Questions flash

Chapitre 10 — Séries entières

Questions de cours

Question 1 ch10/q01

Énoncer le lemme d'Abel.

Corrigé. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

ATTENDUS

- ☐ Hypothèses : $z_0 \in \mathbb{C}$ et la suite $(a_n z_0^n)$ bornée
- ☐ Conclusion : convergence absolue de $\sum a_n z^n$
- ☐ Quantificateur de la conclusion : pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, inégalité stricte

Question 2 ch10/q02

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Définir son rayon de convergence.

Corrigé. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure, dans $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée :

$$R = \sup \{r \geqslant 0,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

ATTENDUS

- ☐ La borne supérieure, prise dans $[0, +\infty]$
- ☐ L'ensemble : les réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée

Question 3 ch10/q03

Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum z^n$ et, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Corrigé. Pour $r \geqslant 0$, la suite (r^n) est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$: le rayon de convergence est $R = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

ATTENDUS

- ☐ Rayon de convergence $R = 1$
- ☐ Somme $\frac{1}{1-z}$, pour $|z| < 1$

Question 4 ch10/q04

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $z \in \mathbb{C}$. Que dire de la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$ lorsque $|z| < R$? lorsque $|z| > R$? lorsque $|z| = R$?

Corrigé. Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Si $|z| = R$, on ne peut rien dire en général : les séries entières $\sum z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont toutes deux pour rayon de convergence 1, et en $z = 1$ la première diverge, la seconde converge.

ATTENDUS

- ☐ Cas $|z| < R$: convergence absolue
- ☐ Cas $|z| > R$: divergence grossière
- ☐ Cas $|z| = R$: pas de conclusion générale

Question 5 ch10/q05

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Que dire de R si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge ? si elle diverge ? si elle est semi-convergente ?

Corrigé. Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$.
Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.
Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente (convergente mais pas absolument), alors $R = |z_0|$.

ATTENDUS

- ☐ Convergence : $R \geqslant |z_0|$
- ☐ Divergence : $R \leqslant |z_0|$
- ☐ Semi-convergence : $R = |z_0|$

Question 6 ch10/q06

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Que dire de R_a et R_b si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$? si $a_n \sim b_n$?

Corrigé. Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

ATTENDUS

- ☐ $a_n = \mathrm{O}(b_n)$: $R_a \geqslant R_b$, inégalité dans ce sens
- ☐ $a_n \sim b_n$: $R_a = R_b$

Question 7 ch10/q07

Énoncer la règle de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$.

Corrigé. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont les coefficients sont non nuls à partir d'un certain rang, et R son rayon de convergence. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty]$, alors :

- si $\ell = 0$, alors $R = +\infty$;
- si $\ell \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $R = \frac{1}{\ell}$;
- si $\ell = +\infty$, alors $R = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Hypothèses : coefficients non nuls à partir d'un certain rang
- ☐ Hypothèses : existence de la limite $\ell \in [0,+\infty]$ de $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
- ☐ Conclusion : $R = \frac{1}{\ell}$ si $\ell \in \mathbb{R}_+^\star$
- ☐ Conclusion : $R = +\infty$ si $\ell = 0$, $R = 0$ si $\ell = +\infty$

Question 8 ch10/q08

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ et de sa somme ?

Corrigé. Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, avec égalité si $R_a \neq R_b$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

ATTENDUS

- ☐ $R \geqslant \min(R_a, R_b)$
- ☐ Égalité $R = \min(R_a, R_b)$ lorsque $R_a \neq R_b$
- ☐ Somme égale à la somme des sommes, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$

Question 9 ch10/q09

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Définir leur produit de Cauchy. Que dire de son rayon de convergence et de sa somme ?

Corrigé. Le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

ATTENDUS

- ☐ Coefficients $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
- ☐ Rayon $R \geqslant \min(R_a, R_b)$
- ☐ Somme égale au produit des sommes, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$

Question 10 ch10/q10

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$. Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ cette série entière converge-t-elle normalement ?

Corrigé. La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
Elle ne converge pas normalement sur $]-R, R[$ en général : pour $\sum x^n$, de rayon 1, on a $\sup_{x \in]-1,1[} |x^n| = 1$ pour tout n, et la série $\sum 1$ diverge.

ATTENDUS

- ☐ Tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$
- ☐ Pas de convergence normale affirmée sur $]-R, R[$ tout entier

Question 11 ch10/q11

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme. Sur quel intervalle la fonction S est-elle continue ?

Corrigé. La fonction S est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

ATTENDUS

- ☐ Continuité sur $]-R, R[$, intervalle ouvert

Question 12 ch10/q12

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ et, pour $x \in]-R, R[$, exprimer $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$ comme la somme d'une série.

Corrigé. La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R, et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

ATTENDUS

- □ Même rayon de convergence R
- □ Égalité $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, exposant $n+1$ et dénominateur $n+1$

Question 13 ch10/q13

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme. Donner le rayon de convergence de la série entière dérivée $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$. Que dire de la dérivabilité de S et de sa dérivée ?

Corrigé. La série entière dérivée $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R. La fonction S est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

ATTENDUS

- □ Même rayon de convergence R
- □ S de classe C^1 sur $]-R, R[$
- □ Dérivation terme à terme : $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Question 14 ch10/q14

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme. Sur quel intervalle S est-elle de classe C^∞ ? Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $S^{(k)}(x)$ sur cet intervalle.

Corrigé. La fonction S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R, R[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k},$$

la série entière $\sum_{n \geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$ ayant pour rayon de convergence R.

ATTENDUS

- □ S de classe C^∞ sur $]-R, R[$
- □ Formule $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$, sommation à partir de $n = k$

Question 15 ch10/q15

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit S sa somme. Exprimer a_n à l'aide des valeurs en 0 des dérivées successives de S.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

ATTENDUS

- □ Formule $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$, avec la factorielle

Question 16 ch10/q16

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$ tel que $]-r, r[\subset I$. Définir « f est développable en série entière sur $]-r, r[$ ».

Corrigé. La fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \geqslant r$, telle que :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

ATTENDUS

- □ Existence d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$
- □ L'égalité $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
- □ Le quantificateur : pour tout $x \in]-r, r[$

Question 17 ch10/q17

Soient $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$ et f une fonction de classe C^∞ sur $]-r, r[$. Définir la série de Taylor de f.

Corrigé. La série de Taylor de f est la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

ATTENDUS

- □ La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, dérivées en 0
- □ Une série entière, sans affirmation de convergence ni d'égalité avec f

Question 18 ch10/q18

Soit $r \in \mathbb{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$. Énoncer le théorème d'unicité du développement en série entière d'une fonction sur $]-r, r[$.

Corrigé. Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$, alors :

- f est de classe C^∞ sur $]-r, r[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$;
- la série de Taylor de f converge sur $]-r, r[$ et, pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

En particulier, f a un seul développement en série entière sur $]-r, r[$.

ATTENDUS

- □ Hypothèses : f développable en série entière sur $]-r, r[$, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
- □ Conclusion : f de classe C^∞ sur $]-r, r[$
- □ Conclusion : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- □ Conclusion : f est la somme de sa série de Taylor sur $]-r, r[$

Question 19 ch10/q19

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle, f une fonction de classe C^{n+1} sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $a \in I$. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a.

Corrigé. Pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

ATTENDUS

- ☐ Hypothèses : f de classe C^{n+1} sur l'intervalle I, $a \in I$
- ☐ Conclusion : partie polynomiale $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
- ☐ Conclusion : reste $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$, avec la dérivée d'ordre $n+1$ et l'exposant n
- ☐ Le quantificateur : pour tout $x \in I$

Question 20 ch10/q20

Donner les développements en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, en précisant le rayon de convergence.

Corrigé. Les deux séries entières ont pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

ATTENDUS

- ☐ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
- ☐ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
- ☐ Rayon de convergence 1, égalités sur $]-1,1[$

Question 21 ch10/q21

Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$, en précisant le rayon de convergence.

Corrigé. La série entière a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

ATTENDUS

- ☐ Somme à partir de $n=1$, coefficient $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$
- ☐ Rayon de convergence 1, égalité sur $]-1,1[$

Question 22 ch10/q22

Donner le développement en série entière de arctan, en précisant le rayon de convergence.

Corrigé. La série entière a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

ATTENDUS

- □ Coefficient $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ devant x^{2n+1}
- □ Rayon de convergence 1, égalité sur $]-1,1[$

Question 23 ch10/q23

Donner le développement en série entière de exp sur $\mathbb{R}$, en précisant le rayon de convergence.

Corrigé. La série entière a pour rayon de convergence $+\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

ATTENDUS

- □ $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
- □ Rayon de convergence $+\infty$, égalité sur $\mathbb{R}$

Question 24 ch10/q24

Donner les développements en série entière de ch et de sh, en précisant le rayon de convergence.

Corrigé. Les deux séries entières ont pour rayon de convergence $+\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

ATTENDUS

- □ $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- □ $\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- □ Rayon de convergence $+\infty$, égalités sur $\mathbb{R}$

Question 25 ch10/q25

Donner les développements en série entière de cos et de sin, en précisant le rayon de convergence.

Corrigé. Les deux séries entières ont pour rayon de convergence $+\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

ATTENDUS

- ☐ $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- ☐ $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- ☐ Rayon de convergence $+\infty$, égalités sur $\mathbb{R}$

Question 26 ch10/q26

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$, en précisant le rayon de convergence selon la valeur de α.

Corrigé. On pose $\binom{\alpha}{0} = 1$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

La série entière $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ a pour rayon de convergence 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$, et $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$; dans ce dernier cas la somme est finie et l'égalité est la formule du binôme de Newton.

ATTENDUS

- ☐ Coefficients $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, et $\binom{\alpha}{0} = 1$
- ☐ Égalité $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ sur $]-1,1[$
- ☐ Rayon de convergence 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$
- ☐ Rayon de convergence $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ (somme finie)

Question 27 ch10/q27

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe, de rayon de convergence $R > 0$. Sur quelle partie de $\mathbb{C}$ sa somme est-elle continue ?

Corrigé. La somme de $\sum a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert de convergence

$$\mathring{B}(0, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\},$$

c'est-à-dire sur $\mathbb{C}$ lorsque $R = +\infty$.

ATTENDUS

- □ Continuité sur le disque ouvert de convergence $\mathring{B}(0, R)$
- □ Inégalité stricte $|z| < R$

Question 28 ch10/q28

Donner le développement en série entière de l'exponentielle complexe, en précisant sur quelle partie de $\mathbb{C}$ il est valable. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, quelle relation lie $\exp(z)$, $\exp(z')$ et $\exp(z + z')$?

Corrigé. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} ;$$

le développement est valable sur $\mathbb{C}$ tout entier (rayon de convergence $+\infty$). Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) \exp(z') = \exp(z + z').$$

ATTENDUS

- □ $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
- □ Valable pour tout $z \in \mathbb{C}$
- □ Relation $\exp(z) \exp(z') = \exp(z + z')$

Exercices

Exercice 1 ch10/x01

Démontrer le lemme d'Abel : soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée ; montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Corrigé. Soit $M \geqslant 0$ tel que $\left|a_n z_0^n\right| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. En particulier $z_0 \neq 0$; on pose $q = \frac{|z|}{|z_0|}$, de sorte que $0 \leqslant q < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n\right| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leqslant M q^n.$$

La série géométrique $\sum M q^n$ converge car $0 \leqslant q < 1$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n z^n|$ converge : la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

ATTENDUS

- ☐ Majorant M de $\left|a_n z_0^n\right|$ introduit
- ☐ $z_0 \neq 0$ et $q = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$
- ☐ Majoration $|a_n z^n| \leqslant M q^n$
- ☐ Convergence de la série géométrique $\sum M q^n$, car $0 \leqslant q < 1$
- ☐ Conclusion par critère de comparaison des séries à termes positifs : convergence absolue

Exercice 2 ch10/x02

Déterminer, à l'aide de la définition, le rayon de convergence de la série entière $\sum n!\, z^n$.

Corrigé. Soit $r > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $Nr \geqslant 2$. Pour tout entier $n \geqslant N$,

$$n!\, r^n = \prod_{k=1}^{n} (kr) = \left(\prod_{k=1}^{N-1} (kr)\right) \prod_{k=N}^{n} (kr) \geqslant C \cdot 2^{n-N+1},$$

où $C = \prod_{k=1}^{N-1} (kr) > 0$, car $kr \geqslant Nr \geqslant 2$ pour $k \geqslant N$. Donc $n!\, r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: la suite $(n!\, r^n)$ n'est pas bornée. L'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que $(n!\, r^n)$ est bornée est donc $\{0\}$, et sa borne supérieure est 0 : le rayon de convergence est $R = 0$.

ATTENDUS

- ☐ Étude, pour $r > 0$ fixé, du caractère borné de $(n!\, r^n)$
- ☐ Minoration de $n!\, r^n$ par une suite qui tend vers $+\infty$, justifiée
- ☐ L'ensemble des r tels que la suite est bornée est $\{0\}$
- ☐ Conclusion par la définition (borne supérieure) : $R = 0$

Exercice 3 ch10/x03

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Montrer que la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Corrigé. On a $|z| > R \geqslant 0$. Si la suite $(a_n |z|^n)$ était bornée, le réel $|z|$ appartiendrait à l'ensemble dont R est la borne supérieure, et l'on aurait $|z| \leqslant R$: c'est exclu. La suite $(a_n |z|^n)$ n'est donc pas bornée. Comme $|a_n z^n| = |a_n |z|^n|$ pour tout n, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée non plus.
Une suite convergente est bornée : la suite $(a_n z^n)$ ne converge donc pas, et en particulier ne tend pas vers 0. La série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

ATTENDUS

- ☐ Par définition de la borne supérieure, $(a_n |z|^n)$ bornée entraînerait $|z| \leqslant R$
- ☐ La suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, par égalité des modules
- ☐ Une suite convergente est bornée : $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0
- ☐ Conclusion : divergence grossière

Exercice 4 ch10/x04

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} z^n$ en étudiant la série numérique obtenue pour $z = 1$.

Corrigé. Pour $z = 1$, la série numérique est $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et de limite nulle : par le critère spécial des séries alternées, la série converge. Elle ne converge pas absolument, car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc divergente.
La série numérique obtenue en $z = 1$ est semi-convergente, donc le rayon de convergence vaut $R = |1| = 1$.

ATTENDUS

- ☐ Convergence en $z = 1$ par le critère spécial des séries alternées, hypothèses vérifiées
- ☐ Absence de convergence absolue : série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$
- ☐ Semi-convergence en $z = 1$, donc $R = 1$

Exercice 5 ch10/x05

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) z^n$.

Corrigé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0$. Pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{2} = 1.$$

Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence vaut $R = 1$.

ATTENDUS

- □ Expression conjuguée $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, coefficients non nuls
- □ Limite du quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ égale à 1, calcul à l'appui
- □ Conclusion par la règle de d'Alembert : $R = 1$

Exercice 6 ch10/x06

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.

Corrigé. Les coefficients $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ sont non nuls et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence vaut $R = 4$.

ATTENDUS

- □ Simplification du quotient : $\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$
- □ Limite du quotient égale à $\frac{1}{4}$
- □ Conclusion par la règle de d'Alembert : $R = 4$, et non $\frac{1}{4}$

Exercice 7 ch10/x07

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^n z^{2n}$.

Corrigé. Les coefficients d'indice impair sont nuls : la règle de d'Alembert ne s'applique pas à la série entière.
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $2^n z^{2n} = \left(2z^2\right)^n$: la série $\sum 2^n z^{2n}$ est une série géométrique de raison $2z^2$.

— Si $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\left|2z^2\right| < 1$ et la série converge, donc $R \geqslant |z|$.

— Si $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\left|2z^2\right| > 1$ et la série diverge, donc $R \leqslant |z|$.

En faisant tendre $|z|$ vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans chacun des deux cas, on obtient $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ATTENDUS

- □ Pas de règle de d'Alembert sur les coefficients, dont un sur deux est nul
- □ Écriture $2^n z^{2n} = (2z^2)^n$, série géométrique
- □ Convergence pour $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et divergence pour $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$
- □ Conclusion : $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 8 ch10/x08

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, avec $R_a < R_b$.
Montrer que la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence R_a.

Corrigé. Notons R le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$.
On a $R \geqslant R_a$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$. Comme $R_a < R_b$, on a aussi $|z| < R_b$: les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, donc leur somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge, et $R \geqslant |z|$. Ceci valant pour tout z tel que $|z| < R_a$, on obtient $R \geqslant R_a$.
On a $R \leqslant R_a$. Supposons par l'absurde $R > R_a$. Comme $\min(R, R_b) > R_a$, on peut choisir un réel r tel que $R_a < r < \min(R, R_b)$. Les séries $\sum (a_n + b_n) r^n$ et $\sum b_n r^n$ convergent, car $r < R$ et $r < R_b$; par différence, $\sum a_n r^n$ converge. Or $r > R_a$, donc $\sum a_n r^n$ diverge grossièrement : c'est une contradiction.
Donc $R = R_a$.

ATTENDUS

- □ $R \geqslant R_a$: convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ pour $|z| < R_a$, en utilisant $R_a < R_b$
- □ Raisonnement par l'absurde pour $R \leqslant R_a$, avec r tel que $R_a < r < \min(R, R_b)$
- □ Convergence de $\sum a_n r^n$ par différence de deux séries convergentes
- □ Contradiction avec la divergence grossière pour $r > R_a$

Exercice 9 ch10/x09

Déterminer une série entière $\sum c_n x^n$ dont la somme vaut $\frac{e^x}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$, et son rayon de convergence.

Corrigé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (rayon $+\infty$) et, pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (rayon 1). Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est $\sum c_n x^n$, avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(+\infty, 1) = 1$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

De plus, $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e \neq 0$, donc $c_n \sim e$: les séries entières $\sum c_n x^n$ et $\sum e\, x^n$ ont même rayon de convergence, à savoir 1. Donc $R = 1$.

ATTENDUS

- ☐ Produit de Cauchy des développements de exp et de $\frac{1}{1-x}$
- ☐ Calcul de $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
- ☐ Égalité sur $]-1,1[$ et $R \geqslant 1$, par le produit de Cauchy
- ☐ $R = 1$ exactement, justifié : le produit de Cauchy ne donne que $R \geqslant 1$

Exercice 10 ch10/x10

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$.

Corrigé. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Pour tout $x \in [-r, r]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = |a_n|\,|x|^n \leqslant |a_n|\, r^n,$$

donc f_n est bornée sur $[-r, r]$ et $\|f_n\|_{\infty,[-r,r]} \leqslant |a_n|\, r^n$. Comme $r < R$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument : la série $\sum |a_n|\, r^n$ converge. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty,[-r,r]}$ converge : la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$.

ATTENDUS

- ☐ Majoration $|a_n x^n| \leqslant |a_n|\, r^n$ uniforme sur $[-r, r]$
- ☐ Convergence de $\sum |a_n|\, r^n$, car $r < R$
- ☐ Convergence de $\sum \|f_n\|_{\infty,[-r,r]}$ par critère de comparaison : convergence normale

Exercice 11 ch10/x11

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$, puis un équivalent en 0 de sa somme.

Corrigé. Pour $n \geqslant 1$, posons $a_n = \frac{1}{n^2} \neq 0$. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.
Notons S la somme sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + x^2 T(x), \qquad \text{où } T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)^2}.$$

La série entière définissant T a pour rayon de convergence 1, par la règle de d'Alembert ($\frac{(n+2)^2}{(n+3)^2} \to 1$) ; sa somme T est continue sur $]-1,1[$, donc $xT(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \cdot T(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $\frac{S(x)}{x} = 1 + xT(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 : S(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

ATTENDUS

- ☐ Rayon de convergence 1, par la règle de d'Alembert
- ☐ Mise en facteur : $S(x) = x + x^2 T(x)$, avec T somme d'une série entière de rayon 1
- ☐ Continuité de T en 0 : $xT(x) \to 0$
- ☐ Conclusion : $\frac{S(x)}{x} \to 1$, $S(x) \sim x$

Exercice 12 ch10/x12

En intégrant le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, établir le développement en série entière de arctan sur $]-1,1[$.

Corrigé. Pour tout $t \in]-1,1[$, on a $\left|-t^2\right| < 1$, donc, par la somme de la série géométrique de raison $-t^2$,

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

La série entière $\sum (-1)^n t^{2n}$ a pour rayon de convergence 1 : elle converge pour $|t| < 1$ et diverge grossièrement pour $|t| > 1$, car alors $\left|(-1)^n t^{2n}\right| \geqslant 1$.
La série entière intégrée terme à terme, $\sum (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, a le même rayon de convergence 1, et sa somme est la primitive sur $]-1,1[$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ qui s'annule en 0. Comme arctan est aussi une primitive de cette fonction, nulle en 0, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

ATTENDUS

- ☐ Développement de $\frac{1}{1+t^2}$ par la série géométrique de raison $-t^2$, sur $]-1,1[$
- ☐ Rayon de convergence 1 de $\sum (-1)^n t^{2n}$, justifié
- ☐ Intégration terme à terme sur $]-1,1[$, même rayon de convergence
- ☐ Constante d'intégration : $\arctan(0) = 0$
- ☐ Résultat $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Exercice 13 ch10/x13

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Corrigé. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_1 celui de $\sum n a_n z^n$.
On a $R \geqslant R_1$. Pour tout $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant n\,|a_n|$, donc $a_n = \mathrm{O}(n a_n)$, et $R \geqslant R_1$ par comparaison de séries entières.
On a $R_1 \geqslant R$. Si $R = 0$, c'est vrai. Supposons $R > 0$, et soit $r \in [0, R[$. Choisissons s tel que $r < s < R$. Comme $s < R$, la série $\sum a_n s^n$ converge absolument ; son terme général tend vers 0, donc il existe $M \geqslant 0$ tel que $|a_n|\, s^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n\,|a_n|\, r^n = |a_n|\, s^n \cdot n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leqslant Mn \left(\frac{r}{s}\right)^n .$$

Comme $0 \leqslant \frac{r}{s} < 1$, on a $n \left(\frac{r}{s}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées : la suite $(n a_n r^n)$ est bornée, donc $r \leqslant R_1$.
Ceci valant pour tout $r \in [0, R[$, on obtient $R \leqslant R_1$.
Donc $R = R_1$.

ATTENDUS

- ☐ $R \geqslant R_1$ par $a_n = \mathrm{O}(n a_n)$ et comparaison de séries entières
- ☐ Introduction de s tel que $r < s < R$
- ☐ Suite $(a_n s^n)$ bornée, par convergence de $\sum a_n s^n$
- ☐ Majoration $n\,|a_n|\, r^n \leqslant Mn \left(\frac{r}{s}\right)^n$ et croissances comparées
- ☐ Conclusion : $(n a_n r^n)$ bornée pour tout $r < R$, donc $R_1 \geqslant R$

Exercice 14 ch10/x14

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ pour $x \in]-1,1[$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$.

Corrigé. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, série entière de rayon de convergence 1. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

En multipliant par x, et comme le terme d'indice 0 est nul :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Pour $x = \frac{1}{3} \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

ATTENDUS

- ☐ Dérivation terme à terme de $\sum x^n$ sur $]-1,1[$, justifiée par le cours
- ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, puis multiplication par x
- ☐ Résultat $\frac{x}{(1-x)^2}$
- ☐ Application en $x = \frac{1}{3} \in]-1,1[$: $\frac{3}{4}$

Exercice 15 ch10/x15

Soient $r > 0$ et f une fonction paire, développable en série entière sur $]-r,r[$, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r,r[$. Montrer que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Corrigé. Pour tout $x \in]-r,r[$, on a $-x \in]-r,r[$ et, f étant paire,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n = f(-x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour tout $\rho \geqslant 0$, les suites $((-1)^n a_n \rho^n)$ et $(a_n \rho^n)$ ont mêmes modules : les séries entières $\sum (-1)^n a_n x^n$ et $\sum a_n x^n$ ont même rayon de convergence, qui est supérieur ou égal à r. Par unicité des coefficients, $(-1)^n a_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 2p+1$, cela donne $-a_{2p+1} = a_{2p+1}$, donc $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

ATTENDUS

- ☐ Calcul de $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$, avec $-x \in]-r,r[$
- ☐ Rayon de convergence de $\sum (-1)^n a_n x^n$ supérieur ou égal à r
- ☐ Unicité des coefficients : $(-1)^n a_n = a_n$
- ☐ Conclusion pour $n = 2p+1$: $a_{2p+1} = 0$

Exercice 16 ch10/x16

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. La fonction sin est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\sin'' = -\sin$. Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sin^{(2p)} = (-1)^p \sin$. C'est vrai pour $p = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $\sin^{(2p)} = (-1)^p \sin$. Alors $\sin^{(2p+2)} = (-1)^p \sin'' = (-1)^{p+1} \sin$. Il en résulte $\sin^{(2p+1)} = (-1)^p \cos$. Ainsi $\left|\sin^{(k)}\right| \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$ pour tout k, $\sin^{(2p)}(0) = 0$ et $\sin^{(2p+1)}(0) = (-1)^p$.
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en 0,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \qquad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \sin^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\left|\sin^{(n+1)}\right| \leqslant 1$, en distinguant $x \geqslant 0$ et $x < 0$:

$$|R_n(x)| \leqslant \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge, donc $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

La série entière converge en tout $x \in \mathbb{R}$: son rayon de convergence est $+\infty$, et sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

ATTENDUS

- ☐ Dérivées successives de sin, établies par une récurrence rédigée
- ☐ Valeurs en 0 : $\sin^{(2p)}(0) = 0$, $\sin^{(2p+1)}(0) = (-1)^p$
- ☐ Formule de Taylor avec reste intégral en 0, à l'ordre n
- ☐ Majoration $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, y compris pour $x < 0$
- ☐ Limite nulle du reste, justifiée
- ☐ Conclusion : égalité sur $\mathbb{R}$, rayon de convergence $+\infty$

Exercice 17 ch10/x17

Développer en série entière la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$ au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence.

Corrigé. On a $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ et, pour $x \notin \{2, 3\}$,

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

Pour $|x| < 2$, $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$, série entière de rayon de convergence 2. Pour $|x| < 3$, de même, $\frac{1}{x-3} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$, série entière de rayon de convergence 3. Pour tout $x \in]-2, 2[$,

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n.$$

Les rayons 2 et 3 étant distincts, le rayon de convergence de la somme est $\min(2, 3) = 2$.

ATTENDUS

- ☐ Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$
- ☐ Mise sous la forme $\frac{1}{1-u}$ avec $u = \frac{x}{2}$ et $u = \frac{x}{3}$, sans erreur de signe
- ☐ Rayons de convergence 2 et 3 des deux séries
- ☐ Coefficients $\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$
- ☐ Rayon de la somme égal à 2, car les deux rayons sont distincts

Exercice 18 ch10/x18

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^u = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u^p}{p!}$. Avec $u = x^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p!}.$$

C'est la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_{2p} = \frac{1}{p!}$ et $a_{2p+1} = 0$; elle converge en tout $x \in \mathbb{R}$, donc son rayon de convergence est $+\infty$, et f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par unicité du développement en série entière, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f^{(2p)}(0) = \frac{(2p)!}{p!}, \qquad f^{(2p+1)}(0) = 0.$$

ATTENDUS

- ☐ Substitution $u = x^2$ dans le développement de exp, valable sur $\mathbb{R}$
- ☐ Identification des coefficients $a_{2p} = \frac{1}{p!}$, $a_{2p+1} = 0$
- ☐ Unicité du développement : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
- ☐ Résultat : $f^{(2p)}(0) = \frac{(2p)!}{p!}$ et $f^{(2p+1)}(0) = 0$

Exercice 19 ch10/x19

Développer en série entière la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sur $]-1, 1[$.

Corrigé. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $1+x > 0$ et $1-x > 0$, donc $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Les développements de $\ln(1+x)$ et de $\ln(1-x)$, de rayon de convergence 1, donnent, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^{n+1} + 1\right) \frac{x^n}{n}.$$

Le coefficient $(-1)^{n+1} + 1$ vaut 2 si n est impair et 0 si n est pair. Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2x^{2p+1}}{2p+1}.$$

ATTENDUS

- ☐ $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, avec $1+x > 0$ et $1-x > 0$
- ☐ Somme des deux développements, valable sur $]-1, 1[$
- ☐ Coefficients nuls pour n pair, égaux à $\frac{2}{n}$ pour n impair
- ☐ Résultat $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2x^{2p+1}}{2p+1}$

Exercice 20 ch10/x20

Déterminer les séries entières $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy'' + 2y' + xy = 0$. Exprimer leur somme à l'aide des fonctions usuelles.

Corrigé. *Analyse.* Soit $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et de somme y. Sur $]-R, R[$, par dérivation terme à terme puis changement d'indice,

$$xy''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n\, a_{n+1} x^n,$$
$$2y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n,$$
$$xy(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n,$$

donc

$$xy'' + 2y' + xy = 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}\right) x^n.$$

Si y est solution, cette somme est nulle sur $]-R, R[$ et, par unicité des coefficients, $a_1 = 0$ et $a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrons $a_{2p+1} = 0$ par récurrence : c'est vrai pour $p = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $a_{2p+1} = 0$. Alors $a_{2p+3} = -\frac{a_{2p+1}}{(2p+3)(2p+4)} = 0$. Montrons $a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{(2p+1)!}$ par récurrence : c'est vrai pour $p = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{(2p+1)!}$. Alors $a_{2p+2} = -\frac{a_{2p}}{(2p+2)(2p+3)} = \frac{(-1)^{p+1} a_0}{(2p+3)!}$.

Synthèse. Pour $a_0 \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum \frac{(-1)^p a_0}{(2p+1)!} x^{2p}$ converge en tout $x \in \mathbb{R}$ (pour $x \neq 0$, ses termes sont ceux du développement de sin, divisés par x) : son rayon est $+\infty$. Ses coefficients vérifient les relations précédentes, donc sa somme est solution sur $\mathbb{R}$.

Les solutions cherchées sont les sommes

$$y(x) = a_0 \frac{\sin x}{x} \text{ pour } x \neq 0, \qquad y(0) = a_0,$$

avec $a_0 \in \mathbb{C}$, de rayon de convergence $+\infty$.

ATTENDUS

- □ Dérivation terme à terme sur $]-R, R[$ et changements d'indice corrects
- □ Regroupement en une seule série, terme constant $2a_1$ traité à part
- □ Unicité des coefficients : $a_1 = 0$ et la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_{n-1}
- □ Coefficients d'indice impair nuls
- □ $a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{(2p+1)!}$, par une récurrence rédigée
- □ Synthèse : rayon de convergence $+\infty$ et solution vérifiée
- □ Somme $a_0 \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, prolongée par a_0 en 0

Exercice 21 ch10/x21

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}$.

Corrigé. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$, on a $x^{2n+1} = \frac{1}{3^n\sqrt{3}}$, donc

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

Comme $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}.$$

ATTENDUS

- ☐ Reconnaissance du développement de arctan
- ☐ Choix de $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, avec $x \in]-1,1[$ vérifié
- ☐ Calcul de $x^{2n+1} = \frac{1}{3^n\sqrt{3}}$ et facteur $\sqrt{3}$
- ☐ Résultat $\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$

Exercice 22 ch10/x22

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$, puis exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.

Corrigé. Les coefficients $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ sont non nuls et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ :$$

par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence est $+\infty$. Notons S la somme sur $\mathbb{R}$.

Si $x \geqslant 0$, posons $t = \sqrt{x}$: $x^n = t^{2n}$, donc $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$.

Si $x < 0$, posons $t = \sqrt{-x}$: $x^n = (-1)^n t^{2n}$, donc $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x})$.

ATTENDUS

- ☐ Rayon de convergence $+\infty$, par la règle de d'Alembert
- ☐ Distinction des cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$
- ☐ $S(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$ pour $x \geqslant 0$
- ☐ $S(x) = \cos(\sqrt{-x})$ pour $x < 0$, par $x^n = (-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}$

Exercice 23 ch10/x23

En admettant que $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, démontrer que $\exp(z)\exp(z') = \exp(z+z')$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$.

Corrigé. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ convergent absolument. Par le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes,

$$\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la formule du binôme de Newton,

$$c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

Donc $\exp(z)\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z')$.

ATTENDUS

- □ Convergence absolue des deux séries, hypothèse du produit de Cauchy
- □ Écriture de $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$
- □ Mise en facteur de $\frac{1}{n!}$ et formule du binôme : $c_n = \frac{(z+z')^n}{n!}$
- □ Conclusion : $\exp(z)\exp(z') = \exp(z+z')$

Exercice 24 ch10/x24

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in [0, 1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$.

Corrigé. Posons $w = re^{i\theta}$. On a $|w| = r < 1$, donc la série géométrique $\sum w^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$.

Pour tout n, $r^n \cos(n\theta) = \mathrm{Re}(w^n)$; la partie réelle d'une somme partielle est la somme partielle des parties réelles, et la partie réelle d'une suite convergente converge vers la partie réelle de la limite, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-w}\right).$$

Comme $|w| < 1$, $1 - w \neq 0$ et

$$\frac{1}{1-w} = \frac{1-\overline{w}}{|1-w|^2} = \frac{1 - re^{-i\theta}}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

car $|1-w|^2 = (1 - r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta = 1 - 2r\cos\theta + r^2$. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

ATTENDUS

- ☐ Écriture $r^n \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((re^{i\theta})^n\right)$
- ☐ Convergence de la série géométrique, car $\left|re^{i\theta}\right| = r < 1$
- ☐ Passage de la partie réelle à la somme, justifié
- ☐ Calcul de $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right)$ par la quantité conjuguée
- ☐ Résultat $\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$