Table des matières

Progression

0. 1A
1. Ana0
2. Ana1
3. Ana2
4. Ana3
5. Ana4
6. Alg0
7. Alg1
8. Ana5
9. Alg2
10. Ana6
11. Pro1
12. Pro2
13. Pro3
14. Alg3

15. Alg4
16. Ana7
17. Ana8
18. Ana9
19. Ana10

1A

Premier semestre

Fonctions réelles d'une variable réelle

- Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un réel élément de I ou extrémité de I.
  Donner une définition quantifiée de la convergence de f vers 0 en a.
- Soient f et g deux fonctions dérivables et soient λ et μ deux réels. Sous réserve d'existence, donner une expression des cinq fonctions $(\lambda f + \mu g)'$, $(f \cdot g)'$, $(f/g)'$, $(f^\lambda)'$ et $(g \circ f)'$.
- Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer les hypothèses et les conclusions du théorème de la bijection *bicontinue* pour f sur I.
- Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer les hypothèses et les conclusions du théorème de la bijection *bi-*$\mathscr{C}^k$ pour f sur I.
- Soient a et b deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.
  Énoncer avec ses hypothèses une inégalité des accroissements finis pour f sur $[a, b]$.
- Soit f une fonction réelle. Définir le caractère $\mathscr{C}^1$ de f.
- Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *non supposée dérivable*. Définir la convexité de f.
- Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose de classe $\mathscr{C}^2$. Caractériser la convexité de f.
- Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Définir la croissance de f.

Calcul (différentiel et) intégral

- Énoncer la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
- Énoncer la linéarité de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
- Énoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
- Énoncer la positivité et la croissance de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
- Énoncer la formule d'intégration par parties pour l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
- Énoncer avec ses hypothèses le théorème de la moyenne pour les sommes de Riemann sur un segment.
- Soit $f : t \mapsto t^\alpha$, où α est un réel différent de -1. Donner une expression d'une primitive F de f.
- Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. Donner une expression d'une primitive F de f.
- Soit $f : t \mapsto e^{\alpha t}$, où α est un réel non nul. Donner une expression d'une primitive F de f.
- Soit $f : t \mapsto \ln(t)$. Donner une expression d'une primitive F de f.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

- Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, et soit $x \in E$. Définir $(g \circ f)(x)$.

- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Définir
  - l'injectivité de f ;
  - la surjectivité de f.
- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Définir la bijectivité de f.
  Si f est bijective, et que $x \in E$ et $y \in F$ sont tels que $f(x) = y$, exprimer x en fonction de y.

Informatique

- Écrire en Python une fonction prenant en argument une liste de nombres et renvoyant cette même liste triée dans l'ordre croissant, sans faire appel aux fonctions natives dédiées.
- Quel est le coût asymptotique d'un tri à bulles sur une liste de longueur n ?
- Quel est le coût asymptotique d'un tri par sélection sur une liste de longueur n ?
- Quel est le coût asymptotique d'un tri fusion sur une liste de longueur n ?
- Écrire en Python une fonction prenant en argument une liste de nombres et renvoyant la plus grande valeur de cette liste, sans faire appel aux fonctions natives dédiées.

Deuxième semestre

Espaces vectoriels

- Former la combinaison linéaire de x_1, x_2 et x_3, affectés des coefficients λ_1, λ_2 et λ_3.
- Donner un exemple d'espace vectoriel non nul, avec sa dimension et un exemple de vecteur non nul.
- Soit E un espace vectoriel. Définir ce qu'est un sous-espace vectoriel de E.
- Soient $x_1, \dots, x_n$ et y des éléments d'un espace vectoriel. Définir la phrase « $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ ».
- Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments d'un espace vectoriel E. Définir la phrase « $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E ».
- Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments d'un espace vectoriel. Définir la phrase « $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre ».
- Si x est un élément d'un espace vectoriel E, comment montrer *le plus simplement possible* que la famille réduite au seul vecteur x est libre ?
- Si x et y sont deux éléments d'un espace vectoriel E, comment montrer *le plus simplement possible* que la famille (x, y) est libre ?
- Si x, y et z sont trois éléments d'un espace vectoriel E, comment montrer que la famille (x, y, z) est libre ?
- Si l'on connait la dimension d'un espace vectoriel E, comment prouve-t-on le plus fréquemment qu'une famille donnée en est une base ?
- Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments d'un espace vectoriel E. Définir la phrase « $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ».
- Définir la dimension d'un espace vectoriel.
- Définir le rang d'une famille de vecteurs.
- Définir le rang d'une matrice.

Applications linéaires

- ▹ Définir ce qu'est une application linéaire entre deux espaces E et F.
- ▹ Donner, en le détaillant, un exemple non nul d'application linéaire entre deux espaces vectoriels.
- ▹ Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire, soit x un élément de E, et soit y un élément de F. Définir les phrases suivantes :

  — $x \in \operatorname{Ker} u$;
  — $y \in \operatorname{Im} u$.

- ▹ Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si u est injective, alors $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.
- ▹ Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, alors u est injective.
- ▹ Soient E et F deux espaces vectoriels. Définir ce qu'est

  — un endomorphisme de E ;
  — un automorphisme de E ;
  — un isomorphisme entre E et F.

- ▹ Soient E un espace vectoriel et f une application au départ de E. Comment vérifie-t-on que f est un endomorphisme de E ?
- ▹ Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base finie de E, et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Décrire $\operatorname{Im} u$.
- ▹ Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Définir le rang de u.
- ▹ Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Énoncer le théorème du rang pour u dans ce contexte.

Matrices et déterminants

- ▹ Soient A et B deux matrices carrées de taille n. Définir $(A\,B)_{i,j}$.
- ▹ Soit A une matrice carrée de taille n. Définir $(A^{\mathsf{T}})_{i,j}$.
- ▹ Donner une expression de $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Espaces préhilbertiens réels

- ▹ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner les cinq conditions définissant la phrase « φ est un produit scalaire sur E ».
- ▹ Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, rappeler la définition de $\langle x, y \rangle$.
- ▹ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- ▹ Soit E un espace euclidien. Nommer un procédé permettant de convertir une base quelconque de E en une base orthonormée.

Analyse asymptotique

- Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$, et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.
  - Définir l'expression $o(1)$.
  - Définir la phrase « $f(t) \underset{t\to a}{=} o(g(t))$ ».
- Soit a un point de $\overline{\mathbb{R}}$, et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Définir la phrase « $f(t) \underset{t\to a}{\sim} g(t)$ »...
  - en termes de $f(t) - g(t)$,
  - en termes de $f(t)/g(t)$.
- Soient α et β deux réels strictement positifs. Énoncer les 3×2 relations de négligeabilité usuelles entre $1/t^\alpha$, t^β, $\ln t$, e^t
  - quand $t \longrightarrow +\infty$,
  - quand $t \longrightarrow 0$.
- Soit a un nombre réel et soit f une fonction d'une variable réelle définie au voisinage de a.
  Énoncer *avec son hypothèse* la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f en a.
- Donner le développement limité à l'ordre 2 lorsque $h \longrightarrow 0$ de
  - e^h
  - $\ln(1+h)$
  - $(1+h)^\alpha$

Étude élémentaire des séries

- Soit u une suite réelle. Définir la somme partielle de rang n de la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$.
- Soit u une suite réelle. Définir la convergence et la somme éventuelle de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
- Soit u une suite réelle. Définir la convergence *absolue* de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.
- Soit q un nombre réel.
  Caractériser la convergence et exprimer la somme éventuelle des séries $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, $\sum_{n\geqslant 1} n\,q^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n\,(n-1)\,q^{n-2}$.
- Soit x un nombre réel. Caractériser la convergence et exprimer la somme éventuelle de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$.
- Donner deux conditions telles que, si aucune des deux n'est réalisée, alors on ne peut appliquer aucun théorème de convergence par comparaison pour les séries.

Informatique

- Dessiner un graphe orienté à trois sommets et cinq arêtes, puis écrire une matrice d'adjacence associée.

Ana0 : Inégalités et intégrales

- Énoncer *avec ses hypothèses* votre théorème préféré du programme de PCSI/PC.
- Énoncer l'inégalité triangulaire pour les sommes finies de nombres réels ou complexes.

Ana1 : Intégrales généralisées

- La fonction $g : t \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}$? Justifier brièvement.
- Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Définir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Définir la convergence *absolue* de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Définir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue par morceaux sur l'intervalle *semi-ouvert* $[a, b[$.
- Soit α un réel. Caractériser la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
- Soit β un réel. Caractériser la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^\beta \mathrm{d}t$.
- Énoncer *avec son hypothèse-clé* le théorème de convergence par majoration pour les intégrales généralisées.
- Énoncer la formule d'intégration par parties pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle ouvert $]a, b[$.
- Énoncer la positivité et la croissance de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I.
- Énoncer *avec son hypothèse-clé* le théorème de convergence par comparaison pour les intégrales de fonctions *non nécessairement positives.*
- Que signifie la phrase « f est intégrable sur I » ?
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Définir $L^1(I, \mathbb{K})$.
- Donner deux conditions telles que, si aucune des deux n'est réalisée, alors on ne peut appliquer aucun théorème de convergence par comparaison pour les intégrales.

Ana2 : Séries numériques

- Soit E un ensemble. Donner une définition de la phrase « E est dénombrable ».
- Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I d'éléments de $[0, +\infty]$. Définir $\sum\limits_{i \in I} x_i$.
- Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I d'éléments de $[0, +\infty]$. Définir la phrase « $(x_i)_{i \in I}$ est sommable ».
- Sous quelle condition suffisante très simple peut-on « *découper, calculer et majorer [des] sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité* » ?
- Énoncer la formule de Stirling.
- Énoncer la règle de d'Alembert.
- Énoncer le théorème spécial des séries alternées, avec bornage et signe du reste de rang n.

Ana3 : Normes

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner les quatre conditions définissant la phrase « N est une norme sur E ».
- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Définir la distance sur E associée à $\|\cdot\|$.

- ▹ Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Définir $\|x\|_1$.
- ▹ Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Définir $\|x\|_2$.
- ▹ Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Définir $\|x\|_\infty$.
- ▹ Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit $x \in E$. Définir $\|x\|_2$.
- ▹ Soit $f : D \to \mathbb{K}$ une fonction bornée. Définir $\|f\|_{\infty,D}$.
- ▹ Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $f_n : t \mapsto t^n \in E$. Calculer $\|f_n\|_{\infty,[0,1]}$ et $\|f_n\|_2$, où $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire intégral usuel.
- ▹ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E, et soit $\ell \in E$. Définir la convergence de (x_n) vers ℓ au sens de $\|\cdot\|$.
- ▹ Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. Définir la phrase « N_1 et N_2 sont équivalentes ».
- ▹ Quels caractères des suites dans un espace vectoriel normé sont préservés lorsqu'on remplace une norme par une autre norme équivalente ?

Ana4 : Suites et séries de fonctions

- ▹ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, et soit f une fonction définie sur I. Définir la phrase « (f_n) converge simplement vers f sur I ».
- ▹ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, et soit f une fonction définie sur I. Définir la phrase « (f_n) converge uniformément vers f sur I ».
- ▹ Recopier la phrase suivante en la complétant, dans le contexte des *suites* de fonctions : « La convergence … entraine la convergence …, mais la réciproque est fausse en général. »
- ▹ Recopier la phrase suivante en la complétant, dans le contexte des *séries* de fonctions : « La convergence … entraine la convergence …, mais la réciproque est fausse en général. »
- ▹ Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. Définir la phrase « $\sum f_n$ converge normalement sur I ».
- ▹ Citer trois (ou quatre) modes de convergence pour les séries de fonctions, en précisant deux (à quatre) implications entre ces différents modes.
- ▹ Énoncer le théorème de la double limite pour une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
- ▹ Énoncer le théorème de continuité de la limite pour une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
- ▹ Énoncer un théorème d'interversion limite-intégrale pour une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
- ▹ Énoncer le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
- ▹ Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions définies sur un intervalle I.
- ▹ Énoncer le théorème de dérivabilité continue de la limite d'une suite de fonctions définies sur un intervalle I.

Alg0 : Rappels d'algèbre linéaire

- ▹ Soit E un espace vectoriel admettant une base finie $B = (e_1, \dots, e_n)$, soit x un élément de E, et soient $x_1, \dots, x_n$ des réels. Définir le sens de la phrase « $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ».
- ▹ Soit E un espace vectoriel muni de deux bases B et B'. Définir la matrice de passage $\mathrm{P}_{B,B'}$.

- Soit E un espace vectoriel muni de deux bases B et B', et soit x un vecteur de E. Énoncer la formule de changement de base pour x dans ce contexte.
- Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels munis de bases respectives $B_1 = (e_1, \dots, e_p)$ et $B_2 = (f_1, \dots, f_n)$, et soit $u : E_1 \to E_2$ une application linéaire. Définir $\mathrm{Mat}_{B_2,B_1}(u)$.
- Soit E un espace vectoriel muni de deux bases B et B', et soit u un endomorphisme de E. Énoncer la formule de changement de base pour u dans ce contexte.

Alg1 : Compléments d'algèbre linéaire

- Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. Définir $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$.
- Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. Quand dit-on que $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe ?
- Soient E un espace vectoriel, u un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E. Quand dit-on que F est stable par u ?
- Montrer que si u et v sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel E tels que $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker} u$ est stable par v.
- Soit $A \in_n (\mathbb{K})$. Définir $\operatorname{tr} A$.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Définir $\operatorname{tr} u$.
- Donner une expression des polynômes interpolateurs élémentaires de Lagrange $L_1, \dots, L_{n+1}$ en $n+1$ scalaires deux à deux distincts $a_1, \dots, a_{n+1}$.
- Donner une expression du déterminant de Vandermonde associé à $n+1$ scalaires $a_1, \dots, a_{n+1}$.

Alg2 : Réduction

- Soit $(A, B) \in_n (\mathbb{K})^2$. Définir la phrase « A est semblable à B ».
- Soit $A \in_n (\mathbb{K})$. Définir la phrase « A est diagonalisable ».
- Soit $A \in_n (\mathbb{K})$, et soit $X \in_{n,1} (\mathbb{K})$. Définir la phrase « X est un vecteur propre de A ».
- Soit $A \in_n (\mathbb{K})$, et soit λ un réel. Définir la phrase « λ est une valeur propre de A ».
- Soit $A \in_n (\mathbb{K})$, et soit λ un réel. Définir le sous-espace propre de A associé à λ.
- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et soit x un élément de E. Définir la phrase « x est un vecteur propre de u ».
- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Définir la phrase « λ est une valeur propre de u ».
- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Définir le sous-espace propre de u associé à λ.
- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Définir la phrase « u est diagonalisable ».
- Soit A une matrice carrée. Définir χ_A.
- Quelle relation lie les valeurs propres d'une matrice (ou d'un endomorphisme) et son polynôme caractéristique ?
- Définir la multiplicité d'une valeur propre d'une matrice (ou d'un endomorphisme).
- Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice (ou d'un endomorphisme).

- ▹ Donner une condition suffisante *mais pas nécessaire* de diagonalisabilité d'une matrice (ou d'un endomorphisme).
- ▹ Donner une condition nécessaire *mais pas suffisante* de diagonalisabilité d'une matrice (ou d'un endomorphisme).
- ▹ Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Définir la phrase « u est trigonalisable ».
- ▹ Soit $A \in_n (\mathbb{K})$. Définir la phrase « A est trigonalisable ».
- ▹ Donner une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité d'une matrice (ou d'un endomorphisme).

Ana5 : Rappels sur les EDL

- ▹ Rappeler la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, de la forme $y' + a(t)\,y = b(t)$.
- ▹ Rappeler la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants, de la forme $y'' + a\,y' + b\,y = 0$.
- ▹ Rappeler la méthode d'obtention d'une solution particulière pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, de la forme $y'' + a\,y' + b\,y = P(t)\,e^{\lambda\,t}$, où P est un polynôme et λ une constante.

Ana6 : Séries entières

- ▹ Soit $\sum a_n\,z^n$ une série entière. Définir son rayon de convergence.
- ▹ Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum z^n$.
- ▹ Soit $\sum a_n\,z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Décrire la nature de la série numérique $\sum a_n\,z^n$ en fonction de la position de z dans le plan complexe.
- ▹ Soient $\sum a_n\,z^n$ et $\sum b_n\,z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
  Que dire si $a_n \underset{n\to\infty}{=} O(b_n)$? Et si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$?
- ▹ Énoncer le corollaire de la règle de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n\,z^n$.
- ▹ Sur quel domaine la somme d'une série entière est-elle toujours de classe $\mathscr{C}^\infty$?
- ▹ Soit $\sum a_n\,z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
  Exprimer a_n en termes des valeurs en 0 des dérivées successives de S.
- ▹ Donner le développement en série entière d'exp en en précisant le rayon de convergence.
- ▹ Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ en en précisant le rayon de convergence.
- ▹ Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en en précisant le rayon de convergence.
- ▹ Donner le développement en série entière d'arctan en en précisant le rayon de convergence.

Pro1 : Évènements et tribus

- ▹ Soit Ω un ensemble et soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ un ensemble de parties de Ω. Définir la phrase « $\mathscr{A}$ est une tribu ».

- Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et soit $\mathbb{P}$ une fonction définie sur $\mathscr{A}$. Définir la phrase « $\mathbb{P}$ est σ-additive ».
- Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et soit $\mathbb{P}$ une fonction définie sur $\mathscr{A}$.
  Définir la phrase « $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité ».
- Énoncer la continuité croissante d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Énoncer la continuité décroissante d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Définir ce qu'est un système quasi-complet d'évènements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathscr{A}$ un évènement.
  Énoncer une formule des probabilités totales pour $\mathbb{P}(A)$.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathscr{A}$ un évènement non négligeable.
  Définir la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux évènements de $\mathscr{A}$.
  Énoncer une formule des probabilités composées pour $\mathbb{P}(A \cap B)$.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A et B deux évènements de $\mathscr{A}$.
  Définir l'indépendance de A et B.
- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie d'évènements de $\mathscr{A}$.
  Définir l'indépendance mutuelle des A_i.

Pro2 : Variables aléatoires

- Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Définir la phrase « X est une variable aléatoire sur Ω ».
- Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Définir la loi de X.
- Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Que suffit-il de calculer pour déterminer entièrement la loi de X ?
- Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Définir la phrase « X suit $\mathscr{P}(\lambda)$ ».
- Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Définir la phrase « X suit $\mathscr{G}(p)$ ».
- Dans quel contexte typique une variable aléatoire suit-elle une loi géométrique ?
- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
  Définir les lois marginales dans ce contexte.
- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Que suffit-il de calculer pour déterminer entièrement la loi conjointe du couple (X, Y) ?
- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et soit $\mathscr{V} \subset Y(\Omega)$.
  Définir la loi conditionnelle de X sachant $Y \in \mathscr{V}$.
- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et soit $j \in Y(\Omega)$.
  Que suffit-il de calculer pour déterminer entièrement la loi conditionnelle de X sachant $Y = j$?
- Quel outil général permet de calculer des lois marginales à partir de lois conjointes ?
- Quel outil général permet de calculer des lois conjointes à partir de lois marginales et de lois conditionnelles ?
- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
  Définir la phrase « X est indépendante de Y ».
- Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
  Définir l'indépendance mutuelle des X_i.

- ▹ Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
  Énoncer le lemme des coalitions dans ce contexte.

Pro3 : Espérance et variance

- ▹ Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Définir $\mathbb{E}(X)$.
- ▹ Compléter le tableau suivant.

$\mathbb{P}_X$	$\mathscr{B}(p)$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\mathscr{U}([\![a,b]\!])$	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathscr{G}(p)$
$\mathbb{E}(X)$					
$\mathbb{V}(X)$					

- ▹ Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Énoncer le théorème de transfert pour $f(X)$ dans ce contexte.
- ▹ Énoncer la linéarité de l'espérance.
- ▹ Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé. Donner *deux* conditions suffisantes *différentes* pour que le produit $X \cdot Y$ admette une espérance finie.

  —

  —

- ▹ Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé. En supposant que toutes les quantités utiles existent et sont finies, donner *deux* conditions suffisantes *différentes* pour que $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

  —

  —

- ▹ Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé. Définir $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.
- ▹ Donner la formule de König-Huygens pour la variance.
- ▹ Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé. Définir $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- ▹ Donner la formule de König-Huygens pour la covariance.
- ▹ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une covariance. Donner l'ensemble des implications toujours vraies entre les deux phrases « $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ » et « X et Y sont indépendantes ».
- ▹ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Compléter l'énoncé suivant : « Si
  alors

  1. le produit $X \cdot Y$
  2. il vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
  3. et l'égalité a lieu si et seulement si . »

- ▹ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables de variance finie. Donner une expression développée de $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

- Soit X une variable aléatoire. Donner la définition de la fonction $\mathbb{G}_X$.
- Que dire de la fonction génératrice d'une somme de variables mutuellement indépendantes ?
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X = n)$ en termes de $\mathbb{G}_X$.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner

  1. une condition nécessaire et suffisante sur $\mathbb{G}_X$ pour que X admette une espérance finie, et
  2. une expression de $\mathbb{E}(X)$ en termes de $\mathbb{G}_X$ dans le cas où cette condition est réalisée.

- Énoncer l'inégalité de Markov.
- Énoncer la loi faible des grands nombres.

Alg3 : Endomorphismes des espaces euclidiens

- Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Donner une définition de la phrase « u est une isométrie ».
- Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Caractériser le fait que $u \in \mathrm{O}(E)$ en termes de produits scalaires.
- Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Caractériser le fait que $u \in \mathrm{O}(E)$ en termes de l'image par u des bases orthonormées.
- Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Caractériser le fait que $u \in \mathrm{O}(E)$ en termes de sa matrice dans une base orthonormée.
- Soit $A \in_n (\mathbb{R})$. Donner une définition de la phrase « $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ».
- Soit $A \in_n (\mathbb{R})$. Caractériser le fait que $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en termes de la famille de ses colonnes.
- Définir $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Quand dit-on que deux bases d'un même espace vectoriel ont la même orientation ?
- Qu'est-ce qu'une rotation vectorielle d'un plan euclidien ?
- Donner la classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.
- Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Donner une définition de la phrase « u est autoadjoint ».
- Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Caractériser le fait que $u \in \mathcal{S}(E)$ en termes de sa matrice dans une base orthonormée.
- Donner un énoncé du théorème spectral.
- Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Définir la phrase « u est positif ».
- Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Définir la phrase « u est défini positif ».
- Soit A une matrice symétrique réelle de taille n. Définir la phrase « A est positive ».
- Soit A une matrice symétrique réelle de taille n. Définir la phrase « A est définie positive ».

Alg4 : Polynômes annulateurs

- Soit $A \in_n (\mathbb{K})$. Quel lien y a-t-il entre les valeurs propres de A et les polynômes annulateurs de A ?
- Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
- Donner un polynôme annulateur non trivial pour un projecteur, pour une symétrie.

- On suppose que $A \in_n (\mathbb{K})$ admet pour polynôme annulateur $P = X^3 - X + 2$.
  Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.
- Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée en termes de polynômes annulateurs.
- Donner une preuve succincte du résultat suivant : *soit u un endomorphisme d'un espace de dimension finie E, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Si u est diagonalisable et que F est stable par u, alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est diagonalisable.*

Ana7 : Fonctions vectorielles et systèmes différentiels

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction dérivable et soit $L : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction linéaire.
  Donner une expression de $(L \circ f)'$.
- Soient f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ des fonctions dérivables et soit $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction bilinéaire.
  Donner une expression de $B(f, g)'$.

Ana8 : Intégrales à paramètre

- Énoncer le théorème de convergence dominée à paramètre continu pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x, t)\, \mathrm{d}t$.
- Énoncer le théorème de continuité pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x, t)\, \mathrm{d}t$.
- Énoncer le théorème sur la classe $\mathscr{C}^1$ pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x, t)\, \mathrm{d}t$.
- Énoncer le théorème sur la classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 2$) pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x, t)\, \mathrm{d}t$.

Ana9 : Fonctions sur un espace normé et topologie

- Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, a un point de E, et r un réel positif. Donner une définition de
  - $\mathring{B}(a, r)$
  - $\overline{B}(a, r)$
  - $S(a, r)$
- Soient E un espace normé, A une partie de E, et x un point de E.
  Donner une définition de la phrase « x est intérieur à A ».
- Soient E un espace normé, A une partie de E, et x un point de E.
  Donner une définition de la phrase « x est adhérent à A ». *On pourra passer par des suites.*
- Soient E un espace normé et A une partie de E. Donner une définition de la phrase « A est ouverte ».
- Soient E un espace normé et A une partie de E.
  Donner une définition de la phrase « A est fermée ». *On pourra passer par des suites.*
- Soient E un espace normé et A une partie de E.
  Donner une définition de la phrase « A est dense dans E ». *On pourra passer par des suites.*
- Soient E et F des espaces normés, soit a un point de E, et soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.
  Donner une caractérisation séquentielle de la continuité de f en a.
- Soient (E, N_E) et (F, N_F) des espaces normés, soit k un réel positif, et soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.
  Donner une définition de la phrase « f est k-lipschitzienne ».

- ▹ Énoncer le théorème des bornes atteintes pour une fonction sur un espace normé.
- ▹ Recopier en la complétant la phrase suivante : « toute application … sur un espace vectoriel normé … est continue ».

Ana10 : Calcul différentiel et optimisation

- ▹ Soient $a \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^p$, et f définie au voisinage de a. Définir $D_v f(a)$.
- ▹ Soient $a \in \mathbb{R}^p$ et f définie au voisinage de a. Définir $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ en tant que dérivée directionnelle.
- ▹ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et soit $a \in U$. Donner un développement limité de $f(a+h)$ à l'ordre 1 lorsque $h = (h_1, \dots, h_p) \to 0$.
- ▹ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et soit $a \in U$. Définir $\mathrm{d}f(a)$.
- ▹ Sous quelle condition suffisante sur U toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et de différentielle nulle en tout point est-elle nécessairement constante sur U ?
- ▹ Soit f une fonction définie sur un domaine U de $\mathbb{R}^p$, et soit $a \in U$. Énoncer avec ses hypothèses une condition *nécessaire* d'extrémalité de f en a.
- ▹ Soit f une fonction définie sur un domaine U de $\mathbb{R}^p$, et soit $a \in U$. Énoncer avec ses hypothèses une condition *suffisante* d'extrémalité de f en a.
- ▹ Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et soit $a \in U$. Donner le développement limité de $f(a+h)$ à l'ordre 2 lorsque $h = (h_1, \dots, h_p) \to 0$.
- ▹ Donner les étapes principales de la recherche des extrema locaux d'une fonction f définie sur un domaine U de $\mathbb{R}^p$.