

2

Révisions d'algèbre linéaire

Exercices — Espaces vectoriels

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 2.1 Équations d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$
  - 2.2 Un sous-espace de matrices
  - 2.7 Une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$
  - 2.17 Une base de $\mathbb{R}_4[X]$
- **Piste rouge**
  - 2.12 Droite et hyperplan de fonctions
  - 2.24 Symétriques et antisymétriques
  - 2.21 Polynômes de Lagrange
  - 2.10 Un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$
- **Piste bleue**
  - 2.6 Sous-espaces vectoriels et bases
  - 2.3 Polynômes s'annulant en 1
  - 2.16 Intersection et somme dans $\mathbb{R}^4$
  - 2.11 Deux sous-espaces de suites
- **Piste noire**
  - 2.9 Trois familles de fonctions
  - 2.14 Réunion de deux sous-espaces
  - 2.29 Trois bases, un vecteur commun
  - 2.30 Un supplémentaire commun

Exercice 2.1 ○ Correction p. 7

Sous-espace défini par des équations. On considère l'ensemble

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } 2x + t = 0\right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.

Exercice 2.2 • Correction p. 7

Un sous-espace de matrices. Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 2.3 • Correction p. 8

Polynômes s'annulant en 1.

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la dimension de F et en donner une base.
3. Les sous-espaces F et $G = \text{Vect}(1, X^2)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 2.4 • Correction p. 8

Deux familles engendrant le même sous-espace. Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $u = (1, 3, -2)$ et $v = (1, 4, -3)$.

Exercice 2.5 • Correction p. 9

Reconnaître un espace vectoriel. Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. $F = \{f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$;
2. $F = E \setminus G$, où G est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ;
3. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 2\right\}$;
4. $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n\right\}$.

Exercice 2.6 • Correction p. 9

Sous-espaces vectoriels et bases. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base.

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\}$;
2. $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$;
3. $G = \left\{f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 2f = 0\right\}$;
4. $H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } 3x + y + z + 2t = 0\right\}$.

Exercice 2.7 • Correction p. 10

Libre, liée, génératrice ? On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $f_1 = (1,1,0,1)$, $f_2 = (2,-1,1,0)$, $f_3 = (1,0,2,1)$ et $f_4 = (-1,0,1,3)$. La famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est-elle libre ? Liée ? Génératrice ?

Exercice 2.8 •• Correction p. 11

Une somme de carrés, selon le corps de base. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose :

$$E_{\mathbb{K}} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\right\}.$$

L'ensemble $E_{\mathbb{K}}$ est-il un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ?

Exercice 2.9 •• Correction p. 11

Trois familles de fonctions. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 < \cdots < a_n$. Dans chacun des cas suivants, la famille $(f_{a_1},\dots,f_{a_n})$ est-elle libre ou liée ?

1. $f_{a_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - a_i|$;
2. $f_{a_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{a_i x}$;
3. $f_{a_i} : \mathbb{R} \setminus \{a_1,\dots,a_n\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x - a_i}$.

Exercice 2.10 •• Correction p. 13

Un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $F = \mathrm{Vect}(1,X,X^2)$ et :

$$G = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = P(2) = 0\}.$$

Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 2.11 •• Correction p. 13

Deux sous-espaces de suites. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. On pose :

$$F = \{(u_n) \in E \mid u_0 = u_1 = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 2.12 ●● Correction p. 14

Une droite supplémentaire d'un hyperplan de fonctions. On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$F = \{f \in E \mid f(0) = 0\} \qquad \text{et} \qquad A = E \setminus F = \{g \in E \mid g(0) \neq 0\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble A en est-il un ?
2. Montrer que, pour toute application $g \in A$, la droite vectorielle $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2.13 ●●● Correction p. 15

Fonctions nulles sur une partie. Soient A un ensemble non vide et $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de A dans $\mathbb{R}$. Pour toute partie X de A, on pose :

$$N_X = \{f \in E \mid \forall x \in X,\ f(x) = 0\}.$$

1. Vérifier que, pour toute partie X de A, N_X est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que, pour toutes parties X et Y de A :
   (a) $N_X + N_Y = E \iff X \cap Y = \varnothing$;
   (b) $N_X \cap N_Y = \{0\} \iff X \cup Y = A$;
   (c) $N_X \oplus N_Y = E \iff Y = A \setminus X$.

Exercice 2.14 ●●● Correction p. 16

Quand une réunion est-elle un sous-espace vectoriel ? Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E ;
2. $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 2.15 ●●● Correction p. 16

Un supplémentaire de dimension finie. On note $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0,\ f(0) = 0,\ f'(1) = 0 \right\},$$

puis, pour $k \in \{0,1,2\}$, $e_k : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$, et enfin $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 2.16 ● Correction p. 17

Quatre sous-espaces de $\mathbb{R}^4$. On pose :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } z = 2x\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1,1),\ (1,3,1,-1)\right).$$

Déterminer une base et la dimension de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 2.17 ● Correction p. 17

Cinq polynômes bien choisis. On note dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = (X-1)X(X+1), \quad P_3 = X^2(X+1), \quad P_4 = (X-1)X(X+1)^2.$$

Montrer que $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 2.18 ●● Correction p. 18

Les puissances du sinus. Soit n un entier naturel non nul. Pour $1 \leq k \leq n$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \sin^k(x)$. Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 2.19 ●● Correction p. 18

Le rang d'une famille de composées. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x+1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Quel est le rang de la famille $\mathcal{A} = (f,\ g,\ f \circ f,\ f \circ g,\ g \circ f,\ g \circ g)$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Exercice 2.20 ●● Correction p. 19

Les polynômes $(X-a)^i(X-b)^{n-i}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$. On note, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i = (X-a)^i(X-b)^{n-i}$. Montrer que la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2.21 ●● Correction p. 19

Les polynômes interpolateurs de Lagrange. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i = \frac{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2.22 ●● Correction p. 20

Une base extraite d'une partie. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie non vide de E. Montrer qu'il existe une base de $\mathrm{Vect}(A)$ formée de vecteurs de A.

Exercice 2.23 ●● Correction p. 20

Le complémentaire d'un hyperplan. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et H un *hyperplan* de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. Soit $X = (E \setminus H) \cup \{0_E\}$. L'ensemble X est-il un espace vectoriel ? Que vaut $\mathrm{Vect}(X)$?

Exercice 2.24 ●● Correction p. 21

Matrices symétriques, matrices antisymétriques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire une nouvelle démonstration de l'égalité $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Déterminer $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A - B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.25 ●● Correction p. 22

Les différences $V_i - V_j$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $V_1, \ldots, V_n \in \mathbb{R}^n$. On note :

$$F = \mathrm{Vect}\left(V_i - V_j,\ 1 \leq i, j \leq n\right).$$

Montrer que $\dim F \leq n-1$.

Exercice 2.26 • • • Correction p. 22

L'irrationalité de $\sqrt{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que N ne soit le carré d'aucun entier. On rappelle que les axiomes d'espace vectoriel s'appliquent mot pour mot avec $\mathbb{Q}$ comme corps des scalaires : $\mathbb{R}$, muni de son addition et de la multiplication par les rationnels, est ainsi un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Montrer que :

1. $\sqrt{N} \notin \mathbb{Q}$;
2. la famille $(1, \sqrt{N})$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 2.27 • • • Correction p. 23

Le défaut de rang est croissant. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Pour une famille finie de vecteurs, on appelle *rang* la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_i) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i)$. Montrer que l'application :

$$\delta : \begin{cases} \{1, \dots, n\} & \to & \mathbb{N}, \\ i & \mapsto & i - \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_i) \end{cases}$$

est croissante.

Exercice 2.28 • • • Correction p. 23

Deux inégalités de dimensions. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer pour tous sous-espaces vectoriels F, U, V de E tels que $V \subset U$:

$$\begin{cases} \dim(F+U) - \dim(F+V) & \leq & \dim(U) - \dim(V), \\ \dim(F \cap U) - \dim(F \cap V) & \leq & \dim(U) - \dim(V). \end{cases}$$

2. En déduire pour tous sous-espaces vectoriels F, G, H de E :

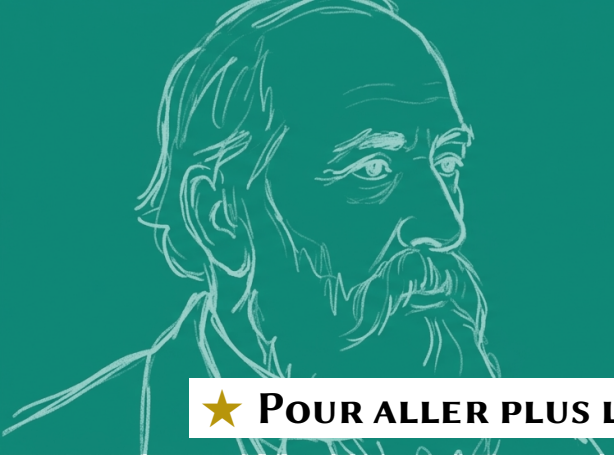
$$\begin{cases} \dim(F \cap G) + \dim(G \cap H) & \leq & \dim(G) + \dim(F \cap H), \\ \dim(F \cap G) + \dim(H) & \leq & \dim(G+H) + \dim(F \cap H). \end{cases}$$

Exercice 2.29 • • • Correction p. 24

Trois bases, un vecteur commun. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_n)$, $(g_1, \dots, g_n)$ trois bases de $\mathbb{R}^n$. Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ tels que $i + j - 1 \leq n$. On note $E = \mathrm{Vect}(e_i, \dots, e_n)$, $F = \mathrm{Vect}(f_j, \dots, f_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_{i+j-1})$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul dans l'intersection de E, F et G.

Exercice 2.30 • • • Correction p. 24

Un supplémentaire commun. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$. On pourra faire une récurrence sur $\dim E - \dim F$.



2

Révisions d'algèbre linéaire

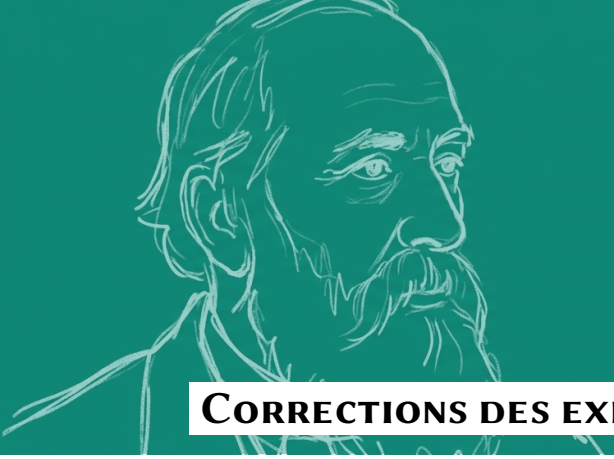
★ Pour aller plus loin — Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, le corps des scalaires est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rien n'y oblige pourtant : la définition d'un espace vectoriel garde un sens dès que les scalaires forment un corps, et $\mathbb{Q}$ en est un. L'exercice qui suit prend $\mathbb{Q}$ comme corps de base et regarde $\mathbb{R}$ tout entier comme espace vectoriel.

Exercice 2.31 ● ● ● Correction p. 25

Les logarithmes des nombres premiers.
On munit $\mathbb{R}$ de son addition usuelle et de la multiplication par les *rationnels* : pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$, le produit externe $\lambda \cdot x$ est simplement le produit λx calculé dans $\mathbb{R}$. Tous les axiomes de la définition d'un espace vectoriel se lisent alors mot pour mot sur les règles de calcul usuelles dans $\mathbb{R}$: ainsi $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. C'est celui-là, et non le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, que l'on étudie ici ; les mots « libre », « génératrice » et « dimension » sont donc à comprendre relativement à $\mathbb{Q}$. L'exercice « L'irrationalité de $\sqrt{N}$ » en donnait un premier exemple : la famille $(1, \sqrt{2})$ y est libre sur $\mathbb{Q}$, alors qu'elle est évidemment liée sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que tout entier $n \geq 2$ s'écrit, de manière unique à l'ordre des facteurs près, comme un produit de puissances de nombres premiers, et que $\mathcal{P}$ est infini.

1. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers deux à deux distincts et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers relatifs tels que
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln p_i = 0.$$
Montrer que $a_1 = \cdots = a_n = 0$.
Indication : séparer les indices selon le signe de a_i.
2. En déduire que la famille $(\ln p_1, \ldots, \ln p_n)$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10}$ est irrationnel.
4. On pose
$$A = \{\ln n \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\} \qquad \text{et} \qquad B = \{\ln p \mid p \in \mathcal{P}\}.$$
Montrer que $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(B)$.
5. Montrer que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension finie.



2

Révisions d'algèbre linéaire

Corrections des exercices — Espaces vectoriels

Correction de l'exercice 2.1 Énoncé p. 1

1. On vérifie les trois points de la caractérisation du cours d'un sous-espace vectoriel.
   (a) $F \subset \mathbb{R}^4$: c'est immédiat, F est défini comme un ensemble de quadruplets de $\mathbb{R}^4$.
   (b) $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in F$: ce vecteur vérifie bien $0+0-0=0$ et $2\times 0+0=0$.
   (c) Soient $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $(x,y,z,t) = \lambda(x_1,y_1,z_1,t_1)+(x_2,y_2,z_2,t_2)$. Alors :
   $$x+y-z = \lambda(x_1+y_1-z_1)+(x_2+y_2-z_2) = 0$$
   et $2x+t = \lambda(2x_1+t_1)+(2x_2+t_2) = 0$, donc $(x,y,z,t) \in F$.
   Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Le système $x+y-z=0,\ 2x+t=0$ donne $z=x+y$ et $t=-2x$. En paramétrant par x et y :
   $$(x,y,z,t) = x(1,0,1,-2)+y(0,1,1,0).$$
   Les vecteurs $u_1=(1,0,1,-2)$ et $u_2=(0,1,1,0)$ forment une famille libre (non proportionnels) et génératrice de F. C'est donc une base de F et $\dim F = 2$.

Correction de l'exercice 2.2 Énoncé p. 1

1. On vérifie les trois points de la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
   (a) $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: c'est immédiat.
   (b) $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$.
   (c) Soient $M(a_1,b_1), M(a_2,b_2) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$\lambda M(a_1,b_1)+M(a_2,b_2) = M(\lambda a_1+a_2,\ \lambda b_1+b_2) \in E.$$
   Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On a $M(a,b) = aM(1,0)+bM(0,1)$ avec :
   $$M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Ces deux matrices ne sont pas proportionnelles, donc $(M(1,0),M(0,1))$ est une base de E et $\dim E = 2$.

Correction de l'exercice 2.3 **Énoncé p. 1**

1. On vérifie les trois points de la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
   (a) $F \subset \mathbb{R}_3[X]$: c'est immédiat.
   (b) $0 \in F$: le polynôme nul vérifie $P(1) = 0$.
   (c) Soient $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$, donc $\lambda P + Q \in F$.

   Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in F$. La condition $P(1) = 0$ donne $a + b + c + d = 0$, soit $a = -b - c - d$. Donc :

$$P = b(X - 1) + c(X^2 - 1) + d(X^3 - 1).$$

   La famille $(X - 1,\ X^2 - 1,\ X^3 - 1)$ est libre (degrés échelonnés) et engendre F : c'est une base de F et $\dim F = 3$.
3. On a $\dim G = 2$ et $\dim F = 3$, donc $\dim F + \dim G = 5 > 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. Deux sous-espaces supplémentaires ayant des dimensions de somme $\dim \mathbb{R}_3[X]$, les sous-espaces F et G ne le sont pas.

   On peut aussi le voir directement : le polynôme $X^2 - 1$ appartient à F car $(X^2 - 1)(1) = 0$, et à G car $X^2 - 1 = -1 + X^2$. Donc $F \cap G \neq \{0\}$: la somme $F + G$ n'est même pas directe.

Correction de l'exercice 2.4 **Énoncé p. 1**

Il s'agit de montrer que $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathrm{Vect}(u, v)$, et pour cela on procède par double inclusion. Rappelons (proposition du cours) que $\mathrm{Vect}(u, v)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant u et v : il suffit donc de montrer que u et v appartiennent à $\mathrm{Vect}(x, y)$ pour obtenir $\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(x, y)$.
Première inclusion. Cherchons $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = ax + by$. Comme $ax + by = (a + b,\ a,\ b)$, cela s'écrit :

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a = 3, \\ b = -2. \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent $a = 3$ et $b = -2$, valeurs qui vérifient bien la première puisque $3 - 2 = 1$. Donc $u = 3x - 2y$. De même, $v = 4x - 3y$: on a bien $4 - 3 = 1$. Ainsi $u, v \in \mathrm{Vect}(x, y)$, d'où :

$$\mathrm{Vect}(u, v) \subset \mathrm{Vect}(x, y).$$

Seconde inclusion. Inversons les relations précédentes. Le système $u = 3x - 2y$, $v = 4x - 3y$ donne, en calculant $3u - 2v$ et $4u - 3v$:

$$3u - 2v = (9 - 8)x + (-6 + 6)y = x, \qquad 4u - 3v = (12 - 12)x + (-8 + 9)y = y.$$

On vérifie d'ailleurs directement : $3(1, 3, -2) - 2(1, 4, -3) = (1, 1, 0) = x$ et $4(1, 3, -2) - 3(1, 4, -3) = (1, 0, 1) = y$. Donc $x, y \in \mathrm{Vect}(u, v)$, d'où $\mathrm{Vect}(x, y) \subset \mathrm{Vect}(u, v)$.
Les deux inclusions donnent $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathrm{Vect}(u, v)$.

Correction de l'exercice 2.5 **Énoncé p. 1**

Dans chaque cas, l'ensemble considéré est une partie d'un espace vectoriel de référence : on applique donc la caractérisation du cours des sous-espaces vectoriels. En particulier, le point 2 de cette caractérisation fournit un réflexe très efficace : **si le vecteur nul n'appartient pas à l'ensemble, ce n'est pas un espace vectoriel**, et c'est terminé.

1. **Oui.** On vérifie les trois points.
   (a) $F \subset \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$: immédiat.
   (b) La fonction nulle vérifie $0 = 0$, donc appartient à F.
   (c) Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(1) + g(1) = (\lambda f + g)(1),$$
   donc $\lambda f + g \in F$.
   Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$.
2. **Non.** Comme G est un sous-espace vectoriel de E, on a $0_E \in G$, donc $0_E \notin E \setminus G = F$. Un espace vectoriel contient toujours son vecteur nul : F n'en est pas un.
   C'est un phénomène général : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est *jamais* un sous-espace vectoriel.
3. **Non.** Le vecteur nul $(0,0,0,0)$ vérifie $0 + 0 - 0 = 0 \neq 2$, donc $0_{\mathbb{R}^4} \notin F$.
   Retenons la règle : une équation *homogène* (second membre nul) définit un sous-espace vectoriel, une équation *affine* (second membre non nul) n'en définit pas.
4. **Oui.** On vérifie les trois points.
   (a) $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: immédiat.
   (b) La suite nulle vérifie $0 = 3 \times 0 - 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc appartient à F.
   (c) Soient $(u_n), (v_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $w_n = \lambda u_n + v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$w_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(3u_{n+1} - u_n) + (3v_{n+1} - v_n) = 3w_{n+1} - w_n.$$
   Donc $(w_n) \in F$.
   Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 2.6 **Énoncé p. 2**

Dans les trois premiers cas comme dans le quatrième, la méthode est la même : on montre que l'ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace de référence, puis on *paramètre* ses éléments pour l'écrire comme un Vect, et il ne reste plus qu'à vérifier que la famille obtenue est libre.

1. L'ensemble F est une partie de $\mathbb{R}^3$ contenant $(0,0,0)$, et si $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la combinaison $\lambda(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)$ vérifie :
   $$2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) = \lambda \underbrace{(2x_1 - y_1 + z_1)}_{=0} + \underbrace{(2x_2 - y_2 + z_2)}_{=0} = 0.$$
   Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

L'équation $2x - y + z = 0$ s'écrit $y = 2x + z$; en paramétrant par x et z :

$$(x, y, z) = (x,\ 2x + z,\ z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1).$$

La famille $((1, 2, 0), (0, 1, 1))$ engendre donc F, et elle est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est une base de F, et $\dim F = 2$.

2. L'ensemble E est une partie de $\mathbb{R}_3[X]$ contenant le polynôme nul, et si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda P + Q)(0) = 0$ et $(\lambda P + Q)(1) = 0$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Les conditions $P(0) = P(1) = 0$ signifient que 0 et 1 sont racines de P, c'est-à-dire que $X(X - 1)$ divise P. Comme $\deg P \leq 3$, on peut écrire $P = X(X - 1)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_1[X]$, soit $Q = a + bX$:

$$P = a\,(X^2 - X) + b\,(X^3 - X^2).$$

   La famille $(X^2 - X,\ X^3 - X^2)$ engendre donc E ; elle est libre car échelonnée en degré. C'est une base de E, et $\dim E = 2$.

3. L'ensemble G est l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + 3y' + 2y = 0$: c'est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (la fonction nulle est solution, et une combinaison linéaire de solutions est solution par linéarité de la dérivation).
   L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$, soit $(r + 1)(r + 2) = 0$: ses racines sont -1 et -2. Les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto ae^{-x} + be^{-2x}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En notant $g_1 : x \mapsto e^{-x}$ et $g_2 : x \mapsto e^{-2x}$, la famille (g_1, g_2) engendre G, et elle est libre : si $ae^{-x} + be^{-2x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors en évaluant en $x = 0$ on obtient $a + b = 0$, et en multipliant par e^{2x} il vient $ae^x + b = 0$ pour tout x, ce qui impose $a = 0$ (faire $x \to +\infty$), puis $b = 0$. C'est une base de G, et $\dim G = 2$.

4. Comme au point 1, H est défini par deux équations linéaires homogènes : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   Le système $x - y = 0$, $3x + y + z + 2t = 0$ donne $y = x$ puis $z = -3x - y - 2t = -4x - 2t$. En paramétrant par x et t :

$$(x, y, z, t) = x(1, 1, -4, 0) + t(0, 0, -2, 1).$$

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (regarder la dernière composante) : la famille $((1, 1, -4, 0), (0, 0, -2, 1))$ est une base de H, et $\dim H = 2$.

Correction de l'exercice 2.7 **Énoncé p. 2**

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$. En identifiant les quatre composantes, cela équivaut au système :

$$\begin{cases} a + 2b + c - d = 0, \\ a - b = 0, \\ b + 2c + d = 0, \\ a + c + 3d = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $b = a$. En reportant dans la première : $3a + c - d = 0$, soit $c = d - 3a$. En reportant $b = a$ et $c = d - 3a$ dans la troisième :

$$a + 2(d - 3a) + d = 0 \iff -5a + 3d = 0 \iff d = \frac{5a}{3},$$

et dans la quatrième :

$$a + (d - 3a) + 3d = 0 \iff -2a + 4d = 0 \iff d = \frac{a}{2}.$$

Ces deux valeurs de d doivent coïncider : $\frac{5a}{3} = \frac{a}{2}$, soit $10a = 3a$, donc $7a = 0$ et $a = 0$.
On en déduit successivement $b = 0$, $d = 0$ puis $c = 0$.
La seule combinaison linéaire nulle est donc la combinaison triviale : la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est **libre**, et par conséquent elle n'est pas liée.
Enfin, elle compte 4 vecteurs et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$: étant libre de cardinal $\dim \mathbb{R}^4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$. Elle est donc en particulier **génératrice**.

Correction de l'exercice 2.8 Énoncé p. 2

Commençons par simplifier l'équation. En regroupant :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = \underbrace{(x^2 + 2xy + y^2)}_{=(x+y)^2} + \underbrace{(y^2 + 2yz + z^2)}_{=(y+z)^2} = (x + y)^2 + (y + z)^2.$$

Autrement dit, $E_{\mathbb{K}} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid (x + y)^2 + (y + z)^2 = 0\right\}$. La réponse dépend alors du corps de base.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: oui. Une somme de deux carrés de réels est nulle si et seulement si chacun est nul. Donc :

$$E_{\mathbb{R}} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\right\}.$$

C'est un ensemble défini par deux équations linéaires homogènes : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En posant $y = t$, on obtient $x = -t$ et $z = -t$, d'où $E_{\mathbb{R}} = \text{Vect}\left((-1, 1, -1)\right)$: c'est une droite vectorielle.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: non. Sur $\mathbb{C}$, l'argument précédent s'effondre, car -1 est un carré. On a en effet :

$$(x + y)^2 + (y + z)^2 = \left((x + y) + \mathrm{i}(y + z)\right)\left((x + y) - \mathrm{i}(y + z)\right),$$

et $E_{\mathbb{C}}$ est donc la *réunion* des deux plans d'équations $x + y + \mathrm{i}(y + z) = 0$ et $x + y - \mathrm{i}(y + z) = 0$. Une réunion de deux plans distincts n'est pas un sous-espace vectoriel. Explicitons un contre-exemple. Le vecteur $u = (\mathrm{i}, 0, 1)$ vérifie $x + y = \mathrm{i}$ et $y + z = 1$, donc $(x + y)^2 + (y + z)^2 = -1 + 1 = 0$: on a $u \in E_{\mathbb{C}}$. De même $v = (-\mathrm{i}, 0, 1)$ vérifie $x + y = -\mathrm{i}$ et $y + z = 1$, donc $v \in E_{\mathbb{C}}$. Mais $u + v = (0, 0, 2)$ donne $x + y = 0$ et $y + z = 2$, d'où $(x + y)^2 + (y + z)^2 = 4 \neq 0$: ainsi $u + v \notin E_{\mathbb{C}}$.
L'ensemble $E_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par addition : ce n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Correction de l'exercice 2.9 Énoncé p. 2

Les trois familles sont libres, mais chacune demande une idée différente. Dans les trois cas, on part d'une relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a_i} = 0$, c'est-à-dire d'une égalité de *fonctions* : elle est donc valable en tout point, et toute la difficulté consiste à exploiter cette liberté de choix.

1. **Libre.** Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x - a_i| = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et notons S cette fonction.
   Posons $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ (pour $0 \leq k \leq n$), on connaît le signe de $x - a_i$: il est positif pour $i \leq k$ et négatif pour $i > k$. Donc, sur cet intervalle :
   $$S(x) = \sum_{i \leq k} \lambda_i (x - a_i) + \sum_{i > k} \lambda_i (a_i - x).$$
   C'est une fonction affine, de pente :
   $$m_k = \sum_{i \leq k} \lambda_i - \sum_{i > k} \lambda_i.$$
   Comme S est la fonction nulle, elle est de pente nulle sur chaque intervalle : $m_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Or, en passant de $k-1$ à k, le terme λ_k change de camp :
   $$m_k - m_{k-1} = 2\lambda_k.$$
   Ainsi $\lambda_k = \frac{1}{2}(m_k - m_{k-1}) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$: la famille est libre.
   Géométriquement, $m_k - m_{k-1}$ mesure la « cassure » du graphe au point a_k ; le graphe de la fonction nulle n'ayant aucune cassure, chaque λ_k est nul.

2. **Libre.** Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{a_i x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence descendante que $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$.
   Comme a_n est le plus grand des a_i, divisons la relation par $e^{a_n x}$ (qui ne s'annule pas) :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{(a_i - a_n)x} = 0.$$
   Pour $i < n$ on a $a_i - a_n < 0$, donc $e^{(a_i - a_n)x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. En faisant $x \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus, il reste $\lambda_n = 0$.
   La relation initiale se réduit alors à $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{a_i x} = 0$, et le même argument appliqué à a_{n-1} donne $\lambda_{n-1} = 0$, et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_1 = 0$. La famille est libre.

3. **Libre.** Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x - a_i} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.
   Fixons $j \in \{1, \dots, n\}$ et multiplions la relation par $x - a_j$:
   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \quad \lambda_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i \frac{x - a_j}{x - a_i} = 0.$$
   Faisons maintenant tendre x vers a_j. Pour $i \neq j$, on a $a_i \neq a_j$, donc $x - a_i \to a_j - a_i \neq 0$ tandis que $x - a_j \to 0$: chaque terme de la somme tend vers 0. Il reste $\lambda_j = 0$.
   Ceci valant pour tout j, la famille est libre.

Correction de l'exercice 2.10 **Énoncé p. 2**

Remarquons d'abord que $F = \mathbb{R}_2[X]$, de sorte que $\dim F = 3$, et que $\dim E = n + 1$.
G est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $n - 2$. L'ensemble G est une partie de E contenant le polynôme nul, et si $P, Q \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda P + Q$ annule les trois conditions par linéarité de l'évaluation et de la dérivation : G est bien un sous-espace vectoriel de E.
Décrivons maintenant les éléments de G. Soit $P \in G$. Comme $P(1) = P'(1) = 0$, le réel 1 est racine au moins double de P : il existe un polynôme R tel que

$$P = (X-1)^2 R.$$

Évaluons cette égalité en 2 : comme $P(2) = 0$ et $(2-1)^2 = 1 \neq 0$, il vient $R(2) = 0$. Le réel 2 est donc racine de R, et il existe un polynôme Q tel que $R = (X-2)Q$. Finalement :

$$P = (X-1)^2 (X-2)\, Q.$$

Réciproquement, tout polynôme de cette forme appartient à G : il s'annule en 1 et en 2, et sa dérivée $2(X-1)(X-2)Q + (X-1)^2\big((X-2)Q\big)'$ s'annule en 1.
Enfin, $\deg P = 3 + \deg Q$ lorsque $Q \neq 0$: la condition $\deg P \leq n$ équivaut à $\deg Q \leq n - 3$ (ce qui a bien un sens puisque $n \geq 3$). Ainsi :

$$G = \left\{ (X-1)^2 (X-2)\, Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \right\},$$

et l'application $Q \mapsto (X-1)^2(X-2)Q$ est une bijection linéaire de $\mathbb{R}_{n-3}[X]$ sur G, d'où :

$$\dim G = \dim \mathbb{R}_{n-3}[X] = n - 2.$$

La somme est directe. Soit $P \in F \cap G$ et supposons $P \neq 0$. Comme $P \in F = \mathbb{R}_2[X]$, on a $\deg P \leq 2$. Mais $P \in G$ s'écrit $P = (X-1)^2(X-2)Q$ avec $Q \neq 0$ (sinon $P = 0$), donc $\deg P = 3 + \deg Q \geq 3$: c'est contradictoire. Donc $P = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.
Conclusion. On a :

$$\dim F + \dim G = 3 + (n-2) = n + 1 = \dim E.$$

D'après la caractérisation du cours, on conclut que $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 2.11 **Énoncé p. 2**

Décrivons d'abord ces deux ensembles avec des mots : F est l'ensemble des suites dont les *deux premiers* termes sont nuls, et G l'ensemble des suites dont *tous les autres* termes sont nuls. Le résultat devient alors très naturel.

1. Traitons les deux cas en parallèle, en vérifiant les trois points de la caractérisation du cours.
   (a) $F \subset E$ et $G \subset E$: immédiat.
   (b) La suite nulle appartient à F (ses deux premiers termes sont nuls) et à G (tous ses termes le sont).
   (c) Soient $(u_n), (v_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u_0 + v_0 = 0$ et $\lambda u_1 + v_1 = 0$, donc $\lambda(u_n) + (v_n) \in F$. De même, si $(u_n), (v_n) \in G$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = 0$, donc $\lambda(u_n) + (v_n) \in G$.

   Ainsi F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. L'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'étant pas de dimension finie, on ne peut pas utiliser d'argument de dimension : raisonnons par *analyse-synthèse*.

Analyse. Soit $u = (u_n) \in E$ et supposons $u = v + w$ avec $v = (v_n) \in F$ et $w = (w_n) \in G$. Alors :

- pour $n \in \{0, 1\}$: $v_n = 0$, donc $w_n = u_n$;
- pour $n \geq 2$: $w_n = 0$, donc $v_n = u_n$.

Les suites v et w sont donc entièrement déterminées par u :

$$v = (0,\ 0,\ u_2,\ u_3,\ \ldots) \qquad \text{et} \qquad w = (u_0,\ u_1,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

La décomposition, si elle existe, est unique.

Synthèse. Définissons v et w par les formules ci-dessus. On a bien $v_0 = v_1 = 0$, donc $v \in F$, et $w_{n+2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $w \in G$. Enfin $v_n + w_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u = v + w$.

L'existence et l'unicité de la décomposition donnent $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 2.12 **Énoncé p. 3**

1. Vérifions les trois points de la caractérisation du cours pour F.
   (a) $F \subset E$: immédiat.
   (b) La fonction nulle vérifie $0(0) = 0$, donc appartient à F.
   (c) Soient $f, h \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda f + h)(0) = \lambda f(0) + h(0) = 0$, donc $\lambda f + h \in F$.

   Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E.

   En revanche, A n'en est pas un : la fonction nulle vérifie $0(0) = 0$, donc $0_E \notin A$.
2. Soit $g \in A$, c'est-à-dire $g(0) \neq 0$. En particulier $g \neq 0$, donc $\mathbb{R}g = \mathrm{Vect}(g)$ est bien une droite vectorielle.

   L'espace E n'étant pas de dimension finie, raisonnons par analyse-synthèse.

   Analyse. Soit $f \in E$ et supposons $f = \lambda g + h$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in F$. En évaluant en 0 :

   $$f(0) = \lambda g(0) + \underbrace{h(0)}_{=0} = \lambda g(0),$$

   et comme $g(0) \neq 0$, cela impose :

   $$\lambda = \frac{f(0)}{g(0)} \qquad \text{puis} \qquad h = f - \frac{f(0)}{g(0)}\, g.$$

   La décomposition, si elle existe, est donc unique.

   Synthèse. Posons $\lambda = \frac{f(0)}{g(0)}$ et $h = f - \lambda g$. On a bien $\lambda g \in \mathbb{R}g$, et :

   $$h(0) = f(0) - \frac{f(0)}{g(0)}\, g(0) = f(0) - f(0) = 0,$$

   donc $h \in F$. Enfin $f = \lambda g + h$ par construction.

   L'existence et l'unicité de la décomposition donnent $E = \mathbb{R}g \oplus F$: la droite $\mathbb{R}g$ est un supplémentaire de F dans E.

Commentaire. Le résultat est valable pour *n'importe quel* $g \in A$: un sous-espace vectoriel admet en général une infinité de supplémentaires. Il n'y a donc jamais lieu de parler de « *le* supplémentaire » de F, mais toujours de « *un* supplémentaire ».

Correction de l'exercice 2.13 **Énoncé p. 3**

Introduisons deux familles de fonctions qui vont servir de « témoins » dans les raisonnements par contraposée. Pour $a \in A$, notons δ_a la fonction qui vaut 1 en a et 0 ailleurs ; notons également $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1 sur A.

1. Vérifions les trois points de la caractérisation du cours.
   (a) $N_X \subset E$: immédiat.
   (b) La fonction nulle s'annule partout, donc en particulier sur X : $0_E \in N_X$.
   (c) Soient $f, g \in N_X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in X$:

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda \times 0 + 0 = 0,$$

   donc $\lambda f + g \in N_X$.

   Ainsi N_X est un sous-espace vectoriel de E.

   Notons au passage une remarque utile pour la suite : pour toutes parties X, Y de A, une fonction s'annule sur X et sur Y si et seulement si elle s'annule sur $X \cup Y$, c'est-à-dire :

$$N_X \cap N_Y = N_{X \cup Y}.$$

2. (a) *Sens* $\Leftarrow$. Supposons $X \cap Y = \varnothing$ et soit $f \in E$. Définissons g et h par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X, \\ f(x) & \text{sinon,} \end{cases} \qquad h = f - g.$$

   Par construction $g \in N_X$. Montrons que $h \in N_Y$: soit $y \in Y$. Comme $X \cap Y = \varnothing$, on a $y \notin X$, donc $g(y) = f(y)$ et $h(y) = f(y) - f(y) = 0$. Ainsi $h \in N_Y$, et $f = g + h \in N_X + N_Y$.

   Comme $N_X + N_Y \subset E$ toujours, on conclut $N_X + N_Y = E$.

   Sens $\Rightarrow$. Raisonnons par contraposée : supposons $X \cap Y \neq \varnothing$ et soit $a \in X \cap Y$. Toute fonction de N_X s'annule en a (car $a \in X$), et toute fonction de N_Y aussi (car $a \in Y$). Donc toute somme $g + h$ avec $g \in N_X$ et $h \in N_Y$ s'annule en a. Or $\mathbb{1} \in E$ vérifie $\mathbb{1}(a) = 1 \neq 0$: ainsi $\mathbb{1} \notin N_X + N_Y$ et $N_X + N_Y \neq E$.

   (b) D'après la remarque du point 1, on a $N_X \cap N_Y = N_{X \cup Y}$. Il suffit donc de montrer que, pour toute partie Z de A :

$$N_Z = \{0\} \iff Z = A.$$

   Si $Z = A$, une fonction de N_A s'annule en tout point de A : c'est la fonction nulle, donc $N_A = \{0\}$.

   Réciproquement, si $Z \neq A$, choisissons $a \in A \setminus Z$. La fonction δ_a s'annule en tout point de Z (puisque $a \notin Z$), donc $\delta_a \in N_Z$; et $\delta_a \neq 0$ puisque $\delta_a(a) = 1$. Donc $N_Z \neq \{0\}$.

   En appliquant ceci à $Z = X \cup Y$, on obtient $N_X \cap N_Y = \{0\} \iff X \cup Y = A$.

   (c) Par définition, $N_X \oplus N_Y = E$ signifie que $N_X \cap N_Y = \{0\}$ *et* $N_X + N_Y = E$. D'après les points (a) et (b), cela équivaut à :

$$X \cup Y = A \quad \text{et} \quad X \cap Y = \varnothing,$$

   c'est-à-dire exactement à $Y = A \setminus X$.

Correction de l'exercice 2.14 **Énoncé p. 3**

Sens $2 \Rightarrow 1$. Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$, qui est un sous-espace vectoriel de E par hypothèse. De même, si $B \subset A$, alors $A \cup B = A$, qui en est un également.
Sens $1 \Rightarrow 2$. Supposons que $A \cup B$ soit un sous-espace vectoriel de E. Il s'agit de montrer une disjonction : supposons donc que $A \not\subset B$, et montrons qu'alors $B \subset A$. Comme $A \not\subset B$, il existe $a \in A$ tel que $a \notin B$. Fixons un tel a et soit $b \in B$ quelconque. Les vecteurs a et b appartiennent tous deux à $A \cup B$, qui est stable par somme : donc $a + b \in A \cup B$. Deux cas se présentent.

- *Si* $a + b \in B$: alors $b - (a + b) = -a$ appartient à B, car B est un sous-espace vectoriel et $b, a + b \in B$. Donc $a = -(-a) \in B$, ce qui contredit $a \notin B$. Ce cas est impossible.
- *Si* $a + b \in A$: alors $(a + b) - a = b$ appartient à A, car A est un sous-espace vectoriel et $a, a + b \in A$. Donc $b \in A$.

Seul le second cas est possible, et il donne $b \in A$. Ceci valant pour tout $b \in B$, on conclut $B \subset A$.
Commentaire. Cet exercice explique pourquoi on ne définit jamais de « réunion » de sous-espaces vectoriels : elle n'en est presque jamais un. C'est précisément pour disposer d'un substitut que l'on introduit la *somme* $A + B$, qui est, elle, toujours un sous-espace vectoriel — et c'est même le plus petit contenant $A \cup B$.

Correction de l'exercice 2.15 **Énoncé p. 3**

F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Pour G, c'est immédiat : un Vect est toujours un sous-espace vectoriel (proposition du cours), et e_0, e_1, e_2 sont bien de classe C^1 sur $[0, 1]$. Pour F, on vérifie les trois points de la caractérisation du cours : $F \subset E$ par définition, la fonction nulle vérifie les trois conditions, et si $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de l'intégrale, de l'évaluation et de la dérivation :

$$\int_0^1 (\lambda f+g) = \lambda \int_0^1 f + \int_0^1 g = 0, \quad (\lambda f+g)(0) = 0, \quad (\lambda f+g)'(1) = \lambda f'(1)+g'(1) = 0.$$

Donc $\lambda f + g \in F$.
L'espace E n'est pas de dimension finie : raisonnons par analyse-synthèse. Un élément de G s'écrit $g = ae_0 + be_1 + ce_2$, c'est-à-dire $g : x \mapsto a + bx + cx^2$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$; on notera que :

$$g(0) = a, \qquad g'(x) = b + 2cx \text{ donc } g'(1) = b + 2c, \qquad \int_0^1 g = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}.$$

Analyse. Soit $f \in E$. Posons $\alpha = f(0)$, $\beta = f'(1)$ et $I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Supposons $f = h + g$ avec $h \in F$ et $g = ae_0 + be_1 + ce_2 \in G$. Alors $h = f - g$ doit vérifier les trois conditions définissant F :

$$\begin{cases} (f-g)(0) = 0, \\ (f-g)'(1) = 0, \\ \int_0^1 (f-g) = 0, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} a = \alpha, \\ b + 2c = \beta, \\ a + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} = I. \end{cases}$$

Résolvons ce système. La première équation donne $a = \alpha$. La deuxième donne $b = \beta - 2c$; en reportant dans la troisième :

$$\alpha + \frac{\beta - 2c}{2} + \frac{c}{3} = I \iff \frac{\beta}{2} - c + \frac{c}{3} = I - \alpha \iff -\frac{2c}{3} = I - \alpha - \frac{\beta}{2},$$

d'où :

$$c = \frac{3}{2}(\alpha - I) + \frac{3\beta}{4}, \qquad b = \beta - 2c = 3(I - \alpha) - \frac{\beta}{2}.$$

Le système admet donc une *unique* solution (a, b, c) : la décomposition, si elle existe, est unique.
Synthèse. Réciproquement, posons a, b, c égaux aux valeurs ci-dessus, $g = ae_0 + be_1 + ce_2 \in G$ et $h = f - g$. Comme (a, b, c) est solution du système, h vérifie $h(0) = 0$, $h'(1) = 0$ et $\int_0^1 h = 0$: donc $h \in F$. Et $f = h + g$ par construction.
Tout $f \in E$ se décompose donc de manière unique en somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$E = F \oplus G.$$

Vérification. On peut contrôler les formules sur un exemple : prenons $f = e_1$, c'est-à-dire $f(x) = x$. Alors $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $I = \frac{1}{2}$, ce qui donne $a = 0$, $c = \frac{3}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = 0$ et $b = 3 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$. On retrouve bien $g = e_1 = f$ et $h = 0$, comme il se doit puisque $f \in G$.

Correction de l'exercice 2.16 **Énoncé p. 3**

Le sous-espace F. Il est défini par deux équations linéaires homogènes : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Le système $z = 2x$, $x + y + z + t = 0$ donne $z = 2x$ puis $t = -x - y - z = -3x - y$. En paramétrant par x et y :

$$(x, y, z, t) = x(1, 0, 2, -3) + y(0, 1, 0, -1).$$

Les vecteurs $u_1 = (1, 0, 2, -3)$ et $u_2 = (0, 1, 0, -1)$ ne sont pas colinéaires : (u_1, u_2) est une base de F et $\dim F = 2$.
Le sous-espace G. Les vecteurs $g_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $g_2 = (1, 3, 1, -1)$ ne sont pas colinéaires : (g_1, g_2) est une base de G et $\dim G = 2$.
L'intersection. Un élément de G s'écrit $ag_1 + bg_2 = (a + b,\ a + 3b,\ a + b,\ a - b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Écrivons qu'il appartient à F :

- la première équation donne $(a + b) + (a + 3b) + (a + b) + (a - b) = 4a + 4b = 0$, soit $b = -a$;
- la seconde donne $a + b = 2(a + b)$, soit $a + b = 0$: c'est la même condition.

Les éléments de $F \cap G$ sont donc les $a(g_1 - g_2) = a(0, -2, 0, 2)$: ainsi $F \cap G = \text{Vect}((0, 1, 0, -1))$ est de dimension 1, de base $((0, 1, 0, -1))$. On remarque que ce vecteur n'est autre que u_2.
La somme. La formule de Grassmann donne :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Exhibons une base. La famille (u_1, u_2, g_1) est formée de vecteurs de $F + G$; montrons qu'elle est libre. Soit $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma g_1 = 0$. Alors $\gamma g_1 = -(\alpha u_1 + \beta u_2) \in F$; or $g_1 \notin F$ (la somme de ses coordonnées vaut $4 \neq 0$), donc $\gamma = 0$, puis $\alpha = \beta = 0$ puisque (u_1, u_2) est libre. Libre et de cardinal $3 = \dim(F + G)$, la famille (u_1, u_2, g_1) est une base de $F + G$.

Correction de l'exercice 2.17 **Énoncé p. 3**

Développons d'abord les trois derniers polynômes :

$$P_2 = X^3 - X, \qquad P_3 = X^3 + X^2, \qquad P_4 = (X^3 - X)(X + 1) = X^4 + X^3 - X^2 - X.$$

Tous sont de degré au plus 4 : la famille est bien formée de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$. Elle compte 5 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$: il suffit donc de montrer qu'elle est libre.
Soit $(a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que $a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 = 0$. En identifiant les coefficients de chaque monôme :

$$\begin{cases} X^4 : & a_4 = 0, \\ X^3 : & a_2 + a_3 + a_4 = 0, \\ X^2 : & a_3 - a_4 = 0, \\ X^1 : & a_1 - a_2 - a_4 = 0, \\ X^0 : & a_0 = 0. \end{cases}$$

La première ligne donne $a_4 = 0$; la troisième donne alors $a_3 = 0$, puis la deuxième $a_2 = 0$, la quatrième $a_1 = 0$, et enfin $a_0 = 0$. La famille est libre.
Libre et de cardinal $5 = \dim \mathbb{R}_4[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
Commentaire. La famille n'est pas échelonnée en degré (P_2 et P_3 sont tous deux de degré 3) : le critère des degrés échelonnés ne s'applique pas, et il faut réellement faire le calcul.

Correction de l'exercice 2.18 **Énoncé p. 3**

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin^k(x) = 0.$$

L'idée est de faire apparaître un polynôme. Posons $P = \sum_{k=1}^n \lambda_k T^k \in \mathbb{R}_n[T]$: la relation ci-dessus s'écrit $P(\sin(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Or sin prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$: pour tout $t \in [-1, 1]$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(x) = t$ (par exemple $x = \arcsin(t)$). Donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$: le polynôme P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ses coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous nuls : la famille est libre.
Commentaire. La substitution $t = \sin(x)$ ramène la liberté de la famille $(\sin^k)_k$ à celle des monômes $(T^k)_k$. Le même argument montre que $(\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ est libre pour n'importe quelle fonction φ prenant une infinité de valeurs.

Correction de l'exercice 2.19 **Énoncé p. 4**

Commençons par expliciter les six fonctions : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2, \quad (f \circ f)(x) = x + 2, \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1,$$
$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \qquad (g \circ g)(x) = x^4.$$

Ce sont toutes des fonctions polynomiales. Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, p_k la fonction $x \mapsto x^k$, et posons $V = \mathrm{Vect}(p_0, p_1, p_2, p_4)$. Les six fonctions de $\mathcal{A}$ appartiennent à V :

$$f = p_0 + p_1, \quad g = p_2, \quad f \circ f = 2p_0 + p_1, \quad f \circ g = p_0 + p_2, \quad g \circ f = p_0 + 2p_1 + p_2, \quad g \circ g = p_4.$$

Comme V est un sous-espace vectoriel contenant la famille $\mathcal{A}$, la minimalité du Vect (proposition du cours) donne $\mathrm{Vect}(\mathcal{A}) \subset V$.
Réciproquement, chacun des quatre générateurs de V est combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{A}$:

$$p_0 = f \circ f - f, \qquad p_1 = f - p_0 = 2f - f \circ f, \qquad p_2 = g, \qquad p_4 = g \circ g.$$

Donc $V \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{A})$, et finalement $\mathrm{Vect}(\mathcal{A}) = V$.
Il reste à calculer $\dim V$, c'est-à-dire à vérifier que (p_0, p_1, p_2, p_4) est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ap_0 + bp_1 + cp_2 + dp_4 = 0$: la fonction polynomiale $x \mapsto a + bx + cx^2 + dx^4$ est nulle sur $\mathbb{R}$, donc le polynôme $a + bX + cX^2 + dX^4$ admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul et $a = b = c = d = 0$.
Ainsi (p_0, p_1, p_2, p_4) est une base de V et le rang de la famille $\mathcal{A}$ vaut 4.
Commentaire. La famille compte 6 vecteurs pour un rang de 4 : elle est liée, et on peut expliciter deux relations indépendantes :

$$f \circ g = g + f \circ f - f \qquad \text{et} \qquad g \circ f = g + 3f - f \circ f,$$

que l'on vérifie directement : $x^2 + 1 = x^2 + (x + 2) - (x + 1)$ et $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3(x + 1) - (x + 2)$.

Correction de l'exercice 2.20

Énoncé p. 4

Chaque P_i est de degré n, donc appartient à $\mathbb{K}_n[X]$. La famille compte $n + 1$ vecteurs et $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$: il suffit de montrer qu'elle est libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Montrons par récurrence finie que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Initialisation. Évaluons la relation en a : pour $i \geq 1$, le facteur $(X - a)^i$ s'annule en a, donc $P_i(a) = 0$; tandis que $P_0(a) = (a - b)^n$. Il reste $\lambda_0 (a - b)^n = 0$, et $a \neq b$ donne $\lambda_0 = 0$.
Hérédité. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et supposons $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0$. La relation se réduit à :

$$\sum_{i=k}^{n} \lambda_i (X - a)^i (X - b)^{n-i} = 0 \qquad \text{soit} \qquad (X - a)^k \sum_{i=k}^{n} \lambda_i (X - a)^{i-k} (X - b)^{n-i} = 0.$$

Un produit de polynômes est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est ; comme $(X - a)^k \neq 0$, on obtient :

$$\sum_{i=k}^{n} \lambda_i (X - a)^{i-k} (X - b)^{n-i} = 0.$$

Évaluons en a : seul le terme $i = k$ survit, et il vaut $\lambda_k (a - b)^{n-k}$. Donc $\lambda_k = 0$.
Par récurrence, tous les λ_i sont nuls : la famille est libre. Libre et de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction de l'exercice 2.21

Énoncé p. 4

Remarquons d'abord que chaque L_i est bien défini : les a_j étant deux à deux distincts, le dénominateur est un produit de scalaires non nuls. Le numérateur est un produit de n facteurs de degré 1, donc $\deg L_i = n$ et $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$.
La propriété clé. Pour tous $i, k \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

En effet, si $k \neq i$, le facteur $(X - a_k)$ figure au numérateur, qui s'annule donc en a_k ; et en a_i, le numérateur vaut exactement $\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$, c'est-à-dire le dénominateur.

Liberté. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0$. En évaluant en a_k :

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = \lambda_k,$$

et ceci pour tout k : la famille est libre.
Libre et de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction de l'exercice 2.22 **Énoncé p. 4**

Écartons d'abord un cas dégénéré : si $A = \{0_E\}$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \{0_E\}$, dont la base est la famille vide — qui est bien (vide de) vecteurs de A. On suppose désormais que A contient un vecteur non nul.
Une famille libre maximale. Considérons les familles libres formées de vecteurs de A. Il en existe : une famille (a) réduite à un vecteur non nul de A est libre. Par ailleurs, une telle famille est une famille libre de $\mathrm{Vect}(A)$, qui est de dimension finie (c'est un sous-espace vectoriel de E) : son cardinal est majoré par $\dim \mathrm{Vect}(A)$.
L'ensemble des cardinaux des familles libres de vecteurs de A est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$: elle admet un plus grand élément m. Choisissons une famille libre $(a_1, \dots, a_m)$ de vecteurs de A de cardinal maximal m.
Elle engendre $\mathrm{Vect}(A)$. Soit $a \in A$. La famille $(a_1, \dots, a_m, a)$ est formée de vecteurs de A et compte $m+1 > m$ vecteurs : par maximalité de m, elle est liée. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \mu a = 0_E.$$

Si $\mu = 0$, cette relation contredirait la liberté de $(a_1, \dots, a_m)$: donc $\mu \neq 0$ et :

$$a = -\frac{1}{\mu}(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m) \in \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_m).$$

Ainsi $A \subset \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_m)$. Par minimalité du Vect (proposition du cours) :

$$\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_m) \subset \mathrm{Vect}(A),$$

la seconde inclusion venant de $a_1, \dots, a_m \in A$. D'où l'égalité : la famille $(a_1, \dots, a_m)$, libre et génératrice de $\mathrm{Vect}(A)$, est une base de $\mathrm{Vect}(A)$ formée de vecteurs de A.

Correction de l'exercice 2.23 **Énoncé p. 4**

X n'est pas un espace vectoriel. Comme $\dim H = n - 1 \geq 1$, l'hyperplan H contient un vecteur $h \neq 0_E$; et comme $\dim H < \dim E$, on a $H \neq E$: il existe $e \in E \setminus H$.
Considérons les deux vecteurs e et $h - e$. On a $e \in X$ par choix de e. De plus $h - e \notin H$: sinon, $e = h - (h - e)$ serait la différence de deux vecteurs de H, donc appartiendrait à H. Ainsi $h - e \in X$ également. Or :

$$e + (h - e) = h,$$

et $h \in H$ avec $h \neq 0_E$, donc $h \notin X$. L'ensemble X n'est pas stable par addition : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E, ni donc un espace vectoriel (pour les lois induites).
Calcul de $\mathrm{Vect}(X)$. Montrons que $\mathrm{Vect}(X) = E$. L'inclusion $\mathrm{Vect}(X) \subset E$ est claire. Réciproquement, soit $y \in E$.

— Si $y \notin H$, alors $y \in X \subset \mathrm{Vect}(X)$.

— Si $y \in H$, écrivons $y = (y+e) - e$. Le vecteur $y+e$ n'appartient pas à H (sinon $e = (y+e) - y \in H$), donc $y+e \in X$; et $e \in X$. Ainsi y est combinaison linéaire de deux vecteurs de X : $y \in \mathrm{Vect}(X)$.

Donc $E \subset \mathrm{Vect}(X)$, et finalement $\mathrm{Vect}(X) = E$.

Correction de l'exercice 2.24 **Énoncé p. 4**

Notons $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Une matrice $M = (m_{ij})$ est symétrique si et seulement si $m_{ji} = m_{ij}$ pour tous $i < j$: elle est alors entièrement déterminée par ses coefficients diagonaux et ses coefficients au-dessus de la diagonale, et :

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{ij} \left(E_{i,j} + E_{j,i}\right).$$

La famille $\mathcal{B}_S$ formée des $E_{i,i}$ $(1 \leq i \leq n)$ et des $E_{i,j} + E_{j,i}$ $(i < j)$ engendre donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Elle est libre : dans une combinaison linéaire de ces matrices, le coefficient de $E_{i,i}$ se lit à la position (i,i) et celui de $E_{i,j} + E_{j,i}$ à la position (i,j) ; si la combinaison est nulle, tous sont nuls. C'est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et :

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De même, M est antisymétrique si et seulement si $m_{ji} = -m_{ij}$ pour $i < j$ et $m_{ii} = -m_{ii}$, c'est-à-dire $m_{ii} = 0$, pour tout i. Alors :

$$M = \sum_{1\leq i<j\leq n} m_{ij} \left(E_{i,j} - E_{j,i}\right).$$

La famille des $E_{i,j} - E_{j,i}$ $(i < j)$ engendre $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et est libre pour la même raison que ci-dessus : c'est une base, et :

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. La somme est directe : si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $M^\top = M$ et $M^\top = -M$, d'où $2M = 0$ et $M = 0$. De plus, d'après la question précédente :

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

La caractérisation du cours donne $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (C'est l'argument des rappels de cette section ; la première question en justifie les deux dimensions.)

3. Cherchons B par analyse-synthèse. Si $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A - B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$(A-B)^\top = -(A-B) \iff A^\top - B = -A + B \iff B = \frac{A + A^\top}{2},$$

en utilisant $B^\top = B$. La matrice B est donc imposée : c'est la *partie symétrique* de A. Calculons-la : le coefficient (i,j) de $A + A^\top$ vaut $a_{ij} + a_{ji}$, soit 2 si $i = j$ et 1 si $i \neq j$ (exactement un des deux coefficients a_{ij}, a_{ji} vaut 1). Donc :

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la matrice dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres $\frac{1}{2}$. Réciproquement, cette matrice B est symétrique, et $A - B$ a des coefficients diagonaux nuls, des coefficients $\frac{1}{2}$ au-dessus de la diagonale et $-\frac{1}{2}$ en dessous : elle est bien antisymétrique.

Correction de l'exercice 2.25 **Énoncé p. 4**

L'espace F est engendré par les n^2 différences $V_i - V_j$, mais celles-ci sont très redondantes : elles s'expriment toutes à l'aide des seules différences avec V_1. En effet, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$V_i - V_j = (V_i - V_1) - (V_j - V_1).$$

Chaque générateur de F appartient donc au sous-espace $G = \mathrm{Vect}(V_2 - V_1, \ldots, V_n - V_1)$, et la minimalité du Vect (proposition du cours) donne $F \subset G$.
Or G est engendré par une famille de $n - 1$ vecteurs : sa dimension est au plus $n - 1$. (Rappelons en effet qu'une famille de cardinal strictement inférieur à la dimension n'est jamais génératrice : une famille génératrice de G compte donc au moins $\dim G$ vecteurs.) Donc :

$$\dim F \leq \dim G \leq n - 1.$$

Commentaire. La majoration est optimale : pour $V_i = e_i$ (la base canonique), les différences $e_i - e_j$ ont toutes des coordonnées de somme nulle, donc F est inclus dans l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, que l'on retrouvera dans l'exercice « Une droite et un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ » de la section suivante ; et les $n - 1$ différences $e_i - e_1$ ($i \geq 2$) forment une famille libre, de sorte que $\dim F = n - 1$ exactement.

Correction de l'exercice 2.26 **Énoncé p. 5**

1. Raisonnons par l'absurde et supposons $\sqrt{N} \in \mathbb{Q}$. Comme $\sqrt{N} \geq 0$, on peut écrire $\sqrt{N} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et la fraction *irréductible* : p et q sont premiers entre eux. En élevant au carré :

   $$Nq^2 = p^2.$$

   Comme $q \in \mathbb{N}^*$, deux cas se présentent : $q = 1$ ou $q \geq 2$.
   Si $q = 1$, alors $\sqrt{N} = p$, donc $N = p^2$ est le carré d'un entier : c'est exclu par hypothèse.
   Si $q \geq 2$, soit d un diviseur premier de q : il en existe, puisque tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier. Comme d divise q, il divise $Nq^2 = p^2$. Or $p \neq 0$: sinon $Nq^2 = 0$ donnerait $N = 0 = 0^2$, encore un carré. Décomposons donc p en facteurs premiers :

   $$p = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}, \qquad \text{d'où} \qquad p^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_r^{2\alpha_r}.$$

   Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, les diviseurs premiers de p^2 sont exactement $p_1, \ldots, p_r$, c'est-à-dire ceux de p. Le nombre premier d divise p^2 : il divise donc p. Ainsi d divise à la fois p et q, ce qui contredit leur primalité relative.
   Les deux cas étant impossibles, $\sqrt{N} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot \sqrt{N} = 0$. Si $\mu \neq 0$, alors :

   $$\sqrt{N} = -\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{Q},$$

ce qui contredit la première question. Donc $\mu = 0$, et la relation se réduit à $\lambda = 0$. La famille $(1, \sqrt{N})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 2.27 **Énoncé p. 5**

Notons, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $V_i = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_i)$ et $r_i = \dim V_i$, de sorte que $\delta(i) = i - r_i$. Remarquons d'abord que δ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$: l'espace V_i est engendré par i vecteurs, donc $r_i \leq i$ et $\delta(i) \geq 0$.
La fonction δ est définie sur des entiers consécutifs : il suffit de montrer que $\delta(i+1) \geq \delta(i)$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, c'est-à-dire :

$$(i+1) - r_{i+1} \geq i - r_i \iff r_{i+1} \leq r_i + 1.$$

Autrement dit : *ajouter un vecteur augmente le rang d'au plus* 1.
Démontrons-le. Soit $(b_1, \ldots, b_{r_i})$ une base de V_i. Chacun des vecteurs $x_1, \ldots, x_i$ appartient à $V_i = \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_{r_i}) \subset \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_{r_i}, x_{i+1})$, et x_{i+1} aussi, évidemment. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_{r_i}, x_{i+1})$ contient donc $x_1, \ldots, x_{i+1}$, et par minimalité du Vect (proposition du cours) :

$$V_{i+1} \subset \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_{r_i}, x_{i+1}).$$

Le membre de droite est engendré par $r_i + 1$ vecteurs, donc de dimension au plus $r_i + 1$, et :

$$r_{i+1} \leq r_i + 1.$$

Ainsi $\delta(i+1) \geq \delta(i)$: l'application δ est croissante.
Commentaire. Comme par ailleurs $V_i \subset V_{i+1}$ donne $r_i \leq r_{i+1}$, le rang augmente de 0 ou de 1 à chaque nouveau vecteur : δ progresse par paliers de hauteur 0 ou 1. La quantité $\delta(i)$ compte le « défaut de rang », c'est-à-dire le nombre de vecteurs redondants parmi $x_1, \ldots, x_i$; la croissance de δ exprime qu'une redondance apparue ne disparaît jamais : $\delta(i) = 0$ si et seulement si $(x_1, \ldots, x_i)$ est libre, et une famille qui contient une sous-famille liée est liée.

Correction de l'exercice 2.28 **Énoncé p. 5**

1. Écrivons la formule de Grassmann pour les couples (F, U) et (F, V) :

$$\dim(F+U) = \dim F + \dim U - \dim(F \cap U),$$
$$\dim(F+V) = \dim F + \dim V - \dim(F \cap V).$$

   En soustrayant, $\dim F$ disparaît :

$$\dim(F+U) - \dim(F+V) = \dim U - \dim V - [\dim(F \cap U) - \dim(F \cap V)]. \quad (*)$$

   Or $V \subset U$ entraîne $F \cap V \subset F \cap U$, donc le crochet est positif : la première inégalité en découle.
   L'égalité $(*)$ se relit aussi bien dans l'autre sens :

$$\dim(F \cap U) - \dim(F \cap V) = \dim U - \dim V - [\dim(F+U) - \dim(F+V)],$$

   et $V \subset U$ entraîne cette fois $F+V \subset F+U$, donc le nouveau crochet est positif : c'est la seconde inégalité.
2. *Première inégalité.* Appliquons la seconde inégalité de la question 1 au triplet $(F', U', V') = (H,\ G,\ F \cap G)$ — on a bien $F \cap G \subset G$:

$$\dim(H \cap G) - \dim(H \cap F \cap G) \leq \dim G - \dim(F \cap G),$$

soit, en réordonnant :

$$\dim(F \cap G) + \dim(G \cap H) \leq \dim G + \dim(F \cap G \cap H).$$

Enfin $F \cap G \cap H \subset F \cap H$ donne $\dim(F \cap G \cap H) \leq \dim(F \cap H)$, d'où :

$$\dim(F \cap G) + \dim(G \cap H) \leq \dim G + \dim(F \cap H).$$

Seconde inégalité. La formule de Grassmann pour G et H s'écrit :

$$\dim G = \dim(G + H) - \dim H + \dim(G \cap H).$$

En reportant dans l'inégalité que l'on vient d'obtenir :

$$\dim(F \cap G) + \dim(G \cap H) \leq \dim(G + H) - \dim H + \dim(G \cap H) + \dim(F \cap H),$$

et après simplification par $\dim(G \cap H)$:

$$\dim(F \cap G) + \dim H \leq \dim(G + H) + \dim(F \cap H).$$

Correction de l'exercice 2.29 **Énoncé p. 5**

Les dimensions. Une sous-famille d'une famille libre est libre : les familles $(e_i, \dots, e_n)$, $(f_j, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_{i+j-1})$ sont libres, et chacune engendre le sous-espace qu'elle définit. Ce sont donc des bases de E, F et G respectivement, et :

$$\dim E = n - i + 1, \qquad \dim F = n - j + 1, \qquad \dim G = i + j - 1.$$

Un lemme de Grassmann. Pour deux sous-espaces vectoriels A et B de $\mathbb{R}^n$, on a $A + B \subset \mathbb{R}^n$, donc $\dim(A + B) \leq n$, et la formule de Grassmann donne :

$$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B) \geq \dim A + \dim B - n.$$

Application. D'abord :

$$\dim(E \cap F) \geq (n - i + 1) + (n - j + 1) - n = n - i - j + 2.$$

Puis, en appliquant le lemme aux sous-espaces $E \cap F$ et G :

$$\dim(E \cap F \cap G) \geq \dim(E \cap F) + \dim G - n \geq (n - i - j + 2) + (i + j - 1) - n = 1.$$

Ainsi $\dim(E \cap F \cap G) \geq 1$: cette intersection n'est pas réduite à $\{0\}$, elle contient un vecteur non nul.

Correction de l'exercice 2.30 **Énoncé p. 5**

Suivons l'indication et démontrons par récurrence sur $d \in \mathbb{N}$ la propriété suivante : « $\mathcal{P}(d)$: pour tout espace vectoriel E de dimension finie et tous sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $\dim F = \dim G = \dim E - d$, il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$. »
Initialisation ($d = 0$). Alors $\dim F = \dim E$, et un sous-espace vectoriel de même dimension que E est égal à E : $F = G = E$. Le choix $H = \{0_E\}$ convient : $E \oplus \{0_E\} = E$.
Hérédité. Soit $d \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(d)$ est vraie. Soient F, G avec $\dim F = \dim G = \dim E - (d + 1) < \dim E$. En particulier $F \neq E$ et $G \neq E$.

Étape 1 : trouver $x \notin F \cup G$. Comme $F \neq E$, il existe $u \notin F$; comme $G \neq E$, il existe $v \notin G$.

- Si $u \notin G$, alors $x = u$ convient.
- Si $v \notin F$, alors $x = v$ convient.
- Sinon, $u \in G$ et $v \in F$. Posons $x = u + v$. Si $x \in F$, alors $u = x - v \in F$ (différence de deux vecteurs de F), ce qui est exclu ; si $x \in G$, alors $v = x - u \in G$, exclu de même. Donc $x \notin F \cup G$.

Étape 2 : agrandir F et G. Posons $F' = F + \mathrm{Vect}(x)$ et $G' = G + \mathrm{Vect}(x)$. La somme $F + \mathrm{Vect}(x)$ est directe : si $y \in F \cap \mathrm{Vect}(x)$, alors $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, et $\lambda \neq 0$ donnerait $x = \frac{1}{\lambda} y \in F$, exclu ; donc $\lambda = 0$ et $y = 0_E$. Ainsi $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et, comme $x \neq 0_E$:

$$\dim F' = \dim F + 1 = \dim E - d,$$

et de même $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(x)$ avec $\dim G' = \dim E - d$.
Étape 3 : appliquer l'hypothèse de récurrence. Par $\mathcal{P}(d)$ appliquée à F' et G', il existe un sous-espace vectoriel H' de E tel que :

$$F' \oplus H' = G' \oplus H' = E.$$

Posons $H = \mathrm{Vect}(x) + H'$, et vérifions que H est un supplémentaire commun de F et de G. Par symétrie des rôles, il suffit de le faire pour F.
La somme $F + H$ vaut E :

$$F + H = F + \mathrm{Vect}(x) + H' = F' + H' = E.$$

La somme est directe. Soit $y \in F \cap H$. Écrivons $y = \lambda x + h'$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h' \in H'$. Comme $y \in F \subset F'$ et $\lambda x \in F'$, on a $h' = y - \lambda x \in F' \cap H' = \{0_E\}$, donc $h' = 0_E$ et $y = \lambda x$. Mais $y \in F$ et $x \notin F$: comme à l'étape 2, cela impose $\lambda = 0$, donc $y = 0_E$. Ainsi $F \cap H = \{0_E\}$.
On a donc $F \oplus H = E$, et de même $G \oplus H = E$: la propriété $\mathcal{P}(d+1)$ est établie.
Conclusion. Par récurrence, $\mathcal{P}(d)$ vaut pour tout $d \in \mathbb{N}$; en appliquant avec $d = \dim E - \dim F$, deux sous-espaces de même dimension possèdent toujours un supplémentaire commun.

Correction de l'exercice 2.31 **Énoncé p. 6**

1. Séparons les indices selon le signe de a_i :

$$I^+ = \{i \in [\![1, n]\!] \mid a_i > 0\} \qquad \text{et} \qquad I^- = \{i \in [\![1, n]\!] \mid a_i < 0\}.$$

Ces deux ensembles sont disjoints. En faisant passer à droite les termes d'indice dans I^-, la relation de départ s'écrit

$$\sum_{i \in I^+} a_i \ln p_i = \sum_{i \in I^-} (-a_i) \ln p_i,$$

les indices n'appartenant ni à I^+ ni à I^- ayant un coefficient nul. Tous les coefficients écrits sont maintenant des entiers *strictement positifs*. En passant à l'exponentielle, et en utilisant $\mathrm{e}^{a \ln p} = p^a$:

$$\prod_{i \in I^+} p_i^{a_i} = \prod_{i \in I^-} p_i^{-a_i} =: N.$$

Ce nombre N est un entier naturel non nul, et l'égalité ci-dessus en fournit deux décompositions en facteurs premiers (avec la convention qu'un produit vide vaut 1).

Soit alors $i_0 \in I^+$. Dans le membre de gauche, l'exposant de p_{i_0} vaut a_{i_0}. Dans le membre de droite, seuls interviennent les p_i pour $i \in I^-$; comme les p_i sont deux à deux distincts et que $i_0 \notin I^-$, le nombre premier p_{i_0} n'y figure pas, et son exposant vaut 0. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers impose donc $a_{i_0} = 0$, ce qui contredit $a_{i_0} > 0$.

Ainsi $I^+ = \varnothing$. Le même raisonnement, en échangeant les rôles des deux membres, donne $I^- = \varnothing$. Tous les a_i sont donc nuls.

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des rationnels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln p_i = 0$. Écrivons ces rationnels sur un dénominateur commun : il existe $b \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\lambda_i = \dfrac{a_i}{b}$ pour tout i. En multipliant la relation par b :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln p_i = 0,$$

et la question précédente donne $a_1 = \cdots = a_n = 0$, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
La famille $(\ln p_1, \dots, \ln p_n)$ est donc libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

3. Supposons $\log_{10} 2 \in \mathbb{Q}$ et écrivons $\dfrac{\ln 2}{\ln 10} = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors $b \ln 2 = a \ln 10$, et comme $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$:

$$(b - a) \ln 2 + (-a) \ln 5 = 0.$$

Les coefficients $b - a$ et $-a$ sont entiers, et 2 et 5 sont deux nombres premiers distincts : la première question donne $b - a = 0$ et $-a = 0$, d'où $a = 0$ puis $b = 0$. Cela contredit $b \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\log_{10} 2$ est irrationnel.

4. Procédons par double inclusion, en utilisant à chaque fois que $\mathrm{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant X (proposition du cours).

Tout nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2, donc $B \subset A$. Comme $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, on a $B \subset \mathrm{Vect}(A)$: ainsi $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel contenant B, d'où $\mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A)$.

Réciproquement, soit $n \geq 2$. Décomposons n en facteurs premiers : il existe des nombres premiers $q_1, \dots, q_r$ deux à deux distincts et des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$. Le logarithme transformant les produits en sommes :

$$\ln n = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \ln q_k.$$

Chaque $\ln q_k$ appartient à B, donc à $\mathrm{Vect}(B)$; et $\mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel, donc stable par combinaison linéaire (les α_k sont des entiers, en particulier des rationnels). Ainsi $\ln n \in \mathrm{Vect}(B)$. Ceci valant pour tout $n \geq 2$, on a $A \subset \mathrm{Vect}(B)$, d'où $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.

Les deux inclusions donnent $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(B)$.

5. Raisonnons par l'absurde et supposons que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ soit de dimension finie ; notons d sa dimension. Comme $\mathbb{R} \neq \{0\}$, on a $d \geq 1$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ étant infini, on peut choisir $d+1$ nombres premiers deux à deux distincts $p_1, \dots, p_{d+1}$. D'après la question 2, la famille $(\ln p_1, \dots, \ln p_{d+1})$ est libre.

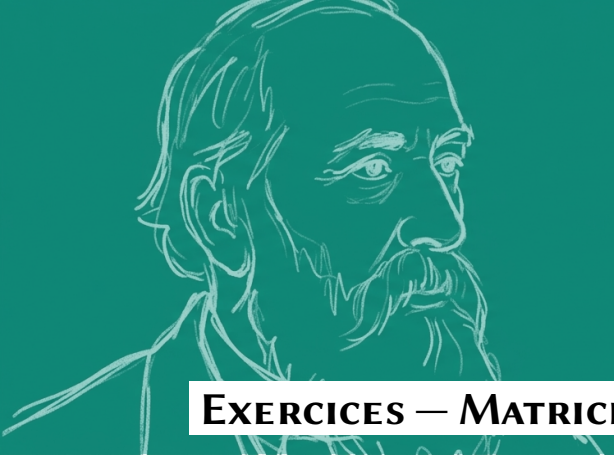
Or, dans un espace vectoriel de dimension d, une famille de plus de d vecteurs n'est jamais libre. On obtient une famille libre de $d+1 > d$ vecteurs : c'est absurde.

Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'est donc pas de dimension finie.

Commentaire. La question 4 est un exemple concret de famille génératrice *redondante* : pour engendrer $\mathrm{Vect}(A)$, les $\ln n$ avec n composé ne servent à rien, puisqu'ils sont combinaisons linéaires des $\ln p$ avec p premier. C'est exactement le mouvement de l'exercice « Une base extraite d'une partie », à ceci près qu'ici la partie est infinie. On peut d'ailleurs montrer que les $\ln p$ forment une *base* de $\mathrm{Vect}(A)$, mais l'énoncer proprement demande d'étendre la notion de base aux familles infinies, ce qui dépasse le programme.

La question 5 dit que $\mathbb{R}$ possède, sur $\mathbb{Q}$, des familles libres de taille arbitrairement grande : c'est donc un espace vectoriel de dimension infinie. Il admet tout de même des bases, nécessairement infinies, appelées *bases de Hamel* ; on démontre qu'il en existe, mais on ne sait en construire aucune.

Enfin, cet exercice illustre une dernière fois que la dimension dépend du corps des scalaires, et pas seulement de l'ensemble : $\mathbb{R}$ est de dimension 1 sur lui-même, $\mathbb{C}$ est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. C'est le même phénomène que celui signalé à la fin de l'exercice « L'irrationalité de $\sqrt{N}$ ».



2

Révisions d'algèbre linéaire

Exercices — Matrices et applications linéaires

Parcours conseillés

Piste verte
- 2.32 Noyau et rang de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$
- 2.67 Noyau et image lus sur une matrice
- 2.34 Déterminants d'ordre 2 et 3
- 2.79 Déterminant littéral d'ordre 3

Piste rouge
- 2.94 Quand le noyau égale l'image
- 2.59 Puissances d'une matrice triangulaire
- 2.73 Matrice de $P(X) \mapsto P(X+1)$
- 2.96 Deux endomorphismes de somme Id_E

Piste bleue
- 2.33 La transposition sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- 2.70 Isomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$
- 2.68 Matrice dans de nouvelles bases
- 2.69 Matrice imposée en dimension 2

Piste noire
- 2.74 Nilpotent en dimension 3, commutant
- 2.43 Somme de deux projecteurs
- 2.97 Rang d'une composée
- 2.91 Perturbation de rang 1 de xI_n

Exercice 2.32 ○ Correction p. 42

Noyau, rang, injectivité. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y-z,\ 3x-y+z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{rg}\, f$.
3. f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 2.33 ● Correction p. 42

La transposition. Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\phi(M) = M^\top$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\phi$ et $\mathrm{Im}\,\phi$.
3. Montrer que $\phi^2 = \mathrm{Id}$. En déduire que ϕ est un automorphisme.

Exercice 2.34 ○ Correction p. 42

Déterminants d'ordre 2 et 3. Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 2.35 ●● Correction p. 43

Déterminant d'une matrice circulante. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ une matrice circulante.

1. Calculer $\det(A)$ en utilisant les opérations élémentaires.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que A soit inversible.

Exercice 2.36 ●● Correction p. 43

Le déterminant de $\min(i,j)$. Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{ij} = \min(i,j), \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Exercice 2.37 ● Correction p. 44

Noyau et image d'une composée. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$;
2. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$;
3. $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$;
4. $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.

On rappelle que $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$ désigne l'*image réciproque* de A par f : cette notation ne suppose pas que f soit bijective.

Exercice 2.38 ● Correction p. 44

Deux identités sur les composées. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $f\left(\operatorname{Ker}(g \circ f)\right) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$;
2. $g^{-1}\left(\operatorname{Im}(g \circ f)\right) = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$.

Exercice 2.39 ●● Correction p. 45

Quand la composée ne fait rien perdre. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$;
2. $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

Exercice 2.40 ●● Correction p. 45

Comparer deux noyaux, comparer deux images. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $f, g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\operatorname{Ker}(g \circ u) \subset \operatorname{Ker}(f \circ u) \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} f$;
2. $\operatorname{Im}(g \circ v) \subset \operatorname{Im}(g \circ u) \iff \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} g$.

Exercice 2.41 ●● Correction p. 46

Une composée qui vaut l'identité. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur de E, et déterminer son noyau et son image.

Exercice 2.42 ●● Correction p. 46

Projecteur et endomorphisme qui commutent. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.
Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u, c'est-à-dire $u(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Ker} p$ et $u(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Im} p$.

Exercice 2.43 ●●● Correction p. 47

Somme de deux projecteurs. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 2.44 ●●● Correction p. 47

Une somme directe qui se transmet à la composée. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f, g deux endomorphismes de E tels que :

$$\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g = E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f = E.$$

Montrer que :

$$\operatorname{Im}(g \circ f) \oplus \operatorname{Ker}(g \circ f) = E.$$

Exercice 2.45 ★ Correction p. 48

Une caractérisation des homothéties. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \operatorname{Id}_E$.

Exercice 2.46 ○ Correction p. 49

Deux systèmes d'ordre 2. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 6x - 3y = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

Exercice 2.47 ○ Correction p. 49

Deux systèmes d'ordre 3. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + z = -1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ 3x - 4y - 3z = 4. \end{cases}$$

Exercice 2.48 ● Correction p. 49

Un système à un paramètre. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre et discuter, suivant a, le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a. \end{cases}$$

Exercice 2.49 ● Correction p. 50

Un système symétrique. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre et discuter, suivant a, le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1. \end{cases}$$

Exercice 2.50 ●● Correction p. 50

Un système à deux paramètres. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre et discuter, suivant (a, b), le système d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ -2x + 3y + z - 4t = 1 \\ -3x + 5y + 4z - 7t = a \\ -x + 2y + 3z - 3t = b. \end{cases}$$

Exercice 2.51 • Correction p. 51

Un système de taille n. Soit $n \geq 2$. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = 1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.52 • Correction p. 51

Un système de taille n à second membre quelconque. Soient $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_1 - x_3 = a_2 \\ \vdots \\ x_1 - x_n = a_{n-1} \\ x_n = a_n. \end{cases}$$

Exercice 2.53 •• Correction p. 51

Un système à paramètre, de taille n. Soient $n \geq 2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Résoudre et discuter, suivant λ, le système d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \\ x_1 + \lambda x_2 + \cdots + x_n = x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + \lambda x_n = x_n. \end{cases}$$

Exercice 2.54 ○ Correction p. 52

Une relation universelle en taille 2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$M^2 - (a+d)M + (ad - bc)I_2 = 0.$$

Exercice 2.55 • Correction p. 52

Deux propriétés en entraînent une troisième. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère les trois propriétés :

1. $A^\top A = I_n$;
2. $A^2 = I_n$;
3. $A^\top = A$.

Montrer que deux quelconques d'entre elles entraînent la troisième.

Exercice 2.56 • Correction p. 52

L'inverse de la matrice $\min(i, j)$. Soit $n \geq 2$ et soit $A = (\min(i, j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 2.57 ●● Correction p. 53

Une identité avec un inverse. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $C = A + B$ et l'on suppose C inversible. Montrer que :

$$AC^{-1}B = BC^{-1}A.$$

Exercice 2.58 ●● Correction p. 54

Une relation qui force la commutation. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = A^2 + A + I_n.$$

Montrer que $AB = BA$.

Exercice 2.59 ●● Correction p. 54

Puissances d'une matrice triangulaire. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}).$$

1. Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que M est inversible, et vérifier que la formule obtenue reste valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.60 ●● Correction p. 55

Matrices à coefficients strictement positifs. On dit ici qu'une matrice à coefficients réels est **positive** lorsque *tous* ses coefficients sont strictement positifs.

1. Montrer que la somme de deux matrices positives de même taille est positive, et que le produit de deux matrices positives de tailles compatibles est positif.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive tels que $A^k X = X$. Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ positive telle que $AY = Y$.

Exercice 2.61 ●● Correction p. 56

Le commutant d'une matrice diagonale. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$. Montrer que le *commutant* de D, c'est-à-dire l'ensemble :

$$C(D) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AD = DA\},$$

est exactement l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2.62 ●● Correction p. 56

Une équation matricielle. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose :

$$AB + A + B = 0.$$

Montrer que B est diagonale.

Exercice 2.63 ●●● Correction p. 56

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le *centre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\mathcal{Z} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}.$$

Exercice 2.64 ● ● ● Correction p. 57

Inverse fourni par une relation polynomiale. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $A^2 + A + I_n$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2.65 ● ● ● Correction p. 57

Une matrice de zéros et de uns. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients valent 0 ou 1. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$AA^\top = qI_n + J.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que $AJ = (q+1)J$.

Exercice 2.66 ★ Correction p. 58

Deux matrices sans relation. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On dit que le couple (A, B) est *sans relation* lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^*$, le produit alterné à k facteurs commençant par une puissance de A :

$$A^{n_1}B^{n_2}A^{n_3}B^{n_4}\cdots \qquad \text{(qui se termine par } B^{n_k} \text{ si } k \text{ est pair, par } A^{n_k} \text{ si } k \text{ est impair)}$$

est différent de I_n.

1. Montrer que si (A, B) est sans relation, alors (B, A) l'est aussi.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^\top$. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^*$. On note $P_0 = I_2$ et, pour $1 \leq m \leq k$, P_m le produit alterné à m facteurs $A^{n_1}B^{n_2}\cdots$, puis :

$$c_m = \begin{cases} (P_m)_{2,1} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ (P_m)_{2,2} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrer que $c_{m+1} = 2n_{m+1}\,c_m + c_{m-1}$ pour $1 \leq m \leq k-1$. En déduire que (A, B) est sans relation.

Exercice 2.67 ○ Correction p. 60

Noyau et image lus sur une matrice. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice A dans les bases canoniques.

1. Déterminer un système d'équations de $\operatorname{Ker} f$, puis une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$. Quel est le rang de f ?

Exercice 2.68 ● Correction p. 60

Un changement de bases au départ et à l'arrivée. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ une base de E, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'application linéaire représentée par A dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

1. Exprimer $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sur f_1, f_2 et f_3.

2. On pose $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$, ainsi que $f'_1 = f_1 + f_2$, $f'_2 = f_1 + f_3$, $f'_3 = f_2 + f_3$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$. Montrer que $\mathcal{E}'$ est une base de E et que $\mathcal{F}'$ est une base de F, puis déterminer la matrice A' de u dans les bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$.

Exercice 2.69 • Correction p. 61

Une matrice imposée en dimension 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.70 • Correction p. 61

Interpolation par des dérivées successives. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}, \\ P & \longmapsto & \left(P(a_0), P'(a_1), \dots, P^{(n)}(a_n)\right). \end{array} \right.$$

Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 2.71 •• Correction p. 62

La multiplication à gauche par une matrice. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \\ M & \longmapsto & AM. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 2.72 •• Correction p. 63

Renverser une matrice triangulaire. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure, et réciproquement.

Exercice 2.73 •• Correction p. 63

La matrice du décalage. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A la matrice carrée réelle d'ordre $n+1$, dont on indexe lignes et colonnes de 0 à n, et dont le terme situé à la ligne i et à la colonne j est le coefficient binomial $\binom{j}{i}$ — avec la convention $\binom{j}{i} = 0$ lorsque $i > j$.

1. Montrer que l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X], \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1), \end{array} \right.$$

   est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et préciser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 2.74 •• Correction p. 64

Une matrice imposée en dimension 3, et son commutant. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le commutant de N dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$C_N = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid AN = NA\}.$$

3. En déduire que :

$$\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}\left(\text{Id}_E, f, f^2\right).$$

Exercice 2.75 • • • Correction p. 65

Une relation qui égalise deux rangs. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(B).$$

Exercice 2.76 • • • Correction p. 66

Un projecteur qui en engendre un autre. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A^2 = A, \qquad BAB = B, \qquad \text{Im}(B) \subset \text{Im}(A).$$

Montrer que $B^2 = B$.

Exercice 2.77 • • • Correction p. 66

Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ construit sur deux matrices. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \\ M & \longmapsto & AM - MB. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Établir :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad f^p(M) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} M B^k.$$

3. En déduire que si A et B sont nilpotentes, alors f est nilpotente.

Exercice 2.78 ○ Correction p. 67

Un déterminant d'ordre 3 à factoriser. Soient a, b, c trois scalaires. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.79 ○ Correction p. 67

Un déterminant symétrique en a, b, c. Soient a, b, c trois scalaires. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.80 • Correction p. 67

Un déterminant de type Vandermonde. Soient a, b, c trois scalaires. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.81 • Correction p. 68

Un déterminant dont les lignes se somment bien. Soient a, b, c trois scalaires. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.82 • Correction p. 69

Un déterminant d'ordre 4 symétrique. Soient a, b, c trois scalaires. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.83 •• Correction p. 69

Rang et déterminant de la transposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note :

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad M \longmapsto M^\top.$$

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
2. Calculer $\mathrm{rg}(f)$ et $\det(f)$.

Exercice 2.84 •• Correction p. 70

Ajouter et retrancher la matrice de 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que :

$$\det(A+U) + \det(A-U) = 2\det(A).$$

Exercice 2.85 •• Correction p. 70

Une diagonale $1, 2, \ldots, n$ *noyée dans des* n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,i} = i$ et $a_{i,j} = n$ pour $i \neq j$.

Exercice 2.86 ●● Correction p. 71

Un déterminant tridiagonal. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un scalaire. Calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.87 ●● Correction p. 71

Le déterminant de $a^{\max(i,j)}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a un scalaire. Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = a^{\max(i,j)}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Exercice 2.88 ●● Correction p. 72

Le déterminant de $ij + i + j$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = ij + i + j, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Exercice 2.89 ●●● Correction p. 72

Une question de parité. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_{i,i} \in 2\mathbb{Z},$$

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad i \neq j \implies a_{i,j} \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

1. Montrer que $n + \det(A) \in 2\mathbb{Z} + 1$.
2. En déduire que si n est pair, alors A est inversible.

Exercice 2.90 ●●● Correction p. 73

Quand l'inverse de la somme est la somme des inverses. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les matrices A, B et $A + B$ soient inversibles et que :

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

Montrer que $\det(A) = \det(B)$.

Exercice 2.91 ●●● Correction p. 74

Une perturbation de rang 1 de xI_n. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, x$ des scalaires. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + x & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 + x & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 + x \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.92 ★ Correction p. 75

Un passage par les complexes. Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\det(B) = \det(C) \qquad \text{et} \qquad \det(A + \mathrm{i}B) = \det(A + \mathrm{i}C).$$

Montrer que $\det(A+B) = \det(A+C)$.

Exercice 2.93 • Correction p. 76

Une droite et un hyperplan de $\mathbb{K}^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Dans $\mathbb{K}^n$, on considère le vecteur $e = (1, \ldots, 1)$ et D la droite vectorielle engendrée par e. Soit aussi :

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Démontrer que $D \oplus H = \mathbb{K}^n$.

Exercice 2.94 •• Correction p. 76

Quand le noyau égale l'image. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff \left(f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f) \right).$$

Exercice 2.95 •• Correction p. 76

Un endomorphisme nilpotent d'ordre trois. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ nilpotent d'ordre 3, c'est-à-dire tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Im} f, \quad \operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Ker} f, \quad \operatorname{rg}(f) = 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(f^2) = 1.$$

Exercice 2.96 •• Correction p. 77

Deux endomorphismes qui se partagent l'identité. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f + g = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq n.$$

1. Établir que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans E et que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$.
2. En déduire que f et g sont des projecteurs.

Exercice 2.97 ••• Correction p. 78

Le rang d'une composée. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}\left(g|_{\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$.
2. En déduire : $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim\left(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)\right)$.
3. Montrer que : $\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(F)$.

Exercice 2.98 ••• Correction p. 78

Un inverse caché. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f^2 - f \circ g + 2f - \mathrm{Id}_E = 0.$$

Montrer que $f \circ g = g \circ f$.



2

Révisions d'algèbre linéaire

★ Pour aller plus loin — Matrices et applications linéaires

Les résultats les plus commodes de cette section — « injective équivaut à surjective », le théorème du rang, l'unicité de l'inverse — reposent tous sur l'hypothèse de dimension finie. Le premier exercice la retire, et regarde ce qu'il en subsiste sur $\mathbb{R}[X]$: presque rien. Les deux suivants font le mouvement inverse ; ils mettent le calcul matriciel au service de questions qui n'en relèvent pas a priori — compter des mots, décrire tous les carrés magiques — et montrent que la dimension d'un sous-espace bien choisi est souvent la réponse la plus rapide. Le dernier construit, avec un déterminant, un test qui décide si deux polynômes ont une racine commune.

Exercice 2.99 ●●● Correction p. 79

Inverse à gauche, inverse à droite.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $v \in \mathcal{L}(E)$ est un *inverse à droite* de u lorsque $u \circ v = \mathrm{Id}_E$, et un *inverse à gauche* de u lorsque $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

A — Ce que la dimension finie garantit

1. On suppose E de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ telles que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est bijective, puis que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$.
2. En déduire qu'en dimension finie un endomorphisme possède au plus un inverse à droite et au plus un inverse à gauche, et que ceux-ci, s'ils existent, sont égaux à u^{-1}.

B — Sur $\mathbb{R}[X]$

On travaille désormais sur $E = \mathbb{R}[X]$, qui n'est pas de dimension finie. On note D l'application $P \mapsto P'$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, $J_a(P)$ l'unique primitive de P qui s'annule en a.

3. Justifier que J_a est bien définie, que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, et que $D \circ J_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.
4. En déduire que D est surjective et non injective, et que J_a est injective et non surjective. Calculer $J_a \circ D$ et reconnaître l'endomorphisme obtenu.
5. Montrer que les J_a, pour $a \in \mathbb{R}$, sont deux à deux distinctes. Combien D possède-t-elle d'inverses à droite ? Et d'inverses à gauche ?

C — Une partie aussi grande que le tout

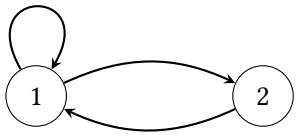
6. Montrer que $X\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel *strict* de $\mathbb{R}[X]$, et que J_0 induit un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ sur $X\mathbb{R}[X]$.
7. Montrer qu'un espace vectoriel de dimension finie n'est jamais isomorphe à l'un de ses sous-espaces stricts.
8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exhiber un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui soit surjectif et dont le noyau soit de dimension k. Commenter.

Exercice 2.100 ●● Correction p. 81

Compter les chemins.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients valent 0 ou 1. On lui associe un *graphe* dont les *sommets* sont les entiers de $[\![1, n]\!]$: on trace une flèche de i vers j lorsque $a_{ij} = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, un *chemin de longueur* k de i à j est une suite de sommets $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ telle que $v_0 = i$, $v_k = j$ et $a_{v_\ell v_{\ell+1}} = 1$ pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous i, j, le coefficient $(A^k)_{ij}$ est le nombre de chemins de longueur k de i à j.
2. *Application.* Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note u_m le nombre de mots de longueur m écrits avec les lettres 0 et 1 et ne comportant jamais deux 1 consécutifs. On considère le graphe à deux sommets suivant, où le sommet 1 représente la lettre 0 et le sommet 2 la lettre 1 :



   Écrire sa matrice A, expliquer pourquoi u_m est la somme des coefficients de A^{m-1}, vérifier que $A^2 = A + I_2$ et en déduire une relation de récurrence sur (u_m). Reconnaître la suite obtenue.
3. On revient au cas général, en supposant A symétrique : les flèches vont alors toujours par paires, et on parle simplement d'arêtes. On dit que le graphe est *connexe* lorsque, pour tous sommets i et j, il existe un chemin de i à j. Montrer que le graphe est connexe si et seulement si tous les coefficients de $(I_n + A)^{n-1}$ sont non nuls.

Exercice 2.101 ●● Correction p. 83

Les carrés magiques.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* lorsque ses n sommes de lignes et ses n sommes de colonnes sont toutes égales à un même réel, noté $s(M)$. On note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices magiques de taille n, et $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que s est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$.
2. On note $\mathcal{M}_n^0 = \operatorname{Ker} s$ et, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ le bloc formé des $n-1$ premières lignes et des $n-1$ premières colonnes de M. Montrer que Φ induit un isomorphisme de $\mathcal{M}_n^0$ sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, et en déduire $\dim \mathcal{M}_n^0 = (n-1)^2$.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^0 \oplus \mathbb{R}U$ et en déduire $\dim \mathcal{M}_n$. Que vaut $\dim \mathcal{M}_3$?
4. On se place désormais en taille 3 et on note C l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3$ dont les deux diagonales ont également pour somme $s(M)$. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$ et que, pour tout $M \in C$, le coefficient central vaut $m_{22} = \dfrac{s(M)}{3}$.
5. En déduire que $\dim C = 3$, en montrant que les éléments de C sont exactement les matrices
$$\begin{pmatrix} c+a & c-a-b & c+b \\ c-a+b & c & c+a-b \\ c-b & c+a+b & c-a \end{pmatrix}, \qquad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$
   À quel triplet correspond le carré $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$?

Exercice 2.102 ★ Correction p. 84

Le résultant.
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, de degrés *exactement* n et m, avec $n, m \geq 1$.

A — La matrice de Sylvester

1. Vérifier que les $n+m$ polynômes

$$\mathcal{F} = \left(Q, XQ, \ldots, X^{n-1}Q, P, XP, \ldots, X^{m-1}P\right)$$

appartiennent à $\mathbb{C}_{n+m-1}[X]$, et que cet espace est de dimension $n+m$. On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n+m-1})$ sa base canonique et on pose

$$\mathrm{Res}(P, Q) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$

2. Écrire la matrice correspondante pour $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ et $Q = b_1X + b_0$.

B — Ce que le résultant détecte

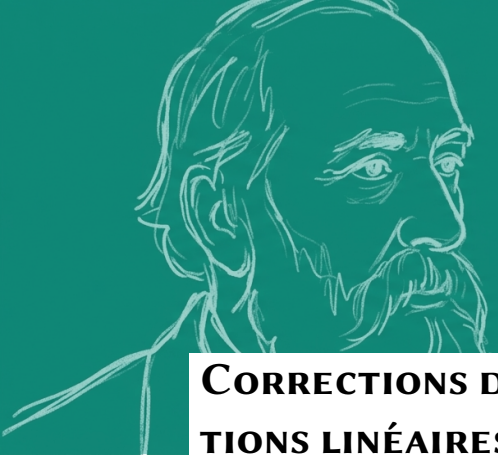
3. Montrer que $\mathcal{F}$ est liée si et seulement s'il existe deux polynômes U et V, non tous deux nuls, tels que

$$\deg U < n, \qquad \deg V < m, \qquad UQ + VP = 0.$$

4. On suppose que P et Q ont une racine commune $\alpha \in \mathbb{C}$. Construire un tel couple (U, V).
5. Réciproquement, on suppose qu'il existe un tel couple (U, V). Montrer d'abord que U et V sont tous deux non nuls, puis, en raisonnant sur les multiplicités des racines de P, que P et Q ont une racine commune.
6. Conclure : $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}$.

C — Le discriminant est un déterminant

7. Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Calculer $\mathrm{Res}(P, P')$ et retrouver le critère de racine double.
8. Soit $P = X^3 + pX + q$. Calculer $\mathrm{Res}(P, P')$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q pour que P admette une racine multiple.



2

Révisions d'algèbre linéaire

Corrections des exercices — Matrices et applications linéaires

Correction de l'exercice 2.32 **Énoncé p. 28**

1. Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ a pour coordonnées $(\lambda x_1 + x_2,\ \lambda y_1 + y_2,\ \lambda z_1 + z_2)$, donc sa première composante par f vaut :

$$(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2).$$

   Le même calcul sur la seconde composante donne :

$$f\left(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right) = \lambda f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2),$$

   donc f est linéaire.

2. On résout $f(x, y, z) = (0, 0) : x + 2y - z = 0$ et $3x - y + z = 0$. En additionnant : $4x + y = 0$, soit $y = -4x$ et $z = x + 2y = -7x$. Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, -4, -7))$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Par le théorème du rang : $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$.

3. $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective. Comme $\operatorname{rg} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, f est surjective.

Correction de l'exercice 2.33 **Énoncé p. 28**

1. Pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\phi(\lambda M + N) = (\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top = \lambda\phi(M) + \phi(N)$. Donc ϕ est linéaire, et c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. $\operatorname{Ker} \phi = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^\top = 0\} = \{0\}$, car $M^\top = 0$ implique $M = 0$.
   Pour l'image, toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit $N = (N^\top)^\top = \phi(N^\top)$, donc $\operatorname{Im} \phi = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Pour toute $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\phi^2(M) = \phi(M^\top) = (M^\top)^\top = M$, donc $\phi^2 = \mathrm{Id}$.
   Cette seule égalité suffit à conclure, sans repasser par le noyau : elle fournit un inverse pour ϕ, à savoir ϕ elle-même. Donc ϕ est bijective, $\phi^{-1} = \phi$, et ϕ est un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire un automorphisme.

Correction de l'exercice 2.34 **Énoncé p. 28**

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 5 = 13.$

2. La deuxième colonne contient un zéro : c'est elle qu'il faut choisir. Les signes des cofacteurs y sont $-, +, -$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$

soit :

$$= (1+8) - 5 \times (8-3) = 9 - 25 = -16.$$

Correction de l'exercice 2.35 **Énoncé p. 28**

1. On ajoute les colonnes C_2 et C_3 à C_1 :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}.$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} = (a+b+c)\left[(a-b)(a-c) - (b-c)(c-b)\right].$$

Comme $c-b = -(b-c)$, le crochet vaut $(a-b)(a-c) + (b-c)^2$. On développe :

$$(a-b)(a-c)+(b-c)^2 = a^2-ac-ab+bc+b^2-2bc+c^2 = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac.$$

Donc $\det(A) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$.

2. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si les deux facteurs sont non nuls : $a+b+c \neq 0$ et $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac \neq 0$.
Or :

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right],$$

qui s'annule si et seulement si $a = b = c$.
Donc A est inversible si et seulement si $a+b+c \neq 0$ et a, b, c ne sont pas tous égaux. Autrement dit :

$$\det(A) = 0 \iff a+b+c = 0 \quad \text{ou} \quad a = b = c.$$

Attention : le cas $a = b = c \neq 0$ annule bien le déterminant, alors même que $a+b+c = 3a \neq 0$.

Correction de l'exercice 2.36 **Énoncé p. 29**

La matrice A vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour $i = n, n-1, \ldots, 2$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc $\det(A) = 1$ pour tout $n \geq 2$.

Correction de l'exercice 2.37 **Énoncé p. 29**

Les quatre points s'obtiennent en déroulant les définitions. Ils forment la boîte à outils des exercices qui suivent : il faut savoir les retrouver instantanément.

1. Pour $x \in E$:

$$x \in \operatorname{Ker}(g\circ f) \iff g(f(x)) = 0_G \iff f(x) \in \operatorname{Ker} g \iff x \in f^{-1}(\operatorname{Ker} g).$$

2. Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0_F$, donc $(g \circ f)(x) = g(0_F) = 0_G$ par linéarité de g. Ainsi $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
   On retiendra que l'inclusion est *toujours* vraie, et *toujours* dans ce sens : composer à gauche ne peut qu'agrandir le noyau.
3. Les deux ensembles sont décrits par la même liste d'éléments :

$$\operatorname{Im}(g\circ f) = \{g(f(x)) \mid x \in E\}, \qquad g(\operatorname{Im} f) = \{g(y) \mid y \in \operatorname{Im} f\} = \{g(f(x)) \mid x \in E\}.$$

   D'où l'égalité.
4. D'après le point précédent, $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$, et $\operatorname{Im} f \subset F$ donne $g(\operatorname{Im} f) \subset g(F) = \operatorname{Im} g$.
   Ici encore, l'inclusion est toujours vraie et toujours dans ce sens : composer à gauche ne peut que rétrécir l'image.

Correction de l'exercice 2.38 **Énoncé p. 29**

Les deux membres sont des parties de F : on procède par double inclusion.

1. *Inclusion directe.* Soit $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$: il existe $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. Alors $y \in \operatorname{Im} f$, et $g(y) = (g \circ f)(x) = 0_G$, donc $y \in \operatorname{Ker} g$. Ainsi $y \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.
   Inclusion réciproque. Soit $y \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. Comme $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in \operatorname{Ker} g$, on a $(g \circ f)(x) = g(y) = 0_G$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Donc $y = f(x) \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$.
2. *Inclusion réciproque* (la plus facile). Soit $y = k + f(x)$ avec $k \in \operatorname{Ker} g$ et $x \in E$. Alors :
$$g(y) = g(k) + g(f(x)) = 0_G + (g \circ f)(x) \in \operatorname{Im}(g \circ f),$$
   donc $y \in g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ f))$.
   Inclusion directe. Soit $y \in F$ tel que $g(y) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$: il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g(f(x))$. Par linéarité de g :
$$g(y - f(x)) = g(y) - g(f(x)) = 0_G,$$
   donc $y - f(x) \in \operatorname{Ker} g$, et :
$$y = \underbrace{(y - f(x))}_{\in \operatorname{Ker} g} + \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f} \in \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f.$$

Ces deux formules mesurent exactement ce que la composition fait perdre : le noyau de $g \circ f$ dépasse celui de f à la hauteur de $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$, et l'image de $g \circ f$ manque celle de g à la hauteur de ce qui échappe à $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f$. L'exercice suivant en tire les conséquences.

Correction de l'exercice 2.39 **Énoncé p. 29**

On réutilise les deux exercices précédents plutôt que de tout refaire.

1. L'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ est acquise : la question est donc de savoir quand l'inclusion inverse a lieu.
   Or, pour une application linéaire f et un sous-espace $H \subset E$, on a $f(H) = \{0_F\}$ si et seulement si $H \subset \operatorname{Ker} f$. Appliqué à $H = \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et combiné avec l'identité $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$:
   $$\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\} \iff f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \{0_F\} \iff \operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f.$$
   Avec l'inclusion toujours vraie, cette dernière condition équivaut à $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$.
2. L'inclusion $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ est acquise.
   Sens réciproque. Supposons $\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$. La deuxième identité de l'exercice précédent donne $g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ f)) = F$: autrement dit, pour tout $y \in F$, $g(y) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Comme tout élément de $\operatorname{Im} g$ est de cette forme, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$, d'où l'égalité.
   Sens direct. Supposons $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$. Comme $g(y) \in \operatorname{Im} g$ pour tout $y \in F$, on a $g^{-1}(\operatorname{Im} g) = F$, donc :
   $$\operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ f)) = g^{-1}(\operatorname{Im} g) = F.$$

Correction de l'exercice 2.40 **Énoncé p. 29**

C'est la version « à deux applications » de l'exercice précédent : on compare deux noyaux au lieu de comparer un noyau à un autre.

1. *Sens direct.* Supposons $\operatorname{Ker}(g \circ u) \subset \operatorname{Ker}(f \circ u)$ et soit $y \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u$. D'après la première identité de l'avant-dernier exercice, appliquée au couple (u, g) :
   $$\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u = u(\operatorname{Ker}(g \circ u)).$$
   Il existe donc $x \in \operatorname{Ker}(g \circ u)$ tel que $y = u(x)$. Par hypothèse $x \in \operatorname{Ker}(f \circ u)$, donc $f(y) = f(u(x)) = 0_G$, c'est-à-dire $y \in \operatorname{Ker} f$.
   Sens réciproque. Supposons $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} f$ et soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ u)$. Alors $u(x) \in \operatorname{Im} u$ et $g(u(x)) = 0_G$, donc $u(x) \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u$. Par hypothèse $u(x) \in \operatorname{Ker} f$, d'où $(f \circ u)(x) = f(u(x)) = 0_G$.
2. *Sens direct.* Supposons $\operatorname{Im}(g \circ v) \subset \operatorname{Im}(g \circ u)$ et soit $y \in \operatorname{Im} v$: écrivons $y = v(x)$ avec $x \in E$. Alors $g(y) = (g \circ v)(x) \in \operatorname{Im}(g \circ v) \subset \operatorname{Im}(g \circ u)$, donc $y \in g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ u))$. La seconde identité de l'avant-dernier exercice, appliquée au couple (u, g), donne $g^{-1}(\operatorname{Im}(g \circ u)) = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} u$, d'où $y \in \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} u$.
   Sens réciproque. Supposons $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} g$ et soit $z \in \operatorname{Im}(g \circ v)$: écrivons $z = g(v(x))$ avec $x \in E$. Comme $v(x) \in \operatorname{Im} v$, il existe $t \in E$ et $k \in \operatorname{Ker} g$ tels que $v(x) = u(t) + k$. Alors :
   $$z = g(u(t) + k) = g(u(t)) + g(k) = (g \circ u)(t) \in \operatorname{Im}(g \circ u).$$

Commentaire. L'exercice précédent en est le cas particulier « une seule application ». En effet, si $G = F$, le point 1 appliqué à $f = \mathrm{Id}_F$ donne :
$$\operatorname{Ker}(g \circ u) \subset \operatorname{Ker} u \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} u \subset \{0_F\},$$

c'est-à-dire, puisque l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(g \circ u)$ est toujours vraie, la première équivalence de l'exercice précédent. De même, si $E = F$, le point 2 appliqué à $v = \mathrm{Id}_E$ donne :

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ u) \iff F \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Ker} g,$$

soit la seconde équivalence, l'inclusion $\operatorname{Im}(g \circ u) \subset \operatorname{Im} g$ étant toujours vraie.

Correction de l'exercice 2.41 **Énoncé p. 29**

Posons $p = g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.
p est un projecteur. L'associativité de la composition permet de faire apparaître $f \circ g$ au milieu :

$$p \circ p = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ \underbrace{(f \circ g)}_{=\mathrm{Id}_F} \circ f = g \circ \mathrm{Id}_F \circ f = g \circ f = p.$$

Deux conséquences de l'hypothèse. L'égalité $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ entraîne :

- g est injective : si $g(y) = 0_E$, alors $y = \mathrm{Id}_F(y) = f\left(g(y)\right) = f(0_E) = 0_F$;
- f est surjective : pour $y \in F$, $y = f\left(g(y)\right) \in \operatorname{Im} f$.

Image. D'après le premier exercice de cette série, $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$. Or f est surjective, donc $\operatorname{Im} f = F$ et :

$$\operatorname{Im} p = g(F) = \operatorname{Im} g.$$

Noyau. Soit $x \in E$. Alors $p(x) = 0_E$ signifie $g\left(f(x)\right) = 0_E$, ce qui, g étant injective, équivaut à $f(x) = 0_F$. Donc :

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} f.$$

Correction de l'exercice 2.42 **Énoncé p. 29**

On utilise librement les deux propriétés d'un projecteur établies à l'exercice précédent :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} p = \{x \in E \mid p(x) = x\}.$$

Sens direct. Supposons $u \circ p = p \circ u$.

- Soit $x \in \operatorname{Ker} p$. Alors :

$$p\left(u(x)\right) = (p \circ u)(x) = (u \circ p)(x) = u\left(p(x)\right) = u(0_E) = 0_E,$$

  donc $u(x) \in \operatorname{Ker} p$.
- Soit $x \in \operatorname{Im} p$, c'est-à-dire $p(x) = x$. Alors :

$$u(x) = u\left(p(x)\right) = (u \circ p)(x) = (p \circ u)(x) = p\left(u(x)\right),$$

  donc $u(x)$ est invariant par p : $u(x) \in \operatorname{Im} p$.

Sens réciproque. Supposons $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ stables par u, et soit $x \in E$. Décomposons $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Ker} p$, ce qui est possible puisque $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. On note que $p(a) = a$ et $p(b) = 0_E$, donc $p(x) = a$.
D'une part, par linéarité :

$$(p \circ u)(x) = p\left(u(a)\right) + p\left(u(b)\right).$$

Or $u(a) \in \operatorname{Im} p$ par stabilité, donc $p\left(u(a)\right) = u(a)$; et $u(b) \in \operatorname{Ker} p$ par stabilité, donc $p\left(u(b)\right) = 0_E$. Ainsi $(p \circ u)(x) = u(a)$.

D'autre part :

$$(u \circ p)(x) = u\left(p(x)\right) = u(a).$$

Les deux applications coïncident en tout $x \in E$: $u \circ p = p \circ u$.

Correction de l'exercice 2.43 **Énoncé p. 29**

Mise en équation. Développons, en prenant garde de ne rien commuter :

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q + (p \circ q + q \circ p),$$

puisque $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$. Donc :

$$p+q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q + q \circ p = 0. \qquad (*)$$

Sens réciproque. Si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $(*)$ est vérifiée et $p+q$ est un projecteur.
Sens direct. Supposons $(*)$. L'idée est de composer cette égalité par p, à gauche puis à droite, et de comparer les deux résultats.
En composant $(*)$ à gauche par p :

$$p \circ p \circ q + p \circ q \circ p = 0, \qquad \text{soit} \qquad p \circ q + p \circ q \circ p = 0. \qquad (1)$$

En composant $(*)$ à droite par p :

$$p \circ q \circ p + q \circ p \circ p = 0, \qquad \text{soit} \qquad p \circ q \circ p + q \circ p = 0. \qquad (2)$$

Le terme $p \circ q \circ p$ est commun aux deux. En soustrayant (2) à (1) :

$$p \circ q - q \circ p = 0.$$

En additionnant cette égalité à $(*)$, il vient $2\, p \circ q = 0$, donc $p \circ q = 0$ car $2 \neq 0$ dans $\mathbb{C}$; puis, en reportant dans $(*)$, $q \circ p = 0$.

Correction de l'exercice 2.44 **Énoncé p. 30**

Aucune hypothèse de dimension finie n'est faite : on ne peut pas conclure par un argument de dimensions, et il faut établir séparément que la somme est directe et qu'elle vaut E.
L'intersection est réduite à $\{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Im}(g \circ f) \cap \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
Comme $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, on a $g\left(f(x)\right) = 0_E$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker} g$; et bien sûr $f(x) \in \operatorname{Im} f$.
Or la somme $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$ est directe, donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_E\}$ et $f(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} f$.
Comme $x \in \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$, on obtient $x \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, la seconde somme étant directe elle aussi. Donc $x = 0_E$.
La somme vaut E. La clé est l'observation suivante :

$$\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g.$$

En effet, $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f)$; et comme $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$, la linéarité de g donne :

$$\operatorname{Im} g = g(E) = g\left(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g\right) = g(\operatorname{Im} f) + g(\operatorname{Ker} g) = g(\operatorname{Im} f) + \{0_E\} = g(\operatorname{Im} f).$$

Soit alors $x \in E$. Utilisons la seconde hypothèse pour écrire $x = y + k$ avec $y \in \operatorname{Im} g$ et $k \in \operatorname{Ker} f$. Alors :

- $y \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(g \circ f)$;

— $k \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$, cette inclusion étant toujours vraie.

Donc $x \in \operatorname{Im}(g \circ f) + \operatorname{Ker}(g \circ f)$, et finalement :

$$E = \operatorname{Im}(g \circ f) \oplus \operatorname{Ker}(g \circ f).$$

Complément. On a en réalité montré davantage : $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$, et l'on peut en déduire $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$. En effet, $\operatorname{Im} g$ admet à la fois $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ pour supplémentaire dans E, et $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Or si $A \oplus B = A \oplus C = E$ avec $B \subset C$, alors $B = C$: pour $c \in C$, écrivons $c = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B \subset C$; alors $a = c - b \in A \cap C = \{0_E\}$, donc $c = b \in B$.

Correction de l'exercice 2.45 **Énoncé p. 30**

L'hypothèse fournit, pour *chaque* vecteur x, un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Toute la difficulté est de montrer que ce scalaire ne dépend pas de x : c'est un piège classique que d'écrire $f(x) = \lambda x$ dès la première ligne, en supposant sans le dire ce qu'il faut démontrer.

Si $E = \{0_E\}$, il n'y a rien à démontrer : $f = 0 = 0 \cdot \mathrm{Id}_E$. On suppose donc $E \neq \{0_E\}$.

Le scalaire est bien défini. Soit $x \in E$ non nul. La famille $(x, f(x))$ étant liée, il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0_E$. Si $\beta = 0$, alors $\alpha x = 0_E$ avec $\alpha \neq 0$, donc $x = 0_E$: exclu. Donc $\beta \neq 0$ et :

$$f(x) = -\frac{\alpha}{\beta} x.$$

Il existe donc $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$; et ce scalaire est *unique*, car $\lambda x = \mu x$ avec $x \neq 0_E$ entraîne $(\lambda - \mu)x = 0_E$, donc $\lambda = \mu$. C'est cette unicité qui va faire tout le travail.

Le scalaire est constant. Soient $x, y \in E$ non nuls ; montrons que $\lambda_x = \lambda_y$. On distingue deux cas.

Premier cas : (x, y) est liée. Comme x et y sont non nuls, il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$. Alors :

$$f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x (\mu x) = \lambda_x y.$$

Par unicité du scalaire associé à y, $\lambda_y = \lambda_x$.

Second cas : (x, y) est libre. En particulier $x + y \neq 0_E$, et λ_{x+y} est défini. Par linéarité :

$$\lambda_{x+y}\,(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

d'où, en regroupant :

$$\left(\lambda_x - \lambda_{x+y}\right) x + \left(\lambda_y - \lambda_{x+y}\right) y = 0_E.$$

La famille (x, y) étant libre, les deux coefficients sont nuls :

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y.$$

Conclusion. Le scalaire λ_x est donc le même pour tous les $x \in E \setminus \{0_E\}$; notons-le λ. On a $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \neq 0_E$, et aussi pour $x = 0_E$ puisque $f(0_E) = 0_E = \lambda \cdot 0_E$. Ainsi :

$$f = \lambda \,\mathrm{Id}_E\,.$$

Remarque. Avec la convention du cours, une homothétie correspond à $\lambda \in \mathbb{K}^*$: le cas $\lambda = 0$ donne l'application nulle, qui n'en est pas une. L'énoncé se lit donc : f est une homothétie ou l'application nulle.

Correction de l'exercice 2.46 **Énoncé p. 30**

Premier système. Son déterminant vaut $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$: le système n'est donc pas de Cramer, et il faut regarder de plus près. En multipliant la première équation par 3 et la seconde par 2 :

$$\begin{cases} 12x - 6y = 3 \\ 12x - 6y = 4. \end{cases}$$

Les deux membres de gauche sont égaux, les deux membres de droite ne le sont pas : le système n'a *aucune* solution.

Second système. Son déterminant vaut $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7 \neq 0$: c'est un système de Cramer, il admet une unique solution. La première équation donne $x = 3y - 1$; en reportant dans la seconde :

$$2(3y - 1) + y = 5 \iff 7y = 7 \iff y = 1,$$

puis $x = 2$. L'unique solution est $(x, y) = (2, 1)$.

Correction de l'exercice 2.47 **Énoncé p. 30**

Premier système. La somme $L_1 + L_2$ élimine d'un coup y et z : $3x = 3$, donc $x = 1$. Il reste :

$$\begin{cases} 1 - y + z = -1 \\ 1 - 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y - 2 \\ z = 1 - 2y. \end{cases}$$

D'où $y - 2 = 1 - 2y$, soit $y = 1$, puis $z = -1$. On vérifie sur L_1 : $2 + 1 + 1 = 4$. L'unique solution est $(1, 1, -1)$.

Second système. On élimine x avec le pivot L_1 :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : \quad y - 3z = 1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 : \quad 2y - 6z = 1.$$

La dernière ligne s'écrit $2(y - 3z) = 1$, alors que la précédente donne $y - 3z = 1$, donc $2(y - 3z) = 2$. On aboutit à $1 = 2$: le système n'a aucune solution.

Correction de l'exercice 2.48 **Énoncé p. 30**

Commençons par éliminer x :

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 : \quad 2y - 3z = 2, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 : \quad 2y + (a - 4)z = a.$$

En retranchant la première de la seconde, y disparaît :

$$(a - 4)z + 3z = a - 2, \qquad \text{soit} \qquad (a - 1)z = a - 2.$$

Cas $a = 1$. L'équation devient $0 = -1$: le système n'a aucune solution.

Cas $a \neq 1$. On obtient successivement :

$$z = \frac{a - 2}{a - 1}, \qquad y = 1 + \frac{3}{2}z = \frac{5a - 8}{2(a - 1)}, \qquad x = y - z = \frac{3a - 4}{2(a - 1)},$$

la dernière égalité venant de L_2, qui s'écrit $x = y - z$. Le système admet donc une unique solution :

$$(x, y, z) = \left(\frac{3a - 4}{2(a - 1)}, \frac{5a - 8}{2(a - 1)}, \frac{a - 2}{a - 1} \right).$$

Vérification rapide pour $a = 0$: on trouve $(2, 4, 2)$, et l'on a bien $2 + 4 - 4 = 2$, $2 - 4 + 2 = 0$, $8 - 8 + 0 = 0$.

Correction de l'exercice 2.49 **Énoncé p. 30**

Le système est invariant par permutation des trois inconnues : c'est ce qui va guider les calculs. En additionnant les trois lignes :

$$(a + 2)(x + y + z) = 3. \qquad (*)$$

Par ailleurs $L_1 - L_2$ donne $(a - 1)(x - y) = 0$, et de même $(a - 1)(y - z) = 0$.
Cas $a = 1$. Les trois équations se réduisent à la seule équation $x+y+z = 1$. L'ensemble des solutions est le plan affine :

$$\left\{(x, y, 1 - x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = (1, 0, 0) + \text{Vect}\left((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\right).$$

Cas $a = -2$. L'égalité $(*)$ devient $0 = 3$: aucune solution.
Cas $a \notin \{1, -2\}$. Comme $a \neq 1$, les relations $(a - 1)(x - y) = 0$ et $(a - 1)(y - z) = 0$ imposent $x = y = z$. En reportant dans L_1 : $(a + 2)x = 1$, et $a \neq -2$ donne :

$$x = y = z = \frac{1}{a + 2}.$$

C'est bien une solution, et c'est la seule.
Commentaire. Le déterminant du système vaut $(a-1)^2(a+2)$: on retrouve exactement les deux valeurs critiques. Le calcul ci-dessus l'évite, mais il est utile de savoir que les deux approches concordent.

Correction de l'exercice 2.50 **Énoncé p. 30**

On élimine x à l'aide de L_1 :

$$\begin{aligned} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 : &\quad y + 5z - 2t = 1, \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 : &\quad 2y + 10z - 4t = a, \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 : &\quad y + 5z - 2t = b. \end{aligned}$$

Les trois lignes obtenues portent sur la *même* quantité $y+5z-2t$: la première impose qu'elle vaut 1, la deuxième qu'elle vaut $a/2$, la troisième qu'elle vaut b.
Cas $a \neq 2$ *ou* $b \neq 1$. Le système est incompatible : aucune solution.
Cas $a = 2$ *et* $b = 1$. Les lignes L_3 et L_4 deviennent redondantes et le système équivaut à :

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ y + 5z - 2t = 1. \end{cases}$$

On prend z et t comme inconnues auxiliaires : la seconde ligne donne $y = 1 - 5z + 2t$, puis la première $x = y - 2z - t = 1 - 7z + t$. L'ensemble des solutions est le plan affine :

$$\left\{(1 - 7z + t,\ 1 - 5z + 2t,\ z,\ t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\} = (1, 1, 0, 0) + \text{Vect}\left((-7, -5, 1, 0),\ (1, 2, 0, 1)\right).$$

Il est de dimension 2, ce qui est cohérent : le système se ramène à deux équations indépendantes portant sur quatre inconnues.

Correction de l'exercice 2.51 **Énoncé p. 31**

Les $n-1$ premières équations donnent toutes la même chose :

$$\forall j \in \{2,\dots,n\}, \qquad x_j = 1 - x_1.$$

Toutes les inconnues sont donc déterminées par x_1, et il ne reste qu'à exploiter la dernière équation. En y reportant ces valeurs :

$$x_1 + (n-1)(1-x_1) = 0 \iff (2-n)\,x_1 = -(n-1).$$

Cas $n = 2$. L'équation devient $0 = -1$: aucune solution. C'est visible directement sur l'énoncé, qui impose alors à la fois $x_1 + x_2 = 1$ et $x_1 + x_2 = 0$.
Cas $n \geq 3$. On obtient $x_1 = \dfrac{n-1}{n-2}$, puis, pour $j \geq 2$:

$$x_j = 1 - \frac{n-1}{n-2} = \frac{-1}{n-2}.$$

Le système admet donc une unique solution :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{n-1}{n-2},\ \frac{-1}{n-2},\ \dots,\ \frac{-1}{n-2}\right).$$

Vérification pour $n = 3$: on trouve $(2,-1,-1)$, et l'on a bien $2-1=1$ et $2-1-1=0$.

Correction de l'exercice 2.52 **Énoncé p. 31**

L'énoncé ressemble au précédent, mais la dernière équation n'est plus une contrainte globale : elle fixe directement une inconnue. Le système se résout donc *de proche en proche*, sans discussion.
La dernière équation donne $x_n = a_n$. L'avant-dernière, $x_1 - x_n = a_{n-1}$, donne alors :

$$x_1 = a_n + a_{n-1}.$$

Enfin, pour $j \in \{2,\dots,n\}$, l'équation $x_1 - x_j = a_{j-1}$ fournit :

$$x_j = x_1 - a_{j-1} = a_n + a_{n-1} - a_{j-1}.$$

Ces valeurs sont cohérentes : pour $j = n$, la formule redonne $x_n = a_n + a_{n-1} - a_{n-1} = a_n$. Le système admet donc, quel que soit le second membre, une *unique* solution :

$$x_1 = a_{n-1} + a_n, \qquad \forall j \in \{2,\dots,n\}, \quad x_j = a_{n-1} + a_n - a_{j-1}.$$

Correction de l'exercice 2.53 **Énoncé p. 31**

Posons $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. La i-ième équation s'obtient à partir de S en remplaçant x_i par λx_i ; elle s'écrit donc :

$$S + (\lambda - 1)x_i = x_i, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad S = (2-\lambda)\,x_i.$$

Le système équivaut ainsi à : *pour tout i,* $(2-\lambda)x_i = S$, où S désigne la somme des x_i.
Cas $\lambda = 2$. Les n équations se réduisent toutes à $S = 0$. L'ensemble des solutions est l'hyperplan :

$$\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\},$$

de dimension $n-1$.

Cas $\lambda \neq 2$. Alors $x_i = \dfrac{S}{2-\lambda}$ pour tout i : les x_i sont tous égaux, disons à c. On a alors $S = nc$, et la relation $S = (2-\lambda)c$ devient :

$$nc = (2-\lambda)c \iff (n-2+\lambda)\,c = 0.$$

— Si $\lambda \neq 2-n$, on obtient $c = 0$: l'unique solution est le vecteur nul.

— Si $\lambda = 2-n$ (valeur distincte de 2 puisque $n \geq 2$), l'équation est automatiquement vérifiée. L'ensemble des solutions est la droite :

$$\mathrm{Vect}\left((1,1,\ldots,1)\right),$$

de dimension 1.

Correction de l'exercice 2.54 **Énoncé p. 31**

Il suffit de calculer. D'une part :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix},$$

d'autre part :

$$(a+d)M = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}.$$

En soustrayant, les deux coefficients hors de la diagonale s'annulent, et :

$$M^2 - (a+d)M = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -(ad-bc)\,I_2,$$

ce qui est l'égalité voulue.

Correction de l'exercice 2.55 **Énoncé p. 31**

Il y a trois implications à établir.
(1) *et* (2) *entraînent* (3). L'égalité $A^2 = I_n$ montre que A est inversible, d'inverse A elle-même. Or $A^\top A = I_n = AA$; en multipliant à droite par A^{-1} :

$$A^\top = A.$$

(1) *et* (3) *entraînent* (2). Il suffit de reporter $A^\top = A$ dans $A^\top A = I_n$: on obtient $A^2 = I_n$.
(2) *et* (3) *entraînent* (1). De même, $A^\top A = A \cdot A = A^2 = I_n$.

Correction de l'exercice 2.56 **Énoncé p. 31**

On a déjà calculé $\det(A) = 1$ dans un exercice précédent, ce qui donne l'inversibilité ; mais la méthode ci-dessous la redémontre et fournit *en plus* l'inverse. Elle consiste à résoudre le système $AX = Y$ d'inconnue X, pour Y quelconque.
Notons $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. La i-ième équation du système $AX = Y$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\, x_j = y_i.$$

L'idée est de retrancher deux équations consécutives. Pour $i \geq 2$, on a $\min(i, j) - \min(i-1, j) = 1$ si $j \geq i$, et 0 sinon. Donc, en posant :

$$S_i = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n \qquad (1 \leq i \leq n),$$

on obtient $y_i - y_{i-1} = S_i$ pour $i \geq 2$. Par ailleurs la première équation s'écrit $\sum_j \min(1, j)x_j = \sum_j x_j$, c'est-à-dire $y_1 = S_1$.
Le système $AX = Y$ équivaut donc au système :

$$S_1 = y_1, \qquad \forall i \in \{2, \ldots, n\}, \quad S_i = y_i - y_{i-1},$$

qui détermine les S_i sans ambiguïté. Or on retrouve les x_i à partir des S_i par $x_i = S_i - S_{i+1}$ pour $i < n$, et $x_n = S_n$. Le système $AX = Y$ admet donc, pour tout Y, une unique solution : A est inversible. En reportant :

$$x_1 = S_1 - S_2 = y_1 - (y_2 - y_1) = 2y_1 - y_2,$$

$$x_i = S_i - S_{i+1} = (y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - y_i) = -y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1} \qquad (2 \leq i \leq n-1),$$

$$x_n = S_n = -y_{n-1} + y_n.$$

Autrement dit, A^{-1} est la matrice tridiagonale :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prendra garde au dernier coefficient diagonal, qui vaut 1 et non 2.
Vérification pour $n = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2.57 **Énoncé p. 32**

Le point de départ est la relation $B = C - A$, qui permet de faire disparaître B :

$$AC^{-1}B = AC^{-1}(C - A) = AC^{-1}C - AC^{-1}A = A - AC^{-1}A.$$

Faisons le même calcul pour l'autre membre, en écrivant cette fois $B = C - A$ à *gauche* :

$$BC^{-1}A = (C - A)C^{-1}A = CC^{-1}A - AC^{-1}A = A - AC^{-1}A.$$

Les deux membres valent la même quantité $A - AC^{-1}A$, d'où l'égalité.
Commentaire. Aucune hypothèse de commutation n'est faite sur A et B ; c'est l'introduction de $C = A + B$ qui crée la symétrie. Le lecteur vérifiera que le même calcul donne aussi $AC^{-1}B = BC^{-1}A = B - BC^{-1}B$.

Correction de l'exercice 2.58 **Énoncé p. 32**

Première étape : A est inversible. On isole I_n dans la relation de l'énoncé :

$$I_n = AB - A^2 - A = A\,(B - A - I_n)\,.$$

En dimension finie, une matrice carrée admettant un inverse à droite est inversible ; donc A est inversible et :

$$A^{-1} = B - A - I_n.$$

Seconde étape : conclusion. Une matrice commute toujours avec son inverse : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. En reportant l'expression obtenue :

$$A\,(B - A - I_n) = (B - A - I_n)\,A,$$

soit, en développant :

$$AB - A^2 - A = BA - A^2 - A.$$

Les termes $-A^2 - A$ se simplifient de part et d'autre, et il reste $AB = BA$.

Correction de l'exercice 2.59 **Énoncé p. 32**

1. Écrivons $M = I_3 + N$ avec :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = 0.$$

Les matrices I_3 et N commutent, donc la formule du binôme s'applique. Comme $N^3 = 0$, seuls trois termes subsistent : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2,$$

les coefficients binomiaux $\binom{k}{0}$, $\binom{k}{1}$ et $\binom{k}{2}$ valant respectivement 1, k et $k(k-1)/2$ (cette écriture est correcte même pour $k = 0$ et $k = 1$, où les termes surnuméraires sont nuls). Explicitement :

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \dfrac{k(k-1)}{2}\,ac \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Introduisons, pour $k \in \mathbb{Z}$, la matrice :

$$P(k) = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2.$$

Montrons que $P(k)P(\ell) = P(k+\ell)$ pour tous $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Comme $N^3 = 0$:

$$P(k)P(\ell) = I_3 + (k+\ell)N + \left(\frac{k(k-1)}{2} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} + k\ell \right) N^2,$$

et le coefficient de N^2 vaut :

$$\frac{k^2 - k + \ell^2 - \ell + 2k\ell}{2} = \frac{(k+\ell)^2 - (k+\ell)}{2} = \frac{(k+\ell)(k+\ell-1)}{2},$$

d'où $P(k)P(\ell) = P(k+\ell)$.

En particulier $P(k)P(-k) = P(0) = I_3$: chaque $P(k)$ est inversible, d'inverse $P(-k)$. Avec $k = 1$, on obtient que $M = P(1)$ est inversible et :

$$M^{-1} = P(-1) = I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la question 1 donne $M^k = P(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$; et pour $k < 0$:

$$M^k = \left(M^{-k}\right)^{-1} = P(-k)^{-1} = P(k).$$

La formule $M^k = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2$ est donc valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Commentaire. Le mécanisme est général : si N est nilpotente, la matrice $I + N$ est inversible et ses puissances se calculent par le binôme, la somme étant *finie*. On retiendra aussi la vérification $(I+N)(I-N+N^2-\cdots) = I$ lorsque N est nilpotente, qui est l'analogue matriciel de la somme d'une série géométrique.

Correction de l'exercice 2.60 **Énoncé p. 32**

1. Pour la somme, c'est immédiat coefficient par coefficient : si $a_{ij} > 0$ et $b_{ij} > 0$, alors $a_{ij} + b_{ij} > 0$.

   Pour le produit, soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ positives, avec $p \geq 1$. Le coefficient d'indice (i,j) de AB vaut :

   $$\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}\, b_{\ell j},$$

   somme de $p \geq 1$ termes tous strictement positifs : elle est strictement positive.

2. C'est le moment d'une idée : plutôt que de chercher Y parmi les puissances de A appliquées à X, on les *additionne* toutes. Posons :

   $$Y = X + AX + A^2X + \cdots + A^{k-1}X = \sum_{j=0}^{k-1} A^j X.$$

   D'abord, Y est positive : le terme $j = 0$ vaut X, positive par hypothèse ; et pour $1 \leq j \leq k-1$, la matrice A^j est positive comme produit de matrices positives (question 1), donc A^jX l'est aussi ; enfin une somme de matrices positives est positive.

   Ensuite, calculons AY en décalant l'indice :

   $$AY = \sum_{j=0}^{k-1} A^{j+1}X = \sum_{j=1}^{k} A^j X = \left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j X\right) - X + A^kX = Y - X + X = Y,$$

   où l'on a utilisé l'hypothèse $A^kX = X$. Ainsi $AY = Y$ avec Y positive.

Correction de l'exercice 2.61 **Énoncé p. 32**

Toute l'affaire tient dans un seul calcul de coefficient. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme D est diagonale, $d_{k\ell} = 0$ dès que $k \neq \ell$, et donc :

$$(AD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_{kj} = a_{ij}\, d_j, \qquad (DA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, a_{kj} = d_i\, a_{ij}.$$

Autrement dit : multiplier par D à droite multiplie la colonne j par d_j, multiplier par D à gauche multiplie la ligne i par d_i. On en déduit :

$$AD = DA \iff \forall (i,j), \quad (d_j - d_i)\, a_{ij} = 0.$$

Inclusion directe. Supposons $AD = DA$ et soit $i \neq j$. Les $d_1, \ldots, d_n$ étant deux à deux distincts, $d_j - d_i \neq 0$, donc $a_{ij} = 0$. Tous les coefficients hors de la diagonale sont nuls : A est diagonale.
Inclusion réciproque. Si A est diagonale, alors $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, et la condition $(d_j - d_i)a_{ij} = 0$ est vérifiée pour tout couple (i,j) (elle est triviale pour $i = j$). Donc $AD = DA$.
Les deux inclusions donnent l'égalité annoncée.
Commentaire. L'hypothèse « deux à deux distincts » est essentielle. Si par exemple $d_1 = d_2$, la matrice D possède un bloc scalaire de taille 2, et toute matrice diagonale par blocs de la forme correspondante commute avec D : le commutant est alors strictement plus gros que l'ensemble des matrices diagonales. À l'extrême, $D = I_n$ commute avec tout le monde.

Correction de l'exercice 2.62 **Énoncé p. 32**

L'astuce consiste à reconnaître un produit dans le membre de gauche. En ajoutant I_n aux deux membres :

$$AB + A + B + I_n = I_n, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (A + I_n)(B + I_n) = I_n,$$

puisque $(A + I_n)(B + I_n) = AB + A + B + I_n$.
Deux matrices carrées dont le produit vaut I_n sont inversibles et inverses l'une de l'autre. Donc $A + I_n$ est inversible et :

$$B + I_n = (A + I_n)^{-1}.$$

Or A est diagonale, donc $A + I_n$ l'est aussi ; et l'inverse d'une matrice diagonale inversible est diagonale (ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de départ). Ainsi $B + I_n$ est diagonale, et $B = (B + I_n) - I_n$ également.

Correction de l'exercice 2.63 **Énoncé p. 32**

Montrons que $\mathcal{Z}$ est l'ensemble des matrices scalaires, c'est-à-dire :

$$\mathcal{Z} = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Inclusion facile. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(\lambda I_n)M = \lambda M = M(\lambda I_n)$. Donc $\lambda I_n \in \mathcal{Z}$.
Inclusion difficile. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{Z}$. L'hypothèse vaut pour *toutes* les matrices M ; il suffit donc de bien choisir M. On prend les matrices élémentaires E_{ij}, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j), qui vaut 1. Un calcul direct donne,

pour tous k, ℓ :

$$(AE_{ij})_{k\ell} = \sum_m a_{km}(E_{ij})_{m\ell} = a_{ki}\,\delta_{j\ell}, \qquad (E_{ij}A)_{k\ell} = \sum_m (E_{ij})_{km}\,a_{m\ell} = \delta_{ik}\,a_{j\ell},$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. En clair : AE_{ij} a pour colonne j la colonne i de A, et des zéros ailleurs ; $E_{ij}A$ a pour ligne i la ligne j de A, et des zéros ailleurs. Fixons $i \neq j$ et écrivons $AE_{ij} = E_{ij}A$.

- Prenons $k = i$ et $\ell = j$: il vient $a_{ii} = a_{jj}$. Comme i et j sont quelconques, tous les coefficients diagonaux de A sont égaux ; notons λ leur valeur commune.
- Prenons $k \neq i$ et $\ell = j$: il vient $a_{ki} = 0$. Comme i est quelconque et $k \neq i$ aussi, tous les coefficients de A hors de la diagonale sont nuls.

Donc $A = \lambda I_n$, ce qui achève la démonstration.

Correction de l'exercice 2.64 **Énoncé p. 33**

L'hypothèse dit que la matrice A annule le polynôme $P = X^5 + X - 1$; on souhaite inverser $Q(A)$ avec $Q = X^2 + X + 1$. L'outil est la division euclidienne de P par Q.
La division. On effectue $X^5 + X - 1$ divisé par $X^2 + X + 1$:

$$X^5 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) - 2.$$

On vérifie ce résultat en développant :

$$(X^2 + X + 1)(X^3 - X^2 + 1) = X^5 + X + 1,$$

d'où le reste -2 après soustraction. Le reste étant une constante non nulle, P et Q sont premiers entre eux : c'est exactement ce qu'il fallait.
Conclusion. Les matrices I_n, A, A^2, … commutent entre elles, et l'on peut évaluer l'identité polynomiale ci-dessus en A :

$$\underbrace{A^5 + A - I_n}_{=0} = (A^2 + A + I_n)(A^3 - A^2 + I_n) - 2I_n,$$

d'où :

$$(A^2 + A + I_n)(A^3 - A^2 + I_n) = 2I_n = (A^3 - A^2 + I_n)(A^2 + A + I_n),$$

la seconde égalité résultant de la commutation. Ainsi $A^2 + A + I_n$ est inversible et :

$$(A^2 + A + I_n)^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^3 - A^2 + I_n\right).$$

Correction de l'exercice 2.65 **Énoncé p. 33**

1. Il suffit de montrer que $\det(qI_n + J) \neq 0$, car $\det(A)^2 = \det(A)\det(A^\top) = \det(AA^\top)$.
   Calculons donc le déterminant de $qI_n + J$, matrice dont les coefficients diagonaux valent $q + 1$ et les autres 1. Toutes ses lignes ont la même somme $q + n$; l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ rend donc la première colonne constante

égale à $q+n$, que l'on factorise :

$$\det(qI_n + J) = (q+n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & q+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & q+1 \end{vmatrix}.$$

On effectue ensuite $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2, \ldots, n$. La ligne i du déterminant restant vaut $(1, 1, \ldots, 1) + qe_i$, où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique ; en lui retranchant la première ligne $(1, 1, \ldots, 1)$, il ne reste que qe_i. Le déterminant devient triangulaire supérieur :

$$\det(qI_n + J) = (q+n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q \end{vmatrix} = (q+n)\, q^{n-1}.$$

Comme $q \geq 1$ et $n \geq 1$, ce nombre est non nul. Donc $\det(A)^2 \neq 0$, puis $\det(A) \neq 0$: A est inversible.

2. Regardons les coefficients diagonaux de $AA^\top$. Pour tout i :

$$(AA^\top)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(A^\top\right)_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik},$$

la dernière égalité provenant de ce que chaque a_{ik} vaut 0 ou 1, donc $a_{ik}^2 = a_{ik}$. Or $(qI_n + J)_{ii} = q + 1$. Ainsi *chaque ligne de A contient exactement $q+1$ coefficients égaux à 1* :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = q + 1.$$

Il ne reste qu'à calculer AJ. Tous les coefficients de J valant 1 :

$$(AJ)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} J_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = q + 1 = (q+1) J_{ij},$$

et donc $AJ = (q+1)J$.

Correction de l'exercice 2.66

Énoncé p. 33

1. Raisonnons par contraposée : supposons que (B, A) admette une relation, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}^*$ tels que le produit alterné W à k facteurs commençant par B^{m_1} vaille I_n. Fabriquons à partir de W une relation pour (A, B) en conjuguant par une puissance de A — une conjuguée de I_n vaut encore I_n.
   Si k est pair, W se termine par A^{m_k} :

$$I_n = A^{m_k} W A^{-m_k} = A^{m_k} B^{m_1} A^{m_2} \cdots B^{m_{k-1}} \underbrace{A^{m_k} A^{-m_k}}_{=I_n} = A^{m_k} B^{m_1} A^{m_2} \cdots B^{m_{k-1}}.$$

   Le produit obtenu est alterné, commence par une puissance de A, comporte k facteurs (on en a retiré un à droite, ajouté un à gauche) — donc un nombre

pair, et se termine bien par une puissance de B. Tous ses exposants sont dans $\mathbb{Z}^*$: c'est une relation pour (A, B).

Si k est impair, W se termine par B^{m_k} et l'on conjugue simplement par A :

$$I_n = A\,W\,A^{-1} = A^1 B^{m_1} A^{m_2} \cdots A^{m_{k-1}} B^{m_k} A^{-1}.$$

Ce produit est alterné, commence et se termine par une puissance de A, comporte $k+2$ facteurs — donc un nombre impair — et tous ses exposants (1, m_1, …, m_k, -1) sont non nuls : c'est encore une relation pour (A, B).

Dans les deux cas, (A, B) n'est pas sans relation, ce qui établit la contraposée.

2. *La relation de récurrence.* Un calcul immédiat donne, pour $p \in \mathbb{Z}$:

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2p & 1 \end{pmatrix}.$$

Écrivons $P_m = \begin{pmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \gamma_m & \delta_m \end{pmatrix}$, de sorte que $c_m = \gamma_m$ si m est pair et $c_m = \delta_m$ si m est impair. Les deux multiplications à droite s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} A^p = \begin{pmatrix} \alpha & 2p\alpha + \beta \\ \gamma & 2p\gamma + \delta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} B^p = \begin{pmatrix} \alpha + 2p\beta & \beta \\ \gamma + 2p\delta & \delta \end{pmatrix}.$$

Retenons l'essentiel : *multiplier à droite par une puissance de A laisse γ inchangé*, et *multiplier à droite par une puissance de B laisse δ inchangé.*

Soit m avec $1 \leq m \leq k-1$.

Si m est pair (donc $m \geq 2$), on passe de P_m à P_{m+1} en multipliant par $A^{n_{m+1}}$, et $m+1$ est impair :

$$c_{m+1} = \delta_{m+1} = 2n_{m+1}\,\gamma_m + \delta_m.$$

Or $\gamma_m = c_m$ puisque m est pair. Et comme m est pair, on est passé de P_{m-1} à P_m en multipliant par B^{n_m}, ce qui laisse δ inchangé : $\delta_m = \delta_{m-1} = c_{m-1}$, car $m-1$ est impair. D'où $c_{m+1} = 2n_{m+1}c_m + c_{m-1}$.

Si m est impair, on multiplie par $B^{n_{m+1}}$ et $m+1$ est pair :

$$c_{m+1} = \gamma_{m+1} = \gamma_m + 2n_{m+1}\,\delta_m.$$

Ici $\delta_m = c_m$ puisque m est impair, et l'on est passé de P_{m-1} à P_m en multipliant par A^{n_m}, ce qui laisse γ inchangé : $\gamma_m = \gamma_{m-1} = c_{m-1}$, car $m-1$ est pair (pour $m = 1$, $\gamma_1 = \gamma_0 = (I_2)_{2,1} = 0 = c_0$). D'où encore $c_{m+1} = 2n_{m+1}c_m + c_{m-1}$.

Croissance des $|c_m|$. On a $c_0 = (I_2)_{2,1} = 0$ et $c_1 = (A^{n_1})_{2,2} = 1$. Montrons par récurrence que $|c_m| > |c_{m-1}|$ pour $1 \leq m \leq k$.

C'est vrai pour $m = 1$, puisque $1 > 0$. Supposons-le vrai au rang m, avec $m \leq k-1$. Comme $n_{m+1} \in \mathbb{Z}^*$, on a $|2n_{m+1}| \geq 2$, donc :

$$|c_{m+1}| = |2n_{m+1}c_m + c_{m-1}| \geq 2\,|c_m| - |c_{m-1}| > 2\,|c_m| - |c_m| = |c_m|,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. La suite $|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_k|$ est donc strictement croissante. Comme ce sont des entiers et que $|c_0| = 0$, on en déduit :

$$\forall m \in \{0, \ldots, k\}, \qquad |c_m| \geq m.$$

Conclusion. Supposons $P_k = I_2$.

- Si k est pair, alors $k \geq 2$ et $c_k = (I_2)_{2,1} = 0$, ce qui contredit $|c_k| \geq k \geq 2$.
- Si $k \geq 3$ est impair, alors $c_k = (I_2)_{2,2} = 1$, ce qui contredit $|c_k| \geq k \geq 3$.
- Si $k = 1$, alors $P_1 = A^{n_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$, puisque $n_1 \neq 0$.

Dans tous les cas, $P_k \neq I_2$: le couple (A, B) est sans relation.

Correction de l'exercice 2.67 **Énoncé p. 33**

1. Un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $A(x, y, z, t)^\top = 0$, c'est-à-dire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & 2z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & + & t & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 5z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

Le pivot L_1 élimine x des deux dernières lignes, via $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2z & + & t & = & 0 \\ 3y & - & 3z & - & t & = & 0 \\ 2y & - & 3z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

puis $L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$ élimine y :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2z & + & t & = & 0 \\ 3y & - & 3z & - & t & = & 0 \\ & & 3z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système d'équations de $\operatorname{Ker} f$. Il est échelonné de rang 3, d'inconnues principales x, y, z et d'inconnue secondaire t : son ensemble de solutions est donc une droite. En posant $t = -3s$, la dernière ligne donne $z = 4s$, la deuxième $3y = 3z + t = 9s$ soit $y = 3s$, et la première $x = -2z - t = -5s$. D'où :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left((-5, 3, 4, -3)\right), \qquad \dim \operatorname{Ker} f = 1.$$

2. Le théorème du rang donne aussitôt $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 1 = 3$. Comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ est de dimension $3 = \dim \mathbb{R}^3$, on a $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$: la base canonique de $\mathbb{R}^3$ convient, et f est surjective.

   Si l'on tient à extraire une base des colonnes de A, les trois premières conviennent : leur déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times (-15 - 2) - 0 + 2 \times (4 + 3) = -3 \neq 0.$$

Correction de l'exercice 2.68 **Énoncé p. 33**

1. Les colonnes de A se lisent comme les coordonnées des images des vecteurs de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{F}$:

$$u(e_1) = 2f_1 + 3f_2, \qquad \text{et} \qquad u(e_2) = f_1 - f_2 + 2f_3.$$

2. La matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et celle de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$ sont :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det P = 1 \neq 0$ et, en développant par rapport à la première ligne, $\det Q = 1 \times (0 - 1) - 1 \times (1 - 0) + 0 = -2 \neq 0$. Ces deux matrices sont donc inversibles, ce qui signifie exactement que $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ sont des bases.

Pour obtenir A', inutile d'inverser Q : il suffit de calculer les images des vecteurs de $\mathcal{E}'$ et de les décomposer sur $\mathcal{F}'$. D'une part :

$$u(e'_1) = u(e_1) = 2f_1 + 3f_2, \qquad u(e'_2) = u(e_1) + u(e_2) = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3.$$

D'autre part, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$:

$$\alpha f'_1 + \beta f'_2 + \gamma f'_3 = (\alpha + \beta)f_1 + (\alpha + \gamma)f_2 + (\beta + \gamma)f_3.$$

Décomposer un vecteur $af_1 + bf_2 + cf_3$ sur $\mathcal{F}'$ revient donc à résoudre $\alpha + \beta = a$, $\alpha + \gamma = b$, $\beta + \gamma = c$. En additionnant les trois lignes, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{a+b+c}{2}$, d'où par soustraction :

$$\alpha = \frac{a+b-c}{2}, \qquad \beta = \frac{a-b+c}{2}, \qquad \gamma = \frac{-a+b+c}{2}.$$

Pour $u(e'_1)$, c'est-à-dire $(a, b, c) = (2, 3, 0)$, on trouve $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; pour $u(e'_2)$, c'est-à-dire $(a, b, c) = (3, 2, 2)$, on trouve $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Finalement :

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. La formule générale est ici $A' = Q^{-1}AP$: on lit AP comme la matrice des $u(e'_j)$ dans $\mathcal{F}$, puis Q^{-1} les réexprime dans $\mathcal{F}'$. Elle ne se réduit à $P^{-1}AP$ que pour un endomorphisme représenté dans une *même* base au départ et à l'arrivée. En pratique, revenir aux images des vecteurs de base, comme ci-dessus, évite le calcul de Q^{-1}.

Correction de l'exercice 2.69 **Énoncé p. 34**

Dire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N$ pour $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, c'est dire, en lisant les colonnes de N :

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \qquad \text{et} \qquad f(\varepsilon_2) = 0_E.$$

La base cherchée est donc de la forme $(x, f(x))$, et la seconde condition est automatique puisque $f^2 = 0$. Tout revient à trouver x tel que $(x, f(x))$ soit libre.
Comme $f \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0_E$. Posons $\varepsilon_1 = x$ et $\varepsilon_2 = f(x)$, et montrons que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda x + \mu f(x) = 0_E$. En appliquant f et en utilisant $f^2 = 0$:

$$\lambda f(x) + \mu f^2(x) = \lambda f(x) = 0_E,$$

et comme $f(x) \neq 0_E$, il vient $\lambda = 0$. Il reste $\mu f(x) = 0_E$, donc $\mu = 0$.
La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est ainsi libre à $2 = \dim E$ éléments : c'est une base $\mathcal{B}$ de E. Enfin $f(\varepsilon_1) = f(x) = \varepsilon_2 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_2) = f^2(x) = 0_E$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N$.

Correction de l'exercice 2.70 **Énoncé p. 34**

Linéarité. Pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la dérivation est linéaire, donc $(\lambda P + Q)^{(k)} = \lambda P^{(k)} + Q^{(k)}$, et en évaluant en a_k :

$$f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q).$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}_n[X], \mathbb{C}^{n+1}\right)$.

Injectivité. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$ et supposons $P \neq 0$. Notons $d = \deg P$; alors $0 \leq d \leq n$, et si $\alpha \neq 0$ désigne le coefficient dominant de P, la dérivée d-ième de P est le polynôme constant :

$$P^{(d)} = d!\,\alpha \neq 0.$$

En particulier $P^{(d)}(a_d) = d!\,\alpha \neq 0$, ce qui contredit $f(P) = 0$, dont la $(d+1)$-ième composante est justement $P^{(d)}(a_d)$. Donc $P = 0$ et, d'après la proposition du cours, f est injective.
Conclusion. Les espaces $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ sont tous deux de dimension $n+1$. Une application linéaire injective entre deux espaces de *même* dimension finie est bijective (proposition du cours). Donc f est un isomorphisme.

Correction de l'exercice 2.71 **Énoncé p. 34**

1. Pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit matriciel donne :

$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N).$$

   Donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. L'observation qui gouverne tout l'exercice est que le produit AM se calcule *colonne par colonne* : si $M = (C_1 \mid C_2)$, alors $AM = (AC_1 \mid AC_2)$.

   (a) Ainsi $AM = 0$ si et seulement si $AC_1 = 0$ et $AC_2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les deux colonnes de M appartiennent à $\operatorname{Ker} A$. Or $A(x,y)^\top = (2x - 4y,\ 3x - 6y)^\top$ s'annule si et seulement si $x = 2y$, donc $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}((2,1)^\top)$, qui est une droite. Les matrices de $\operatorname{Ker} f$ sont donc exactement celles de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

   Les deux matrices ci-dessus engendrent $\operatorname{Ker} f$ et sont clairement libres (l'une a sa seconde colonne nulle, l'autre sa première) : elles en forment une base et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

   (b) Le théorème du rang donne $\operatorname{rg} f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$. Par ailleurs, toujours colonne par colonne, $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des matrices dont les deux colonnes appartiennent à $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}((2,3)^\top)$ (les deux colonnes de A sont proportionnelles). Cet ensemble est :

$$\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right),$$

   qui est de dimension 2, pour la même raison que ci-dessus. Comme il contient $\operatorname{Im} f$ et a la même dimension que lui, il lui est égal : les deux matrices ci-dessus forment une base de $\operatorname{Im} f$, et $\operatorname{rg} f = 2$.

Correction de l'exercice 2.72 **Énoncé p. 34**

Introduisons la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf ceux de l'anti-diagonale, qui valent 1 :

$$J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{par exemple} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n = 4.$$

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, J est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base renversée $(e_n, \dots, e_1)$. En particulier $J^2 = I_n$, donc $J \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $J^{-1} = J$.
Effet de la conjugaison par J. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $J_{ik} = 1$ si et seulement si $k = n+1-i$, il vient $(JM)_{ij} = \sum_k J_{ik} M_{kj} = M_{n+1-i,\, j}$, puis de même :

$$(JMJ)_{ij} = \sum_k (JM)_{ik} J_{kj} = M_{n+1-i,\, n+1-j}.$$

Autrement dit, JMJ s'obtient à partir de M en renversant simultanément l'ordre des lignes et celui des colonnes.
Conclusion. Soit T une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire telle que $T_{ab} = 0$ dès que $a > b$. Posons $T' = JTJ$. Pour $j > i$, on a $n+1-i > n+1-j$, donc :

$$T'_{ij} = T_{n+1-i,\, n+1-j} = 0.$$

Ainsi T' est triangulaire inférieure, et comme $J^{-1} = J$:

$$T' = J^{-1} T J,$$

donc T et T' sont semblables. La réciproque s'obtient exactement de la même façon : si T est triangulaire inférieure, le même calcul montre que JTJ est triangulaire supérieure.

Correction de l'exercice 2.73 **Énoncé p. 34**

1. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, le polynôme $P(X+1)$ est encore de degré au plus n (la substitution $X \mapsto X+1$ ne change pas le degré), donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est linéaire : pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $\lambda P + Q$ évalué en $X+1$ vaut $\lambda P(X+1) + Q(X+1)$. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Notons $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique. La formule du binôme donne, pour $0 \leq j \leq n$:

$$f(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} X^i,$$

   la seconde écriture étant licite grâce à la convention $\binom{j}{i} = 0$ pour $i > j$. La colonne j de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est donc $\left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leq i \leq n}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A.$$

2. L'application $g \colon P(X) \mapsto P(X-1)$ est, pour les mêmes raisons, un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$(g \circ f)(P) = f(P)(X-1) = P\left((X-1)+1\right) = P(X),$$

et de même $f \circ g = \mathrm{Id}$. Donc f est bijective, d'application réciproque g. Par conséquent $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible, et :

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g).$$

Or, toujours par la formule du binôme :

$$g(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i,$$

d'où, en notant que $(-1)^{j-i} = (-1)^{i+j}$:

$$A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i,j \leq n}.$$

Commentaire. Vérifier directement que le produit de A par la matrice annoncée vaut I_{n+1} reviendrait à établir l'identité $\sum_k (-1)^{k+i} \binom{j}{k} \binom{k}{i} = \delta_{ij}$, ce qui est faisable mais pénible. Le détour par $\mathbb{R}_n[X]$ remplace ce calcul par une évidence : décaler de 1, puis de -1, ne fait rien.

Correction de l'exercice 2.74 **Énoncé p. 34**

1. Les colonnes de N se lisent ainsi : si $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, la condition $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N$ équivaut à
$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \qquad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_3, \qquad f(\varepsilon_3) = 0_E.$$
On cherche donc une base de la forme $\big(x, f(x), f^2(x)\big)$, la dernière condition étant automatique puisque $f^3 = 0$.
Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0_E$. Montrons que $\big(x, f(x), f^2(x)\big)$ est libre. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ tels que :
$$\lambda x + \mu f(x) + \nu f^2(x) = 0_E.$$
En appliquant f^2, et comme $f^3 = f^4 = 0$, il reste $\lambda f^2(x) = 0_E$, donc $\lambda = 0$. En appliquant alors f à $\mu f(x) + \nu f^2(x) = 0_E$, il reste $\mu f^2(x) = 0_E$, donc $\mu = 0$; enfin $\nu f^2(x) = 0_E$ donne $\nu = 0$.
La famille $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x)\big)$ est libre à $3 = \dim E$ éléments : c'est une base, et par construction $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N$.
2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Pour tous i, j :
$$(NA)_{ij} = \sum_k N_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{i-1,\,j} & \text{si } i \geq 2, \\ 0 & \text{si } i = 1, \end{cases} \qquad (AN)_{ij} = \sum_k a_{ik} N_{kj} = \begin{cases} a_{i,\,j+1} & \text{si } j \leq 2, \\ 0 & \text{si } j = 3, \end{cases}$$
puisque $N_{ik} = 1$ exactement pour $k = i-1$, et $N_{kj} = 1$ exactement pour $k = j+1$. L'égalité $AN = NA$ équivaut donc au système obtenu en parcourant les neuf couples (i, j) :
   - $j = 3$ et $i \geq 2$ donnent $a_{i-1,3} = 0$, soit $a_{13} = a_{23} = 0$;
   - $i = 1$ et $j \leq 2$ donnent $a_{1,j+1} = 0$, soit $a_{12} = a_{13} = 0$;
   - les couples restants, $i \geq 2$ et $j \leq 2$, donnent $a_{i-1,j} = a_{i,j+1}$, c'est-à-dire $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{23}$, $a_{21} = a_{32}$ et $a_{22} = a_{33}$.

Les coefficients strictement au-dessus de la diagonale sont donc nuls, les coefficients diagonaux sont tous égaux, et il en va de même des deux coefficients de la première sous-diagonale. Autrement dit :

$$C_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \middle| \, (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \right\} = \text{Vect}\left(I_3, N, N^2\right),$$

la dernière égalité résultant de $N^2 = \left(\delta_{i,\,j+2}\right)_{ij}$, c'est-à-dire de la matrice dont le seul coefficient non nul est celui d'indice $(3,1)$, égal à 1. En particulier C_N est un sous-espace vectoriel de dimension 3.

3. L'application $g \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, qui transforme la composition en produit matriciel. Ainsi, pour $g \in \mathcal{L}(E)$, en notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$:

$$g \circ f = f \circ g \iff AN = NA \iff A \in \text{Vect}\left(I_3, N, N^2\right).$$

Or $I_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$, $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $N^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$. Comme $g \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est linéaire et bijective, elle envoie $\text{Vect}\left(\text{Id}_E, f, f^2\right)$ sur $\text{Vect}\left(I_3, N, N^2\right)$, d'où :

$$\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}\left(\text{Id}_E, f, f^2\right).$$

Commentaire. L'inclusion $\supset$ était claire dès le départ : toute combinaison linéaire de Id_E, f et f^2 commute évidemment avec f. Tout le travail consiste à montrer qu'il n'y a *rien d'autre*, et c'est le calcul matriciel de la question 2 qui l'établit. Le phénomène n'est pas général : le commutant de Id_E, par exemple, est $\mathcal{L}(E)$ tout entier. Ce qui le déclenche ici, c'est que f possède un vecteur x dont les images itérées engendrent E : un tel endomorphisme est dit *cyclique*, et son commutant se réduit toujours aux polynômes en f.

Correction de l'exercice 2.75 **Énoncé p. 35**

Faire apparaître une matrice inversible. L'hypothèse $AB = A+B$ se réécrit $AB-A-B = 0$, et il ne manque qu'un I_n pour factoriser :

$$(A - I_n)(B - I_n) = AB - A - B + I_n = I_n.$$

Cette égalité, entre matrices *carrées*, suffit à conclure que $A - I_n$ est inversible, d'inverse $B - I_n$.
Exprimer B à partir de A. Repartons de $AB = A + B$, sous la forme $AB - B = A$, c'est-à-dire :

$$(A - I_n)B = A.$$

En multipliant à gauche par $(A - I_n)^{-1}$:

$$B = (A - I_n)^{-1}A.$$

Conclure. Rappelons que le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par ses colonnes, c'est-à-dire le rang de l'application linéaire $m\colon X \mapsto MX$. Si $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{Im}(PM) = P\,(\text{Im}\, M)$, et $X \mapsto PX$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$: elle conserve donc les dimensions, d'où $\text{rg}(PM) = \text{rg}(M)$. Appliqué à $P = (A - I_n)^{-1}$ et $M = A$, ceci donne :

$$\text{rg}(B) = \text{rg}\left((A - I_n)^{-1}A\right) = \text{rg}(A).$$

Correction de l'exercice 2.76 **Énoncé p. 35**

L'ingrédient clé. Montrons d'abord que $AB = B$. Comme $A^2 = A$, la matrice A est celle d'un projecteur, et l'on sait alors que :

$$\mathrm{Im}(A) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = X\}.$$

En effet, si $AX = X$ alors $X \in \mathrm{Im}(A)$; réciproquement, si $X = AY$ pour un certain Y, alors $AX = A^2Y = AY = X$.
Soit maintenant C une colonne quelconque de B. Elle appartient à $\mathrm{Im}(B)$, donc à $\mathrm{Im}(A)$ par hypothèse, donc $AC = C$. Comme le produit AB se calcule colonne par colonne, il vient :

$$AB = B.$$

Conclusion. Il ne reste qu'à insérer cette égalité dans l'hypothèse $BAB = B$:

$$B^2 = B \cdot B = B \cdot (AB) = (BA)B = BAB = B.$$

Donc B est également un projecteur.

Correction de l'exercice 2.77 **Énoncé p. 35**

1. Pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la bilinéarité du produit matriciel donne :

   $$f(\lambda M+N) = A(\lambda M+N)-(\lambda M+N)B = \lambda(AM-MB)+(AN-NB) = \lambda f(M)+f(N).$$

   Comme f est de plus à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Introduisons les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

   $$L : M \longmapsto AM \qquad \text{et} \qquad R : M \longmapsto MB,$$

   de sorte que $f = L - R$. Ils commutent : par associativité du produit matriciel,

   $$(L \circ R)(M) = A(MB) = (AM)B = (R \circ L)(M).$$

   La formule du binôme est donc licite dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ pour ces deux éléments, et :

   $$f^p = (L - R)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k L^{p-k} \circ R^k.$$

   Or une récurrence immédiate donne $L^q(M) = A^qM$ et $R^k(M) = MB^k$, d'où $\left(L^{p-k} \circ R^k\right)(M) = A^{p-k}MB^k$. En évaluant l'égalité précédente en M :

   $$f^p(M) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k}MB^k.$$

3. Supposons A et B nilpotentes : il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^a = 0$ et $B^b = 0$. Posons $p = a + b - 1$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dans la somme donnant $f^p(M)$, examinons le terme d'indice k, avec $0 \leq k \leq p$:
   - si $k \geq b$, alors $B^k = B^bB^{k-b} = 0$, donc le terme est nul ;
   - si $k \leq b-1$, alors $p-k \geq (a+b-1)-(b-1) = a$, donc $A^{p-k} = A^aA^{p-k-a} = 0$ et le terme est encore nul.

   Tous les termes sont nuls, donc $f^p(M) = 0$ pour toute M, c'est-à-dire $f^{a+b-1} = 0$: f est nilpotente.

Correction de l'exercice 2.78 **Énoncé p. 35**

La troisième colonne est presque proportionnelle à la deuxième : ses deux premiers coefficients valent a fois ceux de C_2. L'opération $C_3 \leftarrow C_3 - aC_2$ est donc tout indiquée ; elle ne change pas le déterminant et fait apparaître deux zéros :

$$\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & c & 0 \\ b & c & bc - ac \end{vmatrix}.$$

On développe alors par rapport à la troisième colonne, dont le seul coefficient non nul est en position $(3,3)$, de cofacteur $+$:

$$= c(b-a) \begin{vmatrix} a & b \\ a & c \end{vmatrix} = c(b-a)\, a(c-b).$$

Finalement, en changeant deux fois de signe :

$$\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix} = ac(a-b)(b-c).$$

Correction de l'exercice 2.79 **Énoncé p. 35**

La première colonne est constante : on élimine avec elle. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ laissent le déterminant inchangé :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ca-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c(a-b) \\ c-a & b(a-c) \end{vmatrix},$$

la dernière égalité étant le développement par rapport à la première colonne. On factorise ce déterminant d'ordre 2 :

$$(b-a)\, b(a-c) - c(a-b)(c-a) = (b-a)\,[b(a-c) + c(c-a)] = (b-a)(a-c)(b-c),$$

car $-c(a-b) = c(b-a)$ et $c(c-a) = -c(a-c)$. En réorganisant les signes :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Correction de l'exercice 2.80 **Énoncé p. 35**

La première ligne est constante : on élimine avec la première colonne. Les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ ne changent pas le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}.$$

On factorise ensuite $b-a$ dans la première colonne et $c-a$ dans la seconde, grâce aux identités $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ et $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$:

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & c+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}.$$

Il reste à développer le crochet :

$$(b+a)(c^2+ac+a^2)-(c+a)(b^2+ab+a^2) = bc^2+ac^2-b^2c-ab^2,$$

tous les autres termes se simplifiant deux à deux. On regroupe :

$$bc^2-b^2c+ac^2-ab^2 = bc(c-b)+a(c-b)(c+b) = (c-b)(ab+bc+ca).$$

Finalement :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca),$$

après réorganisation des signes de $(b-a)(c-a)(c-b)$.

Correction de l'exercice 2.81 **Énoncé p. 36**

Aucune ligne ni aucune colonne n'a de somme remarquable, mais la somme des *trois lignes* est constante : colonne par colonne,

$$2a+(b-c-a)+2c = a+b+c, \qquad (a-b-c)+2b+2c = a+b+c, \qquad 2a+2b+(c-a-b) = a+b+c.$$

On effectue donc $L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3$, qui ne change pas le déterminant, puis on factorise $a+b+c$ dans la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

La première ligne étant maintenant constante, on élimine avec la première colonne : $C_2 \leftarrow C_2-C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3-C_1$. Comme $2b-(b-c-a) = a+b+c$ et $(c-a-b)-2c = -(a+b+c)$:

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-c-a & a+b+c & a+b+c \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant est celui d'une matrice triangulaire : il vaut $-(a+b+c)^2$. Finalement :

$$\begin{vmatrix} 2a & a-b-c & 2a \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = -(a+b+c)^3.$$

Commentaire. Le signe mérite qu'on s'y arrête. En échangeant les deux premières colonnes de la matrice de départ, on obtient la matrice *classique*

$$\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix},$$

de déterminant $(a+b+c)^3$: un échange de colonnes change le signe, ce qui explique le $-$.

Correction de l'exercice 2.82 **Énoncé p. 36**

La matrice est invariante par le décalage circulaire des lignes et des colonnes : L_1 et L_3, comme L_2 et L_4, ne diffèrent que par un décalage de deux crans. On exploite cette symétrie en soustrayant les lignes deux à deux. Les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ ne changent pas le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & 0 & c-a & 0 \\ 0 & a-c & 0 & c-a \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} = (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix},$$

après factorisation de $a - c$ dans chacune des deux premières lignes. On fait maintenant disparaître les -1 par $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$:

$$= (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & b & a+c & 2b \\ b & c & 2b & a+c \end{vmatrix} = (a-c)^2 \begin{vmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{vmatrix},$$

le dernier déterminant s'obtenant en développant deux fois par rapport à la première ligne. Il vaut $(a+c)^2 - 4b^2$, d'où :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} = (a-c)^2(a+c-2b)(a+c+2b).$$

Correction de l'exercice 2.83 **Énoncé p. 36**

1. L'application f va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, et pour toutes $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda M + N) = (\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top = \lambda f(M) + f(N).$$

   Donc $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

2. *Le rang.* On a $f \circ f = \mathrm{Id}$, car $(M^\top)^\top = M$ pour toute M. Ainsi f est bijective, d'inverse elle-même, donc $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2.$$

   Le déterminant. On calcule la matrice de f dans la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $f(E_{i,j}) = E_{j,i}$, la colonne d'indice (i,j) de $\mathrm{Mat}(f)$ est la colonne d'indice (j,i) de la matrice identité I_{n^2} : autrement dit, $\mathrm{Mat}(f)$ s'obtient à partir de I_{n^2} en permutant ses colonnes suivant l'échange $(i,j) \mapsto (j,i)$.
   Cet échange laisse fixes les n indices de la forme (i,i), et échange deux à deux les indices (i,j) et (j,i) pour $i < j$: il y a exactement $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tels couples. On passe donc de I_{n^2} à $\mathrm{Mat}(f)$ par $\dfrac{n(n-1)}{2}$ échanges de colonnes deux à deux disjoints, et chacun change le déterminant en son opposé. Comme $\det(I_{n^2}) = 1$:

$$\det(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Correction de l'exercice 2.84 **Énoncé p. 36**

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $u = (1, \dots, 1)^\top$. Toutes les colonnes de U sont égales à u : c'est la seule chose dont nous aurons besoin.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Les colonnes de $A + tU$ sont les $C_j + tu$. Développons le déterminant par multilinéarité, par rapport à la première colonne, puis à la deuxième, et ainsi de suite : on obtient une somme de 2^n déterminants, indexés par les parties S de $\{1, \dots, n\}$, celui d'indice S ayant pour j-ième colonne tu si $j \in S$ et C_j sinon. En sortant les facteurs t, et en notant $|S|$ le nombre d'éléments de S :

$$\det(A + tU) = \sum_S t^{|S|} \det(D_1^S, \dots, D_n^S), \qquad \text{où} \qquad D_j^S = \begin{cases} u & \text{si } j \in S, \\ C_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $|S| \geq 2$, le déterminant correspondant a deux colonnes égales à u : il est nul, car le déterminant est alterné. Il ne reste donc que les parties S vides ou réduites à un élément :

$$\det(A + tU) = \det(A) + t\Delta, \qquad \text{où} \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, u, C_{j+1}, \dots, C_n).$$

Le scalaire Δ ne dépend pas de t. En prenant $t = 1$ puis $t = -1$ et en additionnant, les deux termes $\pm\Delta$ se compensent :

$$\det(A + U) + \det(A - U) = (\det(A) + \Delta) + (\det(A) - \Delta) = 2\det(A).$$

Commentaire. On a montré davantage que l'énoncé : l'application $t \mapsto \det(A + tU)$ est *affine*. C'est le cas général : si $\operatorname{rg}(B) = r$, alors $t \mapsto \det(A + tB)$ est polynomiale de degré au plus r, car tout déterminant faisant intervenir plus de r colonnes de B a ses colonnes liées. Ici U est de rang 1, d'où le degré 1.

Correction de l'exercice 2.85 **Énoncé p. 36**

L'observation décisive tient dans la dernière ligne : son coefficient diagonal vaut $a_{n,n} = n$, comme tous les autres. Elle est donc *entièrement* constituée de n, et c'est elle qui va servir de pivot.
Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, effectuons $L_i \leftarrow L_i - L_n$: ces opérations ne changent pas le déterminant. Le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i vaut $a_{i,j} - n$, c'est-à-dire 0 si $j \neq i$, et $i - n$ si $j = i$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire inférieure : son déterminant est le produit des coefficients diagonaux, à savoir $1 - n$, $2 - n$, …, -1, puis n. Or :

$$\prod_{i=1}^{n-1} (i - n) = \prod_{k=1}^{n-1} (-k) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

en posant $k = n - i$. Finalement :

$$\det(A) = n \times (-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^{n-1}\, n!.$$

Commentaire. On vérifie sur les petits cas : pour $n = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 = -2!$; pour $n = 3$, le calcul donne $6 = 3!$.

Correction de l'exercice 2.86 **Énoncé p. 36**

Une relation de récurrence. Développons D_n par rapport à la première colonne, qui ne comporte que deux coefficients non nuls, $1 + a^2$ en position $(1, 1)$ et a en position $(2, 1)$:

$$D_n = (1 + a^2)\, D_{n-1} - a\, \delta_n,$$

où δ_n est le mineur obtenu en supprimant la deuxième ligne et la première colonne. La première ligne de ce mineur est $(a, 0, \dots, 0)$, et ce qui reste après suppression de sa première ligne et de sa première colonne est exactement le déterminant de même forme, d'ordre $n - 2$: en développant par rapport à la première ligne, $\delta_n = a\, D_{n-2}$. D'où, pour $n \geq 3$:

$$D_n = (1 + a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}.$$

Avec la convention $D_0 = 1$, la relation vaut encore pour $n = 2$, puisque $D_1 = 1 + a^2$ et $D_2 = (1 + a^2)^2 - a^2$.

Résolution. Plutôt que de passer par l'équation caractéristique, on remarque que la relation se réécrit :

$$D_n - D_{n-1} = a^2 \left(D_{n-1} - D_{n-2}\right).$$

La suite $(D_n - D_{n-1})_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison a^2, de premier terme $D_1 - D_0 = a^2$. Ainsi $D_n - D_{n-1} = a^{2n}$ pour tout $n \geq 1$, et en sommant en télescopant :

$$D_n = D_0 + \sum_{k=1}^{n} (D_k - D_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} a^{2k}.$$

Autrement dit :

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{1 - a^{2n+2}}{1 - a^2} & \text{si } a^2 \neq 1, \\ n + 1 & \text{si } a = 1 \text{ ou } a = -1. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2.87 **Énoncé p. 37**

Écrivons la matrice : sur la ligne i, les coefficients d'indice $j \leq i$ valent a^i, et ceux d'indice $j > i$ valent a^j :

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ a^2 & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ a^3 & a^3 & a^3 & \cdots & a^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n & a^n & \cdots & a^n \end{pmatrix}.$$

Deux lignes consécutives ne diffèrent qu'au début. Effectuons donc $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i = 1$, puis $i = 2$, et ainsi de suite jusqu'à $i = n - 1$: à chaque étape, la ligne L_{i+1} utilisée n'a pas encore été modifiée, et le déterminant est inchangé.

Calculons la nouvelle ligne L_i. Pour $j \leq i$, le coefficient devient $a^i - a^{i+1}$; pour $j = i + 1$, il devient $a^{i+1} - a^{i+1} = 0$; pour $j > i + 1$, il devient $a^j - a^j = 0$. La ligne L_i ne comporte donc que i coefficients non nuls, tous égaux à $a^i - a^{i+1}$, et placés dans

les i premières colonnes :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a-a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2-a^3 & a^2-a^3 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ a^{n-1}-a^n & a^{n-1}-a^n & \cdots & a^{n-1}-a^n & 0 \\ a^n & a^n & \cdots & a^n & a^n \end{vmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire inférieure. Son déterminant vaut donc :

$$\det(A) = a^n \prod_{i=1}^{n-1} \left(a^i - a^{i+1}\right) = a^n \prod_{i=1}^{n-1} a^i(1-a) = a^n \times a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times (1-a)^{n-1},$$

puisque $\sum_{i=1}^{n-1} i = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Finalement :

$$\det(A) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} (1-a)^{n-1}.$$

Commentaire. On contrôle sur $n = 2$: $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^3 - a^4 = a^3(1-a)$, ce qui est bien $a^3(1-a)^1$. Le facteur $(1-a)^{n-1}$ s'interprète : pour $a = 1$, tous les coefficients valent 1 et la matrice est de rang 1, donc de déterminant nul dès que $n \geq 2$.

Correction de l'exercice 2.88 **Énoncé p. 37**

Le coefficient se factorise presque :

$$a_{i,j} = ij + i + j = (i+1)(j+1) - 1.$$

Notons $v = (2, 3, \ldots, n+1)^\top$ et $u = (1, 1, \ldots, 1)^\top$. La j-ième colonne de A a pour i-ième coefficient $(j+1)(i+1) - 1$, c'est-à-dire :

$$C_j = (j+1)\, v - u.$$

Toutes les colonnes de A appartiennent donc au sous-espace $\mathrm{Vect}(u, v)$, qui est de dimension au plus 2.
Cas $n \geq 3$. La famille $(C_1, \ldots, C_n)$ compte $n \geq 3$ vecteurs dans un sous-espace de dimension au plus 2 : elle est liée. On peut même exhiber la relation :

$$C_1 - 2C_2 + C_3 = (2 - 2 \times 3 + 4)\, v - (1 - 2 + 1)\, u = 0.$$

D'après la caractérisation des bases par le déterminant, une famille liée de n vecteurs a un déterminant nul : $\det(A) = 0$.
Cas $n = 1$. La matrice est (3), donc $\det(A) = 3$.
Cas $n = 2$. La matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, de déterminant $24 - 25 = -1$.

Correction de l'exercice 2.89 **Énoncé p. 37**

Les hypothèses imposent en particulier que tous les coefficients de A sont *entiers*. Rappelons au passage que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier : cela se voit par récurrence sur la taille, en développant par rapport à une

ligne.

1. *Réduction modulo* 2. Notons $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, de sorte que $J - I_n$ a des 0 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs. Par hypothèse, les coefficients de $A - (J - I_n)$ sont tous pairs : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que :
$$A = (J - I_n) + 2B.$$
Développons $\det(A)$ par multilinéarité par rapport à chacune des n colonnes : on obtient une somme de 2^n déterminants, chacun ayant pour j-ième colonne soit celle de $J - I_n$, soit 2 fois celle de B. Le terme où toutes les colonnes proviennent de $J - I_n$ vaut $\det(J - I_n)$; tous les autres comportent au moins un facteur 2 en facteur d'un déterminant entier. Donc :
$$\det(A) \equiv \det(J - I_n) \pmod 2.$$
Calcul de $\det(J - I_n)$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ remplace la première colonne par la colonne constante égale à $n-1$, chaque ligne de $J - I_n$ comportant $n - 1$ coefficients égaux à 1. On factorise $n - 1$, puis on effectue $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geq 2$:
$$\det(J - I_n) = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix},$$
car la i-ième ligne devient nulle partout sauf en position (i, i), où elle vaut -1. La dernière matrice est triangulaire supérieure, d'où :
$$\det(J - I_n) = (n-1)\,(-1)^{n-1}.$$
Conclusion. Comme $(-1)^{n-1} \equiv 1 \pmod 2$, on obtient $\det(A) \equiv n - 1 \equiv n + 1 \pmod 2$, puis :
$$n + \det(A) \equiv 2n + 1 \equiv 1 \pmod 2,$$
c'est-à-dire $n + \det(A) \in 2\mathbb{Z} + 1$.
2. Si n est pair, alors $\det(A) \equiv n + 1 \equiv 1 \pmod 2$: le déterminant de A est un entier *impair*. En particulier il est non nul, donc A est inversible.

Commentaire. La parité de n est essentielle. Pour n impair, la question 1 dit que $\det(A)$ est pair, ce qui n'interdit rien : la matrice $A = (0)$ de taille 1 vérifie les hypothèses et n'est pas inversible, tandis que $A = J - I_3$ les vérifie aussi et est inversible, de déterminant 2.

Correction de l'exercice 2.90 **Énoncé p. 37**

Exploiter la relation. Multiplions l'hypothèse à gauche par $A + B$:
$$I_n = (A + B)\left(A^{-1} + B^{-1}\right) = I_n + AB^{-1} + BA^{-1} + I_n,$$
en développant et en utilisant $AA^{-1} = BB^{-1} = I_n$. Il reste :
$$AB^{-1} + BA^{-1} + I_n = 0.$$

Une équation sur une seule matrice. Posons $M = AB^{-1}$, qui est inversible comme produit de matrices inversibles, d'inverse $M^{-1} = BA^{-1}$. La relation précédente s'écrit :

$$M + M^{-1} + I_n = 0.$$

En multipliant par M :

$$M^2 + M + I_n = 0.$$

Passer au déterminant. L'identité $(M - I_n)\left(M^2 + M + I_n\right) = M^3 - I_n$, valable car M commute avec elle-même et avec I_n, donne :

$$M^3 = I_n.$$

On prend le déterminant : $\det(M)^3 = 1$. Or $\det(M)$ est un *réel*, et 1 est l'unique réel dont le cube vaut 1. Donc $\det(M) = 1$.
Conclusion. Enfin :

$$\det(M) = \det\left(AB^{-1}\right) = \det(A)\det\left(B^{-1}\right) = \frac{\det(A)}{\det(B)},$$

d'où $\det(A) = \det(B)$.
Commentaire. Le passage aux réels est indispensable : sur $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = 1$ a trois solutions, et l'énoncé devient faux. Pour $n = 1$ et $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$, les matrices $A = (j)$ et $B = (1)$ vérifient bien $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$, alors que $\det(A) = j \neq 1 = \det(B)$.
L'hypothèse n'est pourtant pas vide sur $\mathbb{R}$. Elle l'est en dimension 1, car $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$ ne s'annule pas pour (a, b) réels non nuls. Mais en dimension 2, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie $M^2 + M + I_2 = 0$, et le couple $A = M$, $B = I_2$ convient : on a bien $\det(A) = \det(B) = 1$.

Correction de l'exercice 2.91 **Énoncé p. 37**

Notons $a = (a_1, \ldots, a_n)^\top$, notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et Δ le déterminant cherché. Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice est $a_i a_j$ si $i \neq j$, et $a_i^2 + x$ si $i = j$: sa j-ième colonne est donc :

$$C_j = a_j\, a + x\, e_j.$$

Développons Δ par multilinéarité par rapport à chacune des n colonnes : on obtient une somme de 2^n déterminants, indexés par les parties S de $\{1, \ldots, n\}$, celui d'indice S ayant pour j-ième colonne $a_j a$ si $j \in S$, et xe_j sinon.
Si S contient au moins deux indices, le déterminant correspondant a deux colonnes proportionnelles à a : il est nul. Il ne reste donc que deux familles de termes.

- Pour $S = \emptyset$: $\det(xe_1, \ldots, xe_n) = x^n \det(e_1, \ldots, e_n) = x^n$.
- Pour $S = \{j\}$, on sort a_j de la j-ième colonne et x de chacune des $n - 1$ autres :

  $$\det(xe_1, \ldots, a_j a, \ldots, xe_n) = a_j\, x^{n-1} \det(e_1, \ldots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \ldots, e_n).$$

  Or, en développant une dernière fois par multilinéarité la colonne $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, tous les termes d'indice $i \neq j$ ont deux colonnes égales à e_i et disparaissent ; il ne survit que $a_j \det(e_1, \ldots, e_n) = a_j$. Le terme d'indice $S = \{j\}$ vaut donc $a_j^2\, x^{n-1}$.

En sommant :

$$\Delta = x^n + x^{n-1}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = x^{n-1}\left(x + \sum_{j=1}^{n} a_j^2\right).$$

Commentaire. On contrôle sur $n = 2$: $\left(a_1^2 + x\right)\left(a_2^2 + x\right) - a_1^2 a_2^2 = x^2 + x\left(a_1^2 + a_2^2\right)$, conforme. Le résultat s'interprète : la matrice est $aa^\top + xI_n$, perturbation de xI_n par une matrice de rang 1 (au plus). Le facteur x^{n-1} traduit le fait que, pour $x = 0$ et $n \geq 2$, il ne reste qu'une matrice de rang au plus 1, donc de déterminant nul. C'est le même mécanisme que dans l'exercice sur $\det(A + U) + \det(A - U)$: seule la multilinéarité travaille, et tout ce qui utilise deux fois la même colonne s'évanouit.

Correction de l'exercice 2.92 **Énoncé p. 37**

Le déterminant comme polynôme. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de colonnes N_1, N_2, N_3, et soient A_1, A_2, A_3 les colonnes de A. Pour tout $t \in \mathbb{C}$, développons $\det(A + tN)$ par multilinéarité par rapport aux trois colonnes et regroupons selon la puissance de t :

$$\det(A + tN) = \det(A) + t\,\alpha(N) + t^2\,\beta(N) + t^3\det(N),$$

où :

$$\alpha(N) = \det(N_1, A_2, A_3) + \det(A_1, N_2, A_3) + \det(A_1, A_2, N_3),$$

$$\beta(N) = \det(N_1, N_2, A_3) + \det(N_1, A_2, N_3) + \det(A_1, N_2, N_3).$$

Le point décisif est que $\alpha(N)$ et $\beta(N)$ sont *réels* : ce sont des déterminants de matrices à coefficients réels.
Utiliser l'hypothèse complexe. Appliquons la formule à $t = \mathrm{i}$, pour lequel $t^2 = -1$ et $t^3 = -\mathrm{i}$:

$$\det(A + \mathrm{i}N) = (\det(A) - \beta(N)) + \mathrm{i}\,(\alpha(N) - \det(N)).$$

Cette écriture est la décomposition en partie réelle et partie imaginaire, puisque les quatre quantités $\det(A)$, $\alpha(N)$, $\beta(N)$ et $\det(N)$ sont réelles. L'hypothèse $\det(A+\mathrm{i}B) = \det(A + \mathrm{i}C)$ donne donc, par identification :

$$\det(A) - \beta(B) = \det(A) - \beta(C) \qquad \text{et} \qquad \alpha(B) - \det(B) = \alpha(C) - \det(C).$$

La première égalité donne $\beta(B) = \beta(C)$. Dans la seconde, l'hypothèse $\det(B) = \det(C)$ permet de simplifier, d'où $\alpha(B) = \alpha(C)$.
Conclure. Il ne reste qu'à appliquer la formule à $t = 1$:

$$\det(A + B) = \det(A) + \alpha(B) + \beta(B) + \det(B),$$

$$\det(A + C) = \det(A) + \alpha(C) + \beta(C) + \det(C).$$

Les quatre termes coïncident deux à deux, donc $\det(A + B) = \det(A + C)$.
Commentaire. Tout l'exercice tient dans une idée : le déterminant n'est pas linéaire, mais $t \mapsto \det(A + tN)$ est *polynomiale* de degré au plus 3, et ses coefficients sont réels dès que A et N le sont. Évaluer en i un polynôme à coefficients réels, c'est en lire d'un coup les coefficients pairs (partie réelle) et impairs (partie imaginaire) : la donnée de $\det(A + \mathrm{i}B)$ et de $\det(B)$ équivaut à celle de $\alpha(B)$ et $\beta(B)$. Le nombre i n'a rien de magique : n'importe quel t non réel aurait fait l'affaire, ou même deux valeurs réelles non nulles et distinctes de t, jointes à $\det(B) = \det(C)$.

Correction de l'exercice 2.93 **Énoncé p. 38**

L'ensemble H est le noyau de la forme linéaire $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$, qui n'est pas nulle puisque $\varphi(e) = n \neq 0$: c'est donc un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ (corollaire du cours), et $\dim H = n - 1$. Par ailleurs $e \neq 0$, donc $\dim D = 1$. Ainsi :

$$\dim D + \dim H = 1 + (n-1) = n = \dim \mathbb{K}^n,$$

et il ne reste qu'à vérifier que la somme est directe. Soit $x \in D \cap H$: il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda e = (\lambda, \dots, \lambda)$, et $\varphi(x) = n\lambda = 0$ donne $\lambda = 0$, donc $x = 0$. D'après la caractérisation du cours, on conclut que $D \oplus H = \mathbb{K}^n$.

Correction de l'exercice 2.94 **Énoncé p. 38**

Sens direct. Supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
Pour tout $x \in E$, le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$, donc $f(f(x)) = 0_E$: ainsi $f^2 = 0$.
Par ailleurs, le théorème du rang donne :

$$n = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f + \operatorname{rg}(f) = 2\operatorname{rg}(f),$$

puisque $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f)$.
Sens réciproque. Supposons $f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$.
D'abord, $f^2 = 0$ fournit une inclusion : pour tout $x \in E$, on a $f(f(x)) = 0_E$, c'est-à-dire $f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Donc :

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f.$$

Ensuite, le théorème du rang et l'hypothèse $n = 2\operatorname{rg}(f)$ donnent :

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg}(f) = 2\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f.$$

Un sous-espace vectoriel inclus dans un autre et de même dimension lui est égal : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
Commentaire. L'exemple le plus simple est $f : (x, y) \mapsto (y, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$: son noyau et son image valent tous deux $\mathbb{R} \times \{0\}$, avec $f^2 = 0$ et $2 = 2 \times 1$. Noter que la condition $n = 2\operatorname{rg}(f)$ impose à n d'être pair : en dimension impaire, aucun endomorphisme ne vérifie $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

Correction de l'exercice 2.95 **Énoncé p. 38**

Nous utiliserons librement l'identité $\operatorname{Im}(g \circ h) = g(\operatorname{Im} h)$, établie dans l'exercice « Noyau et image d'une composée » ; en particulier $\operatorname{Im}(f^2) = f(\operatorname{Im} f)$ et $\operatorname{Im}(f^3) = f\left(\operatorname{Im}(f^2)\right)$.
Deux inclusions. L'hypothèse $f^3 = 0$ se lit de deux façons : pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$f^2(f(x)) = 0 \quad \text{donne} \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f^2), \qquad f\left(f^2(x)\right) = 0 \quad \text{donne} \quad \operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker} f.$$

Calcul de $\operatorname{rg}(f)$. Posons $r = \operatorname{rg}(f)$ et excluons une à une les valeurs autres que 2.

- Si $r = 0$, alors $f = 0$, donc $f^2 = 0$: exclu.
- Si $r = 3$, alors f est surjective, donc bijective (proposition du cours) ; alors f^3 est bijective, ce qui contredit $f^3 = 0$.
- Si $r = 1$: comme $f^2 \neq 0$, on a $\operatorname{rg}(f^2) \geq 1$; et $\operatorname{Im}(f^2) = f(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$ donne $\operatorname{rg}(f^2) \leq r = 1$. Les deux sous-espaces emboîtés $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im} f$ ont alors la

même dimension 1, donc $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im} f$. Mais alors :

$$\operatorname{Im}(f^3) = f\left(\operatorname{Im}(f^2)\right) = f(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im}(f^2) \neq \{0\},$$

ce qui contredit $f^3 = 0$. Exclu.

Donc $\operatorname{rg}(f) = 2$.
Calcul de $\operatorname{rg}(f^2)$. L'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ et le théorème du rang appliqué à f^2 donnent :

$$2 = \operatorname{rg}(f) \leq \dim \operatorname{Ker}(f^2) = 3 - \operatorname{rg}(f^2),$$

soit $\operatorname{rg}(f^2) \leq 1$; et $f^2 \neq 0$ donne $\operatorname{rg}(f^2) \geq 1$. Donc $\operatorname{rg}(f^2) = 1$.
Les deux égalités. Le théorème du rang appliqué à f donne $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \operatorname{rg}(f) = 1$, et appliqué à f^2 : $\dim \operatorname{Ker}(f^2) = 3 - \operatorname{rg}(f^2) = 2$. Il ne reste qu'à comparer les dimensions dans les deux inclusions du début :

— $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$ avec $\operatorname{rg}(f) = 2 = \dim \operatorname{Ker}(f^2)$, donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f^2)$;

— $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker} f$ avec $\operatorname{rg}(f^2) = 1 = \dim \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Ker} f$.

Commentaire. Le modèle de cette situation est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini sur la base canonique par $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$, $f(e_3) = e_2$, dont la matrice a des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs. On y lit la chaîne strictement croissante :

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} f \subsetneq \operatorname{Ker}(f^2) \subsetneq \mathbb{R}^3,$$

de dimensions 0, 1, 2, 3 : pour un nilpotent d'ordre maximal, les noyaux itérés grimpent d'exactement une dimension à chaque étage.

Correction de l'exercice 2.96 **Énoncé p. 38**

1. Pour tout $x \in E$, l'hypothèse $f + g = \mathrm{Id}_E$ s'écrit :

   $$x = f(x) + g(x) \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$

   Donc $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Passons aux dimensions : par la formule de Grassmann,

   $$n = \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq n.$$

   Les deux inégalités de cette chaîne sont donc des égalités : d'une part $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$, d'autre part $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0_E\}$. La somme est directe et vaut E :

   $$\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g = E.$$

2. Le point clé est le suivant : pour $x \in E$, l'écriture $x = f(x) + g(x)$, avec $f(x) \in \operatorname{Im} f$ et $g(x) \in \operatorname{Im} g$, est *la* décomposition de x selon la somme directe $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$ — et cette décomposition est unique.
   Appliquons-la à un vecteur $y \in \operatorname{Im} f$. Sa décomposition évidente est $y = y + 0_E$, avec $y \in \operatorname{Im} f$ et $0_E \in \operatorname{Im} g$. Par unicité :

   $$f(y) = y \qquad \text{et} \qquad g(y) = 0_E.$$

   De même, pour $z \in \operatorname{Im} g$: $g(z) = z$ et $f(z) = 0_E$.
   Il n'y a plus qu'à conclure. Pour tout $x \in E$, le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$, donc $f(f(x)) = f(x)$: ainsi $f^2 = f$ et f est un projecteur. De même, $g(g(x)) = g(x)$ pour tout x, et g est un projecteur.

Commentaire. On a montré au passage que g est nulle sur $\operatorname{Im} f$ et vaut l'identité sur $\operatorname{Im} g$: avec $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Im} f$ et l'égalité des dimensions ($\dim \operatorname{Ker} g = n - \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(f)$), il vient $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Ainsi f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Im} g$, et g la projection complémentaire.

Correction de l'exercice 2.97 **Énoncé p. 38**

Notons $h = g|_{\operatorname{Im} f}$ la restriction de g au sous-espace $\operatorname{Im} f$ de F : c'est une application linéaire de $\operatorname{Im} f$ dans G.

1. Pour $y \in \operatorname{Im} f$:

$$y \in \operatorname{Ker} h \iff h(y) = 0_G \iff g(y) = 0_G \iff y \in \operatorname{Ker} g.$$

   Un vecteur de $\operatorname{Im} f$ appartient donc à $\operatorname{Ker} h$ si et seulement s'il appartient à $\operatorname{Ker} g$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Ker}\left(g|_{\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f).$$

2. L'espace de départ de h est $\operatorname{Im} f$, de dimension finie : appliquons-lui le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} h + \operatorname{rg}(h).$$

   Or l'image de h est exactement celle de $g \circ f$:

$$\operatorname{Im} h = g(\operatorname{Im} f) = \{g(f(x)) \mid x \in E\} = \operatorname{Im}(g \circ f),$$

   donc $\operatorname{rg}(h) = \operatorname{rg}(g \circ f)$. Avec la première question, le théorème du rang ci-dessus se réécrit :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)) + \operatorname{rg}(g \circ f),$$

   c'est-à-dire $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f))$.

3. Il suffit de majorer le terme soustrait : comme $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$, on a, en utilisant le théorème du rang pour g cette fois :

$$\dim(\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)) \leq \dim \operatorname{Ker}(g) = \dim(F) - \operatorname{rg}(g).$$

   En reportant dans la formule de la deuxième question :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg}(f) - (\dim(F) - \operatorname{rg}(g)) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(F).$$

Correction de l'exercice 2.98 **Énoncé p. 38**

Faire apparaître un inverse. Isolons Id_E dans la relation de l'énoncé :

$$\mathrm{Id}_E = f^2 - f \circ g + 2f = f \circ (f - g + 2\,\mathrm{Id}_E).$$

Posons $h = f - g + 2\,\mathrm{Id}_E$, de sorte que $f \circ h = \mathrm{Id}_E$. Cette égalité montre que f est surjective : tout $x \in E$ s'écrit $x = f(h(x))$. Comme E est de dimension finie, un endomorphisme surjectif de E est bijectif (proposition du cours) : f est donc inversible, et en composant $f \circ h = \mathrm{Id}_E$ à gauche par f^{-1} :

$$f^{-1} = h = f - g + 2\,\mathrm{Id}_E.$$

Conclure. Un endomorphisme commute toujours avec son inverse : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, donc :

$$f \circ (f - g + 2\,\mathrm{Id}_E) = (f - g + 2\,\mathrm{Id}_E) \circ f,$$

soit, en développant :

$$f^2 - f \circ g + 2f = f^2 - g \circ f + 2f.$$

Après simplification, il reste $f \circ g = g \circ f$.

Correction de l'exercice 2.99 **Énoncé p. 39**

A — Ce que la dimension finie garantit

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $x = \mathrm{Id}_E(x) = v\,(u(x)) = v(0_E) = 0_E$, donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et u est injective. Comme E est de dimension finie et que u est un endomorphisme de E, la caractérisation de la bijectivité en dimension finie assure que u est bijective.

   En composant à droite l'égalité $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ par u^{-1}, on obtient $v = u^{-1}$, d'où $u \circ v = u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_E$.

2. Soit v un inverse à gauche de u. La question précédente donne $v = u^{-1}$: il n'y en a donc qu'un.

   Soit maintenant v un inverse à droite de u, c'est-à-dire $u \circ v = \mathrm{Id}_E$. Cela signifie exactement que u est un inverse à gauche de v ; la question 1 appliquée au couple (v, u) donne $u = v^{-1}$, donc $v = u^{-1}$.

   Ainsi, en dimension finie, un endomorphisme possède au plus un inverse d'un côté ou de l'autre, et tous coïncident avec u^{-1}. En particulier, posséder un inverse d'un seul côté équivaut déjà à être bijectif.

B — Sur $\mathbb{R}[X]$

3. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} c_k X^k$. Les polynômes F tels que $F' = P$ sont exactement les

$$F = \sum_{k=0}^{d} \frac{c_k}{k+1} X^{k+1} + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

   puisque deux primitives diffèrent d'un polynôme de dérivée nulle, donc d'une constante. La condition $F(a) = 0$ détermine λ de manière unique : J_a est bien définie, et

$$J_a(P) = \sum_{k=0}^{d} c_k \frac{X^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

   Linéarité. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le polynôme $J_a(P) + \lambda J_a(Q)$ a pour dérivée $P + \lambda Q$ et s'annule en a ; par unicité, il est égal à $J_a(P + \lambda Q)$.

   Enfin, par définition, $D\,(J_a(P)) = (J_a(P))' = P$, donc $D \circ J_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$.

4. L'égalité $D \circ J_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ donne aussitôt : tout P s'écrit $P = D\,(J_a(P))$, donc D est surjective ; et si $J_a(P) = J_a(Q)$, en appliquant D on obtient $P = Q$, donc J_a est injective.

   En revanche $D(1) = 0$ avec $1 \neq 0$: D n'est pas injective, et $\operatorname{Ker} D$ est la droite des polynômes constants. Quant à J_a, tous les polynômes de son image

s'annulent en a ; le polynôme constant 1 n'est donc pas atteint et J_a n'est pas surjective.

Calculons $J_a \circ D$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme $P - P(a)$ a pour dérivée P' et s'annule en a : c'est donc *la* primitive de $D(P)$ nulle en a, et

$$J_a \circ D(P) = P - P(a).$$

On reconnaît le projecteur sur l'hyperplan $H_a = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(a) = 0\}$ parallèlement à la droite des constantes. C'est exactement ce qu'annonce l'exercice « Une composée qui vaut l'identité », dont on tient ici un exemple non trivial.

5. On a $J_a(1) = X - a$: si $a \neq b$, alors $J_a(1) \neq J_b(1)$ et $J_a \neq J_b$. Les applications J_a, $a \in \mathbb{R}$, sont donc deux à deux distinctes, et ce sont toutes des inverses à droite de D : *D possède une infinité d'inverses à droite.* La question 2 l'interdisait formellement en dimension finie.

   En revanche D n'a aucun inverse à gauche : si $w \circ D = \mathrm{Id}$, le raisonnement de la question 1 montrerait que D est injective, ce qu'elle n'est pas.

C — Une partie aussi grande que le tout

6. L'ensemble $X\mathbb{R}[X]$ est l'image de $\mathbb{R}[X]$ par l'application linéaire $P \mapsto XP$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Il est strict, car le polynôme constant 1 n'y appartient pas (tous ses éléments s'annulent en 0).

   Montrons que $\operatorname{Im} J_0 = X\mathbb{R}[X]$. D'une part, $J_0(P)$ s'annule en 0, donc est divisible par X : $\operatorname{Im} J_0 \subset X\mathbb{R}[X]$. D'autre part, soit $R \in X\mathbb{R}[X]$; alors $R(0) = 0$, et R est une primitive de R' nulle en 0, donc $R = J_0(R')$ par unicité. Ainsi $X\mathbb{R}[X] \subset \operatorname{Im} J_0$.

   Comme J_0 est injective d'après la question 4, elle induit un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ sur $X\mathbb{R}[X]$.

7. Soient E de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $f : E \to F$ un isomorphisme. Alors $\dim F = \dim E$. Or un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E est égal à E : F n'est pas un sous-espace strict.

   La question 6 exhibe donc un phénomène strictement réservé à la dimension infinie.

8. Prenons D^k, la dérivation itérée k fois. C'est une composée d'applications surjectives, donc une application surjective. Et $D^k(P) = 0$ si et seulement si $P^{(k)} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\deg P \leq k - 1$:

$$\operatorname{Ker} D^k = \mathbb{R}_{k-1}[X], \qquad \dim \operatorname{Ker} D^k = k$$

   (avec la convention $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$ pour $k = 0$).

   En dimension finie, le théorème du rang appliqué à un endomorphisme surjectif donnerait $\dim \operatorname{Ker} = 0$. Ici, le noyau est de dimension arbitrairement grande : le théorème du rang ne laisse aucune trace.

Commentaire. Cet exercice isole ce qu'apporte l'hypothèse de dimension finie. La question 1 en est la clef : c'est elle qui rend l'inverse unique et *bilatère*, c'est-à-dire inverse à la fois à gauche et à droite. Elle repose sur l'équivalence entre injectivité et surjectivité, elle-même conséquence du théorème du rang. Sans dimension finie, il n'en reste rien : un endomorphisme peut être surjectif sans être injectif, avoir une infinité d'inverses d'un côté et aucun de l'autre, et avoir un noyau de dimension arbitrairement grande tout en restant surjectif.

La question 6 mérite un mot de plus. Elle dit que $\mathbb{R}[X]$ est isomorphe à une *partie stricte* de lui-même. C'est en réalité une caractérisation : un ensemble est infini, au sens de Dedekind, exactement lorsqu'il est en bijection avec une partie stricte de lui-même. La version populaire de cette propriété est l'*hôtel de Hilbert*, dont les chambres sont numérotées par $\mathbb{N}$: bien qu'il soit complet, on y loge un client de plus en demandant à chacun de passer dans la chambre suivante. L'application J_0 ne fait rien d'autre, puisqu'elle envoie X^k sur un multiple de X^{k+1}.

Enfin, le couple (D, J_a) est le premier exemple d'une situation qui reviendra sans cesse en analyse : dériver perd de l'information — la constante — que l'intégration ne peut pas restituer sans une condition supplémentaire. Le choix du point a est exactement cette condition, et c'est pourquoi il y a une infinité d'inverses à droite : un par condition initiale.

Correction de l'exercice 2.100 **Énoncé p. 39**

1. Raisonnons par récurrence sur k.
   Initialisation. Pour $k = 0$, un chemin de longueur 0 de i à j est une suite à un seul terme (v_0) avec $v_0 = i$ et $v_0 = j$: il y en a un si $i = j$, aucun sinon. C'est bien le coefficient $(A^0)_{ij} = (I_n)_{ij}$.
   Hérédité. Supposons le résultat acquis au rang k. Un chemin de longueur $k+1$ de i à j est déterminé de manière unique par son avant-dernier sommet $\ell = v_k$, par le chemin de longueur k de i à ℓ qu'il commence par parcourir, et par l'existence de la flèche de ℓ vers j. En classant les chemins selon la valeur de ℓ :
   $$\#\{\text{chemins de longueur } k+1 \text{ de } i \text{ à } j\} = \sum_{\ell=1}^{n} (A^k)_{i\ell}\, a_{\ell j} = (A^{k+1})_{ij},$$
   car $a_{\ell j}$ vaut 1 s'il y a une flèche de ℓ vers j et 0 sinon. C'est exactement la définition du produit matriciel.
2. Le seul enchaînement interdit est celui d'un 1 suivi d'un 1, donc le graphe possède toutes les flèches sauf celle du sommet 2 vers lui-même :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Un mot $w_1 w_2 \cdots w_m$ sans deux 1 consécutifs correspond exactement au chemin $(v_0, \ldots, v_{m-1})$, où v_ℓ est le sommet associé à la lettre $w_{\ell+1}$; la condition sur les mots dit précisément que chaque passage d'une lettre à la suivante emprunte une flèche. Cette correspondance est bijective, et un mot de longueur m donne un chemin de longueur $m-1$. En sommant sur toutes les extrémités possibles, la question 1 donne
   $$u_m = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (A^{m-1})_{ij}.$$
   Un calcul direct donne
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I_2.$$
   En multipliant cette égalité par A^{m-1}, on obtient $A^{m+1} = A^m + A^{m-1}$ pour tout $m \geq 1$. Notons $\sigma(M)$ la somme des coefficients de M : c'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $u_m = \sigma(A^{m-1})$. En lui appliquant l'égalité précédente :
   $$u_{m+2} = u_{m+1} + u_m, \qquad u_1 = \sigma(I_2) = 2, \qquad u_2 = \sigma(A) = 3.$$

C'est la relation de récurrence de la suite de Fibonacci (F_m), définie par $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$. Comme $F_3 = 2 = u_1$ et $F_4 = 3 = u_2$, une récurrence double donne $u_m = F_{m+2}$ pour tout $m \geq 1$.

On peut aussi voir directement les choses avec l'exemple « Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 » des rappels : l'ensemble des suites vérifiant $u_{m+2} = u_{m+1} + u_m$ est un plan vectoriel, et deux conditions initiales suffisent à y déterminer une suite.

3. Les matrices I_n et A commutent, donc la formule du binôme s'applique :

$$(I_n + A)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k.$$

Tous les coefficients des A^k sont des entiers positifs ou nuls (ce sont des nombres de chemins), et les binomiaux sont strictement positifs : aucune compensation n'est possible dans cette somme. Ainsi

$$\left((I_n + A)^{n-1}\right)_{ij} \neq 0 \iff \exists\, k \in [\![0, n-1]\!],\ (A^k)_{ij} \neq 0,$$

c'est-à-dire si et seulement s'il existe un chemin de longueur au plus $n-1$ de i à j.

Sens direct. Si tous les coefficients de $(I_n + A)^{n-1}$ sont non nuls, alors pour tous i, j il existe un chemin de i à j : le graphe est connexe.

Réciproque. Supposons le graphe connexe et fixons i, j. Il existe un chemin de i à j ; choisissons-en un de longueur k minimale, disons $(v_0, \ldots, v_k)$. Ses sommets sont deux à deux distincts : si l'on avait $v_r = v_s$ avec $r < s$, alors, comme $v_r = v_s$, la suite $(v_0, \ldots, v_r, v_{s+1}, \ldots, v_k)$ serait encore un chemin de i à j, et il serait plus court. Le chemin visite donc $k+1$ sommets distincts parmi n, d'où $k+1 \leq n$, c'est-à-dire $k \leq n-1$. Le coefficient d'indice (i, j) est donc non nul.

On remarquera que la symétrie de A n'a servi à rien dans cette démonstration : elle garantit seulement que le mot « connexe » a bien son sens usuel, la relation « il existe un chemin de i à j » étant alors symétrique.

Commentaire. La question 1 mérite d'être relue à l'envers : elle dit que la définition du produit matriciel, avec ses sommes de produits d'indices accolés, n'est pas une convention arbitraire, mais la traduction fidèle de la *composition des chemins*. Le fait que le produit soit associatif et non commutatif se lit alors tout seul sur les chemins.

La question 2 illustre un principe de dénombrement très général. Dès qu'un problème de comptage possède un « état » en nombre fini qui résume tout ce qu'il faut savoir du passé — ici, la dernière lettre écrite — passer d'un rang au suivant est une application linéaire, donc une matrice ; le comptage devient un produit de matrices, et l'existence d'un polynôme annulateur de cette matrice (ici $X^2 - X - 1$) fournit une récurrence linéaire.

On peut aussi remplacer les coefficients 0 et 1 par des probabilités de transition : on tombe alors sur la théorie des *chaînes de Markov*. C'est sur elle que s'appuie l'algorithme PageRank, qui classe les pages web selon la fréquence de visite d'un marcheur aléatoire.

Correction de l'exercice 2.101 **Énoncé p. 40**

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $L_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ la somme de la i-ième ligne et $C_j(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$ celle de la j-ième colonne : ce sont des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors
$$\mathcal{M}_n = \bigcap_{i=2}^{n} \operatorname{Ker}(L_i - L_1) \cap \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}(C_j - L_1),$$
intersection de noyaux de formes linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sur $\mathcal{M}_n$, on a $s = L_1$ par définition, donc s est la restriction d'une forme linéaire : c'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$.
2. L'application Φ est clairement linéaire. Restreignons-la à $\mathcal{M}_n^0$, c'est-à-dire aux matrices magiques dont toutes les sommes de lignes et de colonnes sont nulles.
Injectivité. Soit $M \in \mathcal{M}_n^0$ avec $\Phi(M) = 0$, c'est-à-dire $m_{ij} = 0$ dès que $i \leq n-1$ et $j \leq n-1$. Pour $i \leq n-1$, la nullité de la i-ième ligne donne $m_{in} = -\sum_{j=1}^{n-1} m_{ij} = 0$; de même $m_{nj} = 0$ pour $j \leq n-1$. Enfin la nullité de la dernière ligne donne $m_{nn} = 0$. Donc $M = 0$.
Surjectivité. Soit $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Posons $m_{ij} = b_{ij}$ pour $i, j \leq n-1$, puis
$$m_{in} = -\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij}, \qquad m_{nj} = -\sum_{i=1}^{n-1} b_{ij}, \qquad m_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij},$$
pour $i, j \leq n-1$. Par construction, les $n-1$ premières lignes et les $n-1$ premières colonnes de M sont de somme nulle. Reste la dernière ligne :
$$\sum_{j=1}^{n} m_{nj} = -\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} = 0,$$
et le même calcul vaut pour la dernière colonne. Ainsi $M \in \mathcal{M}_n^0$ et $\Phi(M) = B$. C'est donc un isomorphisme, et $\dim \mathcal{M}_n^0 = \dim \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) = (n-1)^2$.
3. La matrice U est magique avec $s(U) = n \neq 0$: la forme linéaire s n'est pas nulle sur $\mathcal{M}_n$, et $U \notin \mathcal{M}_n^0$. Comme $\mathbb{R}U$ est une droite non contenue dans l'hyperplan $\mathcal{M}_n^0 = \operatorname{Ker} s$ de $\mathcal{M}_n$, on a $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n^0 \oplus \mathbb{R}U$. Concrètement, pour $M \in \mathcal{M}_n$:
$$M = \left(M - \frac{s(M)}{n}U\right) + \frac{s(M)}{n}U,$$
et le premier terme est bien de somme nulle. D'où
$$\dim \mathcal{M}_n = (n-1)^2 + 1, \qquad \text{et en particulier} \qquad \dim \mathcal{M}_3 = 5.$$
4. Les deux conditions ajoutées, $m_{11}+m_{22}+m_{33} = s(M)$ et $m_{13}+m_{22}+m_{31} = s(M)$, sont linéaires en M (puisque s l'est) : C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$.
Soit $M \in C$ et $s = s(M)$. Additionnons les quatre sommes suivantes, toutes égales à s : la deuxième ligne, la deuxième colonne, la diagonale principale et l'antidiagonale. Chacun des neuf coefficients de M apparaît alors exactement

une fois, sauf m_{22}, qui apparaît quatre fois. Comme la somme de tous les coefficients de M vaut $3s$ (somme des trois lignes), on obtient

$$4s = 3s + 3m_{22},$$

d'où $m_{22} = \dfrac{s}{3}$.

5. Soit $M \in \mathcal{C}$. Posons $c = m_{22}$, $a = m_{11} - c$ et $b = m_{13} - c$; d'après la question précédente, $s(M) = 3c$. Toutes les autres cases se déduisent alors les unes après les autres :

$$\begin{aligned}
m_{33} &= 3c - m_{11} - m_{22} = c - a && \text{(diagonale principale),}\\
m_{31} &= 3c - m_{13} - m_{22} = c - b && \text{(antidiagonale),}\\
m_{12} &= 3c - m_{11} - m_{13} = c - a - b && \text{(première ligne),}\\
m_{21} &= 3c - m_{11} - m_{31} = c - a + b && \text{(première colonne),}\\
m_{32} &= 3c - m_{31} - m_{33} = c + a + b && \text{(troisième ligne),}\\
m_{23} &= 3c - m_{13} - m_{33} = c + a - b && \text{(troisième colonne).}
\end{aligned}$$

Toute matrice de $\mathcal{C}$ a donc la forme annoncée. Réciproquement, on vérifie sur la matrice de l'énoncé que ses trois lignes, ses trois colonnes et ses deux diagonales ont toutes pour somme $3c$: elle appartient bien à $\mathcal{C}$.

L'application $(a, b, c) \mapsto M$ ainsi obtenue est linéaire et surjective de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{C}$; elle est injective, puisque $c = m_{22}$, $a = m_{11} - c$ et $b = m_{13} - c$ se lisent sur la matrice. C'est un isomorphisme, donc $\dim \mathcal{C} = 3$.

Pour le carré proposé, $c = m_{22} = 5$, $a = m_{11} - c = -3$ et $b = m_{13} - c = 1$: il correspond au triplet $(-3, 1, 5)$.

Commentaire. Pour décrire un ensemble défini par des contraintes linéaires, il est souvent plus court de construire une application linéaire vers un espace connu et d'en calculer la dimension que de résoudre le système. C'est ce que fait la question 2 : les $(n-1)^2$ cases du coin supérieur gauche sont libres et le reste s'en déduit ; le seul point à vérifier est que la dernière case, m_{nn}, imposée à la fois par sa ligne et par sa colonne, reçoit deux fois la même valeur.

L'algèbre linéaire donne la forme de tous les carrés magiques, mais ne dit rien de la question combinatoire associée : combien y a-t-il de carrés magiques d'ordre n à coefficients $1, 2, \ldots, n^2$? En taille 3, le carré de la question 5, appelé *Lo Shu*, est le seul à une symétrie du carré près : ses huit images par les rotations et les réflexions sont les huit solutions. En taille 4, il y en a 880 ; en taille 5, plusieurs centaines de millions, et le compte n'est connu que par ordinateur.

Une variante de $\mathcal{M}_n$ intervient en optimisation : les matrices *bistochastiques*, c'est-à-dire les matrices magiques à coefficients positifs dont toutes les sommes valent 1. Le théorème de Birkhoff dit qu'elles sont exactement les barycentres à coefficients positifs des matrices de permutation ; ajouter une condition de positivité aux contraintes linéaires fait quitter l'algèbre linéaire pour la géométrie des polyèdres convexes.

Correction de l'exercice 2.102 **Énoncé p. 41**

A — La matrice de Sylvester

1. Pour $0 \leq k \leq n-1$, $\deg(X^k Q) = k + m \leq n + m - 1$, et pour $0 \leq k \leq m-1$, $\deg(X^k P) = k + n \leq n + m - 1$: les $n + m$ polynômes de $\mathcal{F}$ appartiennent bien

à $\mathbb{C}_{n+m-1}[X]$, qui est de dimension $n+m$ (base $\mathcal{B}$). La famille $\mathcal{F}$ ayant autant d'éléments que la dimension de l'espace, son déterminant dans $\mathcal{B}$ a un sens, et la caractérisation des bases des rappels s'applique.

2. Ici $n=2$ et $m=1$, donc $\mathcal{F}=(Q,XQ,P)$ dans $\mathbb{C}_2[X]$. On lit les coordonnées de $Q=b_0+b_1X$, de $XQ=b_0X+b_1X^2$ et de $P=a_0+a_1X+a_2X^2$ en colonnes :

$$\operatorname{Res}(P,Q)=\begin{vmatrix} b_0 & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & a_1 \\ 0 & b_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

B — Ce que le résultant détecte

3. Une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k X^k Q + \sum_{k=0}^{m-1} v_k X^k P = UQ+VP, \qquad U=\sum_{k=0}^{n-1} u_k X^k, \quad V=\sum_{k=0}^{m-1} v_k X^k,$$

et les contraintes $\deg U < n$, $\deg V < m$ traduisent exactement le fait que U et V parcourent tous les polynômes possibles. Les scalaires de la combinaison sont les coefficients de U et de V : ils ne sont pas tous nuls si et seulement si $(U,V)\neq(0,0)$. Dire que $\mathcal{F}$ est liée, c'est donc dire qu'il existe un tel couple avec $UQ+VP=0$.

4. Puisque α est racine de P et de Q, écrivons $P=(X-\alpha)P_1$ et $Q=(X-\alpha)Q_1$, avec $\deg P_1 = n-1$ et $\deg Q_1 = m-1$. Posons $U=P_1$ et $V=-Q_1$: alors $\deg U = n-1 < n$, $\deg V = m-1 < m$, $U\neq 0$, et

$$UQ+VP = P_1(X-\alpha)Q_1 - Q_1(X-\alpha)P_1 = 0.$$

5. Supposons $UQ=-VP$ avec $(U,V)\neq(0,0)$ et les contraintes de degré. Si $U=0$, alors $VP=0$ avec $P\neq 0$, donc $V=0$ et le couple est nul : exclu. Donc $U\neq 0$, et symétriquement $V\neq 0$.

   Supposons maintenant, par l'absurde, que P et Q n'aient aucune racine commune. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, écrivons

$$P=\lambda\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{\mu_i},$$

   avec $\lambda\neq 0$, les α_i deux à deux distincts et $\sum_{i=1}^{r}\mu_i = n$. Fixons i. Le polynôme $(X-\alpha_i)^{\mu_i}$ divise P, donc divise $VP=-UQ$. Or $Q(\alpha_i)\neq 0$ par hypothèse, donc $X-\alpha_i$ ne divise pas Q et $(X-\alpha_i)^{\mu_i}$ est premier avec Q : on peut le simplifier, et $(X-\alpha_i)^{\mu_i}$ divise U.

   Les polynômes $(X-\alpha_i)^{\mu_i}$, pour i variant, sont deux à deux premiers entre eux ; leur produit divise donc U, ce qui donne $\deg U \geq \sum_i \mu_i = n$. C'est incompatible avec $\deg U < n$, puisque $U\neq 0$. Contradiction : P et Q ont une racine commune.

6. La famille $\mathcal{F}$ compte $n+m$ éléments dans un espace de dimension $n+m$: d'après la caractérisation des bases, elle est libre si et seulement si $\operatorname{Res}(P,Q)\neq 0$. En combinant les questions 3, 4 et 5 :

$$\operatorname{Res}(P,Q)=0 \iff \mathcal{F} \text{ liée} \iff P \text{ et } Q \text{ ont une racine commune dans } \mathbb{C}.$$

C — Le discriminant est un déterminant

7. Avec $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = P' = 2aX + b$, on a $n = 2$, $m = 1$; la formule de la question 2 s'applique avec $b_0 = b$, $b_1 = 2a$, $a_0 = c$, $a_1 = b$, $a_2 = a$:

$$\operatorname{Res}(P, P') = \begin{vmatrix} b & 0 & c \\ 2a & b & b \\ 0 & 2a & a \end{vmatrix} = b(ab - 2ab) + c \cdot 4a^2 = -a\,(b^2 - 4ac),$$

en développant selon la première ligne. Comme $a \neq 0$, ce déterminant s'annule si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$. Or P a une racine double si et seulement si P et P' ont une racine commune : on retrouve le critère du discriminant.

8. Ici $P = X^3 + pX + q$ et $Q = P' = 3X^2 + p$, donc $n = 3$, $m = 2$ et $\mathcal{F} = (Q, XQ, X^2Q, P, XP)$ dans $\mathbb{C}_4[X]$. En rangeant les coordonnées en colonnes selon $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$:

$$\operatorname{Res}(P, P') = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & p & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & p \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Développons selon la première colonne, dont les seuls coefficients non nuls sont p en position $(1,1)$ et 3 en position $(3,1)$, tous deux de cofacteur + :

$$\operatorname{Res}(P, P') = p\,\Delta_1 + 3\,\Delta_2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} p & 0 & p & q \\ 0 & p & 0 & p \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & q & 0 \\ p & 0 & p & q \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pour Δ_1, développons selon la troisième ligne, dont les coefficients non nuls sont 3 et 1 :

$$\Delta_1 = 3\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & p \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & 0 & q \\ 0 & p & p \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 2p^2 + (-2p^2) = 4p^2,$$

les deux déterminants d'ordre 3 se développant respectivement selon leur deuxième et leur première colonne.

Pour Δ_2, la deuxième colonne n'a qu'un coefficient non nul, 3, en dernière ligne, de cofacteur + :

$$\Delta_2 = 3\begin{vmatrix} 0 & q & 0 \\ p & p & q \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 3q^2 = 9q^2,$$

en développant le déterminant d'ordre 3 selon sa dernière colonne.

Finalement

$$\operatorname{Res}(P, P') = 4p^3 + 27q^2.$$

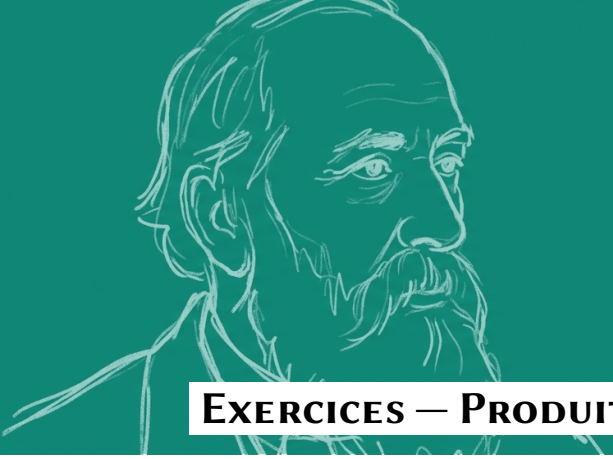
Ainsi $P = X^3 + pX + q$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Commentaire. Un déterminant répond ici à une question qui n'est pas linéaire — deux polynômes ont-ils une racine commune ? — par un nombre fini d'opérations sur les coefficients, sans calculer aucune racine. Le mécanisme est celui de la question 3 : une relation de dépendance linéaire entre les $X^k P$ et les $X^k Q$ est une relation de divisibilité.

La quantité $-a\,(b^2 - 4ac)$ de la question 7 et la quantité $4p^3 + 27q^2$ de la question 8 sont, au signe et à un facteur près, le *discriminant* de P. Pour le cubique réduit $X^3 + pX + q$ à coefficients réels, le signe de $-(4p^3 + 27q^2)$ décide du nombre de racines réelles ; c'est la quantité sous le radical dans les formules de Cardan.

Le résultant est le point de départ de la théorie de l'*élimination*. Étant données deux équations polynomiales en x et y, on peut les voir comme deux polynômes en y dont les coefficients dépendent de x ; leur résultant en y est alors un polynôme en x seul, qui s'annule exactement aux abscisses des points d'intersection. On a éliminé une inconnue. Les systèmes de calcul formel emploient ce procédé.

Enfin, la matrice construite à la question 1 porte un nom : c'est la *matrice de Sylvester* de P et Q, du nom de celui dont le portrait ouvre ce chapitre.



2

Révisions d'algèbre linéaire

Exercices — Produits scalaires

Parcours conseillés

- **Piste verte**
  - 2.103 Gram-Schmidt et projeté dans $\mathbb{R}^3$
  - 2.104 Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  - 2.105 Meilleure approximation linéaire de t^3
- **Piste rouge**
  - 2.109 Endomorphisme associé à une famille
  - 2.110 Reconnaître un supplémentaire orthogonal
  - 2.111 Caractérisation des bases orthonormées
- **Piste bleue**
  - 2.106 Dérivation et produit scalaire intégral
  - 2.107 Produit scalaire par les dérivées en 0
  - 2.108 Polynômes à coefficients positifs
- **Piste noire**
  - 2.112 Isométrie fixant l'origine
  - 2.113 Projecteurs et contractions
  - 2.115 Déterminants de Gram

Exercice 2.103 ○ Correction p. 93

Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit $F = \text{Vect}\left((1,1,0),\ (0,1,1)\right)$.

1. Déterminer une base orthonormée de F par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Calculer la projection orthogonale de $v = (1,0,0)$ sur F.

Exercice 2.104 • Correction p. 93

Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ la somme de ses coefficients diagonaux.
Montrer que $\langle A,\ B\rangle = \text{tr}(A^\top B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.105 • Correction p. 94

Meilleure approximation linéaire de t^3. On munit $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f,\ g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$, et on pose $f(t) = t^3$.

1. Calculer $\|f\|$.
2. Calculer la projection orthogonale de f sur la droite $F = \text{Vect}(u)$, où $u(t) = t$.
3. En déduire la valeur de $c \in \mathbb{R}$ qui rend $\int_{-1}^{1}(t^3 - ct)^2\,\mathrm{d}t$ minimale, ainsi que la valeur de ce minimum.

Exercice 2.106 • Correction p. 94

Dérivation et produit scalaire intégral. On note E l'ensemble des applications $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f^{(n)}(-1) = f^{(n)}(1) = 0.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $\langle f,\ g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

2. Vérifier que l'application $T : f \mapsto f'$ est un endomorphisme *antisymétrique* de E, c'est-à-dire que :
$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle T(f),\, g\rangle = -\langle f,\, T(g)\rangle\,.$$

Exercice 2.107 ●● Correction p. 95

Un produit scalaire par les dérivées en 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et, pour $(P,Q) \in E^2$:
$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Calculer $\varphi(X^i, X^j)$ pour tout $(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2$.
   (b) En déduire une base orthonormée de (E,φ).

Exercice 2.108 ●● Correction p. 96

Une inégalité sur les polynômes à coefficients positifs. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad P(\sqrt{xy})^2 \leq P(x)\,P(y).$$

Exercice 2.109 ●● Correction p. 96

L'endomorphisme associé à une famille. Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{F} = (e_1,\dots,e_n) \in E^n$. On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et on considère :
$$f : E \to E, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle e_i,\, x\rangle\, e_i.$$

1. (a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = F^\perp$ et $\mathrm{Im}\, f = F$.
   (c) En déduire que f est bijective si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. En déduire que, si $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E :
$$\forall (c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \exists!\, v \in E, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad \langle e_i,\, v\rangle = c_i.$$

Exercice 2.110 ●●● Correction p. 97

Reconnaître un supplémentaire orthogonal. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :
$$F \subset G^\perp \qquad \text{et} \qquad F + G = E.$$
Démontrer que $G^\perp = F$ et $F^\perp = G$.

Exercice 2.111 ●●● Correction p. 97

Une caractérisation des bases orthonormées. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1,\dots,e_n) \in E^n$. On suppose :
$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \|e_i\| \geq 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{n} \langle e_i,\, x\rangle^2 = \|x\|^2\,.$$
Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2.112 ★ Correction p. 98

Une isométrie fixant l'origine est linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, chacun muni d'un produit scalaire et de la norme associée. Soit $f : E \to F$ une application telle que $f(0) = 0$ et :

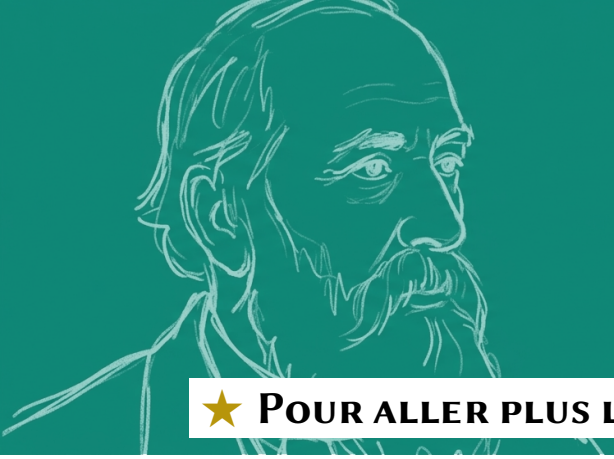
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| .$$

Démontrer que f est linéaire.

Exercice 2.113 ★ Correction p. 98

Projecteurs et contractions. Soient E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E. Montrer que :

$$\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p \iff (\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|) .$$



2

Révisions d'algèbre linéaire

★ Pour aller plus loin — Produits scalaires

La définition d'un produit scalaire empile quatre exigences : bilinéarité, symétrie, positivité, caractère défini. Le premier exercice en retire une seule, la positivité, et reprend les résultats des rappels un par un. L'objet que l'on étudie alors est celui de la relativité restreinte. Le second exercice reste dans un espace euclidien, et établit une formule générale de distance à un sous-espace.

Exercice 2.114 ● ● ● Correction p. 99

Le plan de Minkowski.
On travaille sur $E = \mathbb{R}^2$, dont on note les vecteurs $x = (x_0, x_1)$, et on pose :

$$\varphi(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 \qquad \text{et} \qquad q(x) = \varphi(x, x) = x_0^2 - x_1^2.$$

La notation φ, et non $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est un avertissement : ce n'est pas un produit scalaire. On dira qu'un vecteur $x \neq 0$ est *isotrope* lorsque $q(x) = 0$, et que deux vecteurs x et y sont *orthogonaux* lorsque $\varphi(x, y) = 0$. Pour une partie A de E, on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de A.

A — Ce qui se casse

1. Montrer que φ est bilinéaire et symétrique, mais qu'elle n'est ni positive ni définie.
2. Établir que, pour tous $x, y \in E$, $q(x + y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y)$, et en déduire que le théorème de Pythagore reste vrai : x et y sont orthogonaux si et seulement si $q(x + y) = q(x) + q(y)$. Quels axiomes la démonstration des rappels utilise-t-elle ?
3. En considérant $u = (1, 1)$ et $v = (2, 2)$, montrer que la proposition « toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre » devient fausse. Où la démonstration des rappels cesse-t-elle d'être valable ?
4. Soit $D = \text{Vect}(u)$, avec $u = (1, 1)$. Déterminer $D^\perp$ et en déduire que E n'est pas somme directe de D et de $D^\perp$. Reprendre la question avec $D' = \text{Vect}((1, 0))$. Qu'est-ce qui distingue les deux droites ?

B — Cauchy-Schwarz renversée

5. *Identité de Lagrange.* Montrer que, pour tous $x, y \in E$:
$$\varphi(x, y)^2 - q(x)\, q(y) = (x_0 y_1 - x_1 y_0)^2.$$
6. En déduire que $\varphi(x, y)^2 \geq q(x)\, q(y)$ pour tous $x, y \in E$, avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée. Comparer à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à son cas d'égalité, et repérer l'endroit précis où la démonstration des rappels s'effondre.

C — Le cône du futur
On pose

$$C = \{x \in E \mid q(x) > 0 \text{ et } x_0 > 0\} \qquad \text{et, pour } x \in C, \qquad N(x) = \sqrt{q(x)}.$$

7. Montrer que $x \in C$ si et seulement si $x_0 > |x_1|$. En déduire que $\varphi(x, y) > 0$ pour tous $x, y \in C$, puis que C est stable par somme et par multiplication par un réel strictement positif.

8. Montrer que $\varphi(x,y) \geq N(x)N(y)$ pour tous $x, y \in C$.
9. *Inégalité triangulaire renversée.* En déduire que, pour tous $x, y \in C$,

$$N(x+y) \geq N(x) + N(y),$$

avec égalité si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Exercice 2.115 ★ Correction p. 102

Les déterminants de Gram. Soit E un espace euclidien. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on note :

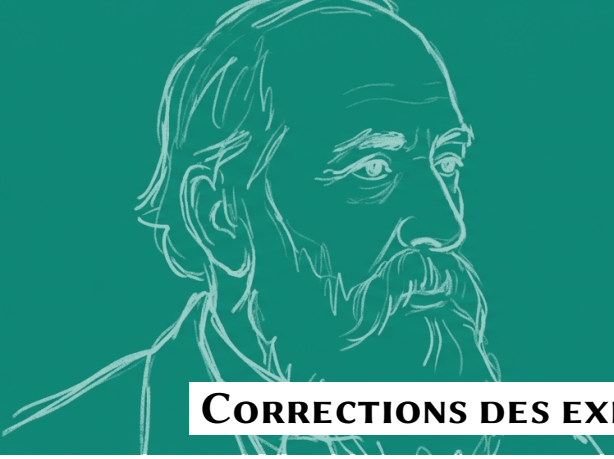
$$G(x_1, \dots, x_n) = \left(\langle x_i, x_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \gamma(x_1, \dots, x_n) = \det G(x_1, \dots, x_n).$$

1. Établir que $\operatorname{rg} G(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
2. En déduire que :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ liée} \iff \gamma(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \iff \gamma(x_1, \dots, x_n) > 0.$$

3. On suppose $(x_1, \dots, x_n)$ libre. Soient $X = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, $x \in E$, $p_X(x)$ le projeté orthogonal de x sur X et $d = \|x - p_X(x)\|$ la distance de x à X. Montrer que :

$$d = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}.$$



2

Révisions d'algèbre linéaire

Corrections des exercices — Produits scalaires

Correction de l'exercice 2.103 Énoncé p. 88

1. On applique l'algorithme à la famille libre (e_1, e_2), où $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$.

   Premier vecteur. Comme $\|e_1\|^2 = 2$, on pose $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

   Deuxième vecteur. On retranche à e_2 sa composante selon ε_1. Comme $\langle e_2,\, \varepsilon_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

   $$f_2 = e_2 - \langle e_2,\, \varepsilon_1\rangle\, \varepsilon_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

   Il ne reste qu'à normaliser : $\|f_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$, d'où $\varepsilon_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$.

   Ainsi $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de F.

2. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ étant une base orthonormée de F : $p_F(v) = \langle v,\, \varepsilon_1\rangle\, \varepsilon_1 + \langle v,\, \varepsilon_2\rangle\, \varepsilon_2$.

   Or $\langle v,\, \varepsilon_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle v,\, \varepsilon_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, donc :

   $$p_F(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) - \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2) = \frac{1}{2}(1, 1, 0) + \frac{1}{6}(1, -1, -2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Correction de l'exercice 2.104 Énoncé p. 88

Commençons par expliciter $\langle A,\, B\rangle$. Le coefficient d'indice (i, i) de $A^\top B$ vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$, donc :

$$\langle A,\, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki} = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

On reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$, en identifiant une matrice à la famille de ses n^2 coefficients. Il ne reste plus qu'à reprendre la vérification faite dans le cours, en suivant le même ordre : la symétrie d'abord, ce qui dispense de vérifier la linéarité par rapport à la seconde variable.

- *Symétrie* : pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A,\, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = \sum_{i,j} b_{ij} a_{ij} = \langle B,\, A\rangle$, car le produit dans $\mathbb{R}$ est commutatif.
- *Linéarité à gauche* : soient $A, A', B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le coefficient d'indice (i, j) de $\lambda A + A'$ est $\lambda a_{ij} + a'_{ij}$, donc :

  $$\langle \lambda A + A',\, B\rangle = \sum_{i,j} (\lambda a_{ij} + a'_{ij})\, b_{ij} = \lambda \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} + \sum_{i,j} a'_{ij} b_{ij} = \lambda\, \langle A,\, B\rangle + \langle A',\, B\rangle\,.$$

  Avec la symétrie, l'application est bien bilinéaire.

— *Positivité* : $\langle A, A\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$ comme somme de carrés.

— *Définie* : si $\langle A, A\rangle = 0$, cette somme de carrés est nulle, donc tous les a_{ij} sont nuls, c'est-à-dire $A = 0$.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 2.105 **Énoncé p. 88**

1. $\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} t^6 \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{7}$, donc $\|f\| = \sqrt{\frac{2}{7}}$.
2. D'après la formule de projection sur une droite, $p_F(f) = \dfrac{\langle f, u\rangle}{\|u\|^2}\, u$. Or :
$$\langle f, u\rangle = \int_{-1}^{1} t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}, \qquad \|u\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3},$$
donc $p_F(f) = \dfrac{2/5}{2/3}\, u = \dfrac{3}{5}\, u$, c'est-à-dire la fonction $t \mapsto \frac{3}{5}t$.
3. Les éléments de F sont exactement les fonctions $t \mapsto ct$, avec $c \in \mathbb{R}$, et pour une telle fonction g :
$$\|f - g\|^2 = \int_{-1}^{1} (t^3 - ct)^2 \,\mathrm{d}t.$$
D'après le théorème de la distance à un sous-espace, cette quantité est minimale si et seulement si $g = p_F(f)$, c'est-à-dire pour $c = \frac{3}{5}$.
La valeur du minimum s'obtient par le théorème de Pythagore, appliqué à la décomposition $f = p_F(f) + (f - p_F(f))$:
$$\int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 \mathrm{d}t = \|f - p_F(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|p_F(f)\|^2 = \frac{2}{7} - \frac{9}{25}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{8}{175}.$$

Correction de l'exercice 2.106 **Énoncé p. 88**

1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty([-1,1],\mathbb{R})$. La fonction nulle est de classe C^∞ et toutes ses dérivées sont nulles, donc $0 \in E$. Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est de classe C^∞ et, par linéarité de la dérivation, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$(\lambda f + g)^{(n)}(\pm 1) = \lambda f^{(n)}(\pm 1) + g^{(n)}(\pm 1) = 0.$$
Donc $\lambda f + g \in E$, et E est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour le produit scalaire, il n'y a rien à recalculer : E est un sous-espace vectoriel de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, et l'application proposée est la restriction à $E \times E$ du produit scalaire intégral sur $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ vu dans les rappels. Or la restriction d'un produit scalaire à un sous-espace vectoriel en est encore un : la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont des identités ou des inégalités qui restent vraies sur une partie plus petite, et le caractère défini également puisque l'implication $\langle f, f\rangle = 0 \implies f = 0$ vaut déjà sur l'espace entier.
2. *T est bien à valeurs dans E.* Si $f \in E$, alors f' est de classe C^∞ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule en -1 et en 1. Donc $T(f) = f' \in E$. La linéarité de T est celle de la dérivation : T est un endomorphisme de E.

Antisymétrie. Soient $f, g \in E$. Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur le segment $[-1, 1]$, donc une intégration par parties donne :

$$\langle T(f),\, g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \left[f(t)\, g(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Le terme tout intégré vaut $f(1)g(1) - f(-1)g(-1) = 0$, puisque f s'annule en ± 1 (le cas $n = 0$ de la définition de E). Il reste :

$$\langle T(f),\, g\rangle = -\int_{-1}^{1} f(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t = -\left\langle f,\, T(g)\right\rangle.$$

Correction de l'exercice 2.107 **Énoncé p. 89**

1. *Symétrie* : pour $P, Q \in E$, $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(0)P^{(k)}(0) = \varphi(Q,P)$.
   Linéarité à gauche : soient $P, P', Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $(\lambda P + P')^{(k)} = \lambda P^{(k)} + P'^{(k)}$:

$$\varphi(\lambda P + P', Q) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)}(0) + P'^{(k)}(0)\right) Q^{(k)}(0) = \lambda\varphi(P,Q) + \varphi(P',Q).$$

   Avec la symétrie, φ est bilinéaire.
   Positivité : $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(0)\right)^2 \geq 0$ comme somme de carrés.
   Caractère défini : si $\varphi(P,P) = 0$, cette somme de carrés de réels est nulle, donc $P^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Or P est de degré au plus n, donc la formule de Taylor pour les polynômes donne :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = 0.$$

   Ainsi φ est un produit scalaire sur E.

2. (a) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour $k \leq n$:

$$(X^i)^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-k)!}\, X^{i-k} & \text{si } k \leq i, \\ 0 & \text{si } k > i, \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad (X^i)^{(k)}(0) = \begin{cases} i! & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   En effet, pour $k < i$ le polynôme X^{i-k} s'annule en 0. Dans le produit $(X^i)^{(k)}(0)\,(X^j)^{(k)}(0)$, le premier facteur n'est non nul que pour $k = i$ et le second que pour $k = j$; il n'y a donc de terme non nul que si $i = j$, et alors seulement pour $k = i$. D'où :

$$\varphi(X^i, X^j) = \begin{cases} (i!)^2 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

   (b) La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est donc orthogonale, et $\left\|X^i\right\| = i!$ pour la norme associée à φ. En normalisant chaque vecteur :

$$\mathcal{B} = \left(1,\, X,\, \frac{X^2}{2!},\, \dots,\, \frac{X^n}{n!}\right)$$

   est une famille orthonormée de E. Elle est libre, et de cardinal $n + 1 = \dim E$: c'est une base orthonormée de (E, φ).

Correction de l'exercice 2.108 **Énoncé p. 89**

Écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \geq 0$ pour tout k, et fixons $x, y \geq 0$. Comme x et y sont positifs, $\sqrt{xy}$ a un sens et $(\sqrt{xy})^k = x^{k/2} y^{k/2}$, de sorte que :

$$P(\sqrt{xy}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^{k/2} y^{k/2} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{a_k}\, x^{k/2}\right) \left(\sqrt{a_k}\, y^{k/2}\right).$$

C'est là qu'il faut reconnaître un produit scalaire. Munissons $\mathbb{R}^{n+1}$ de son produit scalaire canonique et posons :

$$u = \left(\sqrt{a_k}\, x^{k/2}\right)_{0 \leq k \leq n}, \qquad v = \left(\sqrt{a_k}\, y^{k/2}\right)_{0 \leq k \leq n}.$$

Ces deux vecteurs sont bien définis car $a_k \geq 0$, et l'égalité précédente s'écrit $P(\sqrt{xy}) = \langle u, v \rangle$. Par ailleurs :

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k = P(x), \qquad \|v\|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k \, y^k = P(y).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2$ donne exactement :

$$P(\sqrt{xy})^2 \leq P(x) \, P(y).$$

Correction de l'exercice 2.109 **Énoncé p. 89**

1. (a) L'application f est bien à valeurs dans E. Pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la linéarité du produit scalaire par rapport à sa seconde variable donne :

$$f(\lambda x + y) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \lambda x + y \rangle \, e_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \, e_i + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, y \rangle \, e_i = \lambda f(x) + f(y).$$

   Donc $f \in \mathcal{L}(E)$.

   (b) *Noyau.* Si $x \in F^\perp$, alors $\langle e_i, x \rangle = 0$ pour tout i, donc $f(x) = 0$: on a $F^\perp \subset \operatorname{Ker} f$.

   Réciproquement, supposons $f(x) = 0$. L'astuce consiste à prendre le produit scalaire avec x lui-même :

$$0 = \langle f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \, \langle e_i, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2.$$

   Cette somme de carrés est nulle, donc $\langle e_i, x \rangle = 0$ pour tout i, c'est-à-dire $x \in F^\perp$. Ainsi $\operatorname{Ker} f = F^\perp$.

   Image. Par construction, $f(x)$ est combinaison linéaire des e_i, donc $\operatorname{Im} f \subset F$. Pour conclure, on compare les dimensions. Le théorème du rang et le théorème du supplémentaire orthogonal donnent :

$$\operatorname{rg} f = n - \dim \operatorname{Ker} f = n - \dim F^\perp = \dim F,$$

   puisque $F^\perp = (\operatorname{Vect} \mathcal{F})^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E. L'inclusion $\operatorname{Im} f \subset F$ entre sous-espaces de même dimension finie est donc une égalité : $\operatorname{Im} f = F$.

   (c) Comme E est de dimension finie, f est bijective si et seulement si $\operatorname{Im} f = E$, c'est-à-dire $F = E$. Or $\mathcal{F}$ est une famille de $n = \dim E$ vecteurs : elle engendre E si et seulement si c'est une base de E.

2. Soit $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ et posons $c = \sum_{i=1}^n c_i e_i \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, l'écriture d'un vecteur dans $\mathcal{B}$ est unique, donc, pour $v \in E$:

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \langle e_i, v\rangle = c_i) \iff \sum_{i=1}^n \langle e_i, v\rangle\ e_i = \sum_{i=1}^n c_i e_i \iff f(v) = c.$$

D'après la question précédente, f est bijective : cette équation admet une unique solution $v = f^{-1}(c)$.

Correction de l'exercice 2.110 **Énoncé p. 89**

Commençons par une reformulation de l'hypothèse $F \subset G^\perp$: elle signifie que $\langle x, y\rangle = 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in G$. Cette condition étant symétrique en F et G, elle équivaut aussi à $G \subset F^\perp$. Comme l'hypothèse $F + G = E$ est elle aussi symétrique, les deux égalités à démontrer se déduiront du même raisonnement, aux notations près.
Montrons $G^\perp = F$. L'inclusion $F \subset G^\perp$ est l'hypothèse. Réciproquement, soit $x \in G^\perp$. Comme $F + G = E$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$. Alors :

$$b = x - a \in G^\perp,$$

car $x \in G^\perp$ et $a \in F \subset G^\perp$, qui est un sous-espace vectoriel. Ainsi $b \in G \cap G^\perp$. Or ce dernier est réduit à $\{0\}$: si b est orthogonal à lui-même, alors $\langle b, b\rangle = 0$, donc $b = 0$ par le caractère défini du produit scalaire. Il reste $x = a \in F$, d'où $G^\perp \subset F$ puis $G^\perp = F$.
Montrons $F^\perp = G$. C'est le même raisonnement, en échangeant les rôles de F et G : on a $G \subset F^\perp$, et si $x \in F^\perp$ s'écrit $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G \subset F^\perp$, alors $a = x - b \in F \cap F^\perp = \{0\}$, donc $x = b \in G$.

Correction de l'exercice 2.111 **Énoncé p. 89**

Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
Première étape : la famille est génératrice. Si $x \in F^\perp$, la seconde hypothèse donne $\|x\|^2 = \sum_i \langle e_i, x\rangle^2 = 0$, donc $x = 0$. Ainsi $F^\perp = \{0\}$. Comme F est de dimension finie, le théorème du supplémentaire orthogonal s'applique :

$$E = F \oplus F^\perp = F.$$

En particulier E est de dimension finie, avec $\dim E \leq n$.
Deuxième étape : la famille est orthonormée. Fixons $j \in \{1, \dots, n\}$ et appliquons l'hypothèse à $x = e_j$: en isolant le terme $i = j$,

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_j\rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} \langle e_i, e_j\rangle^2.$$

Tous les termes de la dernière somme étant positifs, il vient $\|e_j\|^4 \leq \|e_j\|^2$. Or $\|e_j\| \geq 1 > 0$, donc on peut diviser par $\|e_j\|^2$: $\|e_j\|^2 \leq 1$, c'est-à-dire $\|e_j\| \leq 1$. Avec l'hypothèse $\|e_j\| \geq 1$, on conclut $\|e_j\| = 1$.
L'égalité précédente se réduit alors à $1 = 1 + \sum_{i \neq j} \langle e_i, e_j\rangle^2$, donc $\sum_{i \neq j} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 0$: cette somme de carrés étant nulle, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq j$. La famille est bien orthonormée.
Conclusion. Une famille orthonormée est libre, et l'on a vu qu'elle engendre E : $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E (et $\dim E = n$).

Correction de l'exercice 2.112 **Énoncé p. 90**

Les normes et les produits scalaires de E et de F sont notés de la même façon, le contexte levant l'ambiguïté.
Première étape : f conserve la norme. En prenant $y = 0$ dans l'hypothèse et en utilisant $f(0) = 0$:

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|\,.$$

Deuxième étape : f conserve le produit scalaire. Soient $x, y \in E$. Développons les deux membres de l'hypothèse par bilinéarité :

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \|f(y)\|^2\,, \qquad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\,.$$

D'après la première étape, $\|f(x)\| = \|x\|$ et $\|f(y)\| = \|y\|$: les termes carrés se simplifient et il reste :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle\,.$$

Troisième étape : f est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour montrer que le vecteur $w = f(\lambda x + y) - \lambda f(x) - f(y)$ est nul, il suffit de montrer que $\|w\|^2 = 0$, et c'est ici que la conservation du produit scalaire va tout faire : en développant,

$$\begin{aligned}\|w\|^2 = {} & \|f(\lambda x + y)\|^2 + \lambda^2 \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 \\ & - 2\lambda \langle f(\lambda x + y), f(x)\rangle - 2\langle f(\lambda x + y), f(y)\rangle + 2\lambda \langle f(x), f(y)\rangle\,.\end{aligned}$$

Chacun de ces six termes se calcule dans E d'après les deux premières étapes :

$$\begin{aligned}\|w\|^2 = {} & \|\lambda x + y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ & - 2\lambda \langle \lambda x + y, x\rangle - 2\langle \lambda x + y, y\rangle + 2\lambda \langle x, y\rangle\,.\end{aligned}$$

Or le membre de droite n'est autre que le développement de $\|(\lambda x + y) - \lambda x - y\|^2$, c'est-à-dire $\|0\|^2 = 0$. Donc $\|w\|^2 = 0$, puis $w = 0$ par le caractère défini du produit scalaire de F :

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Ainsi f est linéaire.

Correction de l'exercice 2.113 **Énoncé p. 90**

Rappelons les deux faits sur les projecteurs qui vont servir : on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$, et $p(a) = a$ pour tout $a \in \operatorname{Im} p$.
Sens direct. Supposons $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$ et soit $x \in E$. On décompose :

$$x = \underbrace{(x - p(x))}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p}\,,$$

la première appartenance venant de $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$. Ces deux vecteurs étant orthogonaux par hypothèse, le théorème de Pythagore donne :

$$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2\,,$$

d'où $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
Sens réciproque. Supposons $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$, et soient $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Ker} p$. L'idée est de tester l'hypothèse sur toute la droite $a + \mathbb{R}b$: pour $t \in \mathbb{R}$,

$p(a+tb) = p(a) + t\,p(b) = a$, donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|a\|^2 = \|p(a+tb)\|^2 \leq \|a+tb\|^2 = \|a\|^2 + 2t\,\langle a,\, b\rangle + t^2\,\|b\|^2\,.$$

Autrement dit, le trinôme $\psi(t) = \|b\|^2\,t^2 + 2\,\langle a,\, b\rangle\; t$ est positif sur $\mathbb{R}$. Si $b = 0$, alors $\langle a,\, b\rangle = 0$ trivialement ; sinon, le choix $t = -\langle a,\, b\rangle\,/\|b\|^2$ donne :

$$0 \leq \psi(t) = -\frac{\langle a,\, b\rangle^2}{\|b\|^2},$$

donc $\langle a,\, b\rangle^2 \leq 0$, puis $\langle a,\, b\rangle = 0$. (On peut aussi remarquer que ψ est positive et s'annule en 0 : elle y atteint son minimum, donc $\psi'(0) = 2\,\langle a,\, b\rangle = 0$.)
Dans tous les cas $\langle a,\, b\rangle = 0$, et ceci pour tous $a \in \operatorname{Im} p$ et $b \in \operatorname{Ker} p$: les deux sous-espaces sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 2.114 **Énoncé p. 91**

A — Ce qui se casse

1. La linéarité par rapport à la première variable est immédiate : pour $x, x', y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi(x+\lambda x', y) = (x_0 + \lambda x_0')y_0 - (x_1 + \lambda x_1')y_1 = \varphi(x,y) + \lambda\varphi(x',y).$$

   La symétrie est tout aussi claire, puisque $y_0x_0 - y_1x_1$ est la même expression ; la linéarité par rapport à la seconde variable s'en déduit, donc φ est bilinéaire symétrique.
   En revanche $q((0,1)) = 0^2 - 1^2 = -1 < 0$: φ n'est pas positive. Elle n'est pas non plus définie, puisque le vecteur $u = (1,1)$ est non nul et vérifie $q(u) = 1 - 1 = 0$: c'est un vecteur isotrope.
2. Par bilinéarité puis symétrie :

   $$\begin{aligned} q(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \\ &= q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y). \end{aligned}$$

   L'équivalence $q(x+y) = q(x) + q(y) \iff \varphi(x,y) = 0$ en résulte aussitôt.
   La démonstration des rappels est mot pour mot la même : elle développe $\|x+y\|^2$ par bilinéarité, regroupe les deux termes croisés par symétrie, et s'arrête là. Ni la positivité ni le caractère défini n'y interviennent, et c'est exactement pour cela que le résultat survit.
3. Les vecteurs $u = (1,1)$ et $v = (2,2)$ sont non nuls, et

   $$\varphi(u,v) = 1 \times 2 - 1 \times 2 = 0,$$

   donc la famille (u,v) est orthogonale. Elle est pourtant liée, puisque $v = 2u$. La proposition est donc fausse ici.
   La démonstration des rappels prend une combinaison linéaire nulle $\sum_i \lambda_i x_i = 0$, l'évalue contre x_j et obtient $\lambda_j \left\|x_j\right\|^2 = 0$; elle conclut en disant que $\left\|x_j\right\|^2 \neq 0$ car $x_j \neq 0$. C'est précisément cette dernière implication, qui n'est rien d'autre que le caractère défini, qui tombe : ici $q(u) = 0$ bien que $u \neq 0$, et l'égalité $\lambda_1 q(u) = 0$ ne dit plus rien sur λ_1.

4. Un vecteur x appartient à $D^\perp$ si et seulement si $\varphi(x,u) = 0$, c'est-à-dire $x_0 - x_1 = 0$. Ainsi
$$D^\perp = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = D :$$
la droite D est son propre orthogonal. On a donc $D \cap D^\perp = D \neq \{0\}$ et $D + D^\perp = D \neq E$: la somme n'est ni directe, ni égale à E. Le théorème du supplémentaire orthogonal est en défaut, et sa démonstration aussi : elle établissait $F \cap F^\perp = \{0\}$ en disant qu'un vecteur orthogonal à lui-même est nul, ce qui est encore une fois le caractère défini.
Avec $D' = \text{Vect}((1,0))$, en revanche, tout se passe bien : la condition $\varphi(x,(1,0)) = 0$ s'écrit $x_0 = 0$, donc $D'^\perp = \text{Vect}((0,1))$, et $D' \cap D'^\perp = \{0\}$ avec $\dim D' + \dim D'^\perp = 2$: on a bien $E = D' \oplus D'^\perp$.
La différence entre les deux droites est le vecteur qui les engendre : $q(u) = 0$ alors que $q((1,0)) = 1 \neq 0$. La panne n'est donc pas globale, elle est localisée sur les directions isotropes.

B — Cauchy-Schwarz renversée

5. Développons les deux produits :
$$\varphi(x,y)^2 = (x_0y_0 - x_1y_1)^2 = x_0^2y_0^2 - 2x_0y_0x_1y_1 + x_1^2y_1^2,$$
$$q(x)\,q(y) = (x_0^2 - x_1^2)(y_0^2 - y_1^2) = x_0^2y_0^2 - x_0^2y_1^2 - x_1^2y_0^2 + x_1^2y_1^2.$$
Les termes $x_0^2y_0^2$ et $x_1^2y_1^2$ se simplifient dans la différence, et il reste
$$\varphi(x,y)^2 - q(x)\,q(y) = x_0^2y_1^2 - 2x_0y_1x_1y_0 + x_1^2y_0^2 = (x_0y_1 - x_1y_0)^2.$$

6. Le membre de droite de l'identité de Lagrange est un carré, donc positif ou nul : $\varphi(x,y)^2 \geq q(x)\,q(y)$ pour tous x, y. Il y a égalité si et seulement si $x_0y_1 - x_1y_0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant de (x,y) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est nul, donc si et seulement si la famille (x,y) est liée.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme au contraire que $\langle x,\, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\,\|y\|^2$: non seulement elle est fausse ici, mais elle est *renversée*, et elle l'est pour tous les couples de vecteurs. Le cas d'égalité, lui, est resté le même.
La démonstration des rappels considère le trinôme $t \mapsto \|x + ty\|^2$ et commence par observer, « par positivité du produit scalaire », qu'il est positif ou nul ; elle en déduit que son discriminant, égal à $4\left(\langle x,\, y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2\right)$, est négatif ou nul. C'est cette toute première phrase qui s'effondre : le trinôme $t \mapsto q(x+ty)$ existe encore et son discriminant vaut toujours $4\left(\varphi(x,y)^2 - q(x)q(y)\right)$, mais plus rien n'impose son signe.

C — Le cône du futur

7. Soit $x \in E$. La condition $q(x) > 0$ s'écrit $x_0^2 > x_1^2$, soit $|x_0| > |x_1|$; en lui adjoignant $x_0 > 0$, on obtient exactement $x_0 > |x_1|$. Réciproquement, si $x_0 > |x_1|$, alors $x_0 > 0$ et $x_0^2 > x_1^2$, donc $x \in C$.
Soient maintenant $x, y \in C$, de sorte que $x_0 > |x_1| \geq 0$ et $y_0 > |y_1| \geq 0$. Si $x_1y_1 \leq 0$, alors $\varphi(x,y) = x_0y_0 - x_1y_1 \geq x_0y_0 > 0$. Sinon, $|x_1|$ et $|y_1|$ sont strictement positifs, et en multipliant membre à membre deux inégalités strictes entre réels positifs :
$$x_0y_0 > |x_1|\,|y_1| = |x_1y_1| \geq x_1y_1,$$

d'où encore $\varphi(x,y) > 0$.

Il en résulte que $q(x+y) = q(x)+2\varphi(x,y)+q(y) > 0$, et par ailleurs $x_0+y_0 > 0$: donc $x+y \in C$. Enfin, pour $\lambda > 0$, on a $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x) > 0$ et $\lambda x_0 > 0$, donc $\lambda x \in C$.

8. Soient $x, y \in C$. La question 6 donne $\varphi(x,y)^2 \geq q(x)q(y) = N(x)^2N(y)^2$, et ces deux quantités sont positives ; en passant à la racine carrée, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$|\varphi(x,y)| \geq N(x)N(y).$$
Or $\varphi(x,y) > 0$ d'après la question 7, donc $|\varphi(x,y)| = \varphi(x,y)$ et $\varphi(x,y) \geq N(x)N(y)$.

9. Soient $x, y \in C$. La question 7 assure que $x+y \in C$, donc $N(x+y)$ est bien défini. En utilisant la question 2 puis la question 8 :
$$\begin{aligned} N(x+y)^2 &= q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y) \geq N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2 \\ &= (N(x) + N(y))^2 . \end{aligned}$$
Les deux membres extrêmes sont des carrés de réels positifs, et la fonction racine carrée est croissante : on obtient $N(x+y) \geq N(x) + N(y)$.

Il y a égalité si et seulement si $\varphi(x,y) = N(x)N(y)$; ces deux nombres étant positifs, cela équivaut à $\varphi(x,y)^2 = q(x)q(y)$, c'est-à-dire, d'après la question 6, à ce que la famille (x,y) soit liée.

Commentaire. Les résultats qui subsistent — le théorème de Pythagore, le développement de $q(x+y)$, le fait que $A^\perp$ soit un sous-espace vectoriel — n'utilisent que la bilinéarité et la symétrie. Ceux qui tombent — la liberté des familles orthogonales, le supplémentaire orthogonal, Cauchy-Schwarz — échouent tous au même endroit : l'existence d'un vecteur non nul x tel que $q(x) = 0$. Dans toute la section, la positivité et le caractère défini ne servent qu'à interdire les vecteurs isotropes.

Le second temps de la question 4 précise l'endroit où le résultat échoue : sur une droite non isotrope, la décomposition en somme directe tient encore. Plus généralement, le procédé de Gram-Schmidt appliqué à une base bien choisie de E produit une base dans laquelle q s'écrit $\varepsilon_1 c_1^2 + \cdots + \varepsilon_n c_n^2$ avec des ε_i valant $+1$ ou -1 ; on démontre que le nombre de signes $+$ et le nombre de signes $-$ ne dépendent pas de la base choisie. Ce couple d'entiers s'appelle la *signature* de la forme, et un produit scalaire est exactement une forme bilinéaire symétrique de signature $(n, 0)$.

La question 6 a une lecture géométrique : le discriminant du trinôme $t \mapsto q(x+ty)$ est positif ou nul, donc ce trinôme a toujours des racines réelles. Autrement dit, toute droite du plan rencontre le cône isotrope $\{q = 0\}$, qui est ici la réunion des deux bissectrices. C'est la traduction géométrique du renversement de Cauchy-Schwarz.

Une mise en garde sur la question 6 : c'est une particularité de la dimension 2, où l'identité de Lagrange fournit un carré. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de $q(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, l'inégalité renversée est fausse en général : pour $x = (0,1,0,0)$ et $y = (0,0,1,0)$ on a $\varphi(x,y)^2 = 0$ alors que $q(x)q(y) = 1$. Elle reste vraie, en revanche, pour deux vecteurs du cône C : toute la partie C se transpose sans changement.

Le plan étudié ici est un espace-temps à une dimension d'espace, et $\mathbb{R}^4$ celui de la relativité restreinte : x_0 est le temps (multiplié par la vitesse de la lumière), le cône isotrope est le *cône de lumière*, et C l'ensemble des événements futurs qu'un observateur placé en 0 peut atteindre sans dépasser cette vitesse. La quantité $N(x)$ est le temps propre écoulé le long du segment joignant 0 à x, c'est-à-dire la durée

mesurée par une horloge qui suit ce trajet. L'inégalité triangulaire renversée dit alors que, de deux jumeaux qui se séparent en 0 et se retrouvent en $x+y$, celui qui voyage en ligne droite vieillit strictement plus que celui dont la trajectoire est brisée : c'est le « paradoxe des jumeaux », que vous rencontrerez peut-être en physique.

C'est donc la positivité qui donne à la forme son contenu géométrique : sans elle, « orthogonal » n'implique plus « indépendant », une droite peut être son propre orthogonal, et l'inégalité triangulaire change de sens.

Correction de l'exercice 2.115 **Énoncé p. 92**

1. Posons $m = \dim E$ et fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$ de E. Notons $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice dont la j-ième colonne X_j est la colonne des coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. Le rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ étant la dimension de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, et l'application « coordonnées dans $\mathcal{B}$ » étant un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^m$, on a $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
   Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $\langle x_i, x_j \rangle = X_i^\top X_j$, qui est exactement le coefficient d'indice (i,j) de $M^\top M$. Autrement dit :
   $$G(x_1, \dots, x_n) = M^\top M.$$
   Montrons que ces deux matrices ont le même noyau. Si $MX = 0$, alors $M^\top MX = 0$. Réciproquement, si $M^\top MX = 0$, multiplions à gauche par $X^\top$:
   $$0 = X^\top M^\top MX = (MX)^\top (MX) = \|MX\|^2,$$
   où $\|\cdot\|$ est la norme canonique de $\mathbb{R}^m$; donc $MX = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} M^\top M = \operatorname{Ker} M$. Ces deux matrices ayant n colonnes, le théorème du rang donne :
   $$\operatorname{rg} G(x_1, \dots, x_n) = n - \dim \operatorname{Ker} M^\top M = n - \dim \operatorname{Ker} M = \operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n).$$

2. *Première équivalence.* La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) < n$, c'est-à-dire, d'après la question précédente, $\operatorname{rg} G < n$. Comme G est carrée d'ordre n, cela équivaut à ce que G ne soit pas inversible, donc à $\gamma = \det G = 0$.
   Seconde équivalence. Par contraposée de la première, la famille est libre si et seulement si $\gamma \neq 0$; il reste à voir que $\gamma > 0$ dans ce cas. Supposons donc la famille libre. Le sous-espace $X = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est alors de dimension n ; munissons-le d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et notons $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice des coordonnées des x_j dans cette base. Les produits scalaires $\langle x_i, x_j \rangle$ ne dépendent pas de l'espace ambiant, donc le calcul de la question 1, mené cette fois dans X, donne $G = N^\top N$ avec N carrée. D'où :
   $$\gamma = \det\left(N^\top N\right) = \det\left(N^\top\right) \det N = (\det N)^2 \geq 0.$$
   Comme $\gamma \neq 0$, on conclut $\gamma > 0$.

3. Écrivons $p_X(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ et posons $h = x - p_X(x)$, de sorte que $h \in X^\perp$ et $\|h\| = d$.
   Dans la matrice $G(x, x_1, \dots, x_n)$, dont on indexe les lignes et colonnes par $0, 1, \dots, n$ (l'indice 0 correspondant à x), effectuons l'opération élémentaire :
   $$C_0 \leftarrow C_0 - \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j,$$

qui ne change pas le déterminant. Le coefficient d'indice $(i, 0)$ devient, en notant $y_0 = x$ et $y_i = x_i$ pour $i \geq 1$:

$$\langle y_i,\, x\rangle - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left\langle y_i,\, x_j\right\rangle = \langle y_i,\, x - p_X(x)\rangle = \langle y_i,\, h\rangle\,.$$

Or $\langle x_i,\, h\rangle = 0$ pour $i \geq 1$ puisque $h \in X^\perp$, et :

$$\langle x,\, h\rangle = \langle p_X(x) + h,\, h\rangle = \|h\|^2 = d^2.$$

La nouvelle première colonne est donc $(d^2, 0, \ldots, 0)^\top$. En développant par rapport à cette colonne, dont le seul coefficient non nul est en position $(0, 0)$, de cofacteur $+$, et en constatant que le mineur associé est précisément $G(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\gamma(x, x_1, \ldots, x_n) = d^2\, \gamma(x_1, \ldots, x_n).$$

La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ étant libre, $\gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0$ d'après la question 2 ; on peut donc diviser, et comme $d \geq 0$:

$$d = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}}.$$

Commentaire. La formule de la question 3 calcule une distance à un sous-espace à partir d'une base *quelconque* de celui-ci : elle évite l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, au prix de deux déterminants.
Le cas $n = 1$ redonne un résultat connu : avec $X = \mathrm{Vect}(x_1)$,

$$d^2 = \frac{1}{\|x_1\|^2} \begin{vmatrix} \|x\|^2 & \langle x,\, x_1\rangle \\ \langle x,\, x_1\rangle & \|x_1\|^2 \end{vmatrix} = \|x\|^2 - \frac{\langle x,\, x_1\rangle^2}{\|x_1\|^2},$$

c'est la formule de la distance à une droite vue dans les rappels ; on y lit à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz.