factorise par $\frac{1}{n}$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ (continue sur $[0,1]$). Donc

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln(2)}.$$

Remarque. Attention à ne pas confondre : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ n'est pas une somme partielle fixée d'une série en k, car la borne dépend aussi de n. C'est pourquoi on ne peut pas conclure avec les théorèmes sur les séries.

Correction de l'exercice 1.34 **Énoncé p. 32**

1. Intégration par parties avec $v(t) = t^2$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$, soit $v'(t) = 2t$ et $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$:

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 + 2\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 2\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   On reconnaît l'intégrale calculée en exemple dans les rappels, qui vaut $1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$ (une seconde intégration par parties la redonne). D'où :

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} = 2 - \frac{5}{\mathrm{e}}.$$

2. Changement de variable $u = 1 + t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^1 \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}.$$

3. Changement de variable $u = \cos(t)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Quand $t = 0$, $u = 1$; quand $t = \pi/4$, $u = \sqrt{2}/2$.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\sqrt{2}/2}^1 = -1 + \sqrt{2}.$$

Correction de l'exercice 1.35 **Énoncé p. 32**

Par linéarité puis inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 (f(x) + xf(1-x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,|f(1-x)|\,\mathrm{d}x,$$

la seconde majoration utilisant $x \geq 0$ sur $[0,1]$.
Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée et $|f| \leq M$. Donc $\int_0^1 |f| \leq M$, et comme $1-x$ décrit aussi $[0,1]$:

$$\int_0^1 x\,|f(1-x)|\,\mathrm{d}x \leq M\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}.$$

Finalement l'intégrale cherchée est majorée en valeur absolue par $M + \frac{M}{2} = \frac{3}{2}M$.

Correction de l'exercice 1.36 **Énoncé p. 32**

Raisonnons par l'absurde en supposant $f \geq 0$ sur $[a,b]$.
On utilise alors le résultat classique suivant : *si g est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\int_a^b g = 0$, alors g est identiquement nulle.* En effet, s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) > 0$, la continuité de g en x_0 fournit un segment $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ avec $\alpha < \beta$ sur

lequel $g \geq \frac{g(x_0)}{2}$; la positivité de g ailleurs donne alors

$$\int_a^b g \geq \int_\alpha^\beta g \geq (\beta - \alpha)\frac{g(x_0)}{2} > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse.
Appliqué à f, ce résultat donne $f = 0$ sur $[a, b]$, en contradiction avec $f(x_1) > 0$.
L'hypothèse $f \geq 0$ est donc absurde : il existe $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

Correction de l'exercice 1.37 **Énoncé p. 32**

La formule de duplication donne $1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, donc

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{x}{2} \in [0, \pi]$: le cosinus y est positif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On découpe donc l'intégrale en $x = \pi$:

$$I = \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x - \int_\pi^{2\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi - \left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_\pi^{2\pi}.$$

Le premier crochet vaut $2 - 0 = 2$, le second $0 - 2 = -2$, d'où $I = 4$.

Le point de méthode. Écrire $\sqrt{u^2} = u$ au lieu de $|u|$ donnerait ici $[2\sin(x/2)]_0^{2\pi} = 0$: c'est l'erreur classique. Une racine carrée impose toujours de discuter le signe.

Correction de l'exercice 1.38 **Énoncé p. 32**

Posons $g(a) = \displaystyle\int_0^1 |x - a| \,\mathrm{d}x$ pour $a \in \mathbb{R}$.
Cas $a < 0$. Sur $[0, 1]$ on a $x - a > 0$, donc $g(a) = \int_0^1 (x - a) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - a > \frac{1}{2}$.
Cas $a > 1$. Sur $[0, 1]$ on a $x - a < 0$, donc $g(a) = \int_0^1 (a - x) \,\mathrm{d}x = a - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.
Cas $a \in [0, 1]$. On coupe l'intégrale en a, où la valeur absolue change d'expression :

$$g(a) = \int_0^a (a - x) \,\mathrm{d}x + \int_a^1 (x - a) \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} + \frac{(1-a)^2}{2}.$$

Cette fonction polynomiale est dérivable, de dérivée $g'(a) = a - (1 - a) = 2a - 1$, qui s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe (négative puis positive) : g atteint sur $[0, 1]$ son minimum en $a = \frac{1}{2}$, et

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Comme $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, ce minimum local est global :

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x - a| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4},$$

borne atteinte en $a = \frac{1}{2}$ (c'est donc un minimum).

Correction de l'exercice 1.39 **Énoncé p. 32**

1. On factorise n^2 sous la racine pour faire apparaître $\frac{k}{n}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad \text{où} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}}.$$

La fonction f est continue sur $[0,1]$: c'est une somme de Riemann, donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t}} = \Big[\sqrt{1+2t}\Big]_0^1 = \sqrt{3}-1.$$

2. Tous les facteurs sont strictement positifs ; on passe au logarithme :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t,$$

car $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $[0,1]$. Une intégration par parties ($u'=1$, $v=\ln(1+t^2)$) donne

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \big[t\ln(1+t^2)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

soit $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$. Par continuité de l'exponentielle,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2}.$$

Correction de l'exercice 1.40 **Énoncé p. 32**

Notons $f_n(x) = \dfrac{1+x^n}{2-x^{2n}}$. Pour $x \in [0,1]$ on a $0 \leq x^{2n} \leq 1$, donc $2 - x^{2n} \geq 1 > 0$: chaque f_n est bien définie et continue sur $[0,1]$.
On ne peut pas passer à la limite sous l'intégrale sans justification ; on majore donc directement l'écart à la limite pressentie $\frac{1}{2}$:

$$f_n(x) - \frac{1}{2} = \frac{2(1+x^n)-(2-x^{2n})}{2(2-x^{2n})} = \frac{2x^n + x^{2n}}{2(2-x^{2n})}.$$

Comme $2 - x^{2n} \geq 1$ et $x^{2n} \leq x^n$ sur $[0,1]$, il vient

$$0 \leq f_n(x) - \frac{1}{2} \leq \frac{2x^n + x^n}{2} = \frac{3}{2}x^n.$$

En intégrant cet encadrement sur $[0,1]$:

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+x^n}{2-x^{2n}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1.41 **Énoncé p. 32**

L'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0 : on effectue le changement de variable affine $x = -t$, qui donne

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{-t}+1)(t^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{t}}{(1+\mathrm{e}^{t})(t^2+1)}\,\mathrm{d}t,$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur par e^t.
En additionnant les deux écritures de I, l'exponentielle disparaît :

$$2I = \int_{-1}^{1} \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

D'où $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Le point de méthode. Devant un facteur $\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ sur un intervalle symétrique, le réflexe est le changement de variable $x \mapsto -x$: la *somme* des deux expressions de l'intégrale élimine l'exponentielle.

Correction de l'exercice 1.42 **Énoncé p. 33**

L'idée est de fabriquer un carré à partir des trois intégrales égales. En développant :

$$\int_0^1 \left(f^2-f\right)^2 = \int_0^1 \left(f^4-2f^3+f^2\right) = \int_0^1 f^4 - 2\int_0^1 f^3 + \int_0^1 f^2 = 0,$$

puisque les trois intégrales ont la même valeur.
Or $\left(f^2-f\right)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, d'intégrale nulle : elle est donc identiquement nulle. Ainsi

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x)^2 = f(x), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \in \{0,1\}.$$

Enfin f est continue sur l'intervalle $[0,1]$, donc $f([0,1])$ est un intervalle contenu dans $\{0,1\}$: c'est nécessairement un singleton. Autrement dit f est constante, égale à 0 ou à 1.

Correction de l'exercice 1.43 **Énoncé p. 33**

Pour $u > 0$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin x \leq 1$, donc $-u \leq -u\sin x \leq 0$, puis, par croissance de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{-u} \leq \mathrm{e}^{-u\sin x} \leq 1.$$

En intégrant cet encadrement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-u} \leq \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers $\frac{\pi}{2}$ quand $u \to 0^+$, donc par encadrement

$$\lim_{u\to 0^+} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-u\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.44 **Énoncé p. 33**

Pour $u > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ est continue sur $[u, 3u] \subset \mathbb{R}_+^\star$. On isole la partie singulière en écrivant

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\cos x - 1}{x},$$

ce qui donne

$$\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_u^{3u} + R(u) = \ln 3 + R(u), \qquad R(u) = \int_u^{3u} \frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

L'inégalité classique $|\cos x - 1| \leq \dfrac{x^2}{2}$ donne, pour $x \in [u, 3u]$,

$$\left|\frac{\cos x - 1}{x}\right| \leq \frac{x}{2} \leq \frac{3u}{2},$$

d'où

$$|R(u)| \leq \frac{3u}{2} \times (3u - u) = 3u^2 \xrightarrow[u \to 0^+]{} 0.$$

Finalement $\lim\limits_{u \to 0^+} \displaystyle\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 3$.

Correction de l'exercice 1.45 **Énoncé p. 33**

Soit f une telle application et posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, la fonction F y est de classe C^1, avec $F' = f$ et $F(0) = 0$. L'hypothèse s'écrit

$$\forall x \geq 0, \quad F'(x) \leq F(x).$$

On considère alors $g(x) = F(x)\,\mathrm{e}^{-x}$, dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée

$$g'(x) = (F'(x) - F(x))\,\mathrm{e}^{-x} \leq 0.$$

Ainsi g est décroissante, donc $g(x) \leq g(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $F(x) \leq 0$ (car $\mathrm{e}^{-x} > 0$).
Mais $f \geq 0$ entraîne $F \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Donc $F = 0$ sur $[0, +\infty[$, puis $f = F' = 0$.
Réciproquement la fonction nulle convient. L'ensemble cherché est donc réduit à la fonction nulle.

Correction de l'exercice 1.46 **Énoncé p. 33**

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; notons G sa primitive qui s'annule en 0. Alors

$$f(x) = G(2x) - G(x),$$

donc f est de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$.
Parité. L'intégrande étant paire, G est impaire, donc $f(-x) = G(-2x) - G(-x) = -G(2x) + G(x) = -f(x)$: la fonction f est impaire. On l'étudie sur $\mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie par rapport à l'origine.
Signe. Pour $x \geq 0$, on a $x \leq 2x$ et $\mathrm{e}^{-t^2} > 0$, donc $f(x) \geq 0$, avec égalité seulement en 0.

Variations. On a

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}\left(2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1\right).$$

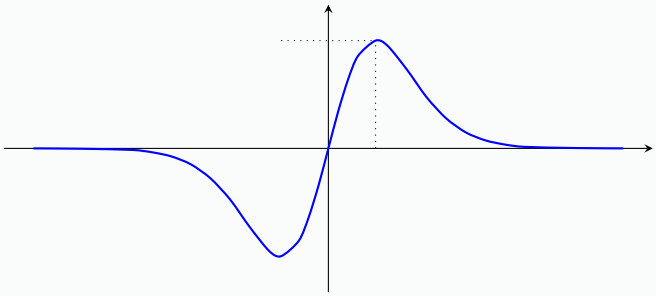
Comme $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, le signe de f' est celui de $2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1$, qui est positif si et seulement si $3x^2 \leq \ln 2$. En posant $a = \sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \approx 0{,}48$, la fonction f est donc strictement croissante sur $[0, a]$ et strictement décroissante sur $[a, +\infty[$: elle admet un maximum en a (numériquement $f(a) \approx 0{,}285$). Au passage $f'(0) = 1$: la courbe traverse l'origine avec une tangente de pente 1.

Limite en $+\infty$. Pour $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-x^2}$, donc

$$0 \leq f(x) \leq x\,\mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées. Ainsi f tend vers 0 en $+\infty$, et vers 0 en $-\infty$ par imparité : l'axe des abscisses est asymptote aux deux extrémités.

Allure de la courbe.



Correction de l'exercice 1.47 **Énoncé p. 33**

Le point délicat est le raccord en 0 ; on commence donc par écrire F sous une forme valable partout. Pour $x > 0$, le changement de variable affine $t = xu$ donne

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(xu)\,\mathrm{d}u,$$

et cette dernière expression vaut encore en $x = 0$, où elle donne $\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}u = f(0) = F(0)$. Ainsi

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^1 f(xu)\,\mathrm{d}u.$$

Soient alors $x, y \in [0, +\infty[$. Par linéarité puis inégalité triangulaire,

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_0^1 (f(xu) - f(yu))\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^1 |f(xu) - f(yu)|\,\mathrm{d}u.$$

Comme f est k-lipschitzienne et $u \geq 0$:

$$|f(xu) - f(yu)| \leq k\,|xu - yu| = k\,u\,|x - y|,$$

d'où

$$|F(x) - F(y)| \leq k\,|x - y| \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{k}{2}\,|x - y|.$$

La fonction F est donc $\frac{k}{2}$-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 1.48 **Énoncé p. 33**

L'hypothèse vaut pour *tout* couple de $[0,1]^2$: on va la spécialiser le long du quart de cercle unité, ce qui expliquera l'apparition de π.
Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les réels $\cos\theta$ et $\sin\theta$ appartiennent à $[0,1]$; en prenant $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$:

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos\theta\, f(\sin\theta) + \sin\theta\, f(\cos\theta) \leq 1.$$

Les deux membres sont continus ; on intègre sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, f(\sin\theta)\, \mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, f(\cos\theta)\, \mathrm{d}\theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Le changement de variable $u = \sin\theta$ transforme la première intégrale en $\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$; le changement de variable $u = \cos\theta$ transforme la seconde en $-\int_1^0 f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$. Il vient donc

$$2\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{soit} \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 1.49 **Énoncé p. 34**

Commençons par observer que $f' \geq 0$ rend f croissante sur $[a,b]$; avec $f(a) = 0$, cela donne $f \geq 0$ sur $[a,b]$.
L'idée est de transformer l'inégalité à démontrer en une étude de fonction. Posons, pour $x \in [a,b]$,

$$h(x) = 2\int_a^x f - f(x)^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \left(\int_a^x f\right)^2 - \int_a^x f^3.$$

Ces deux fonctions sont de classe C^1 et s'annulent en a.
Signe de h. On a

$$h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)\,(1 - f'(x)) \geq 0,$$

puisque $f \geq 0$ et $f' \leq 1$. Donc h est croissante et, comme $h(a) = 0$, on a $h \geq 0$ sur $[a,b]$.
Signe de g. On a

$$g'(x) = 2f(x)\int_a^x f - f(x)^3 = f(x)\left(2\int_a^x f - f(x)^2\right) = f(x)\,h(x) \geq 0.$$

Donc g est croissante et, comme $g(a) = 0$, on a $g(b) \geq 0$, c'est-à-dire

$$\int_a^b f^3 \leq \left(\int_a^b f\right)^2.$$

Correction de l'exercice 1.50 **Énoncé p. 34**

1. Comme f est de classe C^1 et $f(a) = 0$, on a pour tout $x \in [a, b]$:
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Les bornes étant dans le bon ordre ($a \leq x$), l'inégalité triangulaire donne
$$|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t = F(x).$$

2. La fonction F est de classe C^1 sur $[a, b]$, avec $F' = |f'|$ et $F(a) = 0$. En utilisant la question précédente puis la croissance de l'intégrale :
$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b F(x)\,|f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)F'(x)\,\mathrm{d}x,$$
et cette dernière intégrale se calcule :
$$\int_a^b F(x)F'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{F^2}{2}\right]_a^b = \frac{F(b)^2}{2}.$$
Il reste à majorer $F(b) = \int_a^b |f'|$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz appliquée aux fonctions continues 1 et $|f'|$ donne
$$F(b)^2 = \left(\int_a^b 1 \times |f'|\right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2\right)\left(\int_a^b (f')^2\right) = (b-a)\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$
En reportant :
$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Correction de l'exercice 1.51 **Énoncé p. 34**

1. Soient $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2, appliquée à f entre x et $x + a$ puis entre x et $x - a$, fournit deux réels c_1 et c_2 tels que
$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(c_1),$$
$$f(x-a) = f(x) - af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(c_2).$$
En soustrayant, les termes en $f(x)$ disparaissent :
$$2a\,f'(x) = f(x+a) - f(x-a) - \frac{a^2}{2}\left(f''(c_1) - f''(c_2)\right).$$
L'inégalité triangulaire donne alors $2a\,|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{a^2}{2} \times 2M_2$, d'où, en divisant par $2a > 0$:
$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2}M_2 a.$$

2. Le majorant obtenu ne dépend pas de x : la fonction f' est donc bornée sur $\mathbb{R}$, et, par définition de la borne supérieure,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^\star, \quad M_1 \leq \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2} M_2 a.$$

Il ne reste qu'à choisir le meilleur a.
Si $M_2 = 0$, faire tendre a vers $+\infty$ donne $M_1 \leq 0$, donc $M_1 = 0 = \sqrt{2M_0M_2}$.
Si $M_2 > 0$, alors $M_0 > 0$ (sinon f serait nulle, donc f'' aussi). La fonction $\varphi : a \mapsto \frac{M_0}{a} + \frac{1}{2}M_2 a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, de dérivée $\varphi'(a) = -\frac{M_0}{a^2} + \frac{M_2}{2}$, qui s'annule en changeant de signe (négative puis positive) en $a_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. Le minimum de φ vaut donc

$$\varphi(a_0) = M_0\sqrt{\frac{M_2}{2M_0}} + \frac{M_2}{2}\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} = \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2}.$$

En prenant $a = a_0$ dans l'inégalité précédente, on conclut $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Correction de l'exercice 1.52 **Énoncé p. 34**

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$: elle y est bornée et atteint ses bornes. Posons

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \geq 0,$$

atteint en un point $x_0 \in [a, b]$, et notons $I_n = \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$ (bien défini car $f^n \geq 0$).
Cas $M = 0$**.** Alors $0 \leq f \leq 0$, donc $f = 0$ et $I_n = 0 \longrightarrow M$.
On suppose désormais $M > 0$.
Majoration. De $0 \leq f \leq M$ on tire $f^n \leq M^n$, donc

$$I_n \leq ((b-a)M^n)^{1/n} = M\,(b-a)^{1/n} \quad \text{et} \quad (b-a)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(b-a)}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Minoration. Soit $\varepsilon \in]0, M[$. Par continuité de f en x_0, il existe un segment $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, avec $\alpha < \beta$, sur lequel $f \geq M - \varepsilon$. Comme $f \geq 0$ sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f^n \geq \int_\alpha^\beta f^n \geq (\beta-\alpha)(M-\varepsilon)^n, \quad \text{donc} \quad I_n \geq (\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon),$$

et $(\beta-\alpha)^{1/n} \longrightarrow 1$.
Conclusion. Pour l'ε fixé ci-dessus et n assez grand, on a à la fois $M(b-a)^{1/n} \leq M+\varepsilon$ et $(\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon) \geq M - 2\varepsilon$, donc $M - 2\varepsilon \leq I_n \leq M + \varepsilon$. Ceci valant pour tout $\varepsilon \in]0, M[$:

$$\left(\int_a^b (f(x))^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Le point de méthode. La continuité est essentielle : c'est elle qui garantit que f reste proche de son maximum sur tout un segment $[\alpha, \beta]$ non réduit à un point, ce qui donne la minoration. Pour une fonction seulement positive et intégrable, le résultat tombe en défaut.

Correction de l'exercice 1.53 **Énoncé p. 34**

La fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ (soit $u(x) = \frac{x^3}{3}$) et $v(x) = \ln x$, donne sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}.$$

Correction de l'exercice 1.54 **Énoncé p. 34**

Primitive de $x^2 \cos x$. Deux intégrations par parties successives abaissent le degré :

$$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, \mathrm{d}x,$$

et $\displaystyle\int x \sin x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x$. D'où, sur $\mathbb{R}$:

$$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$$

Primitive de $x^2 \sin x$. De même,

$$\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x,$$

en utilisant $\displaystyle\int x \cos x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x$.

Le point de méthode. On peut obtenir les deux résultats d'un seul coup en calculant

$$\int x^2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \, \mathrm{d}x = \left(-\mathrm{i}x^2 + 2x + 2\mathrm{i}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$

puis en prenant partie réelle et partie imaginaire.

Correction de l'exercice 1.55 **Énoncé p. 34**

Le dénominateur est scindé à racines simples : on décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

En multipliant par x puis en évaluant en 0 : $a = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $x+1$ et en évaluant en -1 : $b = \frac{1}{(-1)\times 1} = -1$; et en -2 : $c = \frac{1}{(-2)\times(-1)} = \frac{1}{2}$.
Sur chacun des quatre intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$, une primitive est donc

$$\frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|x(x+2)|}{(x+1)^2}\right).$$

Correction de l'exercice 1.56 **Énoncé p. 34**

Le numérateur est de degré 5 et le dénominateur $x^2(x^2+1) = x^4 + x^2$ de degré 4 : on commence donc par la division euclidienne. Comme $x^5 + x^3 - x + 1 = x\left(x^4 + x^2\right) +$

$(1-x)$:

$$\frac{x^5+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)} = x + \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}.$$

On décompose ensuite la fraction restante, dont le dénominateur a un pôle double en 0 et un facteur irréductible x^2+1 :

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

En multipliant par x^2 et en évaluant en 0 : $b = 1$. En multipliant par x^2+1 et en évaluant en i : $\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = -1+\mathrm{i} = c\,\mathrm{i} + d$, donc $c = 1$ et $d = -1$. Enfin, l'identification du coefficient de x^3 dans

$$1 - x = a\,x(x^2+1) + b(x^2+1) + (cx+d)x^2$$

donne $0 = a + c$, soit $a = -1$.
Ainsi, sur $]-\infty, 0[$ comme sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{x^5+x^3-x+1}{x^2(x^2+1)} = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1},$$

et une primitive est

$$\frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \arctan x.$$

Correction de l'exercice 1.57 **Énoncé p. 35**

On reconnaît au numérateur, à un facteur près, la dérivée de $x \mapsto x^5$:

$$\frac{x^4}{x^{10}+1} = \frac{1}{5} \times \frac{5x^4}{(x^5)^2+1}.$$

Le changement de variable $u = x^5$ ramène donc à $\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$, et une primitive sur $\mathbb{R}$ tout entier est

$$\frac{1}{5}\arctan\left(x^5\right).$$

Correction de l'exercice 1.58 **Énoncé p. 35**

On passe par l'exponentielle complexe : $x\,\mathrm{e}^x\cos x = \mathrm{Re}\left(x\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)$. Une intégration par parties donne

$$\int x\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x = \frac{x\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{(1+\mathrm{i})^2} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\left(\frac{x(1-\mathrm{i})}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right),$$

car $\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$ et $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, donc $\frac{1}{(1+\mathrm{i})^2} = -\frac{\mathrm{i}}{2}$.
En écrivant $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^x(\cos x + \mathrm{i}\sin x)$ et $\frac{x(1-\mathrm{i})}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} = \frac{x+\mathrm{i}(1-x)}{2}$, la partie réelle vaut

$$\frac{\mathrm{e}^x}{2}\left(x\cos x - (1-x)\sin x\right).$$

Une primitive de $x\,\mathrm{e}^x\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\frac{\mathrm{e}^x}{2}\left(x\cos x + (x-1)\sin x\right),$$

ce que l'on vérifie immédiatement en dérivant.

Correction de l'exercice 1.59 **Énoncé p. 35**

On linéarise. Avec $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$:

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4},$$

puis, en linéarisant à son tour $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$:

$$\cos^4 x = \frac{3+4\cos(2x)+\cos(4x)}{8}.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc

$$\frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}.$$

Correction de l'exercice 1.60 **Énoncé p. 35**

Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\sin x + \cos x \geq 1 > 0$: l'intégrale est bien définie. Plutôt que de calculer I directement, on l'associe à

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Somme. On a immédiatement

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Différence. On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \sin x + \cos x > 0$:

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(\sin x + \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2} - \ln 1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

En soustrayant les deux relations :

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

Correction de l'exercice 1.61 **Énoncé p. 35**

Le cosinus apparaît à une puissance *impaire* : on peut donc isoler un facteur $\cos x$ et exprimer tout le reste à l'aide de $\sin x$, ce qui invite au changement de variable $u = \sin x$.
On écrit donc

$$\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos x,$$

de sorte qu'avec $u = \sin x$ et $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-u^2}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{u} - u.$$

Une primitive est donc

$$-\frac{1}{\sin x} - \sin x,$$

sur chacun des intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, où le sinus ne s'annule pas.

Correction de l'exercice 1.62 **Énoncé p. 35**

1. La fonction est définie et continue sur $]0, \mathrm{e}^{-4}[$ et sur $]\mathrm{e}^{-4}, +\infty[$. Le quotient $\frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}$ ressemble à la dérivée d'un quotient dont le dénominateur est $4+\ln x$; on vérifie que
$$\left(\frac{x}{4+\ln x}\right)' = \frac{(4+\ln x) - x \times \frac{1}{x}}{(4+\ln x)^2} = \frac{3+\ln x}{(4+\ln x)^2}.$$
Une primitive est donc $\dfrac{x}{4+\ln x}$, sur chacun des deux intervalles.
2. Posons $u(x) = \ln(\exp(x)+1)$. Comme $\exp(x)+1 > 1$, on a $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, et
$$u'(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x)+1},$$
de sorte que la fonction proposée est exactement $\frac{u'}{u}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ est donc
$$\ln(\ln(\exp(x)+1)).$$
3. La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. On pose $t = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, c'est-à-dire $x = \left(t^2-1\right)^2$ avec $t \geq 1$; ce changement de variable est de classe C^1 et $\mathrm{d}x = 4t\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t$, d'où
$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 4t^2\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t = \frac{4t^5}{5} - \frac{4t^3}{3}.$$
Une primitive sur $\mathbb{R}_+$ est donc
$$\frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{5/2} - \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{3/2}.$$

Correction de l'exercice 1.63 **Énoncé p. 35**

Première primitive. La fonction $x \mapsto \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}$ est définie et continue sur $[0,1[$. On pose $x = \sin^2 u$, changement de variable de classe C^1 qui réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,1[$. Alors $\mathrm{d}x = 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u$, $\arcsin\sqrt{x} = u$ et $(1-x)^{3/2} = \left(\cos^2 u\right)^{3/2} = \cos^3 u$ (car $\cos u > 0$), d'où
$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2u\sin u}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u.$$
Une intégration par parties, en remarquant que $\frac{\sin u}{\cos^2 u}$ est la dérivée de $\frac{1}{\cos u}$, donne
$$\int \frac{2u\sin u}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{2u}{\cos u} - 2\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}.$$
Or, en écrivant $\frac{1}{\cos u} = \frac{\cos u}{1-\sin^2 u}$ et en posant $s = \sin u$:
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \int \frac{\mathrm{d}s}{1-s^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = \ln\left(\frac{1+\sin u}{\cos u}\right).$$

En revenant à la variable x, avec $\sin u = \sqrt{x}$ et $\cos u = \sqrt{1-x}$, une primitive sur $[0,1[$ est

$$\frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \ln(1-x).$$

Seconde primitive. La fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$. Une intégration par parties avec $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ (soit $u(x) = -\frac{1}{x}$) et $v(x) = \arctan x$ donne

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+x^2)}.$$

Comme $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$, une primitive sur $]-\infty,0[$ comme sur $]0,+\infty[$ est

$$-\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) = -\frac{\arctan x}{x} + \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Correction de l'exercice 1.64

Énoncé p. 35

On utilise le changement de variable « universel » $t = \tan\frac{x}{2}$, qui ramène toute fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$ à une fraction rationnelle en t. C'est une bijection de classe C^1 de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$. Avec $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$:

$$3+\cos x = \frac{3\left(1+t^2\right)+1-t^2}{1+t^2} = \frac{2\left(t^2+2\right)}{1+t^2},$$

donc

$$I = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2\left(t^2+2\right)} \times \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^1.$$

Finalement

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.65

Énoncé p. 35

La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$, puisque $3+\operatorname{ch} x \geq 3+1 = 4 > 0$.
On pose $u = \exp(x)$, changement de variable de classe C^1 et strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, avec $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Comme

$$3+\operatorname{ch} x = 3 + \frac{u+u^{-1}}{2} = \frac{u^2+6u+1}{2u},$$

il vient

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\operatorname{ch} x} = \int \frac{2u}{u^2+6u+1} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{(u+3)^2-8}.$$

Le trinôme u^2+6u+1 a pour racines $-3\pm 2\sqrt{2}$, toutes deux strictement négatives : il ne s'annule donc pas pour $u>0$. En utilisant $\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right|$ avec $a = 2\sqrt{2}$, on obtient une primitive sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\exp(x)+3-2\sqrt{2}}{\exp(x)+3+2\sqrt{2}}\right).$$

Correction de l'exercice 1.66 **Énoncé p. 35**

La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, qui contient le segment d'extrémités $\frac{1}{a}$ et a : l'intégrale $I(a)$ est bien définie.
Les deux bornes étant inverses l'une de l'autre, on effectue le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$, avec $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$; lorsque x va de $\frac{1}{a}$ à a, t va de a à $\frac{1}{a}$. Alors

$$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}} \times \left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -I(a).$$

Donc $2I(a) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^\star, \quad I(a) = 0.$$

Le point de méthode. Des bornes inverses l'une de l'autre appellent $x \mapsto \frac{1}{x}$; le logarithme, qui change alors de signe, fait apparaître $I(a) = -I(a)$ sans qu'aucune primitive n'ait été calculée.

Correction de l'exercice 1.67 **Énoncé p. 36**

Calcul de I. Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $\tan x \in [0,1]$, donc $1 + \tan x > 0$: l'intégrale est bien définie. On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{4} - t$, qui échange les bornes. Comme

$$1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 1 + \frac{1-\tan t}{1+\tan t} = \frac{2}{1+\tan t},$$

il vient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I,$$

d'où

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Calcul de J. Le changement de variable $x = \tan u$ est une bijection de classe C^1 de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$, avec $\mathrm{d}x = \left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u$ et $1 + x^2 = 1 + \tan^2 u$. Le facteur $1 + \tan^2 u$ se simplifie et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan u\right)\mathrm{d}u = I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Calcul de K. Une intégration par parties, avec $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ (soit $u(x) = \ln(1+x)$) et $v(x) = \arctan x$, donne

$$K = \left[\arctan(x)\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 2 - J.$$

Finalement

$$K = \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 = \frac{\pi}{8}\ln 2 \ :$$

les trois intégrales sont égales.

Correction de l'exercice 1.68 **Énoncé p. 37**

1. Soit $n \geq 1$. On intègre par parties, en primitivant $t \mapsto \sin(nt)$ en $t \mapsto -\frac{\cos(nt)}{n}$

et en dérivant f (les deux fonctions sont de classe C^1 sur $[a,b]$) :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{f(t)\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

En majorant $|\cos| \leq 1$, on obtient

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right),$$

d'où le résultat avec $C = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$.
C'est le *lemme de Riemann–Lebesgue* dans le cas C^1 : il reste vrai pour f seulement continue, mais la démonstration demande d'autres outils.

2. Posons $G(x) = \int_0^x (g(u)-m)\,\mathrm{d}u$; G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car $g-m$ est continue. Considérons

$$\psi(x) = G(x+1) - G(x) = \int_x^{x+1} (g(u)-m)\,\mathrm{d}u.$$

La fonction ψ est dérivable, de dérivée $\psi'(x) = (g(x+1)-m)-(g(x)-m) = 0$ par 1-périodicité de g. Donc ψ est constante, égale à $\psi(0) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u - m = 0$. Ainsi $G(x+1) = G(x)$ pour tout x : G est 1-périodique.
G est continue sur le segment $[0,1]$, donc y est bornée ; par périodicité, G est bornée sur $\mathbb{R}$, avec $\sup_{\mathbb{R}} |G| = \sup_{[0,1]} |G|$.

3. Notons $M = \sup_{\mathbb{R}} |G|$. Pour $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{n}G(nt)$ est de classe C^1 et sa dérivée vaut $g(nt) - m$: c'est donc une primitive de $t \mapsto g(nt) - m$. Une intégration par parties donne

$$\int_a^b f(t)\,(g(nt)-m)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)G(nt)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)G(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t - m\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est exactement le membre de gauche, on en déduit

$$\left|\int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t - m\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{n}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right),$$

c'est-à-dire le résultat voulu avec $C' = M\,C$, où C est la constante de la question 1. En particulier, la différence tend vers 0.

4. (a) La démonstration précédente n'utilise la période que par l'intermédiaire de l'égalité $\int_0^T (g-m) = 0$, qui définit précisément m. Si g est T-périodique et $m = \frac{1}{T}\int_0^T g$, la fonction $\psi(x) = \int_x^{x+T} (g-m)$ est encore de dérivée nulle et vaut 0 en 0 : la primitive G de $g-m$ nulle en 0 est T-périodique, donc bornée, et l'intégration par parties de la question 3 est inchangée.

   (b) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{2+\sin t}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $2+\sin t \geq 1 > 0$) et 2π-périodique. Avec $f = 1$, qui est de classe C^1 sur $[0,1]$, la question précédente donne

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(nt)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m\int_0^1 \mathrm{d}t = m, \qquad m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}.$$

Calculons cette moyenne. Le raisonnement de la question 2 (dérivée nulle) montre que $x \mapsto \int_x^{x+2\pi} g$ est constante, donc $\int_0^{2\pi} g = \int_{-\pi}^{\pi} g$. Posons, pour $-\pi < t < \pi$,

$$H(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan\frac{t}{2}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

En posant $u = \tan\frac{t}{2}$, on a $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$, donc $2+\sin t = \frac{2(u^2+u+1)}{1+u^2}$, et le calcul de H' donne

$$H'(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{3+(2u+1)^2} \cdot \frac{1+u^2}{\sqrt{3}} = \frac{1+u^2}{2(u^2+u+1)} = \frac{1}{2+\sin t}.$$

Comme $\tan\frac{t}{2} \to \pm\infty$ quand $t \to \pm\pi$, H se prolonge par continuité à $[-\pi,\pi]$ en posant $H(\pm\pi) = \pm\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. La fonction $x \mapsto H(x) - \int_{-\pi}^{x} g$ est continue sur $[-\pi,\pi]$, de dérivée nulle pour $-\pi < x < \pi$, donc constante ; en comparant les valeurs en $-\pi$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t} = H(\pi) - H(-\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Finalement $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(nt)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) La fonction $g : u \mapsto |\sin(\pi u)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique, et $|\sin(n\pi t)| = g(nt)$. Sa valeur moyenne vaut

$$m = \int_0^1 |\sin(\pi u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \sin(\pi u)\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\cos(\pi u)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi},$$

car $\sin(\pi u) \geq 0$ sur $[0,1]$. Donc

$$\int_0^1 |\sin(n\pi t)|\, f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Correction de l'exercice 1.69 **Énoncé p. 37**

1. Les fonctions fg, f et g sont continues sur $[a,b]$, donc $x \mapsto \int_a^x fg$, $x \mapsto \int_a^x f$ et $x \mapsto \int_a^x g$ sont de classe C^1, de dérivées respectives $f(x)g(x)$, $f(x)$ et $g(x)$. Par produits et sommes, Φ est de classe C^1 et

$$\Phi'(x) = \int_a^x fg + (x-a)f(x)g(x) - f(x)\int_a^x g - g(x)\int_a^x f.$$

2. Développons l'intégrande proposé :

$$(f(t)-f(x))\,(g(t)-g(x)) = f(t)g(t) - f(x)g(t) - g(x)f(t) + f(x)g(x).$$

En intégrant sur $[a,x]$ (où x est une constante), il vient

$$\int_a^x (f(t)-f(x))\,(g(t)-g(x))\,\mathrm{d}t = \int_a^x fg + (x-a)f(x)g(x) - f(x)\int_a^x g - g(x)\int_a^x f,$$

c'est-à-dire exactement $\Phi'(x)$.

Supposons maintenant f et g croissantes. Pour $t \in [a, x]$, on a $t \leq x$, donc $f(t) - f(x) \leq 0$ et $g(t) - g(x) \leq 0$: leur produit est positif. Par positivité de l'intégrale, $\Phi'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, donc Φ est croissante. Comme $\Phi(a) = 0$, on obtient $\Phi(b) \geq 0$, ce qui est exactement l'inégalité annoncée.

3. Si f est croissante et g décroissante, alors $-g$ est croissante et la question précédente appliquée au couple $(f, -g)$ donne $(b-a)\int_a^b f \times (-g) \geq \int_a^b f \int_a^b (-g)$. En multipliant par -1, l'inégalité change de sens :

$$(b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. (a) Rappelons que l'application

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un *produit scalaire* sur l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$: elle est bilinéaire et symétrique, et si $\langle u, u\rangle = 0$ alors u^2, qui est continue et positive d'intégrale nulle, est identiquement nulle, donc u aussi. C'est à ce produit scalaire que nous appliquons l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Comme f est continue et strictement positive sur $[a, b]$, les fonctions $u = \sqrt{f}$ et $v = \frac{1}{\sqrt{f}}$ sont continues sur $[a, b]$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$\left(\int_a^b uv\right)^2 \leq \int_a^b u^2 \int_a^b v^2, \quad \text{soit} \quad (b-a)^2 \leq \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f},$$

puisque $uv = 1$. Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires ; comme u ne s'annule pas, cela s'écrit $v = \lambda u$, soit $\frac{1}{\sqrt{f}} = \lambda\sqrt{f}$, c'est-à-dire f constante (et réciproquement, f constante donne bien l'égalité).

(b) Reprenons l'identité de la question 2 avec le couple $\left(f, \frac{1}{f}\right)$: en posant $\Phi(x) = (x-a)^2 - \int_a^x f \int_a^x \frac{1}{f}$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \int_a^x (f(t) - f(x))\left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^x \frac{(f(t) - f(x))^2}{f(t)f(x)}\,\mathrm{d}t \leq 0.\end{aligned}$$

Ainsi Φ est décroissante et $\Phi(a) = 0$, donc $\Phi(b) \leq 0$, ce qui redonne $(b-a)^2 \leq \int_a^b f \int_a^b \frac{1}{f}$.

S'il y a égalité, alors $\Phi(b) = 0$; comme Φ est décroissante et nulle en a et en b, elle est identiquement nulle, donc $\Phi' \equiv 0$. En $x = b$,

$$\int_a^b \frac{(f(t) - f(b))^2}{f(t)f(b)}\,\mathrm{d}t = 0,$$

et l'intégrande est continu et positif : il est donc identiquement nul, ce qui impose $f(t) = f(b)$ pour tout $t \in [a, b]$. On retrouve bien : égalité si et seulement si f est constante.

Enfin, ce calcul de Φ' n'a utilisé *aucune* hypothèse de monotonie : seul le fait que $(f(t)-f(x))\left(\frac{1}{f(t)}-\frac{1}{f(x)}\right)$ soit toujours négatif a servi. La méthode de Φ redonne donc ici l'inégalité de Cauchy–Schwarz en toute généralité, alors que la question 3 ne s'appliquait qu'aux f monotones.

Correction de l'exercice 1.70 **Énoncé p. 38**

1. En développant, $X^4(1-X)^4 = X^8-4X^7+6X^6-4X^5+X^4$. La division euclidienne par X^2+1 donne

$$X^4(1-X)^4 = (1+X^2)\left(X^6-4X^5+5X^4-4X^2+4\right)-4,$$

ce que l'on vérifie en développant le membre de droite. Donc, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

Les deux membres sont continus sur $[0,1]$; en intégrant,

$$\int_0^1 \left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{7}-\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}+4 = \frac{1}{7}+3 = \frac{22}{7},$$

tandis que $\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = 4\left[\arctan x\right]_0^1 = 4\times\frac{\pi}{4} = \pi$. D'où le résultat.

2. La fonction $x \mapsto \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ est continue et positive sur $[0,1]$, et n'est pas identiquement nulle (elle vaut $\frac{1}{320} > 0$ en $x = \frac{1}{2}$). Son intégrale est donc *strictement* positive : $\frac{22}{7}-\pi > 0$, c'est-à-dire $\pi < \frac{22}{7}$.

3. Sur $[0,1]$ on a $1 \leq 1+x^2 \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. En multipliant par $x^4(1-x)^4 \geq 0$ et en intégrant,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x \leq \frac{22}{7}-\pi \leq \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}-\frac{4}{6}+\frac{6}{7}-\frac{4}{8}+\frac{1}{9} = \frac{126-420+540-315+70}{630} = \frac{1}{630},$$

d'où l'encadrement $\frac{1}{1260} \leq \frac{22}{7}-\pi \leq \frac{1}{630}$.
En particulier, en combinant les deux inégalités, $3{,}1412 \leq \pi \leq 3{,}1421$: une seule intégrale donne deux décimales exactes de π et encadre la troisième.

4. (a) Sur $[0,\pi]$, la fonction $x \mapsto x^n(\pi-x)^n \sin x$ est continue et positive, et strictement positive pour $0 < x < \pi$: son intégrale est strictement positive, donc $I_n > 0$.
Par ailleurs, pour $x \in [0,\pi]$, l'étude du trinôme $x(\pi-x)$ donne $0 \leq x(\pi-x) \leq \frac{\pi^2}{4}$, et $\sin x \leq 1$. Donc

$$0 < I_n \leq \frac{\pi}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $\frac{c^n}{n!} \to 0$ pour tout $c > 0$ (terme général d'une série convergente, celle de l'exponentielle). Par encadrement, $I_n \to 0$.

(b) Comme $q\pi = p$, on a $q^n(\pi - x)^n = (p - qx)^n$, donc $n!\,P_n(x) = x^n(p - qx)^n$: c'est bien une fonction polynomiale à coefficients entiers, de degré $2n$, dont les monômes sont tous de degré $\geq n$. Écrivons $n!\,P_n(x) = \sum_{k=n}^{2n} c_k x^k$ avec $c_k \in \mathbb{Z}$.

L'égalité $P_n(\pi - x) = P_n(x)$ est immédiate sur l'expression $P_n(x) = \frac{q^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$, qui est symétrique en x et $\pi - x$.

Pour $k < n$ ou $k > 2n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$. Pour $n \leq k \leq 2n$, $P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k$, et $\frac{k!}{n!} = (n+1)(n+2)\cdots k$ est un entier : donc $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ dans tous les cas. Enfin, en dérivant k fois la relation $P_n(\pi - x) = P_n(x)$, on obtient $(-1)^k P_n^{(k)}(\pi - x) = P_n^{(k)}(x)$, puis, en $x = 0$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(c) Comme $\deg P_n = 2n$, on a $P_n^{(2n+2)} = 0$, donc

$$Q_n + Q_n'' = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j P_n^{(2j)} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j P_n^{(2j+2)}.$$

Dans la seconde somme, le terme $j = n$ est nul ; en réindexant $j \to j - 1$, elle vaut $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} P_n^{(2j)}$, qui annihile tous les termes $j \geq 1$ de la première. Il reste $Q_n + Q_n'' = P_n$.

Posons alors $R(x) = Q_n'(x)\sin x - Q_n(x)\cos x$. On a

$$\begin{aligned} R'(x) &= Q_n''(x)\sin x + Q_n'(x)\cos x - Q_n'(x)\cos x + Q_n(x)\sin x \\ &= \big(Q_n''(x) + Q_n(x)\big)\sin x = P_n(x)\sin x, \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x = [R]_0^{\pi} = Q_n(\pi) + Q_n(0),$$

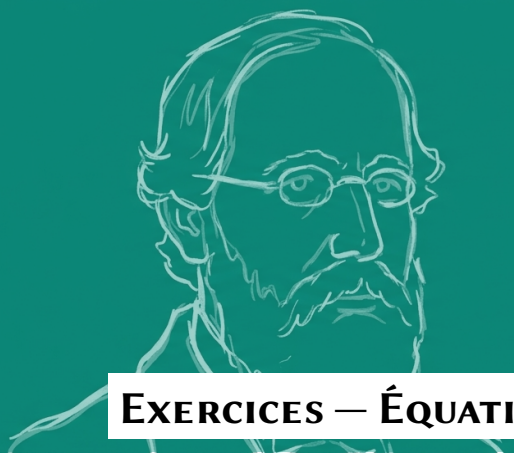
puisque $\sin 0 = \sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$ et $\cos 0 = 1$. Comme $P_n(x) = \frac{q^n x^n (\pi - x)^n}{n!}$, le membre de gauche vaut $q^n I_n$.

(d) D'après la question précédente, $q^n I_n = Q_n(0) + Q_n(\pi)$ est une somme de valeurs $\pm P_n^{(2j)}(0)$ et $\pm P_n^{(2j)}(\pi)$, donc un *entier*. Or $I_n > 0$ et $q > 0$, donc $q^n I_n$ est un entier strictement positif : $q^n I_n \geq 1$ pour tout n.

Mais la majoration de la question (a) donne

$$0 < q^n I_n \leq \pi \frac{\left(\frac{q\pi^2}{4}\right)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $q^n I_n < 1$ pour n assez grand : contradiction. L'hypothèse « π est rationnel » est donc absurde, et π est irrationnel.



1 Révisions d'analyse

Exercices — Équations différentielles

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 1.71 Premier ordre et condition initiale
  - 1.74 Premier ordre, coefficient variable
  - 1.78 Second ordre, racines complexes
  - 1.72 Second ordre, second membre e^t
- **Piste rouge**
  - 1.79 Second membre polynôme-exponentielle
  - 1.83 Premier ordre avec logarithme
  - 1.85 Recollement avec second membre
  - 1.88 Équation en $f(x)$ et $f(-x)$
- **Piste bleue**
  - 1.82 Premier ordre, coefficient tan x
  - 1.80 Second membre trigonométrique
  - 1.81 Solutions sur $\mathbb{R}$ de $xy' = ay$
  - 1.89 Une équation intégrale
- **Piste noire**
  - 1.92 Second membre e^{-x}/x
  - 1.91 Équation intégrale sur $\mathbb{R}_+$
  - 1.93 Abaissement de l'ordre

Exercice 1.71 ○ Correction p. 66

Résoudre l'équation différentielle

$$y' + 2y = 3e^{-t}$$

sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 1.72 • Correction p. 66

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = e^t$$

sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.73 • Correction p. 66

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(t)$$

sur $\mathbb{R}$. On identifiera le phénomène de résonance.

Exercice 1.74 • Correction p. 67

Résoudre $y' - xy = x$.

Exercice 1.75 • Correction p. 67

Résoudre $y' + 2y = 4\exp(x) + \sin x + \cos x$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.76 • Correction p. 67

Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 0$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.77 • Correction p. 67

Résoudre $y'' - 6y' + 9y = 0$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.78 • Correction p. 68

Résoudre $y'' + y = \exp(x)$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.79 • Correction p. 68

Résoudre $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1)\exp(x)$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.80 • Correction p. 68

Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.81 • Correction p. 69

Recollement. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $xy' = y$;
2. $xy' = 2y$;
3. $2xy' = y$.

Exercice 1.82 •• Correction p. 70

Résoudre $y' = y\tan x + \sin x$ avec $y :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$.

Exercice 1.83 •• Correction p. 70

Résoudre $xy' - 2y = -\ln x$ avec $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Exercice 1.84 •• Correction p. 70

Résoudre $(x^3 - x)y' - (x^2 - x + 1)y = 0$ avec $y : I \to \mathbb{R}$ pour tout I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.85 •• Correction p. 71

Recollement. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $xy' - y = x^2$;
2. $xy' - y = x$.

Exercice 1.86 •• Correction p. 72

Recollement. Résoudre $\sin(x)\, y' - \cos(x)\, y = 0$ avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1.87 •• Correction p. 73

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\left(\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + 1\right).$$

Exercice 1.88 •• Correction p. 73

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right).$$

Exercice 1.89 ●● Correction p. 73

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 1.90 ●● Correction p. 74

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f'(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Exercice 1.91 ●●● Correction p. 74

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x (x - 3t) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 1.92 ●●● Correction p. 75

Résoudre $y'' + 2y' + y = \dfrac{\exp(-x)}{x}$ avec $y : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$.



1 Révisions d'analyse

★ Pour aller plus loin — Équations différentielles

Exercice 1.93 ● ● ● Correction p. 75

Abaissement de l'ordre.

A — La méthode

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\qquad (1+x^2)y'' - 2y = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que la fonction $y_0 : x \mapsto 1+x^2$ est solution de (E), et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $z = \frac{y}{y_0}$. Montrer que
$$y \text{ est solution de } (E) \iff (1+x^2)z'' + 4xz' = 0.$$
Indication : aucun terme en z ne subsiste dans l'équation obtenue. Identifier le calcul qui le garantit, et expliquer pourquoi c'est précisément l'hypothèse « y_0 est solution de (E) » qui sert ici.
3. En posant $u = z'$, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre. La résoudre.
4. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est
$$\mathcal{S} = \left\{x \longmapsto a(1+x^2) + b\left(x + (1+x^2)\arctan x\right)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
Vérifier que les deux fonctions ainsi obtenues ne sont pas proportionnelles. Quelle est la dimension de $\mathcal{S}$?
6. Montrer que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy
$$\begin{cases}(1+x^2)y'' - 2y = 0,\\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta,\end{cases}$$
admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On vient ainsi de démontrer « à la main », sur cet exemple, un cas particulier du théorème de Cauchy linéaire.

B — Avec second membre

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

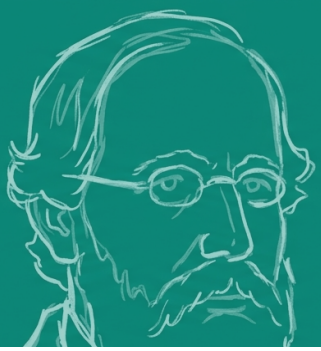
7. Montrer que la substitution $y = (1+x^2)z$ transforme l'équation $(1+x^2)y'' - 2y = g(x)$ en
$$\left((1+x^2)^2 z'\right)' = g(x).$$
8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$(1+x^2)y'' - 2y = \frac{1}{1+x^2}.$$
Indication : pour le calcul de $\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$, utiliser le changement de variable $x = \tan t$.

C — Ce qui peut mal se passer

On considère l'équation différentielle

$$(F) \ : \qquad x^2y'' + xy' - y = 0.$$

9. Vérifier que $y_0 : x \mapsto x$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$. Pourquoi la méthode de la partie A ne peut-elle pas être appliquée directement sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
10. Résoudre (F) par abaissement de l'ordre sur l'intervalle des réels strictement positifs, puis sur celui des réels strictement négatifs.
11. Déterminer l'ensemble des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Quelle est sa dimension ?



Corrections des exercices — Équations différentielles

Correction de l'exercice 1.71 Énoncé p. 61

Équation homogène : $y' + 2y = 0$ donne $y_h(t) = C\,\mathrm{e}^{-2t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : on cherche $y_p(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t}$ (car -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique $r + 2 = 0$). En substituant : $-\lambda\,\mathrm{e}^{-t} + 2\lambda\,\mathrm{e}^{-t} = 3\mathrm{e}^{-t}$, d'où $\lambda = 3$.
Solution générale : $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Condition initiale : $y(0) = C + 3 = 1$, donc $C = -2$. La solution est $y(t) = -2\mathrm{e}^{-2t} + 3\mathrm{e}^{-t}$.

Correction de l'exercice 1.72 Énoncé p. 61

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$, soit $(r-1)(r-2) = 0$. Les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
Solution homogène : $y_h(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{t} + \mu\,\mathrm{e}^{2t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : le second membre est e^t et $r = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc $y_p(t) = \alpha\, t\,\mathrm{e}^t$.
On calcule : $y_p' = \alpha(1+t)\mathrm{e}^t$ et $y_p'' = \alpha(2+t)\mathrm{e}^t$. En substituant :

$$\alpha(2+t)\mathrm{e}^t - 3\alpha(1+t)\mathrm{e}^t + 2\alpha\, t\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t,$$

soit $\alpha(2 + t - 3 - 3t + 2t)\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t$, c'est-à-dire $-\alpha\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t$, d'où $\alpha = -1$.
Solution générale : $y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{2t} - t\,\mathrm{e}^t$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1.73 Énoncé p. 61

Équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$, donc $r = \pm i$.
Solution homogène : $y_h(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : le second membre est $\cos(t)$ et i est racine de l'équation caractéristique. Il y a **résonance**. On cherche donc $y_p(t) = t\big(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)\big)$.
On calcule :

$$y_p' = (\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)) + t(-\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)),$$
$$y_p'' = 2(-\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)) + t(-\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)).$$

En substituant dans $y'' + y = \cos(t)$:

$$2(-\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)) + t(-\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)) + t(\alpha\cos(t) + \beta\sin(t)) = \cos(t).$$

Les termes en t s'annulent et il reste :

$$-2\alpha\sin(t) + 2\beta\cos(t) = \cos(t).$$

Par identification : $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2$.

Solution générale :

$$y(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + \frac{t}{2}\sin(t), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Le terme $\frac{t}{2}\sin(t)$ est caractéristique de la résonance : l'amplitude croît linéairement avec le temps.

Correction de l'exercice 1.74 **Énoncé p. 61**

Équation homogène : $y' = xy$ conduit à $\frac{y'}{y} = x$, dont une primitive du second membre est $\frac{x^2}{2}$; les solutions sont donc $y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : la fonction constante $y_p = -1$ convient, puisque $0 - x\times(-1) = x$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$ **:**

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{x^2/2} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.75 **Énoncé p. 61**

Équation homogène : $y' + 2y = 0$ donne $y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
On traite ensuite les deux morceaux du second membre séparément, puis on superpose.
Second membre $4\exp(x)$ **:** comme 1 n'est pas racine de $r + 2 = 0$, on cherche $y_1(x) = \lambda\exp(x)$. En substituant : $\lambda + 2\lambda = 4$, d'où $\lambda = \frac{4}{3}$.
Second membre $\sin x + \cos x$ **:** on cherche $y_2(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$. Alors

$$y_2' + 2y_2 = (2\alpha + \beta)\cos x + (2\beta - \alpha)\sin x,$$

et l'identification donne le système $2\alpha + \beta = 1$ et $-\alpha + 2\beta = 1$, dont la solution est $\alpha = \frac{1}{5}$ et $\beta = \frac{3}{5}$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$, par principe de superposition :

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{4}{3}\exp(x) + \frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.76 **Énoncé p. 61**

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 > 0$ et de racines $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$ **:**

$$y(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{x} + \mu\,\mathrm{e}^{3x}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.77 **Énoncé p. 61**

Équation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$, de discriminant nul et de racine double $r = 3$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$ **:**

$$y(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{3x}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.78 **Énoncé p. 62**

Équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$, de racines $\pm i$. La solution générale réelle de l'équation homogène est $y_h(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche donc $y_p(x) = \alpha \exp(x)$. En substituant : $\alpha + \alpha = 1$, d'où $\alpha = \frac{1}{2}$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{\exp(x)}{2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.79 **Énoncé p. 62**

Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, de racines 2 et 3, donc $y_h(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{2x} + \mu\, \mathrm{e}^{3x}$.
Solution particulière : le second membre est de la forme $P(x) \exp(x)$ avec P de degré 2, et 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique : on cherche donc $y_p = Q \exp(x)$ avec Q polynomiale de degré 2. Comme $y_p' = (Q' + Q) \exp(x)$ et $y_p'' = (Q'' + 2Q' + Q) \exp(x)$:

$$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = (Q'' - 3Q' + 2Q) \exp(x).$$

Il s'agit donc de résoudre $Q'' - 3Q' + 2Q = 2x^2 - 4x + 1$. Avec $Q = ax^2 + bx + c$:

$$Q'' - 3Q' + 2Q = 2a\,x^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c),$$

et l'identification donne successivement $a = 1$, puis $b = 1$, puis $c = 1$. Ainsi $y_p(x) = \left(x^2 + x + 1\right) \exp(x)$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{2x} + \mu\, \mathrm{e}^{3x} + \left(x^2 + x + 1\right) \exp(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.80 **Énoncé p. 62**

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$, de racine double 2, donc $y_h(x) = (\lambda + \mu x)\, \mathrm{e}^{2x}$.
Solution particulière : le second membre est une combinaison de cos et sin, et i n'est pas racine de l'équation caractéristique : on cherche $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Un calcul direct donne

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = (3\alpha - 4\beta) \cos x + (4\alpha + 3\beta) \sin x.$$

L'identification avec $7 \sin x - \cos x$ conduit au système

$$\begin{cases} 3\alpha - 4\beta = -1, \\ 4\alpha + 3\beta = 7, \end{cases}$$

dont la solution est $\alpha = \beta = 1$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = (\lambda + \mu x)\, \mathrm{e}^{2x} + \cos x + \sin x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.81 **Énoncé p. 62**

Dans les trois cas, le coefficient de y' s'annule en 0 : l'équation n'y est pas résolue. On la résout donc d'abord sur $\mathbb{R}_-^\star$ et sur $\mathbb{R}_+^\star$, puis on cherche quelles fonctions ainsi obtenues se recollent en une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note toujours λ_- et λ_+ les constantes associées à ces deux intervalles.

1. Sur $I = \mathbb{R}_-^\star$ ou $I = \mathbb{R}_+^\star$, l'équation s'écrit $y' = \frac{1}{x}\,y$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur I est $\ln|x|$, donc les solutions sur I sont les $y(x) = C\,\mathrm{e}^{\ln|x|} = C\,|x|$, soit, en absorbant le signe de x dans la constante, les $y(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions à $\mathbb{R}_-^\star$ et $\mathbb{R}_+^\star$ sont solutions sur ces intervalles : $y(x) = \lambda_- x$ pour $x < 0$ et $y(x) = \lambda_+ x$ pour $x > 0$. En évaluant l'équation en 0, il vient $y(0) = 0$. Le taux d'accroissement de y en 0 vaut donc

   $$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \begin{cases} \lambda_- & \text{si } x < 0, \\ \lambda_+ & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

   et y est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_- = \lambda_+$.

   Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $y\colon x \mapsto \lambda x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $x\,y'(x) = \lambda x = y(x)$.

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$: elles forment une droite vectorielle.

2. Sur $I = \mathbb{R}_-^\star$ ou $I = \mathbb{R}_+^\star$, l'équation s'écrit $y' = \frac{2}{x}\,y$, dont les solutions sont les $y(x) = C\,\mathrm{e}^{2\ln|x|} = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.

   Soit y une solution sur $\mathbb{R}$: $y(x) = \lambda_- x^2$ pour $x < 0$ et $y(x) = \lambda_+ x^2$ pour $x > 0$. En évaluant l'équation en 0, il vient $y(0) = 0$. Le taux d'accroissement en 0 vaut $\lambda_\pm x$ selon le signe de x, et tend vers 0 dans les deux cas : y est dérivable en 0, avec $y'(0) = 0$. Aucune condition ne relie λ_- et λ_+.

   Réciproquement, soit $(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R}^2$ et y la fonction définie par $y(x) = \lambda_- x^2$ pour $x \leq 0$ et $y(x) = \lambda_+ x^2$ pour $x \geq 0$ (les deux formules donnent 0 en 0). Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et le calcul précédent montre qu'elle l'est aussi en 0 avec $y'(0) = 0$. L'équation $x\,y'(x) = 2y(x)$ est vérifiée sur $\mathbb{R}^\star$, et en 0 ses deux membres sont nuls.

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

   $$y\colon x \mapsto \begin{cases} \lambda_- x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ \lambda_+ x^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \qquad (\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R}^2,$$

   et elles forment un plan vectoriel.

3. Sur $I = \mathbb{R}_-^\star$ ou $I = \mathbb{R}_+^\star$, l'équation s'écrit $y' = \frac{1}{2x}\,y$, dont les solutions sont les $y(x) = C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln|x|} = C\sqrt{|x|}$, $C \in \mathbb{R}$.

   Soit y une solution sur $\mathbb{R}$: $y(x) = \lambda_- \sqrt{|x|}$ pour $x < 0$ et $y(x) = \lambda_+ \sqrt{|x|}$ pour $x > 0$. En évaluant l'équation en 0, il vient $y(0) = 0$. Le taux d'accroissement en 0 vérifie

   $$\left|\frac{y(x) - y(0)}{x}\right| = \frac{|\lambda_\pm|\sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{|\lambda_\pm|}{\sqrt{|x|}},$$

   qui tend vers $+\infty$ dès que le $\lambda_\pm$ correspondant est non nul. La dérivabilité de y en 0 impose donc $\lambda_- = \lambda_+ = 0$, c'est-à-dire $y = 0$.

   Réciproquement, la fonction nulle est solution. C'est la seule solution sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1.82 **Énoncé p. 62**

Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation s'écrit $y' - (\tan x)\, y = \sin x$, avec tan continue sur I : c'est une équation linéaire du premier ordre résolue.
Équation homogène : le cosinus étant strictement positif sur I, une primitive de tan y est $-\ln(\cos x)$. Les solutions homogènes sont donc

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{-\ln(\cos x)} = \frac{C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Variation de la constante : on cherche $y(x) = \dfrac{C(x)}{\cos x}$ avec C dérivable sur I. En dérivant,

$$y'(x) = \frac{C'(x)}{\cos x} + C(x)\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{C'(x)}{\cos x} + (\tan x)\, y(x),$$

de sorte que l'équation devient $\dfrac{C'(x)}{\cos x} = \sin x$, soit $C'(x) = \sin x \cos x$. D'où $C(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Solution générale sur I : en écrivant $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{1-\cos^2 x}{2}$ et en absorbant la constante $\frac{1}{2}$ dans λ :

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x} - \frac{\cos x}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.83 **Énoncé p. 62**

Sur $I =]0, +\infty[$, on peut diviser par x : l'équation s'écrit

$$y' - \frac{2}{x}\, y = -\frac{\ln x}{x}.$$

Équation homogène : une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ sur I est $2\ln x$, donc $y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{2\ln x} = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.
Variation de la constante : on pose $y(x) = C(x)x^2$ avec C dérivable. Alors $y' - \frac{2}{x}y = C'(x)x^2$, et l'équation devient

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^3}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2},$$

d'où $C(x) = \dfrac{\ln x}{2x^2} + \dfrac{1}{4x^2} + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Solution générale sur I :

$$y(x) = \lambda x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.84 **Énoncé p. 62**

Notons (E) l'équation proposée. Son coefficient dominant $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ s'annule en -1, 0 et 1 : l'équation n'est pas résolue en ces points, et il faudra recoller.

Résolution là où le coefficient ne s'annule pas. Sur tout intervalle ne rencontrant pas $\{-1, 0, 1\}$, (E) équivaut à

$$y' = \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)}\, y.$$

La décomposition en éléments simples donne

$$\frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x+1},$$

dont une primitive est $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1|$. Les solutions y sont donc les $y = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où

$$\varphi(x) = \frac{|x+1|^{3/2}\sqrt{|x-1|}}{|x|}.$$

C'est en particulier la solution générale sur chacun des quatre intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Recollements. Soit maintenant I un intervalle ouvert quelconque et y une solution de (E) sur I. Sur chaque composante connexe J de $I \setminus \{-1, 0, 1\}$, ce qui précède donne $y = \lambda_J \varphi$ pour un certain $\lambda_J \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, en évaluant (E) en un point $x_0 \in \{-1, 0, 1\} \cap I$, le terme en y' disparaît et il reste $-\left(x_0^2 - x_0 + 1\right) y(x_0) = 0$, donc $y(x_0) = 0$ (le trinôme $x^2 - x + 1$ n'a pas de racine réelle). Reste à voir ce que la dérivabilité impose de part et d'autre de chaque point singulier.

- **En 0.** On a $\varphi(x) \sim \frac{1}{|x|}$, qui n'est pas bornée au voisinage de 0 ; or y y est continue. Donc $\lambda_J = 0$ pour les deux composantes bordant 0.
- **En 1.** On a $\varphi(x) \sim 2\sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, dont le taux d'accroissement en 1 tend vers $\pm\infty$: y ne serait pas dérivable en 1. Donc $\lambda_J = 0$ pour les deux composantes bordant 1.
- **En −1.** Cette fois $\varphi(x) = |x+1|^{3/2}\,\psi(x)$ avec ψ continue et non nulle en -1, donc $\frac{\varphi(x)}{x+1} \to 0$: la fonction obtenue en recollant $\lambda_1\varphi$ à gauche, 0 en -1 et $\lambda_2\varphi$ à droite est bien dérivable en -1, de dérivée nulle, et vérifie (E) en -1 (les deux termes y sont nuls). *Aucune* condition ne relie donc λ_1 et λ_2.

Conclusion. Une solution sur I est déterminée par un coefficient λ_J par composante connexe J de $I \setminus \{-1, 0, 1\}$, soumis à la seule contrainte $\lambda_J = 0$ dès que J admet 0 ou 1 pour extrémité intérieure à I. L'espace des solutions est ainsi de dimension 1 sur chacun des quatre intervalles ci-dessus, de dimension 2 sur un intervalle du type $]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$, et réduit à la fonction nulle sur tout intervalle contenu dans $]-1, +\infty[$ qui contient 0 ou 1.

Correction de l'exercice 1.85 **Énoncé p. 62**

Le coefficient de y' s'annule en 0 : on résout sur $\mathbb{R}_-^\star$ et sur $\mathbb{R}_+^\star$, puis on examine le recollement en 0.

Équation homogène. Sur $I = \mathbb{R}_-^\star$ ou $I = \mathbb{R}_+^\star$, $x\,y' - y = 0$ s'écrit $y' = \frac{1}{x}\,y$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur I est $\ln|x|$, donc les solutions sur I sont les $y(x) = C\,|x|$, soit les $y(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Variation de la constante. On pose $y(x) = C(x)\,x$ avec C dérivable sur I ; alors

$$x\,y'(x) - y(x) = x\,(C'(x)x + C(x)) - C(x)x = C'(x)\,x^2.$$

1. L'équation devient $C'(x)\,x^2 = x^2$, soit $C'(x) = 1$, d'où $C(x) = x + \lambda$ et

$$y(x) = x^2 + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

sur chacun des deux intervalles.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$: $y(x) = x^2 + \lambda_- x$ pour $x < 0$ et $y(x) = x^2 + \lambda_+ x$ pour $x > 0$. En évaluant l'équation en 0, il vient $-y(0) = 0$. Le taux d'accroissement de y en 0 vaut $x + \lambda_-$ pour $x < 0$ et $x + \lambda_+$ pour $x > 0$: ses limites à gauche et à droite sont λ_- et λ_+, et y est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_- = \lambda_+$.
Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $y\colon x \mapsto x^2 + \lambda x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$x\,y'(x) - y(x) = x\,(2x + \lambda) - x^2 - \lambda x = x^2.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les $x \mapsto x^2 + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. L'équation devient $C'(x)\,x^2 = x$, soit $C'(x) = \frac{1}{x}$, d'où $C(x) = \ln|x| + \lambda$ et

$$y(x) = x \ln|x| + \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

sur chacun des deux intervalles.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. En évaluant l'équation en 0, il vient $y(0) = 0$. Par ailleurs $y(x) = x \ln x + \lambda_+ x$ pour $x > 0$, donc

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \ln x + \lambda_+ \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty,$$

et y n'est pas dérivable en 0.
L'équation n'admet donc aucune solution sur $\mathbb{R}$, ni sur aucun intervalle dont 0 est un point intérieur.

Correction de l'exercice 1.86 **Énoncé p. 62**

Le coefficient de y' s'annule exactement aux points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$.
Résolution sur I_k. L'équation y est résolue et s'écrit $y' = \frac{\cos x}{\sin x}\,y$. La fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ est continue sur I_k et y admet $x \mapsto \ln|\sin x|$ pour primitive, donc les solutions sur I_k sont les $y(x) = C\,\mathrm{e}^{\ln|\sin x|} = C\,|\sin x|$. Le sinus gardant un signe constant sur I_k, ce sont les $y(x) = \lambda_k \sin x$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.
Recollements. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$; pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, sa restriction à I_k est de la forme $\lambda_k \sin$. Fixons $k \in \mathbb{Z}$. En évaluant l'équation en $k\pi$, le terme en y' disparaît et il reste $-\cos(k\pi)\,y(k\pi) = 0$, avec $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$: donc $y(k\pi) = 0$. Posons $h = x - k\pi$, de sorte que $\sin x = (-1)^k \sin h$. Le taux d'accroissement de y en $k\pi$ s'écrit

$$\frac{y(k\pi + h) - y(k\pi)}{h} = (-1)^k\,\lambda\,\frac{\sin h}{h}, \quad \text{avec} \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_{k-1} & \text{si } h < 0, \\ \lambda_k & \text{si } h > 0. \end{cases}$$

Comme $\frac{\sin h}{h} \to 1$, les limites à gauche et à droite valent $(-1)^k\lambda_{k-1}$ et $(-1)^k\lambda_k$. La dérivabilité de y en $k\pi$ équivaut donc à $\lambda_{k-1} = \lambda_k$.
Ceci valant pour tout $k \in \mathbb{Z}$, tous les λ_k sont égaux à un même $\lambda \in \mathbb{R}$, et $y(x) = \lambda \sin x$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Cette égalité vaut aussi en les $k\pi$, où les deux membres sont nuls.
Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $y = \lambda \sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin(x)\,\lambda\cos x - \cos(x)\,\lambda \sin x = 0.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les $x \mapsto \lambda \sin x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1.87 **Énoncé p. 62**

Analyse. Soit f une solution. La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $F : x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1, avec $F'(x) = xf(x)$ et $F(0) = 0$. L'hypothèse s'écrit $f(x) = x\,(F(x) + 1)$.
Posons $g = F + 1$: la fonction g est de classe C^1, $g(0) = 1$ et

$$g'(x) = F'(x) = xf(x) = x \times x\,(F(x) + 1) = x^2 g(x).$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $g(x) = C\,\mathrm{e}^{x^3/3}$; la condition $g(0) = 1$ impose $C = 1$. Par conséquent

$$f(x) = x\,g(x) = x\,\mathrm{e}^{x^3/3}.$$

Synthèse. Réciproquement, pour cette fonction,

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^2\,\mathrm{e}^{t^3/3}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{t^3/3}\right]_0^x = \mathrm{e}^{x^3/3} - 1,$$

et $x\left(\mathrm{e}^{x^3/3} - 1 + 1\right) = x\,\mathrm{e}^{x^3/3} = f(x)$: elle convient.
L'unique solution est donc $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{x^3/3}$.

Correction de l'exercice 1.88 **Énoncé p. 62**

Analyse. Soit f une solution. Le membre de droite $x \mapsto \frac{1}{2}\,(f(x) + f(-x))$ est dérivable puisque f l'est ; donc f' est dérivable, c'est-à-dire f est deux fois dérivable. Par ailleurs, en remplaçant x par $-x$ dans l'équation, le membre de droite est inchangé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) = f'(x),$$

autrement dit f' est paire. En dérivant l'équation, il vient alors

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,(f'(x) - f'(-x)) = 0.$$

Ainsi $f'' = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc f est affine : $f(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Synthèse. Pour une telle fonction, $f'(x) = a$ et

$$\frac{1}{2}\,(f(x) + f(-x)) = \frac{1}{2}\,((ax + b) + (-ax + b)) = b.$$

L'équation équivaut donc à $a = b$.
Les solutions sont exactement les fonctions $f : x \mapsto a(x + 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1.89 **Énoncé p. 62**

Analyse. Soit f une solution. La fonction $t \mapsto tf(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, le membre de droite est de classe C^1 ; donc f l'est aussi, et en dérivant :

$$f'(x) = xf(x), \qquad f(0) = 1.$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre, dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $f(x) = C\,\mathrm{e}^{x^2/2}$; la condition $f(0) = 1$ impose $C = 1$.

Synthèse. Réciproquement, pour $f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}$:

$$1 + \int_0^x t\,\mathrm{e}^{t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1 + \left[\mathrm{e}^{t^2/2}\right]_0^x = \mathrm{e}^{x^2/2} = f(x).$$

L'unique solution est donc $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}$.

Correction de l'exercice 1.90 **Énoncé p. 63**

Analyse. Soit f une solution. Comme $f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \neq 0$, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\star$; étant continue, elle y garde un signe constant. De plus, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad f'\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = x.$$

L'astuce. Posons $g(x) = f(x)\,f\left(\frac{1}{x}\right)$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. En utilisant les deux relations :

$$g'(x) = f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\,f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \times x = 0.$$

Donc g est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$, égale à $g(1) = f(1)^2$. Notons $c = f(1)^2 > 0$.
Résolution. De $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{f(x)}$ et de l'équation, on tire

$$f'(x) = \frac{1}{x\,f\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f(x)}{c\,x}.$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène, dont les solutions ne s'annulant pas sont $f(x) = A\,x^{1/c}$ avec $A \in \mathbb{R}^\star$. En évaluant en 1, $A = f(1)$, donc $c = A^2$.
Synthèse. Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ et $f(x) = \lambda\,x^{1/\lambda^2}$. Alors

$$f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\lambda}\,x^{\frac{1}{\lambda^2}-1} \times \lambda\,x^{-\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{x}.$$

Les solutions sont donc exactement les $f : x \mapsto \lambda\,x^{1/\lambda^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}^\star$.

Correction de l'exercice 1.91 **Énoncé p. 63**

Analyse. Soit f une telle application. En développant $x - 3t$, la relation s'écrit

$$\forall x \geq 0, \quad x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Les fonctions $F : x \mapsto \int_0^x f$ et $G : x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ sont de classe C^1 (car f est continue), et la relation devient $xF(x) - 3G(x) = \frac{x^2}{2}$. En dérivant :

$$F(x) + xf(x) - 3xf(x) = x, \quad \text{soit} \quad F(x) - 2xf(x) = x.$$

Pour $x > 0$, on en tire $f(x) = \dfrac{F(x) - x}{2x}$: comme F est de classe C^1, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$. On peut donc dériver à nouveau la relation $F(x) - 2xf(x) = x$:

$$f(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 1, \quad \text{soit} \quad 2x\,f'(x) + f(x) = -1.$$

Sur $\mathbb{R}_+^\star$ cette équation s'écrit $f' + \frac{1}{2x} f = -\frac{1}{2x}$. L'équation homogène a pour solutions $C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{C}{\sqrt{x}}$, et la fonction constante -1 est une solution particulière évidente ; donc

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Or f est continue en 0, donc bornée au voisinage de 0 : cela impose $C = 0$. Par continuité, $f = -1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.
Synthèse. Réciproquement, pour $f = -1$:

$$\int_0^x (x - 3t)(-1)\,\mathrm{d}t = -\left[xt - \frac{3t^2}{2}\right]_0^x = -x^2 + \frac{3x^2}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

L'unique solution est donc la fonction constante égale à -1.

Correction de l'exercice 1.92 Énoncé p. 63

Équation homogène : $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$ a pour racine double -1, donc $y_h(x) = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Solution particulière : le second membre n'est pas de la forme $P(x)\mathrm{e}^{rx}$, on ne peut donc pas deviner la forme de y_p. On pose plutôt $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec z deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$; alors $y' = (z' - z)\mathrm{e}^{-x}$ et $y'' = (z'' - 2z' + z)\mathrm{e}^{-x}$, d'où

$$y'' + 2y' + y = (z'' - 2z' + z + 2z' - 2z + z)\,\mathrm{e}^{-x} = z''\,\mathrm{e}^{-x}.$$

L'équation équivaut donc à $z''(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, ce qui donne $z'(x) = \ln x + a$, puis

$$z(x) = x\ln x - x + ax + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Solution générale sur $\mathbb{R}_+^\star$, après absorption du terme $-x$ dans la constante a :

$$y(x) = (x\ln x + \lambda x + \mu)\ \mathrm{e}^{-x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 1.93 Énoncé p. 64

A — La méthode

1. La fonction $y_0 : x \mapsto 1 + x^2$ est polynomiale, donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $y_0'(x) = 2x$ et $y_0''(x) = 2$. Ainsi
$$(1 + x^2)y_0''(x) - 2y_0(x) = 2(1 + x^2) - 2(1 + x^2) = 0,$$
et y_0 est bien solution de (E). Enfin $y_0(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: y_0 ne s'annule pas.
2. Comme y_0 ne s'annule pas et est de classe C^∞, les fonctions y et $z = \frac{y}{y_0}$ sont simultanément deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$: se donner y ou se donner z, avec $y = y_0 z$, revient au même. On dérive deux fois ce produit :
$$y' = y_0'z + y_0z', \qquad y'' = y_0''z + 2y_0'z' + y_0z''.$$
En reportant et en regroupant les termes selon z, z' et z'' :
$$(1 + x^2)y'' - 2y = \underbrace{\left[(1 + x^2)y_0'' - 2y_0\right]}_{=0} z + (1 + x^2)\left(2y_0'z' + y_0z''\right)$$
$$= (1 + x^2)\left(4xz' + (1 + x^2)z''\right).$$

C'est ici, et seulement ici, que sert l'hypothèse « y_0 est solution de (E) » : le coefficient de z est exactement le premier membre de (E) évalué en y_0, donc il est nul. Comme $1 + x^2 \neq 0$ pour tout x, on peut diviser, d'où l'équivalence annoncée.

3. Avec $u = z'$, l'équation s'écrit $(1 + x^2)u' + 4xu = 0$, soit, en divisant par $1 + x^2$ qui ne s'annule pas, $u' = -\frac{4x}{1+x^2}u$. Une primitive de $x \mapsto -\frac{4x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -2\ln(1 + x^2)$, donc les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les

$$u(x) = \lambda \mathrm{e}^{-2\ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{(1 + x^2)^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Posons $x = \tan t$, avec $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Alors $\mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$ et $\frac{1}{(1+x^2)^2} = \cos^4 t$, d'où

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2} = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2}.$$

Comme $t = \arctan x$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, on obtient le candidat

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1 + x^2}\right).$$

Vérification directe, qui dispense de toute justification sur le changement de variable :

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + x^2) + (1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1}{(1 + x^2)^2}.$$

5. D'après les questions 3 et 4, $z' = u = \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}$ équivaut à $z = \lambda F + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Donc $y = y_0 z$ est solution de (E) si et seulement si

$$y(x) = \frac{\lambda}{2}\left((1 + x^2)\arctan x + x\right) + \mu(1 + x^2),$$

ce qui est bien la description de $\mathcal{S}$ avec $a = \mu$ et $b = \frac{\lambda}{2}$. Notons $y_1 : x \mapsto 1 + x^2$ et $y_2 : x \mapsto x + (1 + x^2)\arctan x$. Si $y_2 = c\,y_1$, l'évaluation en 0 donne $0 = c$, donc $y_2 = 0$; or $y_2(1) = 1 + \frac{\pi}{2} \neq 0$. Les deux fonctions ne sont donc pas proportionnelles, et (y_1, y_2) est une famille libre génératrice de $\mathcal{S}$: $\dim \mathcal{S} = 2$.

6. On a $y_1(0) = 1$, $y_1'(x) = 2x$ donc $y_1'(0) = 0$, et

$$y_2'(x) = 1 + 2x\arctan x + \frac{1 + x^2}{1 + x^2} = 2 + 2x\arctan x,$$

donc $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 2$. Pour $y = ay_1 + by_2 \in \mathcal{S}$, les conditions initiales s'écrivent $a = \alpha$ et $2b = \beta$: il existe un unique couple (a, b) convenable, à savoir $\left(\alpha, \frac{\beta}{2}\right)$. Comme $\mathcal{S}$ contient *toutes* les solutions (la question 2 était une équivalence), le problème de Cauchy admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

B — Avec second membre

7. Le calcul de la question 2 n'a jamais utilisé la nullité du second membre : avec $y = (1+x^2)z$, on a toujours $(1+x^2)y'' - 2y = (1+x^2)\left((1+x^2)z'' + 4xz'\right)$. Or

$$\left((1 + x^2)^2 z'\right)' = (1 + x^2)^2 z'' + 4x(1 + x^2)z' = (1 + x^2)\left((1 + x^2)z'' + 4xz'\right).$$

Les deux membres coïncident, donc $(1 + x^2)y'' - 2y = g(x)$ équivaut à $\left((1 + x^2)^2 z'\right)' = g(x)$.

8. Ici $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dont arctan est une primitive. L'équation devient $(1+x^2)^2 z' = \arctan x + \lambda$, soit
$$z'(x) = \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} + \frac{\lambda}{(1+x^2)^2}.$$
Le second terme s'intègre en $\lambda F(x)$ (question 4). Pour le premier, le changement de variable $x = \tan t$ donne
$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{4} + \frac{t\sin 2t}{4} + \frac{\cos 2t}{8},$$
la dernière égalité s'obtenant en linéarisant $\cos^2 t$ puis en intégrant par parties. Avec $t = \arctan x$, $\sin 2t = \frac{2x}{1+x^2}$ et $\cos 2t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, d'où
$$\int \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(\arctan x)^2}{4} + \frac{x\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4(1+x^2)} - \frac{1}{8}.$$
En multipliant par $1+x^2$ et en absorbant les constantes dans les solutions homogènes, on trouve la solution générale sur $\mathbb{R}$:
$$y(x) = \frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{4} + \frac{x\arctan x}{2} + \frac{1}{4} + a(1+x^2) + b\left(x + (1+x^2)\arctan x\right),$$
avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On vérifie sans peine, en dérivant deux fois, que $y_p : x \mapsto \frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{4} + \frac{x\arctan x}{2} + \frac{1}{4}$ est bien une solution particulière.

C — Ce qui peut mal se passer

9. Pour $y_0(x) = x$, on a $y_0' = 1$ et $y_0'' = 0$, donc $x^2\cdot 0 + x\cdot 1 - x = 0$: y_0 est solution de (F) sur $\mathbb{R}$. Mais y_0 s'annule en 0, si bien que $z = \frac{y}{y_0}$ n'y est pas définie : la substitution $y = y_0 z$ n'a de sens que sur un intervalle ne contenant pas 0. De surcroît le coefficient dominant x^2 s'annule lui aussi en 0, et on ne peut donc pas mettre (F) sous forme résolue $y'' = \ldots$ au voisinage de 0.
10. Plaçons-nous sur un intervalle I ne contenant pas 0 et posons $y = xz$. Alors $y' = z + xz'$ et $y'' = 2z' + xz''$, d'où
$$x^2y'' + xy' - y = 2x^2z' + x^3z'' + xz + x^2z' - xz = x^3z'' + 3x^2z'.$$
Comme $x \neq 0$ sur I, (F) équivaut à $xz'' + 3z' = 0$. En posant $u = z'$, on obtient $u' = -\frac{3}{x}u$, dont les solutions sur I sont les $u(x) = \frac{\lambda}{x^3}$. Alors $z(x) = -\frac{\lambda}{2x^2} + \mu$, et
$$y(x) = xz(x) = -\frac{\lambda}{2x} + \mu x.$$
Autrement dit, sur chacun des deux intervalles, l'ensemble des solutions est
$$\left\{x \longmapsto ax + \frac{b}{x}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\},$$
espace de dimension 2, conformément au théorème de Cauchy linéaire, valable sur tout intervalle où le coefficient dominant ne s'annule pas.

11. Soit y une solution de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ses restrictions aux deux demi-droites sont du type précédent : il existe a_+, b_+, a_-, b_- tels que $y(x) = a_+x + \frac{b_+}{x}$ pour $x > 0$ et $y(x) = a_-x + \frac{b_-}{x}$ pour $x < 0$. Mais y est dérivable, donc continue en 0, alors que $|y(x)| \to +\infty$ quand $x \to 0$ dès que $b_\pm \neq 0$: nécessairement $b_+ = b_- = 0$. Il reste $y(x) = a_+x$ pour $x > 0$, $y(x) = a_-x$ pour $x < 0$, et $y(0) = 0$ par continuité. La dérivée à droite en 0 vaut alors a_+ et la dérivée à gauche a_- : la dérivabilité en 0 impose $a_+ = a_-$. Réciproquement, $x \mapsto ax$ est bien solution sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}\,(x \mapsto x)\,, \qquad \dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = 1.$$

Le coefficient dominant x^2 s'annule en 0 : le théorème de Cauchy ne s'applique sur aucun intervalle contenant 0, et la dimension 2 qu'il garantit sur chaque demi-droite n'est plus assurée. Ici le recollement en 0 tue trois des quatre paramètres. Le même phénomène s'observe pour les équations $xy' - \alpha y = 0$, de solutions $\lambda\,|x|^\alpha$ sur chaque demi-droite : pour $\alpha = 2$ les deux branches se recollent librement et l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2, pour $\alpha = 1$ il est de dimension 1, et pour $\alpha = -1$ il est réduit à $\{0\}$.