Questions flash

Chapitre 9 — Endomorphismes des espaces euclidiens

Questions de cours

Question 1 ch09/q01

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Définir « u est une isométrie vectorielle de E ».

Corrigé. Un endomorphisme u de E est une isométrie vectorielle de E lorsqu'il conserve la norme :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\| .$$

---

attendus

- ☐ L'égalité $\|u(x)\| = \|x\|$
- ☐ Le quantificateur : pour tout $x \in E$

Question 2 ch09/q02

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Caractériser le fait que u est une isométrie vectorielle en termes de produits scalaires, puis en termes de l'image par u d'une base orthonormée.

Corrigé. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x),\, u(y)\rangle = \langle x,\, y\rangle .$$

C'est aussi équivalent à chacune des propriétés suivantes : l'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E ; il existe une base orthonormée de E dont l'image par u est une base orthonormée de E.

---

attendus

- ☐ Équivalence entre « u est une isométrie vectorielle » et « pour tous $x, y \in E$, $\langle u(x),\, u(y)\rangle = \langle x,\, y\rangle$ »
- ☐ Équivalence entre « u est une isométrie vectorielle » et « l'image par u de toute base orthonormée est une base orthonormée »
- ☐ Il suffit d'une seule base orthonormée dont l'image est une base orthonormée

Question 3 ch09/q03

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Définir la symétrie orthogonale s par rapport à F. Pourquoi est-ce une isométrie vectorielle ? Qu'appelle-t-on réflexion ?

Corrigé. Comme $E = F \oplus F^\perp$, la symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$: pour $a \in F$ et $b \in F^\perp$, $s(a+b) = a - b$. On a aussi $s = 2p_F - \mathrm{Id}_E$, où p_F est la projection orthogonale sur F.
C'est une isométrie vectorielle : pour $x = a + b$ comme ci-dessus, a et b sont orthogonaux, donc le théorème de Pythagore donne $\|s(x)\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|x\|^2$.
Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

ATTENDUS

- ☐ Définition : symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$, la direction $F^\perp$ précisée
- ☐ Isométrie : théorème de Pythagore sur la décomposition $x = a + b$, $a \in F$, $b \in F^\perp$
- ☐ Réflexion : symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

Question 4 ch09/q04

Soit E un espace euclidien. Définir $\mathrm{O}(E)$. Que peut-on dire de Id_E, de la composée de deux éléments de $\mathrm{O}(E)$ et de l'inverse d'un élément de $\mathrm{O}(E)$?

Corrigé. $\mathrm{O}(E)$ est l'ensemble des isométries vectorielles de E. On a $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$; si $u, v \in \mathrm{O}(E)$, alors $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$; tout élément u de $\mathrm{O}(E)$ est un automorphisme de E et $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

ATTENDUS

- ☐ Définition : $\mathrm{O}(E)$ est l'ensemble des isométries vectorielles de E
- ☐ $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$ et stabilité par composition
- ☐ Tout élément de $\mathrm{O}(E)$ est un automorphisme, et son inverse est dans $\mathrm{O}(E)$

Question 5 ch09/q05

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E. L'endomorphisme u est-il injectif ? bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres réelles possibles ?

Corrigé. Si $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0_E$: u est injectif. Comme E est de dimension finie, un endomorphisme injectif de E est bijectif : u est un automorphisme de E.
Si λ est une valeur propre réelle de u et x un vecteur propre associé, alors $\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ avec $\|x\| \neq 0$, donc $|\lambda| = 1$: les seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1.

ATTENDUS

- ☐ Injectivité par conservation de la norme : $u(x) = 0_E$ entraîne $\|x\| = 0$
- ☐ Bijectivité par la dimension finie, argument cité
- ☐ Valeurs propres réelles : $|\lambda| = 1$, par conservation de la norme d'un vecteur propre non nul
- ☐ Conclusion : $\lambda \in \{-1, 1\}$

Question 6 ch09/q06

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Que peut-on dire de $F^\perp$?

Corrigé. Le sous-espace $F^\perp$ est stable par u : $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

ATTENDUS

- □ $F^\perp$ est stable par u

Question 7 ch09/q07

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Définir « A est orthogonale ». Caractériser cette propriété en termes des colonnes de A, puis en termes de ses lignes.

Corrigé. La matrice A est orthogonale lorsque $A^\top A = I_n$. C'est équivalent à chacune des propriétés suivantes : A est inversible et $A^{-1} = A^\top$; $AA^\top = I_n$; les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel ; les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

ATTENDUS

- □ Définition : $A^\top A = I_n$
- □ Équivalence entre « A est orthogonale » et « les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ »
- □ Même équivalence avec les lignes

Question 8 ch09/q08

Caractériser les matrices orthogonales comme matrices de passage.

Corrigé. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et $\mathcal{B}'$ une base de E. Alors $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale. Les matrices orthogonales sont donc exactement les matrices de passage entre deux bases orthonormées.

ATTENDUS

- □ Hypothèse : la base de départ $\mathcal{B}$ est orthonormée
- □ Équivalence : $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est orthogonale

Question 9 ch09/q09

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Caractériser le fait que u est une isométrie vectorielle à l'aide de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. L'hypothèse « orthonormée » est-elle nécessaire ?

Corrigé. L'endomorphisme u est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
L'hypothèse « orthonormée » est nécessaire. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, la réflexion $s\colon (x,y) \mapsto (y,x)$ a pour matrice dans la base $((1,0),(1,1))$, qui n'est pas orthonormée,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

car $s(1,0) = (0,1) = -(1,0) + (1,1)$ et $s(1,1) = (1,1)$. Cette matrice n'est pas orthogonale alors que s est une isométrie vectorielle.

ATTENDUS

- ☐ Équivalence : u est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$
- ☐ Réponse : l'hypothèse est nécessaire
- ☐ Un contre-exemple, calcul de la matrice à l'appui

Question 10 ch09/q10

Que vaut le déterminant d'une matrice orthogonale ? La réciproque est-elle vraie ?

Corrigé. Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det A \in \{-1, 1\}$: en effet $1 = \det I_n = \det(A^\top A) = \det A^\top \det A = (\det A)^2$.
La réciproque est fausse : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1 mais n'est pas orthogonale, sa seconde colonne n'étant pas unitaire.

ATTENDUS

- ☐ $\det A \in \{-1, 1\}$
- ☐ Justification : $(\det A)^2 = \det(A^\top A) = 1$, avec $\det A^\top = \det A$
- ☐ Réciproque fausse, avec un contre-exemple de déterminant 1 non orthogonal

Question 11 ch09/q11

Définir $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(E)$ pour un espace euclidien E. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est encore dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 ; $\mathrm{SO}(E)$ est l'ensemble des isométries vectorielles de E de déterminant 1.
Soient $A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. On a $(AB)^\top (AB) = B^\top A^\top AB = B^\top B = I_n$, donc $AB \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et $\det(AB) = \det A \det B = 1$. Donc $AB \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

ATTENDUS

- ☐ Définition de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$: orthogonale et de déterminant 1
- ☐ Définition de $\mathrm{SO}(E)$: isométrie vectorielle de déterminant 1
- ☐ AB orthogonale : $(AB)^\top (AB) = B^\top A^\top AB = I_n$, transposée du produit dans le bon ordre
- ☐ $\det(AB) = \det A \det B = 1$

Question 12 ch09/q12

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Définir « deux bases de E ont la même orientation ». Combien E admet-il d'orientations ? Qu'est-ce qu'une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté ?

Corrigé. Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E ont la même orientation lorsque $\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} > 0$, et sont d'orientation contraire sinon.
L'espace E admet exactement deux orientations : orienter E, c'est choisir une base que l'on décrète directe ; les bases de même orientation sont alors directes, les autres indirectes.
Une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté est une base orthonormée qui est directe, c'est-à-dire de même orientation que la base choisie pour orienter E.

ATTENDUS

- ☐ Définition : $\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} > 0$
- ☐ Deux orientations
- ☐ Base orthonormée directe : base orthonormée de même orientation que la base choisie pour orienter E

Question 13 ch09/q13

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E. Quel lien y a-t-il entre l'orientation relative de ces deux bases et le déterminant de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$?

Corrigé. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale, donc $\det P \in \{-1, 1\}$. Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement si $\det P = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$; elles sont d'orientation contraire si et seulement si $\det P = -1$.

ATTENDUS

- □ $\det P \in \{-1, 1\}$ car P est orthogonale
- □ Équivalence : même orientation si et seulement si $\det P = 1$, c'est-à-dire $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$

Question 14 ch09/q14

Décrire les éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, puis ceux de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Les éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ sont les $R(\theta)$ (déterminant 1) et les $S(\theta)$ (déterminant -1), $\theta \in \mathbb{R}$. Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les $R(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Dans les deux cas, θ est unique modulo 2π.

ATTENDUS

- □ Matrices $R(\theta)$ écrites correctement, le $-\sin\theta$ en position $(1, 2)$
- □ Matrices $S(\theta)$ écrites correctement, le $-\cos\theta$ en position $(2, 2)$
- □ $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$: réunion des deux familles ; $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$: les $R(\theta)$ seulement

Question 15 ch09/q15

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta)$ la matrice de rotation d'angle θ. Donner $R(\theta)R(\theta')$ et $R(\theta)^{-1}$. Deux matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ commutent-elles toujours ? Et deux matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$?

Corrigé. On a $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta')$ et $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.
Deux matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ commutent toujours : $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta') = R(\theta')R(\theta)$.
Deux matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ ne commutent pas toujours : avec $S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$S(0)R\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R\left(\tfrac{\pi}{2}\right) S(0).$$

ATTENDUS

- ☐ $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta')$ et $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$
- ☐ Commutativité dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, justifiée par la formule du produit
- ☐ Non-commutativité dans $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, avec un contre-exemple calculé

Question 16 ch09/q16

Définir une rotation vectorielle d'un plan euclidien. Sa matrice dépend-elle de la base orthonormée directe choisie ?

Corrigé. Une rotation vectorielle d'un plan euclidien E est une isométrie vectorielle de E de déterminant 1. Dans une base orthonormée, sa matrice est de la forme $R(\theta)$, et $R(\theta)$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie : deux bases orthonormées directes donnent la même matrice. Dans une base orthonormée indirecte, la matrice devient $R(-\theta)$.

ATTENDUS

- ☐ Définition : isométrie vectorielle du plan de déterminant 1
- ☐ Réponse : la matrice ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie

Question 17 ch09/q17

Soit u une rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. Définir une mesure de l'angle de u. Comment la lit-on sur la matrice de u dans une base orthonormée directe ? Que devient-elle dans une base orthonormée indirecte ?

Corrigé. Une mesure de l'angle de u est un réel θ, défini modulo 2π, tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$ pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$.
Si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{B}$ orthonormée directe, alors $\cos\theta = a$ (coefficient diagonal, et $a = d$) et $\sin\theta = b$ (coefficient d'indice $(2,1)$).
Dans une base orthonormée indirecte, la matrice de u est $R(-\theta)$: la mesure de l'angle change de signe.

ATTENDUS

- ☐ Définition : θ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$ pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$, défini modulo 2π
- ☐ Lecture : $\cos\theta$ sur la diagonale, $\sin\theta$ en position $(2,1)$
- ☐ Base indirecte : la matrice devient $R(-\theta)$, l'angle change de signe

Question 18 ch09/q18

Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un plan euclidien orienté E. Définir une mesure de l'angle orienté (x, y) et donner les formules exprimant son cosinus et son sinus.

Corrigé. Une mesure de l'angle orienté (x, y) est une mesure de l'angle de l'unique rotation vectorielle de E qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$. Elle est définie modulo 2π.
Si θ est une telle mesure et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E,

$$\cos\theta = \frac{\langle x,\ y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\det_{\mathcal{B}}(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

ATTENDUS

- ☐ Définition : mesure de l'angle de l'unique rotation envoyant $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$, vecteurs normalisés
- ☐ $\cos\theta = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$
- ☐ $\sin\theta = \frac{\det_{\mathcal{B}}(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}$, avec $\mathcal{B}$ orthonormée directe

Question 19 ch09/q19

Énoncer la classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

Corrigé. Soit u une isométrie vectorielle d'un plan euclidien E.

- Si $\det u = 1$, alors u est une rotation vectorielle : sa matrice dans toute base orthonormée est de la forme $R(\theta)$.
- Si $\det u = -1$, alors u est une réflexion : si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S(\theta)$ dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, alors u est la réflexion par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\theta}{2}\, e_2\right)$.

Les isométries vectorielles du plan sont donc les rotations vectorielles et les réflexions.

ATTENDUS

- □ Disjonction selon $\det u = 1$ ou $\det u = -1$
- □ Cas $\det u = 1$: rotation vectorielle
- □ Cas $\det u = -1$: réflexion, d'axe $\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\theta}{2}\, e_2\right)$ si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = S(\theta)$

Question 20 ch09/q20

Que vaut la composée de deux réflexions d'un plan euclidien ?

Corrigé. La composée de deux réflexions d'un plan euclidien est une rotation vectorielle : c'est une isométrie vectorielle, de déterminant $(-1) \times (-1) = 1$. Si les deux réflexions ont pour matrices $S(\theta_1)$ et $S(\theta_2)$ dans une base orthonormée directe, la composée $s_2 \circ s_1$ a pour matrice $S(\theta_2)S(\theta_1) = R(\theta_2 - \theta_1)$.

ATTENDUS

- □ Réponse : une rotation vectorielle
- □ Justification : isométrie vectorielle de déterminant $(-1) \times (-1) = 1$

Question 21 ch09/q21

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Définir « u est autoadjoint ». Caractériser cette propriété à l'aide de la matrice de u dans une base orthonormée.

Corrigé. L'endomorphisme u est autoadjoint lorsque

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u(y)\rangle\,.$$

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors u est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

ATTENDUS

- □ Définition : $\langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u(y)\rangle$ pour tous $x, y \in E$
- □ Équivalence : u est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique
- □ Hypothèse « $\mathcal{B}$ orthonormée » présente

Question 22 ch09/q22

Soit E un espace euclidien de dimension n. L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$? Quelle est sa dimension ? Est-il stable par composition ?

Corrigé. $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$: il contient l'endomorphisme nul, et si $u, v \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la bilinéarité du produit scalaire donne $\langle (\lambda u + \mu v)(x),\ y\rangle = \lambda \langle u(x),\ y\rangle + \mu \langle v(x),\ y\rangle = \langle x,\ (\lambda u + \mu v)(y)\rangle$.
Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$, l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.
$\mathcal{S}(E)$ n'est pas stable par composition en général : pour $u, v \in \mathcal{S}(E)$, $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, les endomorphismes de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique sont autoadjoints, mais leur composée, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ne l'est pas.

ATTENDUS

- ☐ Sous-espace vectoriel : endomorphisme nul et stabilité par combinaison linéaire, par bilinéarité du produit scalaire
- ☐ Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, via l'isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ orthonormée
- ☐ Pas stable par composition en général : $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si u et v commutent
- ☐ Un contre-exemple

Question 23 ch09/q23

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Caractériser le fait que p est un projecteur orthogonal.

Corrigé. Le projecteur p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire $\ker p = (\mathrm{Im}\, p)^{\perp}$, si et seulement si p est autoadjoint.

ATTENDUS

- ☐ Équivalence : p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint

Question 24 ch09/q24

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Que peut-on dire de $F^{\perp}$? Que peut-on dire de deux sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres distinctes ?

Corrigé. Le sous-espace $F^{\perp}$ est stable par u.
Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

ATTENDUS

- ☐ $F^{\perp}$ est stable par u
- ☐ Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux

Question 25 ch09/q25

Énoncer le théorème spectral, puis sa forme matricielle.

Corrigé. Théorème spectral. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Alors u est diagonalisable et il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u. Autrement dit, les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux et leur somme est E.
Forme matricielle. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1} = PDP^\top$.

ATTENDUS

- ☐ Hypothèses : E euclidien, u autoadjoint
- ☐ Conclusion : il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u
- ☐ Forme matricielle : A symétrique réelle, $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale avec $A = PDP^\top$

Question 26 ch09/q26

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Définir « u est positif » et « u est défini positif ». Quelles notations désignent les ensembles correspondants ?

Corrigé. L'endomorphisme autoadjoint u est positif lorsque

$$\forall x \in E,\ \langle u(x),\, x\rangle \geqslant 0,$$

et défini positif lorsque de plus

$$\forall x \in E,\ \langle u(x),\, x\rangle = 0 \implies x = 0_E.$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ celui des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

ATTENDUS

- ☐ Positif : $\langle u(x),\, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$
- ☐ Défini positif : positif et $\langle u(x),\, x\rangle = 0$ entraîne $x = 0_E$
- ☐ Notations $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$

Question 27 ch09/q27

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Définir « A est positive » et « A est définie positive ». Quel lien avec l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A ?

Corrigé. La matrice symétrique A est positive lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0,$$

et définie positive lorsque de plus

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX = 0 \implies X = 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles correspondants.
Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, canoniquement associé à A, alors $\langle u(x),\ x\rangle = X^\top AX$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ de colonne X. Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $u \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^n)$, et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $u \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}^n)$.

ATTENDUS

- ☐ Positive : $X^\top AX \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- ☐ Définie positive : positive et $X^\top AX = 0$ entraîne $X = 0$
- ☐ Lien : A est positive (définie positive) si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé l'est, car $\langle u(x),\ x\rangle = X^\top AX$

Question 28 ch09/q28

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Caractériser « u est positif » et « u est défini positif » à l'aide du spectre de u. Énoncer la caractérisation analogue pour une matrice symétrique réelle.

Corrigé. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $u \in \mathcal{S}^+(E)$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, et $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
De même, pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

ATTENDUS

- ☐ Équivalence : u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$
- ☐ Équivalence : u est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$
- ☐ Même énoncé pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Exercices

Exercice 1 ch09/x01

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est orthogonale. La matrice A est-elle dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$? Donner A^{-1}.

Corrigé. Les colonnes de A sont $\frac{1}{3}(2,2,-1)$, $\frac{1}{3}(-1,2,2)$ et $\frac{1}{3}(2,-1,2)$. Chacune est unitaire : $\frac{1}{9}(4+4+1) = 1$. Elles sont deux à deux orthogonales : $\frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$, $\frac{1}{9}(4-2-2) = 0$ et $\frac{1}{9}(-2-2+4) = 0$. Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: A est orthogonale.
Par la règle de Sarrus,

$$\det A = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\,(8+8-1+4+4+4) = 1,$$

donc $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
Enfin

$$A^{-1} = A^{\top} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ATTENDUS

- ☐ Colonnes unitaires : calcul des trois normes
- ☐ Colonnes deux à deux orthogonales : calcul des trois produits scalaires
- ☐ Conclusion : A orthogonale, par la caractérisation par les colonnes
- ☐ Déterminant calculé, égal à 1 : $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$
- ☐ $A^{-1} = A^{\top}$, explicitée

Exercice 2 ch09/x02

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Déterminer un vecteur w tel que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), w\right)$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. En déduire une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Corrigé. Notons $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ et $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. Ces vecteurs sont unitaires et $\langle u, v\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-1+0) = 0$. Un vecteur $w = (a,b,c)$ est orthogonal à u et à v si et seulement si $a+b=0$ et $a-b+c=0$, c'est-à-dire $b=-a$ et $c=-2a$: $w \in \mathrm{Vect}\,((1,-1,-2))$. Le vecteur $(1,-1,-2)$ a pour norme $\sqrt{6}$, donc $w = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$ convient pour que la famille soit orthonormée.
Pour $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$, le déterminant de (u,v,w) dans la base canonique vaut

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\,(2+0+1-0+1+2) = 1 > 0,$$

donc (u,v,w) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ pour $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$.
La matrice de passage de la base canonique, orthonormée directe, à (u,v,w) est donc dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$:

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

ATTENDUS

- ☐ Vérification que les deux premiers vecteurs sont unitaires et orthogonaux
- ☐ Système $w \perp u$, $w \perp v$ résolu : $w \in \mathrm{Vect}\,((1,-1,-2))$
- ☐ Normalisation : $w = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$
- ☐ Signe fixé par le déterminant, calculé, strictement positif
- ☐ Matrice de passage de la base canonique à cette base, dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, avec la justification

Exercice 3 ch09/x03

Pour quelles valeurs des réels a et b la matrice $\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

Corrigé. Les colonnes $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}b\\ -a\end{pmatrix}$ ont toutes deux pour norme $\sqrt{a^2+b^2}$, et leur produit scalaire $ab-ba$ est toujours nul. La matrice est donc orthogonale si et seulement si $a^2+b^2=1$.

ATTENDUS

- ☐ Calcul des normes des colonnes et de leur produit scalaire
- ☐ Orthogonalité des colonnes automatique : $ab-ba=0$
- ☐ Condition nécessaire et suffisante : $a^2+b^2=1$

Exercice 4 ch09/x04

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est orthogonale si et seulement si $A^\top$ est orthogonale.

Corrigé. La matrice A est orthogonale si et seulement si A est inversible d'inverse $A^\top$, ce qui équivaut à $AA^\top = I_n$. Or $AA^\top = (A^\top)^\top A^\top$: cette égalité dit exactement que $A^\top$ est orthogonale.

ATTENDUS

- □ « A orthogonale » équivaut à $AA^\top = I_n$ (inverse à droite)
- □ Identification $AA^\top = (A^\top)^\top A^\top$
- □ Équivalence énoncée dans les deux sens

Exercice 5 ch09/x05

Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse.

Corrigé. La matrice nulle n'est pas orthogonale, puisque $0^\top 0 = 0 \neq I_n$: $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ne contient pas le vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc n'en est pas un sous-espace vectoriel.
Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible et $A^{-1} = A^\top$. Or $(A^\top)^\top A^\top = AA^\top = AA^{-1} = I_n$, donc $A^{-1} = A^\top \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

ATTENDUS

- □ Non sous-espace vectoriel : la matrice nulle n'est pas orthogonale
- □ $A^{-1} = A^\top$
- □ Vérification $(A^\top)^\top A^\top = AA^\top = I_n$

Exercice 6 ch09/x06

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux.

Corrigé. Soient $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$, c'est-à-dire $u(x) = x$ et $u(y) = -y$. Comme u conserve le produit scalaire,

$$\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle,$$

donc $\langle x, y \rangle = 0$: $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux.

ATTENDUS

- □ Prise de $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $y \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$, traduits en $u(x) = x$ et $u(y) = -y$
- □ Conservation du produit scalaire : $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$
- □ $\langle x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$, donc $\langle x, y \rangle = 0$

Exercice 7 ch09/x07

Soit u une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E et λ une valeur propre réelle de u. Montrer que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Corrigé. Soit x un vecteur propre associé à λ : $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0_E$. Comme u conserve la norme,

$$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| .$$

Comme $\|x\| \neq 0$, on obtient $|\lambda| = 1$, soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

ATTENDUS

- □ Vecteur propre $x \neq 0_E$ introduit
- □ Conservation de la norme : $\|x\| = |\lambda| \, \|x\|$
- □ Simplification par $\|x\| \neq 0$: $|\lambda| = 1$

Exercice 8 ch09/x08

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et on note P le plan d'équation $x + y + z = 0$. Écrire la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport à P. Vérifier qu'elle est orthogonale et calculer son déterminant.

Corrigé. Le vecteur $a = (1, 1, 1)$ est normal à P, de norme $\sqrt{3}$. La réflexion s par rapport à P est

$$s(x) = x - 2 \, \frac{\langle x, \, a \rangle}{\|a\|^2} \, a,$$

donc, pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, $s(x) = x - \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(1, 1, 1)$. Sa matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes sont unitaires, $\frac{1}{9}(1 + 4 + 4) = 1$, et deux à deux orthogonales, $\frac{1}{9}(-2 - 2 + 4) = 0$: M est orthogonale. Par la règle de Sarrus, $\det M = \frac{1}{27}\,(1 - 8 - 8 - 4 - 4 - 4) = -1$. C'est le déterminant attendu pour une réflexion.

ATTENDUS

- □ Vecteur normal $a = (1, 1, 1)$ et formule $s(x) = x - 2 \, \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} \, a$
- □ Matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
- □ Orthogonalité vérifiée sur les colonnes
- □ Déterminant calculé : -1

Exercice 9 ch09/x09

Soit x un vecteur unitaire d'un espace euclidien E. Montrer que l'application $s : y \mapsto y - 2\langle x, y\rangle\, x$ est la réflexion par rapport à $x^\perp$.

Corrigé. Comme x est unitaire, l'application $p : y \mapsto \langle x, y\rangle\, x$ est la projection orthogonale sur la droite $D = \mathrm{Vect}(x)$. Or $E = D \oplus D^\perp$ et $D^\perp = x^\perp$, de sorte que $p + p_{x^\perp} = \mathrm{Id}_E$, où $p_{x^\perp}$ est la projection orthogonale sur $x^\perp$. Ainsi

$$s = \mathrm{Id}_E - 2p = \mathrm{Id}_E - 2(\mathrm{Id}_E - p_{x^\perp}) = 2p_{x^\perp} - \mathrm{Id}_E,$$

qui est la symétrie orthogonale par rapport à $x^\perp$. Comme $x^\perp$ est un hyperplan de E, s est la réflexion par rapport à $x^\perp$.

ATTENDUS

- ☐ $y \mapsto \langle x, y\rangle\, x$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x)$, car x est unitaire
- ☐ $p_{\mathrm{Vect}(x)} + p_{x^\perp} = \mathrm{Id}_E$, donc $s = 2p_{x^\perp} - \mathrm{Id}_E$
- ☐ Identification : symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $x^\perp$, donc réflexion

Exercice 10 ch09/x10

Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Montrer que A est diagonale, à coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1.

Corrigé. Comme A est orthogonale, A est inversible et $A^{-1} = A^\top$. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure, donc $A^\top$ est triangulaire supérieure. Or $A^\top$ est aussi triangulaire inférieure, comme transposée d'une matrice triangulaire supérieure. Donc $A^\top$ est diagonale, et A aussi.
L'égalité $A^\top A = I_n$ s'écrit alors $a_{ii}^2 = 1$ pour tout i, soit $a_{ii} \in \{-1, 1\}$.

ATTENDUS

- ☐ $A^{-1} = A^\top$
- ☐ $A^\top$ triangulaire inférieure (transposée) et triangulaire supérieure (inverse d'une triangulaire supérieure)
- ☐ Conclusion : A diagonale, puis $a_{ii}^2 = 1$ par $A^\top A = I_n$

Exercice 11 ch09/x11

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left|a_{ij}\right| \leq 1$ pour tous i, j, puis que $|\mathrm{tr}\, A| \leq n$.

Corrigé. Les colonnes de A sont unitaires : pour tout j, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$. Chaque terme de cette somme de réels positifs est donc inférieur ou égal à 1 : $a_{ij}^2 \leq 1$, soit $\left|a_{ij}\right| \leq 1$.
Par l'inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{tr}\, A| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| \leq n.$$

ATTENDUS

- ☐ Colonnes unitaires : $\sum_i a_{ij}^2 = 1$
- ☐ Chaque terme d'une somme de réels positifs est majoré par la somme : $a_{ij}^2 \leq 1$
- ☐ Inégalité triangulaire sur la trace : $|\mathrm{tr}\, A| \leq \sum_i |a_{ii}| \leq n$

Exercice 12 ch09/x12

Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et par passage à l'inverse, et que le produit de deux éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé. Soient $A, B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Les matrices AB et A^{-1} sont orthogonales, car $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et par passage à l'inverse, et $\det(AB) = \det A \det B = 1$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1$. Donc AB et A^{-1} sont dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
Si $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sont de déterminant -1, alors $AB \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(AB) = (-1) \times (-1) = 1 : AB \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

ATTENDUS

- ☐ AB et A^{-1} orthogonales, par la stabilité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$
- ☐ $\det(AB) = \det A \det B$ et $\det(A^{-1}) = 1/\det A$
- ☐ Produit de deux matrices de déterminant -1 : orthogonale, de déterminant 1

Exercice 13 ch09/x13

Les bases $((1,2),(3,1))$ et $((1,0),(1,1))$ de $\mathbb{R}^2$ ont-elles la même orientation ? La base $((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ a-t-elle la même orientation que la base canonique ?

Corrigé. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1,2),(3,1))$ et $\mathcal{B}' = ((1,0),(1,1))$. On a $\det P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = 1\times 1 - 3\times 2 = -5 < 0$ et $\det P_{\mathcal{C},\mathcal{B}'} = 1\times 1 - 1\times 0 = 1 > 0$: $\mathcal{B}$ est d'orientation contraire à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}'$ de même orientation que $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientation contraire. On peut aussi écrire directement $\det P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \det\left(P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1} P_{\mathcal{C},\mathcal{B}'}\right) = -\frac{1}{5} < 0$.
Dans $\mathbb{R}^3$, la matrice de passage de la base canonique à $((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ a pour déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2 > 0,$$

donc cette base a la même orientation que la base canonique.

ATTENDUS

- □ Déterminants des matrices de passage depuis la base canonique : -5 et 1
- □ Conclusion : orientations contraires, les deux signes étant différents
- □ Déterminant 3×3 calculé : $2 > 0$, même orientation que la base canonique

Exercice 14 ch09/x14

Un plan euclidien orienté est rapporté à une base orthonormée directe. Reconnaître les isométries vectorielles de matrices

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

en précisant l'angle de la rotation et l'axe de la réflexion.

Corrigé. La première matrice est $R\left(\frac{\pi}{3}\right)$, car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: c'est la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$. La seconde est $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$, de déterminant -1 : c'est la réflexion par rapport à la droite $\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\pi}{6}\, e_1 + \sin\frac{\pi}{6}\, e_2\right) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{3}\, e_1 + e_2\right)$, où (e_1, e_2) est la base orthonormée directe choisie. On vérifie que $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$ est bien fixé par cette matrice.

ATTENDUS

- □ Première matrice identifiée à $R\left(\frac{\pi}{3}\right)$: rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$
- □ Seconde matrice de déterminant -1 : réflexion
- □ Axe : $\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\pi}{6}\, e_1 + \sin\frac{\pi}{6}\, e_2\right) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{3}\, e_1 + e_2\right)$

Exercice 15 ch09/x15

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta)$ la matrice de rotation d'angle θ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $R(\theta)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, puis $R(\theta)S(\theta')$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence que $R(\theta)^n = R(n\theta)$: $R(\theta)^0 = I_2 = R(0)$, et si $R(\theta)^n = R(n\theta)$, alors $R(\theta)^{n+1} = R(n\theta)R(\theta) = R((n+1)\theta)$. Pour $n < 0$, comme $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$, $R(\theta)^n = (R(-\theta))^{-n} = R(-n \cdot (-\theta)) = R(n\theta)$. Ainsi $R(\theta)^n = R(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Par les formules d'addition,

$$R(\theta)S(\theta') = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \sin\theta\sin\theta' - \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} = S(\theta + \theta').$$

ATTENDUS

- ☐ Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec $R(a)R(b) = R(a+b)$
- ☐ Cas $n < 0$ traité, via $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$
- ☐ Produit $R(\theta)S(\theta')$ calculé et identifié à $S(\theta + \theta')$ par les formules d'addition

Exercice 16 ch09/x16

On oriente $\mathbb{R}^2$ par sa base canonique. Donner une mesure de l'angle orienté $((1,1),(0,2))$, puis de l'angle orienté $\left((1,0),(-1,\sqrt{3})\right)$.

Corrigé. Pour $x = (1,1)$ et $y = (0,2)$, on a $\|x\| = \sqrt{2}$, $\|y\| = 2$, $\langle x, y\rangle = 2$ et $\det(x,y) = 1\times 2 - 1\times 0 = 2$. Si θ est une mesure de l'angle orienté (x,y), alors $\cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.
Pour $x = (1,0)$ et $y = (-1,\sqrt{3})$, on a $\|x\| = 1$, $\|y\| = 2$, $\langle x, y\rangle = -1$ et $\det(x,y) = 1\times\sqrt{3} - 0\times(-1) = \sqrt{3}$. Donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

ATTENDUS

- ☐ Formules $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin\theta = \frac{\det(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ en base canonique
- ☐ Premier angle : $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π
- ☐ Second angle : $\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π
- ☐ θ déterminé par le couple $(\cos\theta, \sin\theta)$, pas par le seul cosinus

Exercice 17 ch09/x17

Soit u une rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté, de matrice $R(\theta)$ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice de u dans toute autre base orthonormée directe est $R(\theta)$, et que sa matrice dans une base orthonormée indirecte est $R(-\theta)$.

Corrigé. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Les deux bases étant orthonormées, $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}R(\theta)P$.
Si $\mathcal{B}'$ est directe, les deux bases ont la même orientation, donc $P \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$: $P = R(\alpha)$ pour un réel α, et $P^{-1} = R(-\alpha)$. Comme deux matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ commutent,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = R(-\alpha)R(\theta)R(\alpha) = R(\theta)R(-\alpha)R(\alpha) = R(\theta).$$

Si $\mathcal{B}'$ est indirecte, $\det P = -1$, donc $P = S(\alpha)$ pour un réel α, et $P^{-1} = S(\alpha)$ puisque $S(\alpha)^2 = I_2$. Avec les formules $S(a)R(b) = S(a-b)$ et $S(a)S(b) = R(a-b)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = S(\alpha)R(\theta)S(\alpha) = S(\alpha-\theta)S(\alpha) = R(\alpha-\theta-\alpha) = R(-\theta).$$

ATTENDUS

- ☐ Formule de changement de base $P^{-1}R(\theta)P$, avec P orthogonale
- ☐ Base directe : $P = R(\alpha)$, puis commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$
- ☐ Base indirecte : $P = S(\alpha)$ et $P^{-1} = S(\alpha)$
- ☐ Calcul $S(\alpha)R(\theta)S(\alpha) = R(-\theta)$ par les formules de produit

Exercice 18 ch09/x18

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Montrer que la matrice $R(\theta)$ n'a pas de valeur propre réelle. Quelles sont ses valeurs propres complexes ?

Corrigé. Le polynôme caractéristique de $R(\theta)$ est

$$\chi_{R(\theta)} = X^2 - 2\cos\theta\, X + 1,$$

de discriminant $4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$. Comme $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $\sin\theta \neq 0$ et le discriminant est strictement négatif : $\chi_{R(\theta)}$ n'a pas de racine réelle, donc $R(\theta)$ n'a pas de valeur propre réelle.
Ses racines complexes sont $\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$: les valeurs propres complexes de $R(\theta)$ sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

ATTENDUS

- ☐ Polynôme caractéristique $X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$
- ☐ Discriminant $-4\sin^2\theta < 0$, l'hypothèse $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ utilisée
- ☐ Valeurs propres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

Exercice 19 ch09/x19

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Montrer que u est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Corrigé. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Pour $x, y \in E$ de colonnes X et Y dans $\mathcal{B}$, les colonnes de $u(x)$ et $u(y)$ sont AX et AY et, la base étant orthonormée,

$$\langle u(x),\, y\rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y \qquad \text{et} \qquad \langle x,\, u(y)\rangle = X^\top AY.$$

Si A est symétrique, les deux membres sont égaux pour tous x, y : u est autoadjoint.
Réciproquement, si u est autoadjoint, alors $X^\top A^\top Y = X^\top AY$ pour toutes colonnes X, Y. En prenant pour X et Y les colonnes E_i et E_j de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient l'égalité des coefficients d'indice (i, j) de $A^\top$ et de A : A est symétrique.

ATTENDUS

- ☐ Produits scalaires en base orthonormée : $\langle u(x),\, y\rangle = X^\top A^\top Y$ et $\langle x,\, u(y)\rangle = X^\top AY$
- ☐ Sens « A symétrique implique u autoadjoint »
- ☐ Sens réciproque : choix $X = E_i$, $Y = E_j$ pour identifier les coefficients

Exercice 20 ch09/x20

Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E. Montrer que $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Corrigé. Pour $x, y \in E$, comme u et v sont autoadjoints,

$$\langle (u \circ v)(x),\, y\rangle = \langle v(x),\, u(y)\rangle = \langle x,\, (v \circ u)(y)\rangle\,.$$

Si $u \circ v = v \circ u$, le membre de droite vaut $\langle x,\, (u \circ v)(y)\rangle$: $u \circ v$ est autoadjoint.
Réciproquement, si $u \circ v$ est autoadjoint, alors pour tous $x, y \in E$, $\langle x,\, (u \circ v)(y)\rangle = \langle (u \circ v)(x),\, y\rangle = \langle x,\, (v \circ u)(y)\rangle$, donc le vecteur $(u \circ v)(y) - (v \circ u)(y)$ est orthogonal à tout vecteur de E : il est nul. Ainsi $u \circ v = v \circ u$.

ATTENDUS

- ☐ Calcul $\langle (u \circ v)(x),\, y\rangle = \langle x,\, (v \circ u)(y)\rangle$, l'hypothèse utilisée pour u puis pour v
- ☐ Sens direct : si u et v commutent, $u \circ v$ est autoadjoint
- ☐ Sens réciproque : un vecteur orthogonal à tout E est nul, donc $u \circ v = v \circ u$

Exercice 21 ch09/x21

On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^2$ d'image Vect $((1,0))$ et de noyau Vect $((1,1))$. Donner la matrice de p dans la base canonique. L'endomorphisme p est-il autoadjoint ? Est-ce un projecteur orthogonal ?

Corrigé. Notons (e_1, e_2) la base canonique. On a $p(e_1) = e_1$ car $e_1 \in \operatorname{Im} p$, et $p(1,1) = 0$ car $(1,1) \in \operatorname{Ker} p$. Comme $e_2 = (1,1) - e_1$, on obtient $p(e_2) = -e_1$, d'où

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'est pas symétrique et la base canonique est orthonormée : p n'est pas autoadjoint. Ce n'est donc pas un projecteur orthogonal. On le voit aussi directement : $\langle (1,0),\ (1,1) \rangle = 1 \neq 0$, donc $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ ne sont pas orthogonaux.

ATTENDUS

- ☐ $p(e_1) = e_1$ et $p(e_2) = -e_1$, par la décomposition $e_2 = (1,1) - e_1$
- ☐ Matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ Non autoadjoint : matrice non symétrique dans une base orthonormée
- ☐ Non orthogonal, car un projecteur orthogonal est autoadjoint

Exercice 22 ch09/x22

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^\top$.

Corrigé. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$: les valeurs propres sont 1 et 3.
Pour $\lambda = 3$, $A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de noyau Vect $((1,1))$. Pour $\lambda = 1$, $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de noyau Vect $((1,-1))$.
Ces deux vecteurs sont orthogonaux ; on les normalise.
Avec

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a $A = PDP^{-1} = PDP^\top$.

ATTENDUS

- ☐ Valeurs propres 1 et 3
- ☐ Vecteurs propres $(1,1)$ et $(1,-1)$, orthogonaux
- ☐ Normalisation des vecteurs propres pour que P soit orthogonale
- ☐ $P^{-1} = P^\top$ justifié par l'orthogonalité de P

Exercice 23 ch09/x23

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est symétrique positive mais non définie positive, et donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Corrigé. La matrice A est symétrique. Pour $X = (x, y, z)^\top$,

$$X^\top AX = (x + y + z)^2 \geqslant 0,$$

donc A est positive. Pour $X = (1, -1, 0)^\top \neq 0$, on a $X^\top AX = 0$: A n'est pas définie positive.
La matrice A est de rang 1, donc $\operatorname{Ker} A$ est de dimension 2 : c'est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0. Les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(1, 1, -2)$ sont dans $\operatorname{Ker} A$, car leurs coordonnées sont de somme nulle, et ils sont orthogonaux : ils forment une base orthogonale de $\operatorname{Ker} A$. De plus $A(1, 1, 1)^\top = 3(1, 1, 1)^\top$: 3 est valeur propre, et $(1, 1, 1)$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents.
En normalisant, on obtient la base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right).$$

ATTENDUS

- □ $X^\top AX = (x + y + z)^2 \geqslant 0$
- □ Un vecteur $X \neq 0$ tel que $X^\top AX = 0$
- □ Sous-espaces propres : $\operatorname{Ker} A$, de dimension 2, et $\operatorname{Vect}(1, 1, 1)$ pour la valeur propre 3
- □ Base orthonormée de vecteurs propres : deux vecteurs orthogonaux de $\operatorname{Ker} A$ et $(1, 1, 1)$, normalisés

Exercice 24 ch09/x24

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $M^\top M$ est symétrique positive. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; montrer que S est inversible et que $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Corrigé. La matrice $M^\top M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique : $(M^\top M)^\top = M^\top (M^\top)^\top = M^\top M$. Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top \left(M^\top M\right) X = (MX)^\top (MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0$$

pour la norme usuelle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $M^\top M \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.
Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $SX = 0$, alors $X^\top SX = 0$, donc $X = 0$: $\operatorname{Ker} S = \{0\}$ et S est inversible.
La matrice S^{-1} est symétrique : $\left(S^{-1}\right)^\top = \left(S^\top\right)^{-1} = S^{-1}$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul et $Y = S^{-1}X$, non nul car S^{-1} est inversible. Alors $X = SY$ et

$$X^\top S^{-1} X = (SY)^\top Y = Y^\top S^\top Y = Y^\top SY > 0.$$

Donc $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ATTENDUS

- ☐ Symétrie : $(M^\top M)^\top = M^\top M$
- ☐ Positivité : $X^\top M^\top MX = \|MX\|^2 \geqslant 0$
- ☐ Inversibilité : $SX = 0$ entraîne $X^\top SX = 0$, puis $X = 0$
- ☐ Symétrie de S^{-1} : $\left(S^{-1}\right)^\top = \left(S^\top\right)^{-1}$
- ☐ Positivité stricte : pour $X \neq 0$, $X^\top S^{-1} X = Y^\top SY > 0$ avec $Y = S^{-1}X \neq 0$