Questions flash

Chapitre 8 — Intégrales généralisées

Questions de cours

Question 1 ch08/q01

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$. Définir « f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ ». Qu'appelle-t-on une subdivision adaptée à f ?

Corrigé. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$, c'est-à-dire une famille finie de réels telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, vérifiant : pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$. Une telle subdivision est dite adaptée à f.

---

attendus

- ☐ Existence d'une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- ☐ Sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$, la restriction de f est prolongeable en une fonction continue sur $[x_k, x_{k+1}]$
- ☐ Une telle subdivision est dite adaptée à f

Question 2 ch08/q02

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Définir « f est continue par morceaux sur I ».

Corrigé. On dit que f est continue par morceaux sur I si sa restriction à tout segment $[c, d]$ inclus dans I est continue par morceaux sur $[c, d]$.

---

attendus

- ☐ La condition porte sur tout segment $[c, d]$ inclus dans I
- ☐ Sur chacun de ces segments, la restriction de f est continue par morceaux

Question 3 ch08/q03

La fonction partie entière est-elle continue par morceaux sur $[0,3]$? sur $\mathbb{R}$? La fonction $t \mapsto \tan t$, prolongée par 0 en $\frac{\pi}{2}$, est-elle continue par morceaux sur $[0,\pi]$?

Corrigé. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0,3]$: la subdivision $(0,1,2,3)$ lui est adaptée, puisqu'elle est constante sur chacun des intervalles ouverts $]0,1[$, $]1,2[$, $]2,3[$. Elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$: un segment $[c,d]$ ne contient qu'un nombre fini d'entiers, et la partie entière est constante entre deux entiers consécutifs.
La tangente prolongée n'est pas continue par morceaux sur $[0,\pi]$: sur $]0,\pi/2[$, $\tan t \to +\infty$ quand $t \to \pi/2$, donc la restriction de la fonction à cet intervalle n'a pas de limite finie en $\pi/2$ et n'est pas prolongeable par continuité. La valeur donnée en $\pi/2$ n'y change rien : la définition ne regarde que les restrictions aux morceaux ouverts.

ATTENDUS

- □ Partie entière continue par morceaux sur $[0,3]$: subdivision $(0,1,2,3)$, fonction constante sur chaque morceau ouvert
- □ Continue par morceaux sur $\mathbb{R}$: tout segment ne contient qu'un nombre fini d'entiers
- □ Tangente prolongée non continue par morceaux : pas de limite finie en $\pi/2$

Question 4 ch08/q04

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Définir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé. Soit $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision adaptée à f et, pour chaque k, soit $\tilde{f}_k$ le prolongement continu à $[x_k,x_{k+1}]$ de la restriction de f à $]x_k,x_{k+1}[$. On pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\,\mathrm{d}t,$$

chaque terme étant l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. La valeur obtenue ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

ATTENDUS

- □ Subdivision adaptée et prolongements continus $\tilde{f}_k$ à $[x_k,x_{k+1}]$
- □ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k(t)\,\mathrm{d}t$
- □ La valeur ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie

Question 5 ch08/q05

Énoncer les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment : linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance, inégalité triangulaire.

Corrigé. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. **Linéarité.** Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. **Relation de Chasles.** Pour tout $c\in[a,b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. **Positivité et croissance.** Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: si $f\geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$; si $f\leqslant g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
4. **Inégalité triangulaire.** $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

ATTENDUS

- ☐ Linéarité : $\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$
- ☐ Relation de Chasles : $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$ pour $c\in[a,b]$
- ☐ Positivité et croissance (fonctions réelles) : $f\geqslant 0\Rightarrow\int_a^b f\geqslant 0$, $f\leqslant g\Rightarrow\int_a^b f\leqslant\int_a^b g$
- ☐ Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f\right|\leqslant\int_a^b|f|$

Question 6 ch08/q06

Énoncer le théorème des sommes de Riemann pour une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$.

Corrigé. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : f continue par morceaux sur le segment $[a,b]$
- ☐ Somme de Riemann $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$
- ☐ Limite $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $n\to+\infty$

Question 7 ch08/q07

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Définir « l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ».

Corrigé. Pour tout $x \in [a, b[$, la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, x]$, ce qui définit $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si F admet une limite finie quand $x \to b$. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

ATTENDUS

- ☐ $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $[a, b[$ (intégrale sur un segment)
- ☐ Convergence : F admet une limite finie quand $x \to b$
- ☐ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Question 8 ch08/q08

Soient $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$. Définir « l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ». Cette définition dépend-elle du point de coupure choisi ?

Corrigé. Soit $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si les deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ (généralisée en a) et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (généralisée en b) convergent toutes les deux. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, l'intégrale diverge. La nature de l'intégrale et, en cas de convergence, sa valeur ne dépendent pas du choix de c.

ATTENDUS

- ☐ Point de coupure $c \in]a, b[$, et deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$
- ☐ Convergence : les deux intégrales convergent (toutes les deux)
- ☐ Valeur : la somme ; nature et valeur indépendantes de c

Question 9 ch08/q09

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et celle de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ selon la valeur de α.

Corrigé. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Dans les deux cas, le cas $\alpha = 1$ est celui du logarithme, et l'intégrale diverge.

ATTENDUS

- □ $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- □ $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

Question 10 ch08/q10

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ selon la valeur de a. Quelle est la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$?

Corrigé. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

ATTENDUS

- □ $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$
- □ $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge

Question 11 ch08/q11

Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b[$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Que se passe-t-il sinon ?

Corrigé. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F est majorée sur $[a, b[$. Dans le cas contraire, $F(x) \to +\infty$ quand $x \to b$.

ATTENDUS

- □ Convergence si et seulement si F est majorée sur $[a, b[$
- □ Sinon, $F(x) \to +\infty$ quand $x \to b$

Question 12 ch08/q12

Énoncer, avec son hypothèse-clé, le critère de majoration pour les intégrales généralisées.

Corrigé. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$. Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'hypothèse-clé est la positivité : l'inégalité $0 \leqslant f$ fait partie de l'hypothèse $0 \leqslant f \leqslant g$. Par contraposée, si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

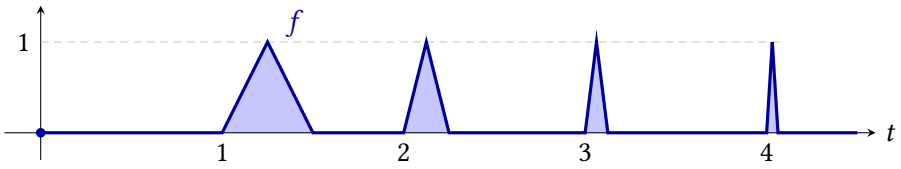
ATTENDUS

- ☐ Hypothèse-clé : $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$ (positivité de f)
- ☐ Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge
- ☐ $0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

Question 13 ch08/q13

Donner l'allure d'une fonction f continue sur $[0, +\infty[$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$ mais dont l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Expliquer succinctement.

Corrigé. Une fonction continue, nulle en dehors d'intervalles $[n, n + 2^{-n}]$ de plus en plus courts, et dont le graphe sur chacun d'eux est un triangle de hauteur 1 :



À cause des pics, f prend la valeur 1 au voisinage de chaque entier et ne tend pas vers 0, mais l'aire du n-ième pic est 2^{-n-1}, terme général d'une série convergente, donc $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ reste majorée et l'intégrale converge.

ATTENDUS

- ☐ Graphe : des pics de hauteur fixe, de plus en plus étroits, séparés par des zones où f est nulle
- ☐ La hauteur des pics empêche f de tendre vers 0
- ☐ La somme des aires des pics est une série convergente, donc l'intégrale converge

Question 14 ch08/q14

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ qui tend vers 0 en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? Justifier.

Corrigé. Non. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, mais pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \ :$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ diverge.

ATTENDUS

- □ Non
- □ Le contre-exemple proposé tend bien vers 0 en $+\infty$
- □ Le contre-exemple proposé a une intégrale divergente, avec justification

Question 15 ch08/q15

Énoncer la positivité et la croissance de l'intégrale pour des fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$. Expliciter toutes les hypothèses.

Corrigé. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$, à valeurs réelles, dont les intégrales convergent.

1. Si $f \geqslant 0$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. Si $f \leqslant g$ sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

ATTENDUS

- □ Hypothèse : fonctions à valeurs réelles
- □ Hypothèse : les intégrales convergent
- □ Positivité : $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$
- □ Croissance : $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

Question 16 ch08/q16

Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées sur $]a,b[$, avec toutes ses hypothèses.

Corrigé. Soient a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et f, g deux fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que le produit fg admet une limite finie en a et une limite finie en b, et on note $[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t)$.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : f, g de classe C^1 sur $]a,b[$
- ☐ Hypothèse : fg admet une limite finie en a et en b
- ☐ Les intégrales $\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ sont de même nature
- ☐ En cas de convergence, $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$

Question 17 ch08/q17

Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

Corrigé. Soient a, b, α, β dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, f une fonction continue sur $]a,b[$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection strictement monotone de classe C^1.

1. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature.
2. En cas de convergence, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ si φ est strictement croissante, et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ si φ est strictement décroissante.

ATTENDUS

- ☐ Hypothèse : f continue sur $]a,b[$
- ☐ Hypothèse : φ bijection strictement monotone de classe C^1 de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$
- ☐ Les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature
- ☐ En cas de convergence, égalité des deux intégrales si φ est croissante
- ☐ Si φ est décroissante : un signe $-$ devant l'intégrale en u, ou les bornes dans l'ordre inverse

Question 18 ch08/q18

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]-a, a[$, paire ou impaire. Que dire de la nature et de la valeur de $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$?

Corrigé. L'intégrale $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En cas de convergence, si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$; si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

ATTENDUS

- □ $\int_{-a}^{a} f$ converge si et seulement si $\int_{0}^{a} f$ converge
- □ En cas de convergence, f paire : $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$
- □ En cas de convergence, f impaire : $\int_{-a}^{a} f = 0$

Question 19 ch08/q19

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I d'extrémités $a < b$. Définir « $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument » et « f est intégrable sur I ». Quel lien y a-t-il entre convergence absolue et convergence ? La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé. On dit que $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument si l'intégrale $\int_{a}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. On dit que f est intégrable sur I si $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
Si $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors elle converge, et

$$\left|\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

La réciproque est fausse : $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (par intégration par parties) mais ne converge pas absolument.

ATTENDUS

- □ Convergence absolue : $\int_{a}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge
- □ f intégrable sur I : son intégrale converge absolument
- □ Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence
- □ $\left|\int_{a}^{b} f\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f|$
- □ Réciproque fausse, avec un contre-exemple valide

Question 20 ch08/q20

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Définir $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $\|f\|_1$ pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$. Quelle est la structure de $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$?

Corrigé. $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux sur I et intégrables sur I, c'est-à-dire telles que l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Pour $f \in \mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$, on pose $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$. L'ensemble $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

ATTENDUS

- □ $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$: fonctions continues par morceaux et intégrables sur I
- □ $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$
- □ Sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$

Question 21 ch08/q21

Énoncer la proposition sur l'intégrale nulle d'une fonction continue positive, avec toutes ses hypothèses.

Corrigé. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction continue, positive et intégrable sur I. Si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur I.

ATTENDUS

- □ Hypothèse : I intervalle non réduit à un point
- □ Hypothèse : f continue sur I
- □ Hypothèse : f positive sur I
- □ Hypothèse : f intégrable sur I
- □ Hypothèse : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- □ Conclusion : $f = 0$ sur I

Question 22 ch08/q22

Énoncer le théorème de comparaison pour l'intégrabilité en une borne b.

Corrigé. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- **Domination.** Si $f(t) = \mathrm{O}\left(g(t)\right)$ quand $t \to b$ et si g est intégrable en b, alors f est intégrable en b.
- **Équivalence.** Si $f(t) \sim g(t)$ quand $t \to b$, alors f est intégrable en b si et seulement si g est intégrable en b.

ATTENDUS

- □ Domination : $f = \mathrm{O}(g)$ en b et g intégrable en $b \Rightarrow f$ intégrable en b
- □ Équivalence : $f \sim g$ en $b \Rightarrow f$ et g ont la même intégrabilité en b
- □ Conclusion et hypothèses exprimées correctement via l'intégrabilité. Pas d'hypothèse de positivité

Question 23 ch08/q23

Donner les fonctions de référence pour l'intégrabilité en $+\infty$ et en 0, avec les conditions sur les paramètres.

Corrigé.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, et intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
3. La fonction ln est intégrable sur $]0, 1]$.

ATTENDUS

- ☐ $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$
- ☐ $t \mapsto 1/t^\alpha$ intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ (« intégrable en $+\infty$ » accepté)
- ☐ $t \mapsto 1/t^\alpha$ intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ (« intégrable en 0 » accepté)
- ☐ ln intégrable sur $]0, 1]$ (« intégrable en 0 » accepté)

Exercices

Exercice 1 ch08/x01

Calculer $\int_0^3 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t$.

Corrigé. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0, 3]$, la subdivision $(0, 1, 2, 3)$ lui étant adaptée : elle vaut 0 sur $[0, 1[$, 1 sur $[1, 2[$ et 2 sur $[2, 3[$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^3 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t + \int_1^2 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t + \int_2^3 \lfloor t \rfloor \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 0 \, \mathrm{d}t + \int_1^2 1 \, \mathrm{d}t + \int_2^3 2 \, \mathrm{d}t = 0 + 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

ATTENDUS

- ☐ Découpage $\int_0^3 = \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3$, où $\lfloor t \rfloor$ vaut 0, 1, 2
- ☐ Valeur 3

Exercice 2 ch08/x02

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = \frac{1}{t}$ pour $t \in]0,1]$. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$? sur $]0,1]$?

Corrigé. Sur $[0,1]$**.** Si f était continue par morceaux sur $[0,1]$, le premier morceau d'une subdivision adaptée serait de la forme $]0,a_1[$ et f y serait prolongeable par continuité en 0 : elle aurait une limite finie en 0. Or $f(t) = \frac{1}{t} \to +\infty$ quand $t \to 0$. Donc f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.
Sur $]0,1]$**.** La fonction f est continue sur $]0,1]$, donc sur tout segment inclus dans $]0,1]$: elle est continue par morceaux sur $]0,1]$.

ATTENDUS

- ☐ Sur $[0,1]$: non, car f n'a pas de limite finie en 0
- ☐ Sur $]0,1]$: oui, car f est continue sur cet intervalle

Exercice 3 ch08/x03

Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé. Pour $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Cette somme diffère de la somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ du terme $\frac{g(1)-g(0)}{n}$, qui tend vers 0. Comme g est continue sur $[0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

ATTENDUS

- ☐ Écriture $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
- ☐ g est continue sur $[0,1]$: somme de Riemann
- ☐ Limite $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 4 ch08/x04

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et calculer sa valeur. En déduire la nature et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Corrigé. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^x = \arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. La fonction est paire, donc $\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge aussi, avec la même valeur, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$.

ATTENDUS

- □ Primitive arctan, de limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$
- □ $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$
- □ Fonction paire : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut π

Exercice 5 ch08/x05

Déterminer, en calculant $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ pour $x \in]0, 1]$, la nature de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et celle de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Corrigé. Les deux fonctions sont continues sur $]0, 1]$. Pour $x \in]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to0]{} 2 \qquad \text{et} \qquad \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_x^1 = -\ln x \xrightarrow[x\to0]{} +\infty.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (et vaut 2) ; l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

ATTENDUS

- □ $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x}$
- □ Limite 2 quand $x \to 0$: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge
- □ $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$
- □ Limite $+\infty$ quand $x \to 0$: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge

Exercice 6 ch08/x06

Montrer qu'il n'existe aucun réel α tel que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge.

Corrigé. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$; on coupe en 1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ convergent toutes deux. Or l'intégrale de Riemann en $+\infty$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et celle en 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Aucun réel α ne vérifie les deux conditions : l'intégrale diverge pour tout α.

ATTENDUS

- □ Découpage en un point $c > 0$, par exemple $c = 1$
- □ Convergence en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$
- □ Convergence en 0 si et seulement si $\alpha < 1$
- □ Les deux conditions sont incompatibles : divergence pour tout α

Exercice 7 ch08/x07

Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Corrigé. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x.$$

Cette quantité vaut 0 en $x = 2n\pi$ et 2 en $x = (2n+1)\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: elle n'a pas de limite quand $x \to +\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

ATTENDUS

- □ $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$
- □ $1 - \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$, avec justification (deux suites de valeurs distinctes)

Exercice 8 ch08/x08

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé. La fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et, pour $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$). Par critère de majoration, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

ATTENDUS

- ☐ Fonction continue sur $[1, +\infty[$
- ☐ Encadrement $0 \leqslant \frac{\sin^2 t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ pour $t \geqslant 1$
- ☐ $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$)
- ☐ Conclusion par critère de majoration

Exercice 9 ch08/x09

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par croissances comparées,

$$t^2 f(t) = t^2 \mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \qquad \text{donc} \qquad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ ($\alpha = 2 > 1$). Par critère de négligeabilité, f est intégrable en $+\infty$, donc sur $[0, +\infty[$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

ATTENDUS

- ☐ Fonction continue sur $[0, +\infty[$
- ☐ Négligeabilité en $+\infty$ devant une fonction de référence, par exemple $f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées
- ☐ La fonction de référence utilisée est intégrable en $+\infty$, avec justification
- ☐ Par critère de négligeabilité, f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale converge

Exercice 10 ch08/x10

Montrer que $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge et calculer sa valeur.

Corrigé. Posons $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$, qui sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{-t}$. On a $u(0)v(0) = 0$, et $u(x)v(x) = -xe^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ ont même nature. De plus, $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = \left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0 + 1 = 1.$$

ATTENDUS

- ☐ Fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ posées, avec leurs dérivées
- ☐ Hypothèse : u et v de classe C^1 sur $[0, +\infty[$
- ☐ Limites du produit : $u(0)v(0) = 0$ et $u(x)v(x) = -xe^{-x} \to 0$ en $+\infty$ par croissances comparées
- ☐ Même nature que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$
- ☐ $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (intégrale de référence)
- ☐ Formule écrite après la convergence : l'intégrale vaut 1

Exercice 11 ch08/x11

Montrer que $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

Corrigé. Posons $u : t \mapsto \ln t$ et $v : t \mapsto t$, qui sont de classe C^1 sur $]0, 1]$. Pour tout $t \in]0, 1]$, $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$. On a $u(1)v(1) = 0$, et $u(x)v(x) = x \ln x \to 0$ quand $x \to 0$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ et $\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt$ ont même nature. De plus, $\int_0^1 1\,dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$: elle converge et vaut 1. Donc les deux intégrales convergent et

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt = [t \ln t]_0^1 - \int_0^1 1\,dt = 0 - 1 = -1.$$

ATTENDUS

- ☐ Fonctions $u : t \mapsto \ln t$ et $v : t \mapsto t$ posées, avec leurs dérivées
- ☐ Hypothèse : u et v de classe C^1 sur $]0, 1]$
- ☐ Limites du produit : $u(1)v(1) = 0$ et $u(x)v(x) = x \ln x \to 0$ en 0 par croissances comparées
- ☐ Même nature que $\int_0^1 1\,dt$
- ☐ $\int_0^1 1\,dt$ converge (fonction continue sur un segment)
- ☐ Formule écrite après la convergence : l'intégrale vaut -1

Exercice 12 ch08/x12

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé. Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \sin t$, qui sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 1$, $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v'(t) = \cos t$. On a $u(1)v(1) = \sin 1$, et $u(x)v(x) = \frac{\sin x}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, car $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}$. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
De plus, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et pour $t \geqslant 1$, $\left|\frac{\sin t}{t^2} \cdot t^2\right| = |\sin t| \leqslant 1$, donc $\frac{\sin t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = 2 > 1$). Par critère de domination, $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
Donc les deux intégrales convergent : en particulier, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

ATTENDUS

- ☐ Fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \sin t$ posées, avec leurs dérivées
- ☐ Hypothèse : u et v de classe C^1 sur $[1, +\infty[$
- ☐ Limites du produit : $u(1)v(1) = \sin 1$ et $u(x)v(x) = \frac{\sin x}{x} \to 0$ en $+\infty$
- ☐ Même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
- ☐ $\frac{\sin t}{t^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, car $|\sin t| \leqslant 1$
- ☐ $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$; par critère de domination, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge
- ☐ Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

Exercice 13 ch08/x13

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Corrigé. Posons $\varphi : u \mapsto u^2$, qui est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc bijective de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$ et tout $u \geqslant 0$, $t = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{t}$, et alors $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$, avec $\mathrm{e}^{-\sqrt{t}} = \mathrm{e}^{-u}$. Donc, par changement de variable, les intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature.
De plus, $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ converge : posons $g : u \mapsto 2u$ et $h : u \mapsto -\mathrm{e}^{-u}$, qui sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, avec $g'(u) = 2$ et $h'(u) = \mathrm{e}^{-u}$. On a $g(0)h(0) = 0$, et $g(x)h(x) = -2x\mathrm{e}^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, par croissances comparées. Donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ et $\int_0^{+\infty} g'(u)h(u)\,\mathrm{d}u = -2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature, et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ est une intégrale de référence convergente, de valeur 1. Donc elles convergent et

$$\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [-2u\mathrm{e}^{-u}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 0 + 2 = 2.$$

Donc les deux intégrales convergent et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2$.

ATTENDUS

- ☐ Changement de variable posé : $\varphi : u \mapsto u^2$, de classe C^1 et strictement croissante, bijective de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$
- ☐ Variables exprimées : $t = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{t}$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$
- ☐ Même nature que $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$
- ☐ Intégration par parties pour $\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$: fonctions de classe C^1 posées, limites finies du produit aux deux bornes
- ☐ Même nature que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$, intégrale de référence convergente ; valeur 2
- ☐ Égalité écrite après la convergence : l'intégrale vaut 2

Exercice 14 ch08/x14

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; on coupe en 0. Pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. La fonction f est impaire, donc $\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi et vaut $-\frac{1}{2}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

ATTENDUS

- ☐ Primitive $t \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$: $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge
- ☐ Convergence en $-\infty$, par imparité ou par calcul direct
- ☐ Valeur 0 par imparité, une fois la convergence établie ; « impaire donc nulle » sans convergence n'est pas accepté

Exercice 15 ch08/x15

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, et que sa valeur absolue est majorée par $\frac{\pi}{2}$.

Corrigé. La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et, pour $t \geqslant 0$, une valeur absolue étant positive,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$ ($\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan x \to \frac{\pi}{2}$). Par critère de majoration, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge, et

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|\cos t|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

ATTENDUS

- □ Encadrement $0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$, la positivité de la valeur absolue étant écrite
- □ $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$
- □ Convergence absolue par critère de majoration
- □ $\left|\int_0^{+\infty} f\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f| \leqslant \frac{\pi}{2}$

Exercice 16 ch08/x16

La fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.
En 0 : comme $\mathrm{e}^{-t} \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 (fonction de référence, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0.
En $+\infty$: pour $t \geqslant 1$, $\left|\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{-t}}\right| = \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant 1$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $a = 1 > 0$). Par critère de domination, f est intégrable en $+\infty$.
La fonction f est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0, +\infty[$.

ATTENDUS

- □ f continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$
- □ Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- □ En 0 : $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$
- □ $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable en 0 car $\frac{1}{2} < 1$; conclusion par critère d'équivalence
- □ En $+\infty$: $f(t) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$, par $\frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant 1$ pour $t \geqslant 1$
- □ $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable en $+\infty$; conclusion par critère de domination
- □ Conclusion : f est intégrable sur $]0, +\infty[$

Exercice 17 ch08/x17

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[1, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$.
En $+\infty$: par croissances comparées, $t^{3/2} f(t) = \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$). Par critère de négligeabilité, f est intégrable en $+\infty$.
La fonction f est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

ATTENDUS

- ☐ f continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[1, +\infty[$
- ☐ Intégrale généralisée en $+\infty$
- ☐ Croissances comparées : $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ en $+\infty$ pour un exposant $\beta \in]1, 2[$, par exemple $\beta = \frac{3}{2}$
- ☐ $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ intégrable en $+\infty$ car $\beta > 1$; conclusion par critère de négligeabilité
- ☐ Conclusion : f est intégrable sur $[1, +\infty[$

Exercice 18 ch08/x18

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.
En 0 : comme $1 + t^2 \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t\to0}{\sim} \ln t$. La fonction ln est intégrable en 0 (fonction de référence). Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0.
En $+\infty$: par croissances comparées, $t^{3/2} f(t) = \frac{t^{3/2} \ln t}{1+t^2} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$). Par critère de négligeabilité, f est intégrable en $+\infty$.
La fonction f est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0, +\infty[$.

ATTENDUS

- ☐ f continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$
- ☐ Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- ☐ En 0 : $f(t) \sim \ln t$
- ☐ ln intégrable en 0 ; conclusion par critère d'équivalence
- ☐ En $+\infty$: $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ pour un exposant $\beta \in]1, 2[$, par croissances comparées
- ☐ $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ intégrable en $+\infty$ car $\beta > 1$; conclusion par critère de négligeabilité
- ☐ Conclusion : f est intégrable sur $]0, +\infty[$

Exercice 19 ch08/x19

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est-elle intégrable sur $[2, +\infty[$?

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue sur $[2, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[2, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$.
En $+\infty$: la fonction f est positive sur $[2, +\infty[$, donc $|f| = f$ et f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or $t \mapsto \ln(\ln t)$ est une primitive de f sur $[2, +\infty[$ et, pour $x \geqslant 2$,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^x = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

L'intégrale diverge, donc f n'est pas intégrable en $+\infty$.
La fonction f n'est donc pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

ATTENDUS

- □ f continue sur $[2, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[2, +\infty[$
- □ Intégrale généralisée en $+\infty$
- □ f positive, donc l'intégrabilité en $+\infty$ équivaut à la convergence de $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$
- □ Primitive $t \mapsto \ln(\ln t)$
- □ $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \to +\infty$
- □ Conclusion : f n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$

Exercice 20 ch08/x20

Pour quels réels α la fonction $t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.
En $+\infty$: par croissances comparées, $t^2 f(t) = t^{\alpha+2}\mathrm{e}^{-t} \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence, $\alpha = 2 > 1$). Par critère de négligeabilité, f est intégrable en $+\infty$, et ce pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
En 0 : comme $\mathrm{e}^{-t} \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{-\alpha}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $-\alpha < 1$ (fonction de référence). Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha > -1$.
La fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si elle l'est en 0 et en $+\infty$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > -1$.

ATTENDUS

- □ f continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$
- □ Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- □ En $+\infty$: $f(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées
- □ $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$; par critère de négligeabilité, f intégrable en $+\infty$ pour tout α
- □ En 0 : $f(t) \sim t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$
- □ Intégrable en 0 si et seulement si $-\alpha < 1$, par critère d'équivalence et fonction de référence
- □ Conclusion : f est intégrable si et seulement si $\alpha > -1$

Exercice 21 ch08/x21

Pour quels réels α la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Corrigé. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.
En 0 : comme $1+t \to 1$ quand $t \to 0$, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ (fonction de référence). Par critère d'équivalence, f est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$.
En $+\infty$: comme $1+t \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha+1 > 1$ (fonction de référence). Par critère d'équivalence, f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
La fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si elle l'est en 0 et en $+\infty$, c'est-à-dire si et seulement si $0 < \alpha < 1$.

ATTENDUS

- ☐ f continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$
- ☐ Intégrale généralisée en 0 et en $+\infty$
- ☐ En 0 : $f(t) \sim \frac{1}{t^\alpha}$, intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$, par critère d'équivalence
- ☐ En $+\infty$: $f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$, par critère d'équivalence
- ☐ Conclusion : f est intégrable si et seulement si $0 < \alpha < 1$

Exercice 22 ch08/x22

Soit f une fonction continue et positive sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle. Donner une fonction continue par morceaux, positive, non nulle sur $[0,1]$, d'intégrale nulle.

Corrigé. Nullité de f. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $f(t_0) > 0$. Par continuité de f en t_0, il existe un segment $[c,d] \subset [0,1]$ avec $c < d$, contenant t_0, sur lequel $f \geqslant \frac{f(t_0)}{2}$. Comme f est positive sur $[0,1]$, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (d-c)\frac{f(t_0)}{2} > 0,$$

ce qui contredit $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Donc f est nulle sur $[0,1]$.
Contre-exemple sans continuité. La fonction g nulle sur $]0,1]$ et valant 1 en 0 est continue par morceaux (la subdivision $(0,1)$ est adaptée), positive et non nulle. Son intégrale est celle de son prolongement continu sur $[0,1]$, la fonction nulle : $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Raisonnement par l'absurde : un point t_0 où $f(t_0) > 0$
- ☐ Par continuité, $f \geqslant \frac{f(t_0)}{2}$ sur un segment $[c,d]$ avec $c < d$
- ☐ Par positivité et croissance de l'intégrale, $\int_0^1 f \geqslant \int_c^d f \geqslant (d-c)\frac{f(t_0)}{2} > 0$, contradiction
- ☐ Un contre-exemple valide, avec justification de la nullité de son intégrale

Exercice 23 ch08/x23

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, intégrable sur $[0, +\infty[$, admettant une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que $\ell = 0$.

Corrigé. Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$, qui est aussi continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, on peut supposer $\ell > 0$. Par définition de la limite, il existe $A \geqslant 0$ tel que $f(t) \geqslant \frac{\ell}{2}$ pour tout $t \geqslant A$. Par croissance de l'intégrale, pour $x \geqslant A$,

$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ aussi. Or f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc cette intégrale converge : contradiction. Ainsi $\ell = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Raisonnement par l'absurde : $\ell \neq 0$, ramené à $\ell > 0$ quitte à changer f en $-f$
- ☐ Il existe A tel que $f \geqslant \frac{\ell}{2}$ sur $[A, +\infty[$, par définition de la limite
- ☐ Minoration $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}(x - A) \to +\infty$
- ☐ Contradiction avec la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, qui découle de l'intégrabilité