Compte rendu correction épreuve PC

Le sujet est constitué de 5 exercices dans lesquels nous avons tenté de couvrir une bonne partie du programme de façon à ce que les étudiants puissent appliquer les notions essentielles des programmes des deux années préparation au concours.

Plusieurs questions étaient des questions de cours, même si pas toujours affichées en tant que telles, ce qui aurait dû sécuriser les candidats.

Exercice 1.

Dans cet exercice de trigonalisation d'une matrice de taille 3, nous constatons que moins d'un tiers des copies discute correctement sur la condition nécessaire et suffisante de diagonalisation, même si le polynôme caratéristique est juste. Il s'agit cependant d'un résultat important du programme de mathématiques en PC.

Exercice 2.

Quand le candidat comprend dans la première question qu'il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale, la comparaison à une intégrale de Riemann est en général bien menée, bien que beaucoup oublient d'invoquer la continuité de la fonction à intégrer sur $\mathbb{R}_+$.

La deuxième question était facile en suivant les iondications de l'énoncé : trop d'étudiants tentent d'appliquer le Théorème de dérivation sous l'intégrale, ce qui les pénalise, vu le nombre d'hypothèses à vérifier. C'est dommage.

Dans la dernière question, bien que le Théorème de convergence monotone soit en général bien appliqué, certains candidats confondent convergence de la suite et convergence de l'intégrale.

Exercice 3.

La récurrence demandée dans la première question s'effondre souvent en raison de l'hypothèse qui ne porte que sur a_n dans la plupart des copies.

La question 2, qui est une question de cours, n'est malheureusement pas toujours bien traitée. Il arrive que le rayon de convergence dépende de l'entier n !

Le produit de Cauchy de deux séries entière ne semble pas toujours bien maîtrisé (rayon de convergence, expression des coefficients).

Rappelons que lorsque l'on effectue une intégration, apparaît nécessairement une constante que beaucoup semblent oublier.

Les dernières questions étaient des questions de cours déguisées : n'ont pas été pénalisés ceux qui le connaissait.

Exercice 4.

Question 1 : Un grand nombre de copies donne la bonne dimension de l'espace F malgré des difficultés à prouver l'indépendance de la famille (I_n, M).
Le reste de la question (hormis le 1.4.) est relativement bien traité. (Algèbre linéaire en dimension 2).

Question 2 : Pour beaucoup, l'équation caratéristique de la suite est bien traitée. Mais il ne faut pas confondre suites et équations différentielles, ce qui amène parfois à des combinaisons linéaires de e^n et $\mathrm{e}^{1/n}$...

Exercice 5.

Souvent, le lien entre $P^{(k)}(1) = 0$ pour $k \in [\![0, 2]\!]$ et la multiplicité de la racine 1 est mal géré.

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est assez bien connu surtout en dimension 2 mais tout se complique lors du calcul du troisième vecteur.

La question 3 bien que très classique est en général très mal traitée, malgré l'introduction du projeté orthogonal.

Cette dernière question n'est quasiment jamais terminée.

Conclusion

Il nous semblait que le sujet permettait aux candidats d'utiliser les résultats du cours et quelques questions, plus fines, devaient permettre aux meilleurs de s'exprimer pleinement.

Or, il s'évère que des résultats élémentaires (rayon de convergence d'une série entière par exemple) sont méconnus de trop de candidats, et les théorèmes classiques du programme sont souvent approximatifs, mal compris. Cela est très décevant.

Dans l'ensemble, nous constatons un grand manque de rigueur dans la rédaction : il ne suffit pas de dire que clairement, on a ... pour effectuer une démonstration correcte. Rappelons qu'il est indispensable de vérifier toutes les hypothèses d'application d'un théorème pour l'utiliser.

D'une façon générale, nous avons trouvé que les copies étaient souvent mal présentées, sales, mal rédigées : des rayures dans tous les sens, des questions faites dans le désordre, des phrases sans queue ni tête, etc... Cela s'explique sans doute par le manque de professeur en présentiel depuis le mois de mars.

* * * * * *

Sujet

Exercice 1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soit x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

3. Limite de f en l'infini.

3.1. Démontrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

3.2. Déterminer la valeur de ℓ.

3.3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 3.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$$

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1$.

2. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in \,]-1, 1\,[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

3.

3.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

3.2. Déterminer l'ensemble de définition réel de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

3.3. On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n\, x^n$, produit de Cauchy réel des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n\, x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

3.4. En déduire que l'on a pour tout $x \in \,]-1, 1\,[$, $f'(x) = f(x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [\,0, 1\,[$, $\ln(f(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

   On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

6. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4.

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \dfrac{1}{2} I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n$$

   1.1. On note $F = \text{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

   Déterminer la dimension de F et en donner une base.

   1.2. Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

   1.3. Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \dfrac{1}{2} I_n$.

   Justifier que $\mathscr{B} = (A, B)$ constitue une base de F.

   Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathscr{B}$.

   1.4. Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant : $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2\,\mathbb{P}(X = n+2) = 3\,\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n)$$

   2.1. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.

   En déduire la loi de la variable aléatoire X.

   2.2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 5.

Dans tout l'exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$< P|Q > = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

   4.1. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

   4.2. Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

* * * * * *