Étude de fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. [**CCP**] On pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 2. On définit deux fonctions f et g sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x,y) &= xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) &= 0 \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont-elles continues en $(0,0)$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant la condition suivante :

1. $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$;
2. $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x)$, où g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$;
3. $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$, où h est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Que peut-on dire des dérivées partielles d'un élément f de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^n)$ vérifiant :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) + f(y,x) = 0 \text{ ?}$$

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ admet une différentielle en tout point $a \neq 0_E$ et déterminer cette application.
2. Un point M de E décrit une courbe paramétrée : $\overrightarrow{OM} = \gamma(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $\mathcal{I}$, ne passant pas par l'origine. On considère l'application f de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $t \in \mathcal{I}$ associe $f(t) = OM = \|\gamma(t)\|$. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée.

Exercice 6. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{y^4}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point.
3. Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. [**Mines**]
Déterminer la différentielle de $\Phi\ :\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{\,t}A$.

Exercice 8. * Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application f de $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(V) = \dfrac{V^{\,t}M\,V}{V^{\,t}P\,V}$. Déterminer la différentielle de f en tout $V \neq 0$.

Recherche d'extremums

Exercice 9. Déterminer les points critiques des fonctions f suivantes, ainsi que leur nature :

1. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;
2. $f\ :\ (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$;
3. $f\ :\ (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$;
4. $f\ :\ (x,y) \mapsto xe^{x(y^2+1)}$.

Exercice 10. Étude des extremums de la fonction $f\ :\ (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

Exercice 11. [**CCP**] Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique) à valeurs propres strictement positives et $u \in \mathbb{R}^n$. On définit une fonction h sur $\mathbb{R}^n$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$$

Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle admet un unique point critique en lequel elle atteint son minimum absolu.

Exercice 12. * Soit Δ une partie convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathscr{C}^2(\Delta, \mathbb{R})$. On dit que f est une **fonction convexe** si :

$\forall\,(x,y) \in \Delta^2,\ \forall\, t \in [\,0\,;1\,],\ f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$

Montrer que si f est convexe et admet un point critique en un point a de Δ, alors f admet un minimum global en a.

Exercice 13. Déterminer les extremums sur $[\,0\,;1\,]^2$ de $f\ :\ (x,y) \mapsto \begin{cases} x|x-y| & \text{si } x \leqslant y \\ y|y-x| & \text{si } y \leqslant x \end{cases}$

Exercice 14. [**Centrale**]
Soit $f\ :\ (x,y) \mapsto (x+y)(x^2+y^2-2x-2y-2)$.

1. Montrer que f s'annule sur la réunion d'une droite et d'une courbe à déterminer.
2. Déterminer le signe de $f(x,y)$ en fonction du lieu de (x,y).
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 4\}$.
   Déterminer les extrema de la restriction de f à K.

Équations au dérivées partielles

Exercice 15. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes à l'aide du changement de variables donné :

1. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant $u = x+y,\ v = x+2y$;
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x}$ sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ en posant $x = u$ et $y = uv$.
3. $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x}f$ sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ à l'aide d'un passage en coordonnées polaires.

exercices

Exercice 16. Résoudre, sur un ensemble D bien choisi, les équations aux dérivées partielles suivantes à l'aide du changement de variable proposé :

1. $x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = y$ en posant $x = uv$ et $y = u + v$;
2. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec $x = u$ et $y = uv$.

Exercice 17. Résoudre l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

à l'aide d'un changement de variable convenable de la forme $u = x + ay$, $v = x + by$.

Exercice 18. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **laplacien** de f la fonction :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

1. Donner l'expression du laplacien en coordonnées polaires.
2. La fonction f est dite **harmonique** si $\Delta f = 0$. Déterminer les fonctions harmoniques isotropes (c'est-à-dire qui ne dépendent pas de l'angle polaire θ).

Courbes et surfaces

Exercice 19. Écrire un programme Python qui trace les lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 - y^2$ (on pourra utiliser la fonction `contour` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`).

Exercice 20. Soient a et b deux réels non nuls.

1. Montrer que l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est une courbe régulière.
2. Donner l'équation de la tangente en tout point.

Exercice 21. Soient a, b et c trois réels non nuls.

1. Montrer que l'hyperboloïde à deux nappes d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$
est une surface régulière.
2. Donner l'équation du plan tangent en tout point.

Exercice 22. [**CCP**] On considère l'hyperboloïde à une nappe d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de droite parallèle à (xOy) incluse dans S.
2. Soit D la droite définie par $x = az + b$, $y = cz + d$. Montrer que D est incluse dans S si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $O_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, par tout point de S, passent deux droites incluses dans S.

Exercice 23. Trouver tous les plans tangents à l'ellipsoïde Γ d'équation $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ coupant respectivement les axes (Ox), (Oy) et (Oz) en des points A, B et C tels que $OA = OB = 2OC$.

Exercice 24. On définit le conoïde de Plucker S comme la surface d'équation cartésienne

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

1. Montrer que S est une surface régulière.
2. Déterminer l'intersection de S avec son plan tangent au point A de coordonnées $\left(1, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 25. Soit S l'ellipsoïde d'équation $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$. Existe-t-il des plans tangents à S et parallèles au plan d'équation $x + y + z = 0$?