✦ DS PC 2014-2015 ✦

Table des matières

DS 1 - Algèbre - Séries - 27 Septembre 2014 - PC 1

Correction DS 1 1

Barème DS 1 1

DS 2 - Réduction - Séries - Fonctions - 18 Octobre 2014 - PC 1

Correction DS 2 1

Barème DS 2 1

DS 3 - Réduction - Probabilités - 22 Novembre 2014 - PC 1

Correction DS 3 1

Barème DS 3 1

DS 4 - Intégrales généralisées - Espaces euclidiens - 17 Janvier 2015 - PC 1

Correction DS 4 1

Barème DS 4 1

DS 5 - Probabilités - Séries de fonctions - Intégrales à paramètres - 14 Février 2015 - PC 1

Correction DS 5 1

Barème DS 5 1

DS 6 - Calcul différentiel - EVN - Séries entières - Intégration - 4 avril 2015 - PC 1

Correction DS 6 1

Barème DS 6 1

Compétences

6 compétences à développer en mathématiques :

Icône	Traduction	Contenu
Ca	Calculer	**calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats
Ch	Chercher	**s'engager dans une recherche, mettre en oeuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies
Co	Communiquer	**communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique
M	Modéliser	**modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer
Ra	Raisonner	**raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture
Re	Représenter	**représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre

DS 1 27 Septembre 2014 - PC

L'usage d'une calculatrice est interdit. Vous êtes invités à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. *Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.*

Exercice 1 :

1. (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n^p}{2^n}$ converge.

   (b) On pose alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $a_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$

   Montrer que, pour tout entier p : $a_p = \dbinom{p}{p-1} a_{p-1} + \cdots + \dbinom{p}{0} a_0$

   En déduire que a_p est un entier pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer la nature des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

Exercice 2 : Convergence de séries par transformation d'Abel

On considère une suite de réels $(a_n)_n$, une suite de complexes $(b_n)_n$ et on note pour tout entier naturel n : $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $\mathrm{B}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = \mathrm{B}_k - \mathrm{B}_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\mathrm{B}_k + a_n \mathrm{B}_n$ (transformation d'Abel).
2. On suppose que la suite $(\mathrm{B}_n)_n$ est bornée et que la suite $(a_n)_n$ est décroissante de limite nulle.

   (a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

   (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

   (c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

Application à des exemples.

3. Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$

   (b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

4. Pour un réel x fixé, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ où pour n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

   Démontrer que cette série converge pour tout x de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\sigma(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que σ est un endomorphisme de E.
2. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, calculer $\mathrm{Tr}(\sigma(\mathrm{M}))$.
3. Montrer que σ est un isomorphisme.

4. *Pour aller plus loin :* déterminer l'application réciproque de σ.
5. On suppose ici $n=2$. On considère la base $\mathscr{B}=(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où, pour $(i,j)\in[\![1,2]\!]^2$, E_{ij} est la matrice dont les termes sont tous nuls sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.
   (a) Pour tout $(i,j)\in[\![1,2]\!]^2$, exprimer $\sigma(E_{ij})$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de σ.
   (c) Déterminer $\mathrm{Det}(\sigma)$, $\mathrm{rg}(\sigma)$ et $\mathrm{Tr}(\sigma)$.

Exercice 4 : Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{Det}(A)$. Que peut-on en déduire sur A ?
2. (a) Déterminer le rang de $A-2I_3$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   (b) Vérifier que $X_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}\,(A-2I_3)$.
   (c) En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(A-2I_3)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(A+I_3)$.
4. Vérifier qu'une base de $\mathrm{Ker}\,(A-I_3)$ est $\left(X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.
5. Montrer que $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{3}\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_k I_3)=\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ où $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$ et $\lambda_3=1$ (on pourra identifier $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^3$).
6. Notons E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathscr{B}$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ tels que $A=M_{\mathscr{B}}(u)$.
   Notons $\mathscr{C}$ la base de E telle que $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\4&1&1\end{pmatrix}$, notée P par la suite.
   (a) Justifier que $\mathrm{Det}(P)$ est un déterminant de Vandermonde et en déduire sa valeur.
   (b) Calculer alors la matrice D de u dans la base $\mathscr{C}$.
   (c) Que dire des matrices A et D ?
7. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$.
8. Vérifier alors que $A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n&c_n\\a_{n+1}&b_{n+1}&c_{n+1}\\a_{n+2}&b_{n+2}&c_{n+2}\end{pmatrix}$ où $(a_n)_n=\left(1+\dfrac{(-1)^n}{3}-\dfrac{2^n}{3}\right)_n$, $(b_n)_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{(-1)^n}{2}\right)_n$ et $(c_n)_n=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n}{6}+\dfrac{2^n}{3}\right)_n$.
9. Posons $F=\left\{(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n\right\}$ et soit $(v_n)_n\in F$.
   On pose également pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=\begin{pmatrix}v_n\\v_{n+1}\\v_{n+2}\end{pmatrix}$.
   (a) Donner une égalité reliant X_{n+1}, X_n et A.
   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=A^nX_0$.
   (c) En déduire v_n en fonction de n.
   (d) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (e) Montrer que la famille des suites $\mathscr{S}=\big((1)_n,((-1)^n)_n,(2^n)_n\big)$ est une base de F et préciser $\dim(F)$.
   (f) Préciser la ou les suites $(v_n)_n\in F$ telle(s) que $v_0=3$, $v_1=-2$ et $v_2=6$. Déterminer leurs coordonnées dans la base $\mathscr{S}$.

Correction

Exercice 1 :

1. (a) On peut chercher à utiliser le critère de d'Alembert. On sait que $u_n > 0$ pour $n \geqslant 1$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^p$ tend vers $\dfrac{1}{2} < 1$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit donc que $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$.

   (b) Le premier terme de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p}{2^n}$ étant nul, on a : $a_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{n^k}{2^{n+1}}$

   Mais d'après 1.(a), les séries $\sum \dfrac{n^k}{2^{n+1}}$ convergent $\forall\ k \in \mathbb{N}$, on peut donc écrire :

$$a_p = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a_k\right)$$

   soit $\boxed{a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a_k}$ et on montre que $\forall\ p \in \mathbb{N}$, a_p est un entier par une récurrence forte :

   - Initialisation : pour $p = 0$, $a_0 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 2$ est bien entier.
   - Hérédité : Soit un entier p fixé, supposons que pour tout entier k inférieur à p, a_k est un entier. La formule $a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a_k$ nous permet de conclure qu'alors a_p est entier.

   Ainsi, par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{le nombre } a_p \text{ est entier pour tout } p \in \mathbb{N}}$.

2. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ vérifie le critère des séries alternées car la suite de terme $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$ est décroissante (car la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante) et tend vers 0. La série $\boxed{\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n} \text{ est donc convergente}}$.

   Pour la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$, la vérification du critère spécial des séries alternées est moins immédiate et il est donc plus efficace de faire un développement limité du terme général de cette série :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

   Or $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est le terme général de la série harmonique alternée qui converge et $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est le terme général d'une série convergente par le critère de Riemann. Donc $\boxed{\sum \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \text{ est une série convergente}}$.

Exercice 2 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathrm{B}_k - \mathrm{B}_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{B}_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{B}_{k-1}$.
   En effectuant le changement d'indice $j = k-1$ dans la dernière somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{B}_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\mathrm{B}_j \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\mathrm{B}_k + a_n \mathrm{B}_n - a_1 \mathrm{B}_0 \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\mathrm{B}_k - (a_0 - a_1)\mathrm{B}_0 + a_n\mathrm{B}_n - a_1 b_0 \\
\mathrm{S}_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})\mathrm{B}_k + a_n \mathrm{B}_n \qquad \text{car } \mathrm{B}_0 = b_0
\end{aligned}$$

2. (a) D'après un théorème sur les séries téléscopiques, on sait que la suite $(a_n)_n$ et la série $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})$ sont de même nature. Or par hypothèse, la suite $(a_n)_n$ converge, donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1}) \text{ est aussi convergente}}$.

(b) Vérifions que la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est convergente.
D'après la question précédente, pour tout entier n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$.
Le second terme $a_n B_n$ tend vers 0 comme produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.
Le premier terme est une somme partielle de la série de terme général $(a_k - a_{k+1})B_k$.
Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)_n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|(a_k - a_{k+1})B_k| \leq |a_k - a_{k+1}|M = (a_k - a_{k+1})M \qquad \text{car } (a_k)_k \text{ est une suite décroissante.}$$

Ainsi, $\sum(a_k - a_{k+1})B_k$ est absolument convergente donc convergente et on en déduit que la suite $(S_n)_n$ converge, ce qui montre que $\boxed{\sum a_n b_n \text{ converge}}$.

(c)
- Le critère des séries alternées affirme que si $(a_k)_k$ est une suite décroissante de limite nulle, alors $\sum_{k\geq 0}(-1)^k a_k$ est une série convergente.
- Pour le démontrer, on applique le résultat de la question précédente, avec $b_k = (-1)^k$. La suite $(B_n)_n$, définie par, pour tout entier n, $B_n = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ est une suite bornée (ses termes valent soit 0, soit 1). On est donc bien dans les conditions des deux questions précédentes, ce qui nous permet d'affirmer que la série $\sum a_k b_k = \sum(-1)^k a_k$ converge.

3. (a) La somme $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$ correspond à la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$ car, par hypothèse, θ est différent de $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a alors : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}}$

(b)
- $\boxed{\text{Lorsque } \alpha > 1}$, par comparaison à une série de Riemann, $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ est absolument convergente}}$ donc convergente.
- $\boxed{\text{Lorsque } \alpha \leq 0}$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc $\boxed{\text{la série est grossièrement divergente}}$.
- $\boxed{\text{Pour } \alpha \in]0,1]}$, on va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question 2b.
On considère la suite $(a_n)_n$ définie par $a_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. C'est une suite décroissante qui tend vers 0 et on définit de même la suite $(b_n)_n$ par $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $b_n = e^{in\theta}$. D'après la question précédente, pour tout entier strictement positif n, on a
$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ki\theta}\right| = \left|e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$$
d'après l'inégalité triangulaire. La suite $(B_n)_n$ est donc bornée et on peut appliquer le résultat de la question 2.b pour affirmer que, si $\alpha \in]0,1]$, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ converge}}$.

4.
- Lorsque $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (x fixé), la question précédente assure la convergence de la série de terme général $\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ et donc de la série $\sum \operatorname{Im}\left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}\right) = \sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
- Lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$, on a $u_n(x) = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}}$.

Exercice 3 :

1. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, sachant que $\mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{R}$, on a clairement que $\sigma(M) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
De plus, la trace étant une forme linéaire, on a , pour tous $(M,N) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\sigma(\lambda M+N) = \lambda M + N + \mathrm{Tr}(\lambda M+N)I_n = \lambda M + \lambda\mathrm{Tr}(M)I_n + N + \mathrm{Tr}(N)I_n = \lambda\sigma(M)+\sigma(N)$$
Par conséquent, $\boxed{\sigma \text{ est un endomorphisme de } E}$.
2. Pour $M \in E$, on a, par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}(\sigma(M)) = \mathrm{Tr}(M+\mathrm{Tr}(M)I_n) = \mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(I_n)$, donc $\boxed{\mathrm{Tr}(\sigma(M)) = (n+1)\mathrm{Tr}(M)}$.
3. Sachant que σ est un endormorphisme en dimension finie, par le théorème du rang, il suffit de montrer que σ est injectif pour montrer que c'est un isomorphisme. Soit $M \in \mathrm{Ker}\,\sigma$, alors $\sigma(M) = O_n$, c'est à dire $M = -\mathrm{Tr}(M)I_n$. D'après 2., le fait que $\sigma(M)$ soit la matrice nulle implique que $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et donc $M = O_n$. Le noyau de σ est donc réduit à $\{O_n\}$ et $\boxed{\sigma \text{ est un isomorphisme}}$.
4. Soit $N \in E$. Le fait que σ soit un isomorphisme nous assure qu'il existe une unique matrice M telle que $\sigma(M) = N$ et déterminer l'application σ^{-1} revient à exprimer M en fonction de N. Or,
$$\sigma(M) = N \iff M+\mathrm{Tr}(M)I_n = N \iff M = N - \mathrm{Tr}(M)I_n$$
Mais on sait aussi que $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(\sigma(M)) = (n+1)\mathrm{Tr}(M)$, on a donc : $\sigma(M) = N \iff M = N - \dfrac{\mathrm{Tr}(N)}{n+1}I_n$
et alors : $\boxed{\text{pour tout } N \in E : \sigma^{-1}(N) = N - \dfrac{\mathrm{Tr}(N)}{n+1}I_n}$.
5. (a) Sachant que, pour $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $\mathrm{Tr}(E_{ii}) = 1$ et $\mathrm{Tr}(E_{ij} = 0$, on a
$$\sigma(E_{11}) = 2E_{11}+E_{22}, \quad \sigma(E_{12}) = E_{12}, \quad \sigma(E_{21}) = E_{21} \quad \text{et} \quad \sigma(E_{22}) = E_{11}+2E_{22}$$
(b) La matrice de σ dans la base $\mathscr{B}$ est donc : $\begin{pmatrix} 2&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&2 \end{pmatrix}$.
(c) On a montré à la question 3. que σ est un isomorphisme. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(\sigma) = 4}$, de plus $\mathrm{Tr}(\sigma) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&2 \end{pmatrix}\boxed{= 6}$ et enfin : $\mathrm{Det}(\sigma) = \begin{vmatrix} 2&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&0&1\\0&1&0\\1&0&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&1\\1&2 \end{vmatrix}\boxed{= 3}$ (en développant par rapport aux deuxièmes lignes dans les deux déterminants).

Exercice 4 :

1. En développant par ex. par rapport à la 1^re colonne, $\mathrm{Det}(A) = -2\begin{vmatrix} 1&0\\0&1 \end{vmatrix} = \boxed{-2}$. Donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$
2. (a) $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2&1&0\\0&-2&1\\-2&1&0 \end{pmatrix}(L_3 \longleftarrow L_3 - L_1) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2&1&0\\0&-2&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$, matrice échelonnée par lignes de rang 2. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(A-2I_3) = 2}$
(b) On vérifie que $(A-2I_3)X_1 = O_{31}$ donc $\boxed{X_1 \in \mathrm{Ker}(A-2I_3)}$
(c) D'après le théorème du rang sur les matrices, $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(A-2I_3) = 1$. Or (X_1) est une famille libre (car $X_1 \neq O_{31}$) de $\mathrm{Ker}(A-2I_3)$ avec $\mathrm{Card}((X_1)) = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(A-2I_3))$. Donc $\boxed{(X_1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(A-2I_3)}$
3. $X = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A+I_3) \iff (A+I_3)X = O_{31} \iff \begin{cases} x+y = 0 \\ y+z = 0 \\ -2x+y+3z = 0 \quad (L_3 \longleftarrow L_3+2L_1-3L_2) \end{cases}$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=-z \end{array}\right. \iff \mathrm{X}=\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix}$$ Donc $\boxed{\mathrm{X}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix}}$ est une famille

génératrice de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)$. Comme $\mathrm{X}_2 \neq \mathrm{O}_{31}$, (X_2) est libre et est donc $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)}$

4. On procède de même que pour 2 ou 3.
5. Notons $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ou de $\mathbb{R}^3$) et calculons $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}_0}(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix} = 6 \neq 0$ Donc $(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Donc $\boxed{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=1}^{3} \mathrm{Vect}(\mathrm{X}_k) = \bigoplus_{k=1}^{3} \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\lambda_k \mathrm{I}_3)}$ (fractionnement d'une base).
6. (a) $\mathrm{Det(P)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2^2 & (-1)^2 & 1^2\end{vmatrix} = \boxed{\mathrm{V}(2,-1,1) = \mathrm{V}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)} = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) = \boxed{6}$

   (b) On peut calculer $\mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}$ et appliquer la formule de changement de base $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$

   On peut aussi remarquer $\mathrm{P} = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix}\mathrm{X}_1 & \mathrm{X}_2 & \mathrm{X}_3\end{pmatrix}$. En posant $x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{E}$ tels que $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(x_k) = \mathrm{X}_k$, on a donc $\boxed{\mathscr{C} = (x_1,x_2,x_3)}$. Comme $u(x_k) = \lambda_k x_k$ (car $\mathrm{AX}_k = \lambda_k \mathrm{X}_k$), on a donc $\boxed{\mathrm{D} = \mathrm{M}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

   (c) Les matrices A et D sont les matrices du même endomorphisme dans 2 bases différentes : $\boxed{\text{elles sont donc semblables}}$
7. Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n) : \mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ par récurrence.
   $\mathscr{P}(0)$ est vraie $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_3 = \mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie :
   $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A}^n\mathrm{A} = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}.\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$: donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. D est une matrice diagonale donc $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On en déduit les coefficients de A^n donnés.
9. (a) $\boxed{\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n}$

   (b) Par récurrence.

   (c) On obtient alors d'après 9.(b) et en identifiant le 1er coefficient dans l'égalité $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$, $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = a_n v_0 + b_n v_1 + c_n v_2}$

   (d) Toute suite de F est une combinaison linéaire des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$: donc $\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,((a_n)_n,(b_n)_n,(c_n)_n) \text{ et F est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\text{, donc un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$
   On peut également montrer que F est non vide et stable par combinaison linéaire.

   (e) D'après l'expression des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$, toute suite de F est combinaison linéaire des suites de $\mathscr{S}$. Donc $\boxed{\mathscr{S} \text{ est génératrice de F}}$
   On montre alors que $\mathscr{S}$ est libre : soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x(1)_n + y\big((-1)^n\big)_n + z\big(2^n\big)_n = (0)_n \iff$
   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x + y(-1)^n + z2^n = 0 \implies \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \quad (n=0) \\ x-y+2z & = & 0 \quad (n=1) \\ x+y+4z & = & 0 \quad (n=2)\end{array}\right. \iff \ldots \iff x=y=z=0$$
   Donc $\mathscr{S}$ est libre : $\boxed{\mathscr{S} \text{ est une base de F et } \dim(\mathrm{F}) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{S}) = 3}$

   (f) D'après 9.(c), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3a_n - 2b_n + 6c_n = -4 + 3(-1)^n + 2^n$.
   Il existe donc $\boxed{\text{une unique suite de F}}$ telles que $v_0 = 3$, $v_1 = -2$ et $v_2 = 6$ $\boxed{\text{de coordonnées } (-4,3,1) \text{ dans la base } \mathscr{S}}$

Barème

Exercice 1 : Séries numériques

Compétences	NA	MA	A	Points
1. (a) Nature d'une série				/1
1. (b) Ca Egalité entre les sommes de séries et récurrence forte				/3
2. Nature de 2 séries (série alternée et/ou utilisation d'un DL)				/3

Exercice 2 : Séries numériques

Compétences	NA	MA	A	Points
1. Ca Calcul sur les sommes partielles				/1
2. (a) Série télescopique				/1
2. (b) Convergence d'une série				/1
2. (c) Critère des séries alternées et démonstration				/1.5
3. (a) Ca Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique				/1
3. (b) Ra Ch Nature de séries				/4
3. (c) Partie imaginaire d'une série complexe convergente				/2

Exercice 3 : Endomorphisme de matrices

Compétences	NA	MA	A	Points
1. Endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$				/1.5
2. Trace				/0.5
3. Isomorphisme				/1.5
4. Application réciproque				/2
5. (a) Image de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$				/1
5. (b) Matrice dans une base				/1
5. (c) Déterminant, rang et trace				/1.5

Exercice 4 : Algèbre linéaire

Compétences	NA	MA	A	Points
1. Ca Déterminant et conséquence du fait qu'il soit non nul				/1
2. (a) Rang d'une matrice				/0.5
2. (b) Noyau d'une matrice				/0.5
2. (c) Ra Th. du rang sur les matrices et base du noyau				/1
3. Ca Base du noyau d'une matrice				/1.5
4. Noyau d'une matrice				/0.5
5. Ra Somme directe de 3 sous-espaces vectoriels				/2
6. (a) Ca Déterminant de Vandermonde				/0.5
6. (b) Ca Changement de base pour un endomorphisme				/1
6. (c) Matrices semblables				/0.5
7. Récurrence sur les puissances d'une matrice				/1.5
8. Ca Calcul de l'inverse d'une matrice, puissance d'une matrice diagonale et produit matriciel				/2
9. (a) Traduction matricielle d'une relation sur une suite récurrente linéaire				/1
9. (b) Récurrence				/1
9. (c) Produit matriciel				/1
9. (d) Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$				/1
9. (e) Ra Base d'un sous-espace vectoriel de suites				/2
9. (f) Coordonnées dans une base				/2

DS 2 — 18 Octobre 2014 - PC

L'usage d'une calculatrice est interdit. Vous êtes invités à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. *Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.*

Exercice 1 : La série $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $w_k = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) - \dfrac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} w_k$ est convergente.
   (b) En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, que l'on notera γ (on ne demande pas de la calculer : c'est la constante γ d'Euler).
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.
3. Montrer en utilisant les questions précédentes que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 2 : Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit Γ la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$, dont les points sont notés $M(t)$.

1. Préciser les domaines de définition de x et y, expliquer pourquoi on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donner les conséquences géométriques sur la courbe Γ.
2. Dresser un tableau de variation pour x et y.
3. Déterminer les tangentes particulières à Γ.
4. D'après le tableau de variation de la question 2, donner le nombre de points d'intersection de la courbe avec les axes du repère pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, déterminer leurs coordonnées et les équations des tangentes à Γ en ces points.
5. Représenter Γ.

Exercice 3 : Soit un entier $n \geqslant 2$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On propose de montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

1. (a) Montrer que 0 est valeur propre de AB si et seulement si $\operatorname{Det}(AB) = 0$.
   (b) Montrer que $0 \in \operatorname{Sp}(AB) \iff 0 \in \operatorname{Sp}(BA)$.
2. Soit λ une valeur propre réelle non nulle de AB, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de AB associé à cette valeur propre λ.
   (a) Montrer que les vecteurs ABX et BX sont non nuls.
   (b) Montrer que le vecteur BX est vecteur propre pour la matrice BA.
3. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles.
4. On suppose que A est inversible.

(a) En factorisant de 2 façons différentes la matrice $x\mathrm{A}-\mathrm{ABA}$, montrer que pour tout réel ou complexe x, on a : $\mathrm{Det}(x\mathrm{I}_n - \mathrm{AB}) = \mathrm{Det}(x\mathrm{I}_n - \mathrm{BA})$.

(b) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec le même ordre de multiplicité.

5. Soient les 2 matrices C et D définies par blocs par $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & x\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -\mathrm{B} & x\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \end{pmatrix}$.

À l'aide des produits CD et DC, montrer que le résultat précédent reste vrai lorsque A n'est pas inversible.

Exercice 4 : Dans tout l'exercice, on note, pour I et J deux intervalles, $\mathscr{C}_b(\mathrm{I},\mathrm{J})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur I à valeurs dans J et pour $g \in \mathscr{C}_b(\mathrm{I},\mathrm{J})$, on note $||g||_\infty = \sup\limits_{x\in \mathrm{I}} |g(x)|$.

On fixera $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $\omega \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+^*)$ et on notera $\Omega : x \mapsto \Omega(x)$ la primitive de ω qui s'annule en 0 et $\mathrm{F}_\omega : x \mapsto \mathrm{F}_\omega(x)$ la primitive de $f\omega$ qui s'annule en 0.

1. **L'opérateur de moyenne**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi_\omega(x) = \dfrac{1}{\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t := \dfrac{\mathrm{F}_\omega(x)}{\Omega(x)}$

(a) Montrer que cette formule définit une fonction φ_ω continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\omega(x) = f(0)$. En déduire que φ_ω se prolonge continûment à $\mathbb{R}_+$. **On notera encore φ_ω ce prolongement.** On note A_ω l'application qui à f fait correspondre φ_ω.

(b) Montrer que A_ω définit un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Est-ce également un endomorphisme de $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$?

(c) Démontrer que A_ω est injectif.
On dit que λ est valeur propre de A_ω sur $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ s'il existe $u \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, non identiquement nulle et telle que $\mathrm{A}_\omega(u) = \lambda u$. La fonction u est alors un vecteur propre de A_ω associé à la valeur propre λ.

(d) Montrer que la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ d'un vecteur propre u de A_ω satisfait l'équation différentielle suivante : $\lambda\Omega(x)u'(x) = (1-\lambda)\omega(x)u(x)$.

(e) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que sa solution ne peut se prolonger par continuité en 0 que si $\lambda \in]0,1]$.

(f) Dans le cas où Ω est bornée sur $\mathbb{R}_+$, déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_ω et les sous-espaces propres associés (on pourra distinguer le cas $\lambda = 1$).

2. **Le cas périodique**

On suppose désormais que ω est τ-périodique et que f est T-périodique, où τ et T sont des réels strictement positifs tels que $\tau/\mathrm{T} \in \mathbb{Q}$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t = +\infty$.

(b) Montrer que ω admet un maximum et un minimum strictement positifs.

(c) Déterminer $\theta > 0$ tel que, pour tout x, $\omega(x+\theta) = \omega(x)$ et $f(x+\theta) = f(x)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et pour $\theta > 0$, on pose $\lfloor x \rfloor_\theta = \theta\lfloor x/\theta \rfloor$.

(d) Représenter graphiquement la fonction $\lfloor\cdot\rfloor_\theta$ sur $[-2\theta, 3\theta]$.

(e) Montrer que $\mathrm{A}_\omega(f)(\lfloor x\rfloor_\theta) = f(0)$ si $x \in [0,\theta[$ et que, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ et $x \in [k\theta,(k+1)\theta[$:

$$\mathrm{A}_\omega(f)(\lfloor x\rfloor_\theta) = \mathrm{A}_\omega(f)(\theta)$$

(f) Montrer que $\left|\displaystyle\int_{\lfloor x\rfloor_\theta}^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \theta||f||_\infty||\omega||_\infty$

(g) Démontrer que, pour $x > 0$:

$$\left|(\mathrm{A}_\omega(f) - \mathrm{A}_\omega(f)\circ\lfloor\cdot\rfloor_\theta)(x)\right| \leqslant \frac{\theta||f||_\infty||w||_\infty}{x\min\omega}\left(\frac{||\omega||_\infty}{\min\omega}+1\right)$$

(h) En déduire que $\mathrm{A}_\omega(f)$ possède une limite en $+\infty$ et en donner une expression.

Correction

Exercice 1 :

1. (a) On a
$$w_k=\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{2(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
et $\boxed{\text{c'est donc le terme général d'une série absolument convergente.}}$

(b) Soit $v_n=\sigma_n-\ln(n)$; on a $v_n-v_{n+1}=w_n$. Or, la série $\sum(v_n-v_{n+1})$ et la suite $(v_n)_n$ ont même nature et donc $\boxed{(v_n)_n \text{ est une suite convergente.}}$

2. En regroupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a
$$\tau_{2n}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$
$$\sigma_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$
En faisant la différence, on obtient $\boxed{\tau_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n}$

3. Notons γ la limite de $(\sigma_n-\ln(n))_n=(v_n)_n$. On a :
$$v_{2n}-v_n=\sigma_{2n}-\sigma_n-\ln(2)=\tau_{2n}-\ln(2)$$
Cette quantité étant de limite $\gamma-\gamma=0$, on a donc $\tau_{2n}\to\ln(2)$. Par ailleurs $\tau_{2n+1}-\tau_{2n}=\dfrac{1}{2n+1}$ et donc $\tau_{2n+1}\to\ln(2)$. Finalement, la suite τ est convergente de limite $\ln(2)$ ou encore $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)}$

Exercice 2 :

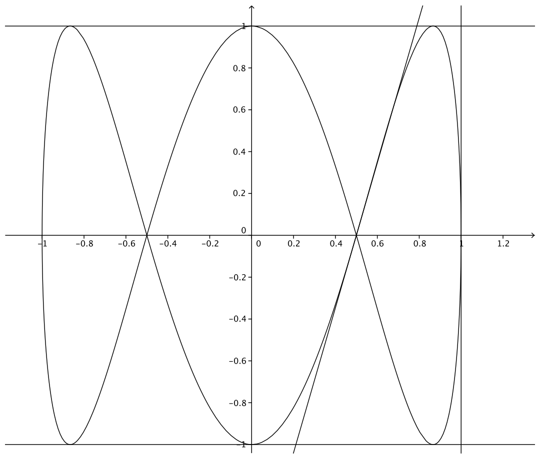
1. $\boxed{x \text{ et } y \text{ sont définies sur } \mathbb{R}}$, elles sont 2π-périodiques donc on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi,\pi]$, de plus x est paire et y est impaire donc on peut les étudier sur $[0,\pi]$ et appliquer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses pour retrouver la courbe entière. Enfin, on remarque que $x(\pi-t)=-x(t)$ et $y(\pi-t)=y(t)$, ainsi, si l'on connaît les points $M(t)$, avec $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on retrouve les points correspondant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ grâce à une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc $\boxed{\text{l'intervalle optimal d'étude est } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$.

2. $\boxed{x'(t)=-\sin(t)}$ et $\boxed{y'(t)=3\cos(3t)}$

La fonction x' s'annule sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour $t=0$ et y' s'annule sur cet intervalle pour $t=\frac{\pi}{6}$ et $t=\frac{\pi}{2}$. À l'aide d'un tableau de signe laissé à votre soin, on en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

3. La fonction y' s'annulant deux fois sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la courbe Γ présente deux points avec une tangente horizontale : $M\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$. De plus, la tangente au point $M(0) = (1, 0)$ est verticale.
4. La fonction x ne change pas de signe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$ est donc le seul point de concours entre Γ et l'axe des ordonnées. L'équation de la tangente en ce point est $\boxed{y = -1}$ d'après la question précédente. L'axe des abscisses coupe deux fois Γ : en $M(0) = (1, 0)$ qui admet une tangente d'équation $\boxed{x = 1}$ et pour un $t_0 \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ qui est tel que $\sin(3t_0) = 0$, soit $t_0 = \frac{\pi}{3}$ et alors $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. La tangente à Γ en ce point a pour coefficient directeur $\frac{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-3}{-\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}$ et donc son équation est de la forme $y = 2\sqrt{3}x + \alpha$, en remplaçant (x, y) par $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, on trouve $\alpha = -\sqrt{3}$. L'équation de la tangente au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est donc $\boxed{y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}}$.
5. 

Exercice 3 :

1. (a) $0 \in \mathrm{Sp}(AB) \iff \mathrm{Ker}(AB) \neq \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \iff AB \notin GL_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{Det}(AB) = 0$

   (b) Comme $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(BA)$, on a, d'après la question précédente :
$$0 \in \mathrm{Sp}(AB) \iff \mathrm{Det}(AB) = 0 \iff \mathrm{Det}(BA) = 0 \iff 0 \in \mathrm{Sp}(BA)$$
2. (a) X étant un vecteur propre de AB associé à la valeur propre λ, X est non nul et $ABX = \lambda X \neq 0$ car λ est supposé non nul. De plus, le fait que $ABX \neq 0$ entraîne que $\boxed{BX \neq 0}$.

   (b) En multipliant à gauche l'égalité $ABX = \lambda X$ par B, on obtient $BA(BX) = \lambda BX$ et comme $BX \neq 0$, c'est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ.
3. On a vu à la question 1. que $0 \in \mathrm{Sp}(AB) \iff 0 \in \mathrm{Sp}(BA)$. De plus, d'après la question 2, si un réel λ non nul est valeur propre de AB alors il est aussi valeur propre de BA. Les matrices A et B jouant des rôles symétriques, on en déduit que, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\lambda \in \mathrm{Sp}(AB) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(BA)$. Par conséquent : $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(AB) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(BA)}$.
4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a : $(xI_n - AB)A = xA - ABA = A(xI_n - BA)$ et donc $\mathrm{Det}((xI_n - AB)A) = \mathrm{Det}(A(xI_n - BA))$ soit $\mathrm{Det}(xI_n - AB)\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(xI_n - BA)$ et en divisant par $\mathrm{Det}(A) \neq 0$, on obtient : $\boxed{\mathrm{Det}(xI_n - BA) = \mathrm{Det}(xI_n - AB)}$.

   (b) La question précédente nous permet d'affirmer que AB et BA ont même polynôme caractéristique et donc qu'elles ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.
5. On a : $CD = \begin{pmatrix} xI_n - AB & O_n \\ -B & xI_n \end{pmatrix}$ et $DC = \begin{pmatrix} xI_n - BA & -xB \\ O_n & xI_n \end{pmatrix}$ et donc, en passant au déterminant, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{C}$: $x^n \chi_{AB} = x^n \chi_{BA}$ soit, par unicité des coefficients d'un polynôme : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et on conclut comme à la question précédente.

Exercice 4 :

1. (a) Pour $x \geqslant 0$, on note $\Omega(x) = \displaystyle\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t$ et $F_\omega(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$ les primitives de ω et de $f\omega$ qui s'annulent en 0. Ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Par définition, on a donc $\varphi_\omega(x) = \dfrac{F_\omega(x)}{\Omega(x)}$. De plus, comme ω est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction Ω est strictement croissante. Sachant que $\Omega(0) = 0$, on en déduit que Ω est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Le quotient $\boxed{\varphi_\omega(x) = \dfrac{F_\omega(x)}{\Omega(x)} \text{ définit donc une fonction continue sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. En outre, pour $x \neq 0$,

$$\varphi_\omega(x) = \frac{F_\omega(x)}{x} \times \frac{x}{\Omega(x)}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\omega(x)$ existe et vaut $\dfrac{F'_\omega(0)}{\Omega'(0)}$, soit $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\omega(x) = f(0)}$

Ainsi, on peut affirmer que $\boxed{\text{la fonction } \varphi_\omega \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et se prolonge continûment à } \mathbb{R}_+.}$

(b) L'application A_ω associe à une fonction f de $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ la fonction φ_ω correspondante. D'après la question 1.a, φ_ω est aussi dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. De plus, A_ω est linéaire, grâce à la linéarité de l'intégrale, de sorte que $\boxed{\text{l'application } A_\omega \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).}$

Si f est une fonction de $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ alors $||f||_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}_+} |f(x)|$ est bien définie et pour tout $x > 0$, comme $\Omega(x) > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi_\omega(x)| &= \left|\frac{1}{\Omega(x)} \int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{\Omega(x)} \left|\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\Omega(x)} \int_0^x \left|f(t)\right| \omega(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{\Omega(x)} \int_0^x ||f||_\infty \omega(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Omega(x)} ||f||_\infty \left|\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t\right| \\
|\varphi_\omega(x)| &\leqslant ||f||_\infty
\end{aligned}$$

Cette inégalité est aussi vérifiée si $x = 0$. On a donc montré que φ_ω est aussi bornée et que $\boxed{\text{l'application } A_\omega \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).}$

(c) Pour montrer que l'endomorphisme A_ω est injectif, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit f un élément de $\operatorname{Ker} A_\omega$. Alors $A_\omega(f) = \varphi_\omega = 0$, ce qui entraîne que

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \varphi_\omega(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = 0$$

Par continuité de $f\omega$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. En dérivant la dernière égalité, on obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x)\omega(x) = 0$$

Puisque ω est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle. Ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } A_\omega \text{ est injectif.}}$

(d) Soient λ une valeur propre de A_ω et u un vecteur propre associé. La fonction u est donc continue, bornée et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. De plus, elle vérifie la relation suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\lambda u(x) = A_\omega(u)(x) = \frac{1}{\Omega(x)} \int_0^x u(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

Par continuité de u et ω, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\Omega(x)} \displaystyle\int_0^x u(t)\omega(t)\mathrm{d}t$ est dérivable. Multiplions l'égalité $A_\omega(u)(x) = \lambda u(x)$ par $\Omega(x)$, on obtient alors

$$\int_0^x u(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \lambda u(x)\Omega(x)$$

Dérivons ensuite cette relation pour obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u(x)\omega(x) = \lambda u'(x)\Omega(x) + \lambda u(x)\omega(x)$$

L'équation différentielle satisfaite par la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ d'un vecteur propre u pour la valeur λ de A_ω est $\boxed{\lambda\Omega(x)u'(x) = (1-\lambda)\omega(x)u(x)}$.

(e) L'endomorphisme A_ω étant injectif, ses valeurs propres sont non nulles, on peut donc supposer $\lambda \neq 0$ et, comme Ω ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) satisfaite par un vecteur propre u de A_ω sur $\mathbb{R}_+^*$ peut se mettre sous la forme

$$u'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\omega(x)}{\Omega(x)}u(x)$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. De plus, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\omega(x)}{\Omega(x)}$ est donnée par $x \longmapsto \ln|\Omega(x)| = \ln\Omega(x)$ car $\Omega(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le raisonnement fait à la question 1.a. Toutes les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme, pour $x > 0$:

$$u(x) = C\exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln\Omega(x)\right) = C\,\Omega(x)^{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Or $\Omega(0) = 0$ donc l'expression $\Omega(x)^{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}$ admet une limite finie en 0 si et seulement si $\dfrac{(1-\lambda)}{\lambda} \geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \in]0;1]$. Donc une solution (non nulle) de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ne se prolonge par continuité en 0 que si $\lambda \in]0;1]$.

(f) D'après la question précédente, un vecteur propre u de A_ω pour la valeur propre λ vérifie, pour $x > 0$: $u(x) = C\,\Omega(x)^{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}$ avec $C \in \mathbb{R}$. De plus, on doit pouvoir prolonger u par continuité en 0. Par conséquent, d'après le résultat de la question précédente, les valeurs propres de A_ω se trouvent dans l'intervalle $]0;1]$.

- Dans le cas particulier où $\lambda = 1$ la fonction u est une fonction constante non nulle et, réciproquement, toutes les fonctions constantes non nulles sont vecteurs propres pour la valeur propre 1. On peut alors affirmer que le réel 1 est valeur propre de A_ω et le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes.
- Pour $\lambda \in]0;1[$, les fonctions de la forme $u(x) = C\,\Omega(x)^{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}}$ si $x \geqslant 0$ avec $C \in \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (en particulier $u(0) = 0$) et bornées sur $\mathbb{R}_+$, car par hypothèse Ω est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
  Il reste à vérifier qu'une fonction u ainsi définie vérifie bien la relation $A_\omega(u) = \lambda u$
  Par construction de u, on a clairement, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\omega(t)u(t) = \lambda(\Omega(t)u'(t) + \omega(t)u(t)) = \lambda(\Omega u)'(t)$$

  et en intégrant cette égalité entre 0 et x, avec $x > 0$, on obtient, puisque $\Omega(0) = 0$:

$$\int_0^x \omega(t)u(t)\mathrm{d}t = \lambda\Omega(x)u(x)$$

En divisant les deux membres par $\Omega(x) \neq 0$, on retrouve que

$$\forall x \neq 0 \qquad \mathrm{A}_\omega(u)(x) = \lambda u(x)$$

et cette égalité est aussi vraie pour $x = 0$ (puisque $u(0) = 0$).
On peut donc conclure que tous les réels λ de $]0;1[$ sont valeurs propres de A_ω de sous-espace propre associé

$$\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}_\omega) = \left\{x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathrm{C}\left(\Omega(x)\right)^{\frac{(1-\lambda)}{\lambda}} \quad \text{avec } \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$

2. (a) Soit $\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ l'application partie entière. Alors, par la relation de Chasles, pour $x > 0$ fixé, on peut écrire :

$$\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\tau\lfloor\frac{x}{\tau}\rfloor} \omega(t)\mathrm{d}t + \int_{\tau\lfloor\frac{x}{\tau}\rfloor}^x \omega(t)\mathrm{d}t$$

De plus, comme $\lfloor x/\tau\rfloor \leqslant x/\tau$, on a $\tau\lfloor x/\tau\rfloor \leqslant x$ et puisque ω est positive cela entraîne

$$\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\tau\lfloor\frac{x}{\tau}\rfloor} \omega(t)\mathrm{d}t$$

Enfin, le fait que ω soit τ-périodique implique que $\displaystyle\int_0^{\tau\lfloor\frac{x}{\tau}\rfloor} \omega(t)\mathrm{d}t = \lfloor x/\tau\rfloor \int_0^\tau \omega(t)\mathrm{d}t$

On obtient donc $\displaystyle\int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t \geqslant \lfloor x/\tau\rfloor \int_0^\tau \omega(t)\mathrm{d}t$.

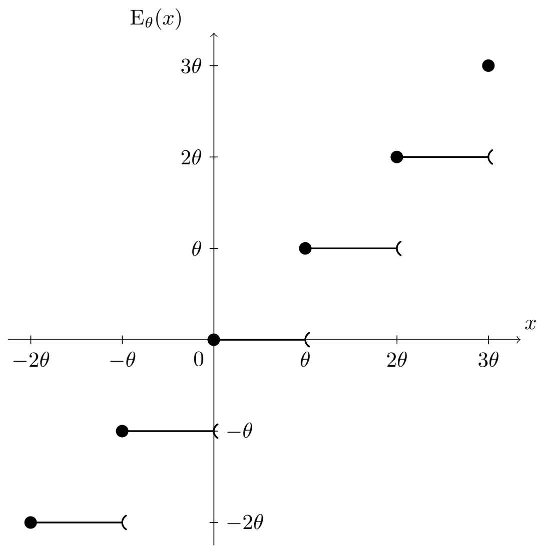
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lfloor x/\tau\rfloor = +\infty$ et $\displaystyle\int_0^\tau \omega(t)\mathrm{d}t > 0$ on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t = +\infty}$

(b) Comme ω est une fonction τ-périodique, on peut se contenter de l'étudier sur l'intervalle $[0,\tau]$. Étant continue sur ce segment, elle atteint son maximum et son minimum et, comme elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on sait qu'ils sont strictement positifs. On peut par conséquent conclure que $\boxed{\text{la fonction } \omega \text{ admet un maximum et un minimum strictement positifs.}}$

(c) $\dfrac{\tau}{\mathrm{T}}$ étant rationnel, il existe des entiers strictement positifs p et q tels que $\dfrac{\tau}{\mathrm{T}} = \dfrac{p}{q}$ Alors, si l'on pose $\boxed{\theta = q\tau = p\mathrm{T}}$ le réel θ est strictement positif et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \omega(x+\theta) = \omega(x) \quad \text{et} \quad f(x+\theta) = f(x)$$

(d) Soit $k \in \mathbb{Z}$, pour $x \in [k\theta,(k+1)\theta[$, on a $\dfrac{x}{\theta} \in [k, k+1[$, de sorte que $\lfloor x/\theta\rfloor = k$ et donc $\lfloor x\rfloor_\theta = k\theta$.
Dans la figure suivante, la fonction $\lfloor\cdot\rfloor_\theta$ est représentée sur $[-2\theta, 3\theta]$ avec θ comme unité des axes.



(e) Soient k un entier non nul et $x \in [k\theta,(k+1)\theta[$. Alors $\lfloor x \rfloor_\theta = k\theta$. De plus, d'après la question 2.c, pour tout réel positif x, on a $\omega(x+\theta) = \omega(x)$. Ainsi, pour tout $x \in [k\theta,(k+1)\theta[$, on a
$$\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta) = \int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} \omega(t)\mathrm{d}t = \int_0^{k\theta} \omega(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{i\theta}^{(i+1)\theta} \omega(t)\mathrm{d}t = k\int_0^{\theta}\omega(t)\mathrm{d}t = k\Omega(\theta)$$
De même, puisque $f\omega$ est θ-périodique
$$\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = k\int_0^{\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} \mathrm{A}_\omega(f)(\lfloor x\rfloor_\theta) &= \varphi_\omega(\lfloor x\rfloor_\theta) \\ &= \frac{1}{\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)}\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k\Omega(x)}k\int_0^{\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{A}_\omega(f)(\lfloor x\rfloor_\theta) &= \frac{1}{\Omega(x)}\int_0^{\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$
soit $\boxed{\forall x \notin [0,\theta[\quad \mathrm{A}_\omega(f)(\lfloor x\rfloor_\theta) = \mathrm{A}_\omega(f)(\theta)}$

Pour $x \in [0,\theta[$, $\lfloor x\rfloor_\theta = \theta\lfloor 0\rfloor_\theta = 0$ et donc $\mathrm{A}_\omega(f)\circ\lfloor x\rfloor_\theta = \mathrm{A}_\omega(f)(0) = \varphi_\omega(0)$

soit $\boxed{\forall x \in [0,\theta[\quad \mathrm{A}_\omega(f)(\lfloor x\rfloor_\theta) = f(0)}$ d'après la question 1.a.

(f) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, par définition de la fonction partie entière, on a $0 \leqslant \dfrac{x}{\theta} - \lfloor x/\theta\rfloor < 1$.
En multipliant ces inégalités par $\theta > 0$, on obtient $0 \leqslant x - \lfloor x\rfloor_\theta < \theta$.
De plus, f et ω étant continues et périodiques sur $\mathbb{R}_+$, elles sont bornées et l'inégalité triangulaire implique : $\left|\int_{\lfloor x\rfloor_\theta}^{x} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\lfloor x\rfloor_\theta}^{x} \|f\|_\infty\|\omega\|_\infty\mathrm{d}t = \|f\|_\infty\|\omega\|_\infty(x - \lfloor x\rfloor_\theta)$

On a donc montré que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left|\int_{\lfloor x\rfloor_\theta}^{x} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \theta\|f\|_\infty\|\omega\|_\infty}$

(g) Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$, et posons $\delta(x) = \left|(\mathrm{A}_\omega(f) - \mathrm{A}_\omega(f)\circ\lfloor\cdot\rfloor_\theta)(x)\right|$. Cette quantité vérifie alors
$$\begin{aligned} \delta(x) &= \left|\varphi_\omega(x) - \varphi_\omega(\lfloor x\rfloor_\theta)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Omega(x)}\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)}\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Omega(x)}\left(\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{\Omega(x)} - \frac{1}{\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)}\right)\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \\ \delta(x) &\leqslant \left|\frac{1}{\Omega(x)}\left(\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)\right| \\ &\qquad + \left|\left(\frac{1}{\Omega(x)} - \frac{1}{\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)}\right)\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \end{aligned}$$
Commençons par nous intéresser au premier terme de cette somme :
$$\frac{1}{\Omega(x)}\left(\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)$$
D'après la question 8, ω admet un minimum strictement positif. Par conséquent, puisque $x > 0 : \Omega(x) = \int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t \geqslant x\min\omega \qquad (1)$

Par la relation de Chasles, réduisons la différence des deux intégrales :

$$\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \int_{\lfloor x\rfloor_\theta}^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

Appliquons pour finir le résultat de la question 2.f pour obtenir la majoration suivante :

$$\left|\frac{1}{\Omega(x)}\left(\int_0^x f(t)\omega(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)\right| \leqslant \frac{\theta||f||_\infty||\omega||_\infty}{x\min\omega}$$

En ce qui concerne la deuxième partie de la somme, on peut écrire

$$\left(\frac{1}{\Omega(x)} - \frac{1}{\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)}\right)\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \frac{\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)-\Omega(x)}{\Omega(x)\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)}\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

De plus, les réels x, $\lfloor x\rfloor_\theta$ et $\min\omega$ sont strictement positifs. Grâce à (1), on a donc

$$\Omega(x)\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta) = \int_0^x \omega(t)\mathrm{d}t\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta}\omega(t)\mathrm{d}t \geqslant x\lfloor x\rfloor_\theta(\min\omega)^2$$

Enfin, grâce au même raisonnement que celui de la question 2.f, on a

$$|\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)-\Omega(x)| = \left|\int_{\lfloor x\rfloor_\theta}^x \omega(t)\mathrm{d}t\right| \leq \theta||\omega||_\infty$$

ce qui implique

$$\left|\left(\frac{1}{\Omega(x)} - \frac{1}{\Omega(\lfloor x\rfloor_\theta)}\right)\int_0^{\lfloor x\rfloor_\theta} f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\theta||\omega||_\infty \times \lfloor x\rfloor_\theta||f||_\infty||\omega||_\infty}{x\lfloor x\rfloor_\theta(\min w)^2} = \frac{\theta||f||_\infty||\omega||_\infty^2}{x(\min w)^2}$$

En sommant les deux majorations obtenues et en factorisant le quotient, on obtient l'inégalité recherchée : $\boxed{\left|(\mathrm{A}_\omega(f)-\mathrm{A}_\omega(f)\circ\lfloor\cdot\rfloor_\theta)(x)\right| \leqslant \frac{\theta||f||_\infty||w||_\infty}{x\min\omega}\left(\frac{||\omega||_\infty}{\min\omega}+1\right)}$

(h) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\theta||f||_\infty||w||_\infty}{x\min\omega}\left(\frac{||\omega||_\infty}{\min\omega}+1\right) = 0$
le résultat de la question 2.g implique $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|(\mathrm{A}_\omega(f)-\mathrm{A}_\omega(f)\circ\lfloor\cdot\rfloor_\theta)(x)\right| = 0$
D'après la question 2.e, pour $x>\theta$, $\mathrm{A}_\omega(f)(\lfloor x\rfloor_\theta) = \mathrm{A}_\omega(f)(\theta)$.
Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{A}_\omega(f)(x) = \mathrm{A}_\omega(f)(\theta)}$

DS 2 Barème

Exercice 1 : Séries numériques

Compétences	NA	MA	A	Points
1. (a) Ch Ca Développement limité et critère de Riemann				/2
1. (b) Série téléscopique				/1
2. Ca Calculs sur les sommes finies				/2
3. Ch Limites des suites extraites d'indice pairs et impairs				/2

Exercice 2 :

Courbe paramétrée

Compétences	NA	MA	A	Points
1. Ra Domaines de définition, réduction de l'intervalle d'étude d'une courbe paramétrée				/3
2. Ca Variation d'une fonction				/3
3. Tangentes particulières				/1,5
4. Ca Tangentes à une courbe paramétrée avec résolution d'équation				/3
5. Re Tracé				/2

Exercice 3 :

Eléments propres

Compétences	NA	MA	A	Points
1. (a) Valeur propre nulle d'une matrice				/1
1. (b) Déterminant d'un produit				/0.5
2. (a) Vecteur propre				/1
2. (b) Vecteur propre				/0.5
3. Égalité de spectre				/1
4. (a) Factorisation matricielle et déterminant				/1.5
4. (b) Polynôme caractéristique, valeur propre et ordre de multiplicité				/1
5. Ca Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs				/1.5

Exercice 4 : Intégration et réduction

Compétences	NA	MA	A	Points
1. (a) Ca Continuité d'une fonction, taux d'accroissement, prolongement				/3
1. (b) Ra Endomorphisme, majoration d'intégrales				/3
1. (c) Ch Injectivité				/2
1. (d) Ca Vecteur propre, calculs sur des expressions				/3
1. (e) Ca Équation différentielle linéaire d'ordre 1, limite en 0				/3
1. (f) Co Sous-espaces propres				/3
2. (a) Ch Ca Relation de Chasles, majorations, intégrale d'une fonction périodique				/2
2. (b) Bornes d'une fonction continue sur un segment				/2
2. (c) Écriture d'un rationnel				/1
2. (d) Re Fonction partie entière				/1
2. (e) Ca Relation de Chasles, partie entière, intégrale d'une fonction périodique				/3
2. (f) Ca Fonction partie entière, inégalité triangulaire				/1
2. (g) Ch Ca Relation de Chasles, majorations d'intégrales, inégalité triangulaire				/5
2. (h) Bilan des questions précédentes				/2

DS 3 22 Novembre 2014 - PC

L'usage d'une calculatrice est interdit. Vous êtes invités à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. *Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.*

Exercice 1 : On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3).
   Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2.
6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

Exercice 2 : Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs : A_0, A_1, $A_2, \dots, A_n, \dots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu.
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite.
- Pour tout $k \geq 1$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec une probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N duels consécutifs lors du tournoi.

Pour tout entier n, on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

1. **Étude d'un cas particulier**

   On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

   (a) Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$ et vérifier que

   $$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1)$$

   (b) En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n, démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a :

   $$P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2})$$

(c) En déduire une expression explicite de $P(E_n)$ pour tout entier $n \geq 3$ et montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0$.

(d) Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$?

Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

2. **Étude du cas général**

On revient au cas général : p désigne un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3.

(a) Pour tout entier $k \in \{1,\dots,N-1\}$, on note $E(n,k)$ l'événement « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n et le vainqueur du duel numéro n a obtenu exactement k victoires ». Montrer que $P(E(n,k)) = pq^{k-1}P(E_{n-k})$.

(b) Établir, pour $n \geq N$, l'égalité :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k})$$

(c) Calculer $P(E_1),\dots,\ P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}$$

(d) Soit $n \geq N$, démontrer la relation :

$$P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1})$$

(e) On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1$$

Montrer que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

On note r_N cette solution pour la suite du problème. Justifier que $r_N > 1$.

(f) Démontrer que $\forall\ n \geq 1$, $P(E_n) \leq \left(\dfrac{1}{r_N}\right)^{n-N}$.

(g) Établir la convergence de la série $\sum P(E_n)$ et calculer sa somme.

Exercice 3 : Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel des suites réelles.
On pourra noter une suite $u \in E$ sous la forme $u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ ou sous la forme $u = (u_n)_n$.

Partie A

Soit $\mathscr{S} = \{u \in E /\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 2a\}$, c'est à dire le sous-espace vectoriel de E constitué des suites réelles u pour lesquelles **il existe une constante réelle** a telle que pout tout entier naturel n, $u_{n+2} + u_n = 2a$.

1. (a) On prend $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$. Vérifier que $u \notin \mathscr{S}$.

(b) On prend $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t.

Vérifier que $u \in \mathscr{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

(c) Montrer que les suites constantes appartiennent à $\mathscr{S}$.

2. Montrer que tout élément $u \in \mathscr{S}$ vérifie : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = u_n$.

3. On considère les suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ de $\mathscr{S}$ qui sont telles que :

$$\begin{cases} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0 &= 0 \\ \beta_1 &= 1 \\ \beta_2 &= 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \gamma_0 &= 0 \\ \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= 1 \end{cases}$$

   Expliquer pourquoi les trois premiers termes de ces suites suffisent à les définir complètement et exprimer α_n, β_n et γ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. **Question pour les 7/2 :** Montrer que $\mathscr{C} = (\alpha, \beta, \gamma)$ est une base de $\mathscr{S}$,
   (les autres étudiants admettront ce résultat pour la suite).

5. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{T}_k \,:\, u \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{T}_k(u) = w$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{kn}$.
   (a) Vérifier que T_k est un endomorphisme de E.
   (b) Le sous-espace $\mathscr{S}$ est-il stable par T_2 ?
   (c) Montrer que le sous-espace $\mathscr{S}$ est stable par T_3.
   (d) Montrer que, dans la base $\mathscr{C}$ construite aux questions 3 et 4, la matrice de l'endomorphisme t_3 induit par T_3 sur $\mathscr{S}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (e) L'endomorphisme t_3 de $\mathscr{S}$ est-il diagonalisable ?
   (f) Reconnaître alors la nature géométrique de t_3.

Partie B

Soient $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ fixé et l'espace vectoriel $\mathscr{S}_p = \{u \in \mathrm{E}/\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + u_n = 2a\}$.

1. Soit $\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice F.
   (b) Déterminer les valeurs propres de F.
   (c) F est-elle inversible ?
   (d) F est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{C})$? Dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$?

   Les questions suivantes seront en bonus dans le barème 3/2-5/2

2. Prouver que l'application δ définie par $\forall u \in \mathscr{S}_p,\ \delta(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, a) \in \mathbb{R}^{p+1}$ où $a = \dfrac{u_0 + u_p}{2}$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_p$?
   On note $\mathscr{C}_p$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ par δ.

3. Soit ψ l'application définie par

$$\psi \,:\, u \in \mathscr{S}_p \mapsto \psi(u) = t \ \text{ telle que } \ \forall n \in \mathbb{N},\ t_n = u_{n+1}$$

   (a) Vérifier que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{S}_p$.
   (b) Sans nouveau calcul, préciser $\psi^{2p} = \psi \circ \cdots \circ \psi$, composée $2p$ fois de l'application ψ.
   (c) Ecrire la matrice de ψ dans la base $\mathscr{C}_p$ de $\mathscr{S}_p$.
   (d) ψ est-il diagonalisable ?
   (e) Prouver que ψ est bijective et déterminer son inverse ψ^{-1}.

Correction

Exercice 1 : *D'après un énoncé de CCP PC 2010*

1. Calculons le polynôme caractéristique de A (donc aussi de f) :

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-8 & -4 & 7 \\ 8 & X+4 & -8 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-4).$$

Ainsi, χ_f est scindé à racines simples, donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.

2. L'étude des sous-espaces propres donne :
$E_0(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $\boxed{v_1 = (1,-2,0)}$, $E_1(f) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $\boxed{v_2 = (1,0,1)}$, $E_4(f) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $\boxed{v_3 = (1,-1,0)}$. Dans ce cas, la matrice D est donnée par : $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$.

3. La formule de changement de base donne : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, et donc par une récurrence simple on obtient $\boxed{A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}}$ pour tout $m \geq 1$.

4. En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Après calculs, on trouve que la matrice de f^m dans la base canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4^m & 4^m & 1-2\cdot 4^m \\ -2\cdot 4^m & -4^m & 2\cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on vérifie que cela redonne A pour $m = 1$.

5. Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ une matrice qui commute avec D. On écrit que MD = DM, ce qui donne 9 équations à 9 inconnues qui impliquent $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Donc nécessairement, M est une matrice diagonale. Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D qui est elle-même diagonale.
Finalement, $\boxed{\text{les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales}}$.

6. On a $HD = DH = H^3$, donc $\boxed{\text{H et D commutent}}$.

7. D'après les questions 5. et 6. si $H^2 = D$, alors H est une matrice diagonale. La condition $H^2 = D$ donne 4 solutions de la forme : $\boxed{H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}}$
Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par $P \cdot H \cdot P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\boxed{\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 : *D'après un énoncé du concours commun ECRICOME ECS 2014 (classe préparatoire économique et commerciale, option scientifique)*

1. (a) Étant donné que N = 3, on a $\boxed{P(E_1) = P(E_2) = 1}$. Pour calculer $P(E_3)$, on peut considérer son événement contraire :

$$\begin{aligned} \overline{E_3} &= \text{« le jeu gagnant du tournoi est désigné à l'issue du duel numéro 3 »} \\ &= \text{« } A_0 \text{ ou } A_1 \text{ a gagné les trois premiers duels »} \\ &= \text{« } A_2 \text{ a perdu le duel numéro 2 »} \bigcap \text{« } A_3 \text{ a perdu le duel numéro 3 »} \end{aligned}$$

Les résultats des duels étant indépendants les uns des autres, on a donc :

$$P(\overline{E_3}) = P(\text{« } A_2 \text{ a perdu le duel numéro 2 »}) \times P(\text{« } A_3 \text{ a perdu le duel numéro 3 »}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

soit $\boxed{P(E_3) = \frac{3}{4}}$. On a donc bien $\boxed{P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1)}$.

(b) Pour $n \geq 3$, l'événement E_n est réalisé si aucun joueur n'a gagné trois fois de suite à l'issue du duel numéro n. On a donc :

$$\begin{aligned} E_n &= E_{n-1} \bigcap \big(\text{« } A_n \text{ gagne le duel numéro } n \text{ »} \\ &\quad \bigcup \text{« } A_n \text{ perd le duel numéro } n \text{ et ne joue pas contre } A_{n-2} \text{ »}\big) \\ &= \big(E_{n-1} \bigcap \text{« } A_n \text{ gagne le duel numéro } n \text{ »}\big) \\ &\quad \bigcup \big(E_{n-2} \bigcap \text{« } A_n \text{ perd le duel numéro } n \text{ et } A_{n-1} \text{ gagne le duel numéro } n-1 \text{ »}\big) \end{aligned}$$

Les événements considérés étant incompatibles, on a :

$$\begin{aligned} P(E_n) &= P\big(E_{n-1} \bigcap \text{« } A_n \text{ gagne le duel numéro } n \text{ »}\big) \\ &\quad + P\big(E_{n-2} \bigcap \text{« } A_n \text{ perd le duel numéro } n \text{ et } A_{n-1} \text{ gagne le duel numéro } n-1 \text{ »}\big) \\ &= P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}\big(\text{« } A_n \text{ gagne le duel numéro } n \text{ »}\big) \\ &\quad + P(E_{n-2})P_{E_{n-2}}\big(\text{« } A_n \text{ perd le duel numéro } n \text{ »} \bigcap \text{« } A_{n-1} \text{ gagne le duel numéro } n-1 \text{ »}\big) \\ P(E_n) &= \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}) \end{aligned}$$

(c) La suite $(P(E_n))_n$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Pour déterminer son expression explicite, il faut résoudre l'équation caractéristique correspondante : $R^2 - \frac{1}{2}R - \frac{1}{4} = 0$ qui admet deux solutions réelles distinctes : $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui sont des réels strictement compris entre -1 et 1. Il existe donc λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Le fait que $P(E_1) = P(E_2) = 1$ entraîne que $\lambda = \frac{r_2 - 1}{r_1(r_2 - r_1)}$ et $\mu = \frac{r_1 - 1}{r_2(r_1 - r_2)}$. On a donc, pour tout $n \geq 1$: $\boxed{P(E_n) = \frac{1}{r_2 - r_1}\left((r_2-1)r_1^{n-1} - (r_1-1)r_2^{n-1}\right)}$, avec $\boxed{r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Et comme r_1 et $r_2 \in]-1;1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} r_1^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} r_2^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0}$.

(d) Pour $n \geq 1$, on a $E_{n+1} \subset E_n$ donc par le théorème de continuité décroissante,

$P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n)$, soit $\boxed{P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right) = 0}$. L'événement « le tournoi désigne un vainqueur » est l'événement contraire de $\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n$ donc la probabilité que le tournoi désigne un joueur est égale à 1.

2. (a) Par définition, $E(n,k) = E_{n-k} \cap \left(\bigcap_{i=n-k+1}^{n} \text{« } A_{n-k+1} \text{ a gagné le duel numéro } i \text{ »}\right)$ donc

$$P(E(n,k)) = P(E_{n-k}) \times P_{E_{n-k}}\left(\bigcap_{i=n-k+1}^{n} \text{« } A_{n-k+1} \text{ a gagné le duel numéro } i \text{ »}\right)$$

Or $P_{E_{n-k}}\big(\text{« } A_{n-k+1} \text{ a gagné le duel numéro } n-k+1 \text{ »}\big) = p$ et pour $n-k+1 < i \leq n$, la probabilité que A_{n-k+1} gagne le duel numéro i sachant qu'il a gagné les précédents est égale à q, ainsi, par la formule des probabilités composées, on obtient $\boxed{P(E(n,k)) = pq^{k-1}P(E_{n-k})}$.

(b) Pour $n \geq \mathrm{N}$, on a : $\mathrm{E}_n = \bigcup_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{E}(n,k)$ et ces événements sont incompatibles. Donc $\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{P}(\mathrm{E}(n,k))$ et donc d'après la question précédente, on a : $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1}\mathrm{P}(\mathrm{E}_{n-k})}$.

(c) Pour tout $1 \leq k \leq \mathrm{N}-1$, $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_k) = 1}$ donc, d'après la formule de la question précédente pour $n = \mathrm{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{E}_\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1} = (1-q)\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} q^{k-1}$, soit $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_\mathrm{N}) = 1 - q^{\mathrm{N}-1}}$.

(d) Pour $n \geq \mathrm{N}$, $\mathrm{E}_n \setminus \mathrm{E}_{n+1}$ est l'événement « le jeu s'arrête à l'issue du duel $n+1$ ». Donc, par le même raisonnement que celui de la question 2.(a) :

$$\mathrm{E}_n \setminus \mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{E}_{n-\mathrm{N}+1} \cap \left(\bigcap_{i=n-\mathrm{N}+2}^{n+1} \text{« } \mathrm{A}_{n-\mathrm{N}+2} \text{ a gagné le duel numéro } i \text{ »} \right)$$

et donc $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) - \mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+1}) = pq^{\mathrm{N}-1}\mathrm{P}(\mathrm{E}_{n-\mathrm{N}+1})}$.

(e) Étudions la fonction associée au polynôme Q :

$$x \in [0;+\infty[\longmapsto \mathrm{Q}(x) = \left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1}x^k\right) - 1$$

Q est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0;+\infty[$ telle que pour tout $x > 0$, $\mathrm{Q}'(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1}x^{k-1} > 0$ donc Q est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Or $\mathrm{Q}(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Q}(x) = +\infty$ donc Q est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$. Donc $\boxed{\text{l'équation } \mathrm{Q}(x) = 0 \text{ possède une unique solution sur l'intervalle } [0;+\infty[}$. De plus, comme $\mathrm{Q}(1) = \left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1}\right) - 1 = -q^{\mathrm{N}-1} < 0$, cette unique solution, notée r_N vérifie $\boxed{r_\mathrm{N} > 1}$.

(f) Pour $1 \leq n \leq \mathrm{N}-1$, on a $\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) = 1 \leq \left(\frac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}}$ car $r_\mathrm{N} > 1$.

Montrons alors par une récurrence forte que pour tout $n \geq \mathrm{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) \leq \left(\frac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}}$.

- Initialisation : pour $n = \mathrm{N}$, comme $\left(\frac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}} = 1$, on a bien $\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) \leq \left(\frac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}}$.
- Hérédité : soit $n \geq \mathrm{N}$ tel que pour tout $\mathrm{N} \leq k < n$, $\mathrm{P}(\mathrm{E}_k) \leq \left(\frac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{k-\mathrm{N}}$, alors comme c'est aussi le cas pour $1 \leq k \leq \mathrm{N}-1$ d'après la première remarque, on peut supposer que $\mathrm{P}(\mathrm{E}_k) \leq \left(\frac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{k-\mathrm{N}}$ pour tout $1 \leq k < n$.
  Ainsi, d'après la question 2.(b) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{E}_n) &= \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1}\mathrm{P}(\mathrm{E}_{n-k}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1}\left(\frac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{n-k-\mathrm{N}} \\
&= \frac{1}{r_\mathrm{N}^{n-\mathrm{N}}}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} pq^{k-1}r_\mathrm{N}^k\right) \\
&= \frac{1}{r_\mathrm{N}^{n-\mathrm{N}}}(\mathrm{Q}(r_\mathrm{N}) + 1) \\
&= \frac{1}{r_\mathrm{N}^{n-\mathrm{N}}} \qquad \text{car } \mathrm{Q}(r_\mathrm{N}) = 0
\end{aligned}$$

- On conclut donc par le principe de récurrence que $\boxed{\forall\ n \geq 1, \mathrm{P}(\mathrm{E}_n) \leq \left(\dfrac{1}{r_\mathrm{N}}\right)^{n-\mathrm{N}}}$.

(g) La série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{E}_n)$ est à termes positifs et son terme général est majoré par le terme d'une série géométrique convergente car $0 < \dfrac{1}{r_\mathrm{N}} < 1$. La série $\boxed{\sum \mathrm{P}(\mathrm{E}_n) \text{ est donc convergente}}$.
De plus, pour $n \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(\mathrm{E}_k) = \sum_{k=\mathrm{N}}^{n+\mathrm{N}} \mathrm{P}(\mathrm{E}_{k-\mathrm{N}+1}) = \frac{1}{pq^{\mathrm{N}-1}} \sum_{k=\mathrm{N}}^{n+\mathrm{N}} (\mathrm{P}(\mathrm{E}_k) - \mathrm{P}(\mathrm{E}_{k+1}))$$

d'après la question 2.(d). On reconnaît une série télescopique, ce qui permet d'affirmer que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(\mathrm{E}_k) = \frac{1}{pq^{\mathrm{N}-1}} (\mathrm{P}(\mathrm{E}_\mathrm{N}) - \mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+\mathrm{N}+1}))$$

La série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{E}_n)$ étant convergente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{E}_{n+\mathrm{N}+1}) = 0$ et donc $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{E}_k) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{E}_\mathrm{N})}{pq^{\mathrm{N}-1}} = \dfrac{1-q^\mathrm{N}}{pq^{\mathrm{N}-1}}}$ d'après la question 2.(c).

Exercice 3 : *D'après un énoncé E3A PSI 2012*

Partie A

1. (a) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$, alors $u_{n+2} + u_n = 2(-1)^n$ n'est pas constante donc $\boxed{(u_n)_n \notin \mathscr{S}}$.
   (b) On a ici $u_{4n} = u_{4n+1} = 1$ et $u_{4n+2} = u_{4n+3} = -1$ pour tout n. On en déduit que $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout n (par exemple en distinguant suivant la congruence modulo 4 de n). On a donc $\boxed{(u_n)_n \in \mathscr{S} \text{ avec } a = 0}$.
   (c) Si $(u_n)_n$ est constante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} + u_n = 2u_0$. Donc $\boxed{(u_n)_n \in \mathscr{S} \text{ avec } a = u_0}$.
2. Si $(u_n)_n \in \mathscr{S}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+4} = 2a - u_{n+2} = 2a - (2a - u_n)$, soit $\boxed{u_{n+4} = u_n}$
   (on dit que les suites de $\mathscr{S}$ sont 4-périodiques).
3. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ de $\mathscr{S}$ est entièrement décrite par ses trois premiers termes revient à montrer que l'application linéaire $\varphi\ :\ u \in \mathscr{S}\ \mapsto\ \varphi(u) = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
   - φ est injective : si u et $v \in \mathscr{S}$ sont telles que

$$\begin{cases} u_0 = v_0 \\ u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

   alors comme u et $v \in \mathscr{S}$, il existe a et $a' \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = 2a$ et $v_{n+2} + v_n = 2a'$. Mais alors, comme $u_2 + u_0 = v_2 + v_0$, nécessairement $a = a'$. Ainsi, par une récurrence forte laissée à votre soin, en utilisant que pour tout $n \geq 3$, $u_n = 2a - u_{n-2}$ et $v_n = 2a - v_{n-2}$, on peut montrer que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - φ est surjective : à partir de $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$, on construit une suite u de $\mathscr{S}$ qui vérifie $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$ en posant, pour $n \geq 3$: $u_n = u_0 + u_2 - u_{n-2}$.

   $\boxed{\text{Les trois suites } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \in \mathscr{S} \text{ sont donc entièrement définies par leurs trois premiers termes}}$ et on montre facilement, en utilisant la question 2 qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \alpha_{4n} = 1 \\ \alpha_{4n+1} = 0 \\ \alpha_{4n+2} = 0 \\ \alpha_{4n+3} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_{4n} = 0 \\ \beta_{4n+1} = 1 \\ \beta_{4n+2} = 0 \\ \beta_{4n+3} = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma_{4n} = 0 \\ \gamma_{4n+1} = 0 \\ \gamma_{4n+2} = 1 \\ \gamma_{4n+3} = 1 \end{cases}$$

Cette démonstration générale va servir dans la question bonus qui suit, il existe une démonstration plus directe qui consistait à construire le quatrième terme de chaque suite grâce à la relation de récurrence et d'étendre à tous les entiers à l'aide de la 4-périodicité (question 2).

4. On sait d'après la démonstration faite à la question précédente que $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{S} = 3$, il suffit donc de montrer que la famille (α,β,γ) est libre. Considérons alors trois réels λ, μ et δ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda\alpha_n + \mu\beta_n + \delta\gamma_n = 0$, en évaluant cette égalité en $n = 0$ (respectivement $n = 1$, respectivement $n = 2$) on obtient $\lambda = 0$ (respectivement $\mu = 0$, respectivement $\delta = 0$). La famille (α,β,γ) est donc libre et comme elle est de cardinal la dimension de $\mathscr{S}$, $\boxed{(\alpha,\beta,\gamma) \text{ est une base de } \mathscr{S}}$.

5. (a) La linéarité de T_k est immédiate ($(u+\lambda v)_{kn} = u_{kn} + \lambda v_{kn}$ est vrai pour tout n) et comme par définition $T_k(u) \in E$, $\boxed{T_k \text{ est un endomorphisme de } E}$.

   (b) $w = T_2(\alpha) = (1,0,1,0,\dots)$ n'est pas dans $\mathscr{S}$ ($w_0 + w_2 = 2 \neq w_1 + w_3 = 0$). $\boxed{\mathscr{S} \text{ n'est donc pas stable par } T_2}$.

   (c) Par contre, si $u \in \mathscr{S}$, et $w = T_3(u)$, on a $w_{n+2} + w_n = u_{3n+6} + u_{3n} = u_{3n+2} + u_{3n}$ par 4-périodicité (Q2). Donc $\forall n \in \mathbb{N},\quad w_{n+2} + w_n = u_{3n+2} + u_{3n} = 2a$ avec la même constante : $\boxed{\text{si } u \in \mathscr{S} \text{ alors } w = T_3(u) \in \mathscr{S}}$

   (d) Ainsi la restriction t_3 de T_3 à $\mathscr{S}$ est un endomorphisme de $\mathscr{S}$. Toutes les suites étudiées sont 4-périodiques, il suffit donc d'identifier les relations entre les 4 premiers termes :

$$\left\{\begin{array}{l} t_3(\alpha) = (1,1,0,0,\dots) = \alpha + \beta \\ t_3(\beta) = (0,-1,0,1,\dots) = -\beta \\ \text{et } t_3(\gamma) = (0,1,1,0,\dots) = \beta + \gamma \end{array}\right.$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ représente } t_3 \text{ dans la base } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ de } \mathscr{S}}$

   (e) Le polynôme caractéristique de t_3 vaut $\chi_M = (X-1)^2(X+1)$ et $\mathrm{Sp}(t_3) = \mathrm{Sp}(M) = \{1,-1\}$. Or $E_1(M) = \mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de dimension 2 car la matrice $M - I_3$ ayant deux lignes nulles est clairement de rang 1. On a donc, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\dim_{\mathbb{R}} E_\lambda(M) = m_\lambda$ (l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique). La matrice M, et donc l'endomorphisme t_3, sont par conséquent diagonalisables.

   (f) L'endomorphisme t_3 étant diagonalisable avec pour seules valeurs propres 1 et -1, on en déduit que c'est une symétrie par rapport au sous-espace propre $E_1(t_3)$ dans la direction de $E_{-1}(t_3)$.

Partie B

1. (a) Le polynôme caractéristique de F est défini par $\chi_F(X) = \mathrm{Det}(XI_{p+1} - F)$:

$$\chi_F(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & X & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & X & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & X & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}$$

par développement selon la dernière ligne. On développe le dernier déterminant par rapport à sa première colonne afin d'obtenir des déterminants de matrices triangulaires, ce qui donne :

$$\boxed{\chi_F(X) = (X-1)\left[X^p + (-1)^{p+1}(-1)^{p-1}\right] = (X-1)(X^p+1)}$$

(b) Les racines de χ_F donnent : $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}\text{, si } p \text{ est pair et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1,-1\} \text{ si } p \text{ impair.}}$

Les racines de χ_F dans $\mathbb{C}$: $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(F) = \left\{1, e^{\frac{i\pi}{p}(2k+1)},\ 0 \le k \le p-1\right\}}$ (on retrouve les racines $p^{\text{ièmes}}$ de -1).

(c) $0 \notin \mathrm{Sp}(F)$ donc F est inversible.

(d) χ_F n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ donc F n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, par contre, χ_F est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc F est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. L'application δ est bien définie sur $\mathscr{S}_p$ car $u_0 + u_p = 2a$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{p+1}$. De plus, il est facile de vérifier qu'elle est linéaire.
   - δ est injective, car si $\delta(u) = \delta(v)$ alors $\boxed{\forall i, 0 \leqslant i \leqslant p-1,\ u_i = v_i}$ et $a = a'$ (les constantes associées respectivement à u et v dans la définition d'une suite de $\mathscr{S}_p$) donc $\boxed{\forall i,\ p \leqslant i \leqslant 2p-1,\ u_i = 2a - u_{i-p} = 2a' - v_{i-p} = v_i}$ donc les deux suites u et v coïncident pour $0 \leqslant i \leqslant 2p-1$, or elles sont $2p$-périodiques (même démonstration qu'à la question A.2), donc $u = v$.
   - δ est surjective, car si on se donne $(a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, a)$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$, on peut définir une suite u de $\mathscr{S}_p$, avec les formules que l'on vient d'utiliser :

$$\begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant p-1, & u_i = a_i \\ p \leqslant i \leqslant 2p-1, & u_i = 2a - a_{i-p} \\ u \text{ est } 2p\text{-périodique.} \end{cases}$$

   telle que $\delta(u) = (a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, a)$.

$\boxed{\delta \text{ est donc un isomorphisme}}$ ce qui implique que $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{S}_p) = \dim \mathbb{R}^{p+1} = p+1}$.

3. (a) L'application ψ est l'opérateur sur les suites appelé décalage de Bernoulli.
ψ est linéaire de E dans E (clair) et si $u \in \mathscr{S}_p$ et $t = \psi(u)$, alors :
$\forall n \in \mathbb{N},\quad t_{n+p} + t_n = u_{n+p+1} + u_{n+1} = 2a$ donc il existe a tel que $t \in \mathscr{S}_p$. $\boxed{\text{Donc } \psi \in \mathscr{L}(\mathscr{S}_p)}$

(b) u de $\mathscr{S}_p$ est $2p$-périodique, et si $t = \psi^{2p}(u)$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad t_n = u_{n+2p} = u_n$ donc $\boxed{\psi^{2p} = \mathrm{id}_E}$

(c) Soient $(I_1, I_2, \cdots, I_p, I_{p+1})$ les vecteurs de la base $\mathscr{C}_p$, on a $\delta(I_k) = e_k$ de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$. Donc les p premiers I_k sont des suites de $\mathscr{S}_p$ où $a = 0$ et I_{p+1} est une suite de $\mathscr{S}_p$ où $a = 1$. Elles sont $2p$-périodiques. Précisons leurs $2p$ premiers termes :

$$\left\{\begin{array}{lllllllllll} & u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{p-1} & u_p & u_{p+1} & u_{p+2} & \cdots & u_{2p-1} \\ I_1 : & 1, & 0, & 0, & \cdots & 0, & -1, & 0, & 0, & \cdots & 0, \\ I_2 : & 0, & 1, & 0, & \cdots & 0, & 0, & -1, & 0, & \cdots & 0, \\ I_3 : & 0, & 0, & 1, & \cdots & 0, & 0, & 0, & -1, & \cdots & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \cdots & \vdots \\ I_p : & 0, & 0, & \cdots & \cdots & 1, & 0, & 0, & & \cdots & -1, \\ I_{p+1} : & 0, & 0, & \cdots & \cdots & 0, & 2, & 2, & 2, & \cdots & 2, \end{array}\right.$$

et $\begin{cases} \psi(I_1) = -I_p \\ \psi(I_2) = I_1 \\ \psi(I_3) = I_2 \\ \quad\vdots \\ \psi(I_p) = I_{p-1} \\ \psi(I_{p+1}) = 2I_p + I_{p+1} \end{cases}$ $\boxed{\text{la matrice de } \psi \text{ dans la base } \mathscr{C}_p \text{ est donc F}}$

(d) $\boxed{\psi \text{ n'est donc pas diagonalisable dans } \mathscr{S}_p}$, puisque F n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(e) On a vu à la question B.1.c que F est inversible donc ψ **bijective** et d'ailleurs $\boxed{\psi^{-1} = \psi^{2p-1}}$ avec $\psi^{2p} = \mathrm{id}_E$. Ainsi si $t = \psi^{-1}(u)$ on a $t_0 = u_{2p-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad t_n = u_{n-1}$.

DS 3 Barème

Exercice 1 : Réduction et équation matricielle

Compétences	NA	MA	A	Points
1. Ca polynôme caractéristique, endomorphisme diagonalisable				/2
2. Ca diagonalisation d'une matrice				/4
3. formule du changement de base et puissance d'une matrice				/1
4. Ca inverse d'une matrice, produit matriciel				/2
5. Ch commutant d'une matrice diagonale				/2
6. Ra commutativité de matrices				/1
7. Co conclusion				/2

Exercice 2 : Espace probabilisé dénombrable

Compétences	NA	MA	A	Points
1. (a) Ca calcul de probabilités, indépendance d'événements				/2
1. (b) Ra probabilités conditionnelles				/2
1. (c) Ca suite récurrente linéaire d'ordre 2, limite d'une suite géométrique				/3
1. (d) continuité décroissante, événement contraire				/1,5
2. (a) Ca probabilités composées				/2
2. (b) Ca probabilité d'événements incompatibles				/1
2. (c) Ca calculs de probabilités, somme des premiers termes d'une suite géométrique				/2
2. (d) probabilité d'une différence d'événements, probabilités conditionnelles				/2
2. (e) Ra étude de fonction, bijection				/2
2. (f) Ch disjonction de cas, récurrence forte				/3
2. (g) critère de Riemann, calcul de somme, série téléscopique				/3

Exercice 3 : Suites récurrentes et réduction

Compétences	NA	MA	A	Points
A 1. (a) Ca vérification condition				/0.5
1. (b) Ca vérification condition et détermination de a				/1
1. (c) Ca vérification condition				/1
2. Ra transformations d'égalités				/1
3. Ra Ca termes de suites				/3
4. **7/2 :** Ra base d'un sous-espace vectoriel				/3
5. (a) endomorphisme				/1
5. (b) Ra sous-espace stable				/1
5. (c) Ra sous-espace stable				/1
5. (d) Ca matrice d'un endomorphisme dans une base				/4
5. (e) Ra polynôme caractéristique, sous-espace propre, diagonalisabilité				/3
5. (f) Ch Co diagonalisation d'une symétrie				/2
B 1. (a) Ca polynôme caractéristique d'une matrice de taille n				/2
1. (b) Ca spectre réel et complexe, racines $p^{\text{ièmes}}$ de -1				/3
1. (c) matrice inversible et valeurs propres				/0,5
1. (d) matrice diagonalisable				/2
2. **7/2 :** isomorphisme et dimension				/4
3. (a) **7/2 :** endomorphisme				/1,5
3. (b) **7/2 :** Ca puissance d'endomorphisme				/1
3. (c) **7/2 :** Ca matrice d'un endomorphisme dans une base				/3
3. (d) **7/2 :** endomorphisme diagonalisable				/0,5
3. (e) **7/2 :** Ra matrice inversible isomorphisme, calcul d'inverse				/2

DS 4 17 Janvier 2015 - PC

L'usage d'une calculatrice est interdit. Vous êtes invités à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. *Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.*

Exercice 1 :

Notations. Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\mathrm{d}t$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.
Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\mathrm{d}t$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

Objectifs. L'objet de ce problème est d'étudier l'existence de J_m. La partie I est consacrée à l'étude de la fonction φ pour obtenir un résultat qui concerne J_1. L'étude de l'existence de J_m fait partie de la partie II.

Partie I - Étude de la fonction φ.

1. **Une question préliminaire.**
   Montrer que, pour tout nombre réel t strictement positif, on a l'inégalité : $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.
2. **Existence de la fonction φ sur $[0, +\infty[$.**
   (a) Établir la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.
3. **Limite de la fonction φ en $+\infty$.**
   (a) Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, pour $0 \leq x_1 \leq x_2$.
   En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.
   (b) Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser la question 1.).

Partie II - Étude de l'existence de J_m.

1. **Étude de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\mathrm{d}t$.**
   Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel non nul m.
2. **Étude de J_1.**
   Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1-\cos)' = \sin$).
   Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t}\mathrm{d}t$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale. **On admet par la suite que I_k converge si et seulement si $k \neq 0$.**
3. **Étude de la nature de J_m.**
   Pour tout x appartenant à $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et tout entier relatif k, on note : $\mathrm{I}_k(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{e^{ikt}}{t}\mathrm{d}t$.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{(\sin t)^m}{t}\mathrm{d}t$ à l'aide des intégrales $\mathrm{I}_k(x)$.

(b) En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p.

(c) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t}\mathrm{d}t$ pour p entier naturel non nul ?

Exercice 2 :

Notations. Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x|y)$ et $||x||$.
$\mathscr{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.
Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si, et seulement si, il est symétrique.

Objectifs. L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

Partie I

1. Soit x et y deux vecteurs de E, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathscr{B}$.
   Montrer que $(x|y) = {}^tXY = {}^tYX$.
2. Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$.
   Soit $(e_1, e_2, ..., e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.
   (a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_k)$.
   (b) Soit $\mathscr{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathscr{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur de $z \in F$, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, E_i la matrice de e_i.
      i. Montrer que pour tout $z \in F$, $\quad M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i\, {}^tE_i Z$.
      ii. En déduire $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i\, {}^tE_i$.
   (c) Montrer que pour tout $z \in F$, $||p(z)|| \leqslant ||z||$.
3. **Exemple :** On note M la matrice définie par $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur.
4. Soit K un second sous-espace vectoriel de F, q le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ q$ et u un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que u est élément de H et que $q(u) - \lambda u$ est élément de $H^\perp$.
   (b) Établir l'égalité : $\lambda ||u||^2 = ||q(u)||^2$.
   (c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans le segment $[0, 1]$.

5. **On suppose dans cette question que p et q commutent.**
   (a) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.
   (b) Dans le cas où $p \circ q$ est non nul, déterminer son spectre.
   (c) Montrer que :
   $$\mathrm{Ker}\,(p \circ q) = \mathrm{Ker}\,(p) + \mathrm{Ker}\,(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$$
6. On pose $m = \dim \mathrm{F}$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et q dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :
   $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m - k$.
   (a) Montrer que les matrices vérifient les relations :
   $\mathrm{A}^2 + \mathrm{BC} = \mathrm{A}, \quad \mathrm{AB} + \mathrm{BD} = \mathrm{B}, \quad \mathrm{CB} + \mathrm{D}^2 = \mathrm{D}, \quad {}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}, \quad {}^t\mathrm{B} = \mathrm{C}, \quad {}^t\mathrm{D} = \mathrm{D}.$
   (b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
      (i) Le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $\{0, 1\}$.
      (ii) ${}^t\mathrm{CC} = 0$.
      (iii) $\mathrm{C} = 0$.
      (iv) p et q commutent.

Partie II

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

1. (a) Soit y un élément de F. Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :
   $$y = f(x) + y', (x, y') \in (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} \times (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$$
   (b) Montrer qu'un tel couple est unique.
   On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x.
   (c) Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo inverse* de f.
2. Déterminer le noyau et l'image de g.
3. (a) Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$.
   (b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}\, f$.
4. **Premier exemple :** On prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3, \mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel.
   La matrice de f relativement aux bases canoniques est :
   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.
5. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et que f est un endomorphisme symétrique.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\, f = (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$.
   (b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (On pourra discuter suivant que la valeur propre associée est nulle ou non).
   (c) En déduire que g est aussi un endomorphisme symétrique de E.
6. **Deuxième exemple :** On prend $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
   La matrice de f relativement à la base canonique est :
   $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique.

Exercice 3 :

Partie III - Facultative

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathscr{L}(E,F)$ et un élément v de F.

1. En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :
$$||f(x_0)-v|| = \min_{x\in E} ||f(x)-v||$$
Dans la suite x_0 sera appelée une pseudo-solution de l'équation :
$$f(x) = v \tag{1}$$
2. Montrer que si f est injective, alors l'équation (1) admet une pseudo-solution unique.
3. Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, pour tout x appartenant à E : $(f(x)|f(x_0)-v) = 0$.
4. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, V la matrice de v dans $\mathscr{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathscr{B}$.
Écrire sous forme matricielle l'équation $(f(x)|f(x_0)-v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation (1) si, et seulement si, :
$${}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\mathrm{X}_0 = {}^t\mathrm{A}\mathrm{V}$$
5. **Exemple :** Dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^5$, les matrices de f et v sont respectivement :
$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.
6. **Application :** n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments
$a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n), c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.
   (a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.
   (b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?
   (c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

Correction

Exercice 1 : *(d'après CCP PSI 2009)*

Partie I.

1. L'inégalité $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \geq 0$ sur $]0,+\infty[$ est claire car $\cos(t) \leq 1$ pour tout nombre réel t. Pour prouver que $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \dfrac{1}{2}$ sur $]0,+\infty[$, on va montrer que la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\delta(t) = 1-\cos(t) - \dfrac{t^2}{2}$ est négative. Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\delta'(t) = \sin t - t \leq 0$ donc δ est décroissante sur $]0,+\infty[$ or $\delta(0) = 0$ donc $\delta(t) \leq 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

   On a donc montré que $\boxed{0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \dfrac{1}{2} \text{ sur }]0,+\infty[}$.

2. (a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, elle est donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$. Ainsi, pour montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, il suffit d'étudier le comportement de f au voisinage de 0 et de $+\infty$. Or :
   - $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction intégrable sur tout segment de la forme $[0,a]$, $a>0$;
   - $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur tout intervalle de la forme $[b,+\infty[$ avec $b>0$, d'après le critère de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

   On a donc montré que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

   (b) Pour tous $t > 0$ et $x \geq 0$, on a : $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt} \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ donc, d'après les relations de comparaison, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ entraîne la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\mathrm{d}t$ pour tout $x \geq 0$, par conséquent $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est définie sur } [0,+\infty[}$.

3. (a) Pour $0 \leq x_1 \leq x_2$, $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\left(e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}\right)\mathrm{d}t$. Or, pour $t>0$ fixé, $x \mapsto e^{-xt}$ est décroissante donc $e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t} \geq 0$, soit $\boxed{\varphi(x_1)-\varphi(x_2) \geq 0 \text{ si } 0 \leq x_1 \leq x_2}$ par positivité de l'intégrale. La fonction φ est donc décroissante et minorée par 0 sur $[0,+\infty[$ et par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\varphi \text{ admet une limite finie en } +\infty}$.

   (b) On sait d'après la question 1 que pour tous $x, t > 0$, on a : $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt} \leq \dfrac{e^{-xt}}{2}$, soit
   $$0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}$$
   ce qui montre, par le théorème des gendarmes que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$.

Partie II.

1. Pour tout entier $m > 0$, la fonction $g_m : t \mapsto \dfrac{(\sin t)^m}{t}$ est continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur tout segment $\left[\alpha;\dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\alpha > 0$. De plus, g_m vérifie : $g_m(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{m-1}$, avec $m-1 > -1$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 en une fonction intégrable sur tout segment $[0,\alpha]$, avec $\alpha > 0$.

   $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\mathrm{d}t \text{ est donc convergente}}$.

2. Pour tous $0 < x < y$, en intégrant par partie les fonctions définies par $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = 1 - \cos(t)$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, y]$, on obtient :

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_x^y + \int_x^y \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1-\cos(y)}{y} = 0$ et, d'après la question II.2.a, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\varphi(0)$. $\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \mathrm{J}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \varphi(0)}$.

Démonstration de la propriété : I_k converge ssi $k \neq 0$ admise par l'énoncé :
$\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente d'après le critère de Riemann avec $\alpha = 1$.

Et pour tous $k \neq 0$ et $x > \dfrac{\pi}{2}$, en intégrant par partie les fonctions définies par $u(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v(t) = \dfrac{e^{ikt}}{ik}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, x\right]$, on obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt}\right]_{\frac{\pi}{2}}^x + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{ikt^2}\mathrm{d}t$$

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ikx}}{ikx} = 0$ et, comme $\dfrac{e^{ikt}}{ikt^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, les intégrales $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{ikt^2}\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{I}_k = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{t}\mathrm{d}t$ sont convergentes. $\boxed{\text{L'intégrale } \mathrm{I}_k \text{ est donc convergente si et seulement si } k \neq 0}$.

3. (a) Pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^m(t) = \frac{\left(e^{it} - e^{-it}\right)^m}{(2i)^m} = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k e^{i(m-2k)t}$$

Par linéarité de l'intégrale, on a donc, pour tout $x \geq \dfrac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\int_{\pi/2}^x \frac{\sin^m(t)}{t}\,dt = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k \mathrm{I}_{m-2k}(x)}$$

(b) Si $m = 2p+1$, on obtient, pour tout $x \geq \dfrac{\pi}{2}$:

$$\int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{i(-1)^p 2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}(-1)^k \mathrm{I}_{2(p-k)+1}(x)$$

avec $2(p-k)+1 \neq 0$ pour tout $0 \leq k \leq 2p+1$ et donc tous les termes de la somme admettent une limite quand $x \to +\infty$ d'après la question II.3. La question II.1 nous permet finalement de conclure que $\boxed{\text{l'intégrale de } \mathrm{J}_{2p+1} \text{ existe}}$.

(c) Pour $m = 2p$, on a cette fois, pour tout $x \geq \dfrac{\pi}{2}$:

$$\int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{(-1)^p 2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k \mathrm{I}_{2(p-k)}(x)$$

Dans le membre de droite, tous les termes de la somme admettent une limite quand $x \to +\infty$ sauf celui pour $k = p$ qui tend vers $+\infty$ d'après la question II.3. On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\, dt = +\infty$$

et donc $\boxed{\text{l'intégrale } J_{2p} \text{ n'existe pour aucun entier } p \geq 1}$.

Exercice 2 : *(d'après CCP PC 2006)*

Partie I

1. On note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ celles de y.

   On a $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

   $\mathscr{B}$ étant une base orthonormale, on a, d'après le cours, $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$.

   Matriciellement, cela se traduit par : $\boxed{(x \mid y) = {}^t XY = {}^t YX}$.

2. (a) $(e_1, \ldots, e_k)$ étant une base orthonormale de H, on a, d'après le cours :

   $\boxed{\forall z \in F,\ p(z) = \sum_{i=1}^{k} (z \mid e_i) e_i}$.

   (b) i. Soit $z \in F$.

   L'égalité $p(z) = \sum_{i=1}^{k} (z \mid e_i) e_i$ se traduit matriciellement par : $M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} \left({}^t E_i Z\right) E_i$.

   Or ${}^t E_i Z$ est un réel donc on a $\left({}^t E_i Z\right) E_i = E_i \left({}^t E_i Z\right)$.

   Or $E_i \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t E_i \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc le produit matriciel $E_i {}^t E_i Z$ est défini et d'après l'associativité du produit matriciel on a : $E_i \left({}^t E_i Z\right) = E_i {}^t E_i Z$.

   Ainsi, $\boxed{\forall z \in F,\ M(p)Z = \sum_{i=1}^{k} E_i {}^t E_i Z}$.

   ii. L'égalité précédente est vraie pour tout $z \in F$. Or la matrice d'une application linéaire relativement à une base donnée est unique donc on en déduit : $\boxed{M(p) = \sum_{i=1}^{k} E_i {}^t E_i}$.

   (c) Soit $z \in F$. On a $z = p(z) + (z - p(z))$ avec $p(z)$ et $z - p(z)$ orthogonaux.

   D'après le théorème de Pythagore, on a $\|z\|^2 = \|p(z)\|^2 + \|z - p(z)\|^2 \geq \|p(z)\|^2$.

   On a donc : $\boxed{\forall z \in F,\ \|p(z)\| \leq \|z\|}$.

3. (a) Si l'on note π l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à M, alors, la base canonique de $\mathbb{R}^4$ étant orthonormale pour le produit scalaire considéré, pour montrer que π est un projecteur orthogonal, il suffit, d'après le cours, de montrer que $M^2 = M = {}^t M$. Ces égalités se vérifiant aisément par un produit matriciel, on en déduit donc que $\boxed{\text{M est la matrice dans la base canonique d'un projecteur orthogonal}}$.

   (b) On trouve une base orthonormale de $\operatorname{Ker} \pi$ en orthonormalisant une base quelconque de ce noyau, on obtient par exemple que $\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0) \text{ et } e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1) \text{ forment une base de } \operatorname{Ker} \pi}$.

De plus, π étant un projecteur orthogonal, on a $\mathrm{Im}(\pi) = (\mathrm{Ker}(\pi))^{\perp}$. On pose alors $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $e_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$. Alors $e_3 \perp e_1$ et $e_3 \perp e_2$ donc $e_3 \in (\mathrm{Ker}(\pi))^{\perp}$. De même, $e_4 \in (\mathrm{Ker}(\pi))^{\perp}$.

Par conséquent, (e_3, e_4) est une famille orthonormale de vecteurs non nuls de $(\mathrm{Ker}(\pi))^{\perp}$ et $(\mathrm{Ker}(\pi))^{\perp}$ est de dimension 2 donc $\boxed{(e_3, e_4) \text{ est une base orthonormale de } (\mathrm{Ker}(\pi))^{\perp} = \mathrm{Im}(\pi)}$.

4. (a) On a $p \circ q(u) = \lambda u$ et $\lambda \neq 0$ donc $u = \dfrac{1}{\lambda} p \circ q(u) = p\left(\dfrac{1}{\lambda} q(u)\right)$ ce qui montre que : $\boxed{u \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{H}}$.
On a donc $p(u) = u$.
On en déduit : $p(q(u) - \lambda u) = p \circ q(u) - \lambda p(u) = \lambda u - \lambda u = 0_{\mathrm{E}}$.
Ainsi, $\boxed{q(u) - \lambda u \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{H}^{\perp}}$.

(b) $u \in \mathrm{H}$ et $q(u) - \lambda u \in \mathrm{H}^{\perp}$ donc $(u \,|\, q(u) - \lambda u) = 0 = (u \,|\, q(u)) - \lambda \|u\|^2$ (1).
Or $q(u) \in \mathrm{K}$ et $u - q(u) \in \mathrm{K}^{\perp}$ donc $(q(u) \,|\, u - q(u)) = 0$. On en déduit $(u \,|\, q(u)) = \|q(u)\|^2$.
En remplaçant dans (1), on obtient $\boxed{\|q(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2}$.

(c) D'après 4. (b), une valeur propre de $p \circ q$ est nécessairement positive.
De plus, d'après 2. (c), on a $\|q(u)\|^2 \leq \|u\|^2$. On en déduit, à l'aide de la question précédente : $\lambda \|u\|^2 \leq \|u\|^2$. Or u est un vecteur propre de $p \circ q$ donc il est non nul. On a donc $\lambda \leq 1$.
Les seules valeurs propres non nulles de $p \circ q$ sont donc dans $]0,1]$.
Ainsi, $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } p \circ q \text{ sont dans } [0,1].}$

5. (a) Il suffit de montrer que $p \circ q$ est un projecteur (c'est-à-dire que $(p \circ q)^2 = p \circ q$) et qu'il est symétrique.
Or : $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2$ car p et q commutent et, comme p et q sont des projecteurs, on a bien $p \circ q$ qui est aussi un projecteur.
Montrons maintenant qu'il est symétrique, sachant que p et q le sont, pour tous x et $y \in \mathrm{F}$:

$$(p \circ q(x) | y) = (q(x) | p(y)) = (x | q \circ p(y)) = (x | p \circ q(y))$$

On a donc bien montré que $\boxed{p \circ q \text{ est un projecteur orthogonal}}$.

(b) Comme $p \circ q$ est un projecteur orthogonal, on sait que $\mathrm{Sp}(p \circ q) \subset \{0,1\}$ or $p \circ q \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{F})}$ donc 1 est valeur propre de $p \circ q$ et, comme $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{H} \neq \mathrm{F}$, $p \circ q \neq \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$ et donc 0 est valeur propre de $p \circ q$. Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(p \circ q) = \{0,1\}}$.

(c) On sait que $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$ et $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}(q \circ p) = \mathrm{Ker}(p \circ q)$ donc on a déjà l'inclusion $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Pour montrer l'inclusion réciproque, considérons $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$. Alors $q(x) \in \mathrm{Ker}\, p$ et comme q est un projecteur, $x - q(x) \in \mathrm{Ker}\, q$ donc $x = q(x) + (x - q(x)) \in \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$. D'où $\boxed{\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}(p \circ q)}$.
De la même manière, on a clairement $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et soit $y \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ alors il existe x et $y \in \mathrm{F}$ tels que $y = p(x) = q(z)$ mais alors $p(y) = p^2(x) = y$ et $q(y) = q^2(z) = y$ et donc $y = p \circ q(y) \in \mathrm{Im}(p \circ q)$, d'où $\boxed{\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q}$.

6. (a) Comme q est un projecteur orthogonal et que la base canonique est orthonormale pour la structure euclidienne considérée, la matrice Q doit vérifier $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q} = {}^t\mathrm{Q}$. Un calcul matriciel par blocs donne alors les 6 relations de l'énoncé.

(b) $(iv) \Rightarrow (i)$ a été démontré à la question 5.(b) ;
$(i) \Rightarrow (ii)$: on a $\mathrm{PQ} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{Sp}(p \circ q) = \{0,1\}$. De plus, la matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable. On en déduit que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et les égalités $\mathrm{A}^2 + \mathrm{BC} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{C}$ impliquent ${}^t\mathrm{CC} = 0$;
$(ii) \Rightarrow (iii)$: on sait que $\mathrm{Tr}({}^t\mathrm{CC}) = \sum_{i,j} c_{i,j}^2$, où $\mathrm{C} = (c_{i,j})_{i,j}$. Donc si ${}^t\mathrm{CC} = 0$ alors $\mathrm{C} = 0$;
$(iii) \Rightarrow (iv)$: si $\mathrm{C} = 0$ alors $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{C} = 0$ et donc Q est diagonale par blocs, elle va donc commuter avec P, ce qui implique que p et q commutent.

Partie II

1. (a) On a $F = \operatorname{Im} f \oplus \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ donc il existe un unique couple $(z, y') \in \operatorname{Im} f \times \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ tel que $y = z + y'$.
   $z \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $x' \in E$ tel que $z = f(x')$.
   Or $E = \operatorname{Ker} f \oplus \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$ donc il existe $(x_1, x) \in \operatorname{Ker} f \times \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$ tel que $x' = x_1 + x$.
   On a donc $z = f(x') = f(x_1 + x) = f(x_1) + f(x) = f(x)$ car $x_1 \in \operatorname{Ker} f$.
   On a trouvé deux vecteurs x et y' tels que : $\boxed{y = f(x) + y' \text{ avec } (x, y') \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp} \times \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}.}$

   (b) Soit $(x_1, y'_1) \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp} \times \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ un deuxième couple tel que $y = f(x) + y' = f(x_1) + y'_1$.
   Par unicité de la décomposition de y comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$ et d'un vecteur de $\left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ on a $f(x) = f(x_1)$ et $\boxed{y' = y'_1}$.
   Or $f(x) = f(x_1) \Rightarrow f(x - x_1) = 0_F \Rightarrow x - x_1 \in \operatorname{Ker} f$.
   On a $x - x_1 \in \operatorname{Ker} f \cap \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp} = \{0_E\}$ donc $\boxed{x = x_1}$.
   $\boxed{\text{Un tel couple } (x, y') \text{ est unique.}}$

   (c) Soit $y_1, y_2 \in F$ et $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
   $\exists!\,(x_1, y'_1) \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp} \times \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ tel que $y_1 = f(x_1) + y'_1$.
   $\exists!\,(x_2, y'_2) \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp} \times \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ tel que $y_2 = f(x_2) + y'_2$.
   $a_1 y_1 + a_2 y_2 = a_1 f(x_1) + a_1 y'_1 + a_2 f(x_2) + a_2 y'_2 = f(a_1 x_1 + a_2 x_2) + a_1 y'_1 + a_2 y'_2$.
   $\left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E donc $a_1 x_1 + a_2 x_2 \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$.
   De même, $\left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de F donc $a_1 y'_1 + a_2 y'_2 \in \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$.
   Par définition de g, on a donc $g(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1 g(x_1) + a_2 g(x_2)$.
   $\boxed{\text{L'application } g \text{ est donc linéaire de F dans } \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}.}$

2. $*$ On détermine le noyau de g :
   Soit $y \in F$. $\exists!\,(x, y') \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp} \times \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ tel que $y = f(x) + y'$.
   $$\begin{array}{rcl} y \in \operatorname{Ker} g & \Leftrightarrow & g(y) = x = 0_E \\ & \Leftrightarrow & y = f(0_E) + y' \\ & \Leftrightarrow & y = y' \\ & \Leftrightarrow & y \in \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp} \end{array}$$
   On a donc $\boxed{\operatorname{Ker} g = \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}}$.

   $*$ On détermine l'image de g :
   On a $\operatorname{Im} g \subset \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$.
   Inversement, pour $x \in \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$, on a la décomposition $f(x) = f(x) + 0_F$ avec $0_F \in \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ donc $g(f(x)) = x \in \operatorname{Im} g$.
   On a donc $\left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp} \subset \operatorname{Im} g$.
   On en déduit $\boxed{\operatorname{Im} g = \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}}$.

3. (a) On note p le projecteur orthogonal de E sur $\left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$.
   Soit $x \in E$. $\exists!\,(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} f \times \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}$ tel que $x = x_1 + x_2$.
   On a $p(x) = x_2$. D'autre part :
   $$\begin{array}{rcll} f(x) & = & f(x_1 + x_2) & \\ & = & f(x_1) + f(x_2) & \\ & = & f(x_2) & \text{car } x_1 \in \operatorname{Ker} f \\ & = & f(x_2) + 0_F & \text{avec } 0_F \in \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp} \end{array}.$$
   On en déduit $g \circ f(x) = g(f(x)) = x_2 = p(x)$.
   Cette égalité étant vraie pour tout vecteur x de E, on a $g \circ f = p$.
   $\boxed{g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal de E sur } \left(\operatorname{Ker} f\right)^{\perp}.}$

(b) On note r le projecteur orthogonal de F sur Im f.
Soit $y \in \mathrm{F}$. $\exists!(x, y') \in (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} \times (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ tel que $y = f(x) + y'$.
On a $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$ donc $r(y) = f(x)$.
D'autre part, $g(y) = x$ et $f(g(y)) = f(x) = r(y)$.
Cette égalité étant vraie pour tout vecteur y de F, on a $f \circ g = r$.
$\boxed{f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal de F sur Im } f.}$

4. On note (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(i), f(j), f(k)) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 + e_2, e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$. On en déduit que $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = \{(0,0)\}$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \big(x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\big)$$
On en déduit $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\,(1, -1, 1)$.
$(\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$ est donc le plan vectoriel d'équation $x - y + z = 0$.
Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
Comme $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = \{(0,0)\}$, on cherche $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$ tel que $y = f(x_1, x_2, x_3)$.
On obtient le système :
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - x_2 - x_2 + y_2 - x_2 = 0 \\ x_1 = y_1 - x_2 \\ x_3 = y_2 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2) \\ x_1 = \frac{1}{3}(2y_1 - y_2) \\ x_3 = \frac{1}{3}(-y_1 + 2y_2) \end{cases}.$$
La matrice de g relativement aux bases canoniques est donc $\boxed{\mathrm{G} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$.

5. (a) Par le théorème du rang, on sait que $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim(\mathrm{Im}\, f^{\perp})$, il suffit donc de montrer une inclusion entre ces deux sous-espaces vectoriels.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et $y \in \mathrm{Im}\, f$ alors, il existe $z \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(z)$ et donc, comme f est symétrique :
$$(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0_{\mathrm{E}}|z) = 0$$
et donc $x \in \mathrm{Im}\, f^{\perp}$, d'où $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, f^{\perp}}$.
De plus, on sait qu'en dimension finie, $(\mathrm{F}^{\perp})^{\perp} = \mathrm{F}$ et donc $\boxed{\mathrm{Ker}\, f^{\perp} = \mathrm{Im}\, f}$.

(b) Soit λ une valeur propre de f associée à un vecteur propre x. Distinguons deux cas :
- si $\lambda = 0$, alors $x \in \mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, g$, d'après 2. donc $g(x) = 0$;
- si $\lambda \neq 0$, alors $x = f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) \in \mathrm{Im}\, f = (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$, donc $g(x) = \dfrac{x}{\lambda}$ par définition de g.

Dans les deux cas, x est bien vecteur propre de g.

(c) Par le théorème spectral, comme f est symétrique, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f. Mais d'après 5. (b), ceux-ci sont aussi des vecteurs propres de g. Ainsi, g est diagonalisable dans une base orthonormale donc g est symétrique.

6. D'après la question précédente, toute base de vecteurs propres de f est aussi une base de vecteurs propres de g, avec conservation de la valeur propre 0 et remplacement des valeurs propres non nulles par leur inverse.

   On trouve $\chi_A = X^3 - 9X^2 + 18X = X(X-3)(X-6)$. Le calcul des vecteurs propres conduit ensuite à :

$$A = P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}{}^tP$$

   avec $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$. On en déduit la matrice B de g relativement aux bases canoniques :

$$B = P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}{}^tP = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

Partie III - Facultative

1. Lorsque x décrit E, $f(x)$ décrit Im f. On a donc $\min\limits_{x\in E}\|f(x)-v\| = \min\limits_{u\in \mathrm{Im} f}\|u-v\|$.

   D'après le cours, en notant v_0 le projeté orthogonal de v sur Im f, on a :
   $\|v_0 - v\| = \min\limits_{u\in \mathrm{Im} f}\|u-v\| = \min\limits_{x\in E}\|f(x)-v\|$.
   Or $v_0 \in \mathrm{Im}\, f$ donc il existe $x_0 \in E$ tel que $v_0 = f(x_0)$.
   $\boxed{\text{On a montré qu'il existe } x_0 \in E \text{ tel que : } \|f(x_0)-v\| = \min\limits_{x\in E}\|f(x)-v\|.}$
2. On suppose que f est injective. Soit $x_1 \in E$ tel que $\|f(x_1)-v\| = \|f(x_0)-v\| = \min\limits_{x\in E}\|f(x)-v\|$.
   On a $f(x_1) - v = f(x_1 - x_0) + f(x_0) - v$. Or $f(x_1-x_0) \in \mathrm{Im}\, f$ et $f(x_0) - v = v_0 - v \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.
   D'après le théorème de Pythagore, on a : $\|f(x_1)-v\|^2 = \|f(x_1)-f(x_0)\|^2 + \|f(x_0)-v\|^2$.
   Or $\|f(x_1)-v\| = \|f(x_0)-v\|$ donc $\|f(x_1)-f(x_0)\|^2 = 0$, c'est-à-dire $f(x_1) = f(x_0)$.
   f étant injective, on en déduit $x_1 = x_0$.
   $\boxed{\text{Si } f \text{ est injective, alors l'équation } (*) \text{ admet une pseudo-solution unique.}}$
3. $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que x_0 est pseudo-solution de $(*)$.
   On a alors $f(x_0) = v_0$ donc $v - f(x_0) = v - v_0 \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.
   On en déduit : $\forall\, x \in E$, $(f(x_0) - v \,|\, f(x)) = 0$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que : $\forall\, x \in E$, $(f(x) \,|\, f(x_0) - v) = 0$.
   On a alors $f(x_0) - v \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.
   On peut écrire $v = (v - f(x_0)) + f(x_0)$ avec $v - f(x_0) \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $f(x_0) \in \mathrm{Im}\, f$.
   La décomposition de v comme somme d'un vecteur de Im f et d'un vecteur de $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ étant unique, on en déduit $f(x_0) = v_0$, ce qui signifie, d'après la question 1., que x_0 est pseudo-solution de $(*)$.
   $\boxed{x_0 \text{ est pseudo-solution de } (*) \text{ si et seulement si } \forall\, x \in E,\ (f(x) \,|\, f(x_0) - v) = 0.}$
4. Soit x un vecteur de E de matrice X dans la base $\mathscr{B}$.
   Dans $\mathscr{C}$, $f(x)$ a pour matrice AX et $f(x_0)$ a pour matrice AX_0.
   La base $\mathscr{B}$ étant orthonormale, l'écriture matricielle de l'équation $(f(x) \,|\, f(x_0) - v) = 0$ est ${}^t(AX)(AX_0 - V) = 0$, ou encore ${}^tX\,{}^tAAX_0 = {}^tX\,{}^tAV$.
   On en déduit :

$$x_0 \text{ est pseudo-solution de } (*) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX{}^tAAX_0 = {}^tX{}^tAV$$
$$\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\left({}^tAAX_0 - {}^tAV\right) = 0$$

$*$ On suppose que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\left({}^tAAX_0 - {}^tAV\right) = 0$.

On note $M = {}^tAAX_0 - {}^tAV \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En choisissant $X = M$, on obtient ${}^tMM = 0$, c'est-à-dire $\|M\|^2 = 0$, ou encore $M = 0$.

$*$ Réciproquement, si $M = 0$, alors on a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\left({}^tAAX_0 - {}^tAV\right) = 0$.

On a montré que : $\boxed{x_0 \text{ est pseudo-solution de } (*) \text{ si et seulement si } {}^tAAX_0 = {}^tAV}$.

5. On a ${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et ${}^tAV = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$${}^tAAX_0 = {}^tAV \iff \begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ 6y = 3 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases} \iff \left(x = z \text{ et } y = \frac{1}{2}\right).$$

Les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$ sont les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2} \\ x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

6. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\lambda a_k + \mu b_k - c_k\right)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2$.

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ définie par $f(\lambda, \mu) = \lambda a + \mu b$.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\lambda a_k + \mu b_k - c_k\right)^2 = \|f(\lambda, \mu) - c\|^2$.

Le problème posé équivaut donc à la recherche des pseudo-solutions de l'équation $f(x) = c$.

La matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ est $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$.

(b) f est injective si et seulement si $\text{rg}(A) = 2$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si la famille } (a, b) \text{ est libre}}$.

(c) On suppose que (a, b) est libre.

On calcule ${}^tAA = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}$

et ${}^tAV = {}^tAC = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}$.

D'après 2., le problème posé admet une unique solution, solution de l'équation ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

On résout le système $\begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}$.

On obtient $\lambda = \dfrac{\|b\|^2(a|c) - (a|b)(b|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2}$ et $\mu = \dfrac{\|a\|^2(b|c) - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2}$.

Barème

Exercice 1 : Intégrales généralisées

Compétences	NA	MA	A	Points
I 1. Ca Ch Re étude de fonction				/2
2. (a) Ca Ra fonction intégrable				/2,5
2. (b) Ra relations de comparaison				/1
3. (a) Ra positivité de l'intégrale, théorème de la limite monotone				/1,5
3. (b) Ra Ca croissance de l'intégrale, théorème des gendarmes				/1,5
II 1. Ca Ra fonction intégrable				/1
2. Ca intégration par parties, calculs de limites				/2
3. (a) Ra Ca formule d'Euler, binôme de Newton, linéarité de l'intégrale				/1,5
3. (b) Ra Co conclusion				/1
3. (c) Ra Co conclusion				/1

Exercice 2 : Espaces euclidiens

Compétences	NA	MA	A	Points
I 1. cours				/1
2. (a) cours				/1
2. (b) Ca Ra égalités vectorielles puis matricielles				/1,5
2. (c) cours (inégalité de Bessel par le théorème de Pythagore)				/1
3. (a) Ra Ca caractérisation des projecteurs orthogonaux				/1
3. (b) Ca bases orthonormales d'un noyau et d'une image d'un projecteur orthogonal				/2
4. (a) Ra Ca noyau et image d'un projecteur orthogonal				/1,5
4. (b) Ra Ca orthogonalité				/1
4. (c) Ra Ca inégalités sur les valeurs propres				/1
5. (a) Ra Ca caractérisation des projecteurs orthogonaux				/1
5. (b) Ra Ca spectre d'un projecteur orthogonal				/1,5
5. (c) Ra Ch Co égalités entre sous-espaces				/3
6. (a) Ra Ca caractérisation des projecteurs orthogonaux et produits par blocs				/1
6. (b) Ra Ch Co diagonalisation des matrices symétriques réelles, raisonnements sur des égalités matricielles				/2,5
II 1. (a) Ch Ra Co décomposition dans des supplémentaires orthogonaux				/2
1. (b) Ch Ra Co unicité de cette décomposition				/1
1. (c) Ch Ra Co linéarité, unicité de cette décomposition				/1,5
2. Ca Ra noyau et image d'une application linéaire				/2
3. (a) Ca Ra projecteur orthogonal				/2
3. (b) Ca Ra projecteur orthogonal				/1
4. Ch Ra Co noyau, image, orthogonaux, matrice dans une base				/3
5. (a) Ra , Co , Ca endomorphismes symétriques et orthogonal d'un sous-espace				/1,5
5. (b) Co Ch Ra disjonction de cas, vecteurs propres				/2
5. (c) Co endomorphisme diagonalisable dans une BON				/1
6. Ch Ra Co Ca diagonalisation d'une matrice symétrique réelle, changement de base				/4

DS 5 14 Février 2015 - PC

L'usage d'une calculatrice est interdit. Vous êtes invités à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. *Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.*

Exercice 1 :

Partie I Soit $\sum u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n définie pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$$

1. (a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   On note $\mathrm{U} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions u_n .

   (b) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
   La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

   (c) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

   (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ par :

   $$v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

   Montrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (c) On note $\mathrm{V} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.
   Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

3. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par :

   - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_0(x) = x$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = x \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée : $p(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Partie II Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par :

$$h(x,t)=\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}$$

1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t\mapsto h(x,t)$ admet, quand t tend vers 0 par valeurs positives, une limite finie que l'on déterminera.

   (b) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. (a) Montrer que h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et à tout ordre.
   Calculer, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$. On distinguera les cas n pair et n impair.

   (b) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\mathrm{d}t$$

   Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $m\in\mathbb{N}$, on a :

$$f^{(2m)}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^m t^{2m}\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f^{(2m+1)}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\mathrm{d}t$$

4. (a) Montrer que, pour tout $t>0$, on a : $\dfrac{1}{\exp(\pi t)-1}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\exp(-n\pi t)$.

   (b) Montrer que, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\exp(-n\pi t)\sin(tx)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-n\pi t)\sin(tx)\mathrm{d}t$ à l'aide de $u_n(x)$.

   (c) Pour tous $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,+\infty[$, on pose :

$$h_n(x,t)=\sum_{k=1}^{k=n}\exp(-k\pi t)\sin(tx)$$

   Montrer que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $t\in]0,+\infty[$, $h_n(x,t)=(1-\exp(-n\pi t))\dfrac{\sin(tx)}{e^{\pi t}-1}$.
   Puis, montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}h_n(x,t)\mathrm{d}t$$

   En déduire une expression simple de la fonction f à l'aide de la fonction U.

Exercice 2 :

Partie I On définit deux endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement les matrices J et K définies par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que les endomorphismes f et g commutent.

   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

   On note désormais E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ défini par :

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Exprimer $M(a,b)$ en fonction de J et de K.
3. Montrer que le produit de deux éléments de E est encore dans E.
4. $M(a,b)$ peut-elle être inversible ?
5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $(M(a,b))^n = M\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$.

Partie II

Notation : Si A et B sont deux événements avec $P(B) > 0$, on notera $P(A|B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

On considère le damier suivant :

B_2	N_1	B_3
N_4	B_1	N_2
B_4	N_3	B_5

Un pion se déplace avec équiprobabilité sur ce damier de la case où il se trouve vers une des cases qui possède avec cette case un côté commun. Ainsi, si le pion est en N_2, il peut se déplacer vers B_1, B_3 ou B_5, avec des probabilités égales. On suppose qu'au départ, le pion est sur une case blanche.

1. Où peut se trouver le pion après un nombre pair de déplacements ? Après un nombre impair de déplacements ?

   Posons maintenant pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \\ p_{3,n} \\ p_{4,n} \\ p_{5,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1,5]\!]$, $p_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k après le $(2n)$-ième déplacement si $n \neq 0$ et $p_{k,0}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_k au départ. Nous noterons $B_{k,n}$ l'événement : « Le pion est sur la case B_k après le $(2n)$-ième déplacement ».

   Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \begin{pmatrix} q_{1,n} \\ q_{2,n} \\ q_{3,n} \\ q_{4,n} \end{pmatrix}$ où pour $k \in [\![1,4]\!]$, $q_{k,n}$ est la probabilité pour que le pion soit sur la case N_k après le $(2n-1)$-ième déplacement. Nous noterons $N_{k,n}$ l'événement : « Le pion est sur la case N_k après le $(2n-1)$-ième déplacement ».

2. Exprimer, pour tout entier n non nul, $\left(p_{k,n}\right)_{1\leq k\leq 5}$ en fonction de $\left(q_{k,n}\right)_{1\leq k\leq 4}$, puis $\left(q_{k,n}\right)_{1\leq k\leq 4}$ en fonction de $\left(p_{k,n-1}\right)_{1\leq k\leq 5}$.
   En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{AV}_{n-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_n = \mathrm{BW}_n$$

   avec $\mathrm{A} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Calculer AB et montrer que AB est un élément de E.

4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{AB})^n = \mathrm{M}\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\times 3^n}\right)$.

5. Exprimer de façon simple, pour tout entier naturel n, non nul, $(\mathrm{BA})^n$ en fonction de A, de B et d'une puissance de AB. Calculer $(\mathrm{BA})^n$.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre V_n et V_0.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour que le pion soit sur la case B_1 après le $(2n)$-ième déplacement ? Que remarque-t-on ?

   Nous admettrons que le résultat du n-ième déplacement ne dépend que de la position du pion juste avant ce déplacement et non pas des autres positions précédentes. On a donc, en particulier : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, k \in [\![1,4]\!]$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}_{1,n+1} \,|\, \mathrm{N}_{k,n+1} \cap \mathrm{B}_{1,n}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{1,n+1} \,|\, \mathrm{N}_{k,n+1})$.

8. Montrer que pour tout entier n, non nul, les événements $\mathrm{B}_{1,n}$ et $\mathrm{B}_{1,n+1}$ sont indépendants.

   Nous admettrons plus généralement, sous l'hypothèse formulée ci-dessus, que la famille d'événements $\left(\mathrm{B}_{1,n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants et nous considérerons, dans la question qui suit, que la position de départ n'est pas obtenue à partir d'un déplacement du pion.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ déplacements du pion. Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où le pion a été déplacé sur la case B_1. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

Correction

Exercice 1 : *(d'après CCP PC 2011)*

Partie I

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$. La série numérique $\sum u_n(0)$ converge donc vers 0.

   Pour $x \neq 0$, $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{n^2\pi^2}$ qui est le terme d'une série convergente.

   Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

   (b) Pour tout $x \in [-a, a]$, $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{2|x|}{n^2\pi^2} \leqslant \dfrac{2a}{n^2\pi^2}$.

   Donc $\|u_{n|[-a,a]}\|_\infty \leqslant \dfrac{2a}{n^2\pi^2}$ qui est le terme d'une série convergente, donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur } [-a, a]}$.

   Par contre, sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(n) = \dfrac{2}{n(1+\pi^2)}$ qui est le terme d'une série divergente, $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R} \text{ tout entier.}}$

   On aurait aussi pu étudier la fonction u_n sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\|u_n\|_\infty = u_n(n\pi) = \dfrac{1}{n\pi^2}$ qui est le terme d'une série divergente.

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après la question précédente, $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$. La somme $\mathrm{U} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est donc continue sur tout segment $[-a, a]$ et par conséquent $\boxed{\mathrm{U} \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les primitives de u_n sont de la forme $x \mapsto \ln(x^2 + n^2\pi^2) + \mathrm{C}$, avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. La primitive de u_n qui s'annule en 0 vérifie donc $\mathrm{C} = -\ln(n^2\pi^2)$ et est de la forme $\boxed{x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}$.

   (b) On reconnait que v_n est la primitive de u_n qui s'annule en 0. Donc la série numérique $\sum v_n(0)$ converge vers 0. Et pour $x \neq 0$, on a :

   $$v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{n^2\pi^2}$$

   qui est le terme d'une série convergente. Donc $\boxed{\sum v_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

   (c) Appliquons le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$;
   - on vient de montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$;
   - pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $v_n'(x) = u_n(x)$; or $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$.

   Le théorème s'applique donc sur tout segment $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ et on peut en conclure que V est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \mathrm{U}(x)$. Ainsi, comme $\mathrm{V}(0) = 0$, $\boxed{\mathrm{V} \text{ est la primitive de U qui s'annule en } 0}$.
   Remarque : on aurait aussi pu appliquer le théorème d'intervertion somme-intégrale sur le segment $[0, x]$ à $\sum u_n$.

3. Pour commencer, il est clair que $(p_n(0))_n$ converge vers 0. Ensuite, pour $x \neq 0$, l'égalité $\dfrac{p_n(x)}{x} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ entraîne que $\dfrac{p_n(x)}{x} > 0$. Donc on peut étudier $\ln\left(\dfrac{p_n(x)}{x}\right)$ et il suffit de montrer que

$\left(\ln\left(\frac{p_n(x)}{x}\right)\right)_n$ converge pour montrer que $(p_n(x))_n = x\exp\left(\ln\left(\frac{p_n(x)}{x}\right)\right)_n$ converge car la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

Mais pour tous n et x différents de 0 :

$$\ln\left(\frac{p_n(x)}{x}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)$$

Ainsi, d'après la question 2.(b) :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x\exp\left(\sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right) = x\exp(\mathrm{V}(x)) = x\exp\left(\int_0^x \mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

et cette égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que $\boxed{\text{la suite } (p_n)_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction } x \mapsto x\exp(\mathrm{V}(x))}$.

Partie II

1. (a) Pour tout $t > 0$, $h(0,t) = 0$ admet une limite quand $t \to 0$.
   Et pour $x \neq 0$, $h(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{\exp(\pi t)-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{tx}{\pi t} = \dfrac{x}{\pi}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lim_{t\to 0} h(x,t) = \frac{x}{\pi}}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0;+\infty[$ et, d'après la question précédente, elle admet une limite en 0 donc elle est intégrable sur tout segment de la forme $[0,a]$, $a > 0$. Examinons son comportement en $+\infty$: $h(x,t) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\exp(\pi t)}\right)$ et $t \mapsto \exp(-\pi t)$ est intégrable en $+\infty$ donc par comparaison $t \mapsto h(x,t)$ l'est aussi. $\boxed{\text{La fonction } t \mapsto h(x,t) \text{ est donc intégrable sur }]0,+\infty[}$.

2. (a) La fonction sin étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En calculant les quatre premières dérivées, on peut conjecturer une formule et la montrer par récurrence sur n. Montrons que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$:

$$\frac{\partial^{2n} h}{\partial x^{2n}}(x,t) = (-1)^n t^{2n}\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^{2n+1} h}{\partial x^{2n+1}}(x,t) = (-1)^n t^{2n+1}\frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}$$

   Ces deux formules étant vérifiées pour $x = 0$, on peut supposer par la suite $x \neq 0$.

   - Initialisation : la première formule est clairement vérifiée pour $n = 0$ et comme $\dfrac{\partial \sin(xt)}{\partial x} = t\cos(xt)$, la deuxième formule est aussi vérifiée.
   - Hérédité : supposons ces deux formules vraies pour un n donné et montrons les au rang $n+1$. Il faut donc montrer que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\partial^{2n+2} h}{\partial x^{2n+2}}(x,t) = (-1)^{n+1} t^{2n+2}\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^{2n+3} h}{\partial x^{2n+3}}(x,t) = (-1)^{n+1} t^{2n+3}\frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}$$

     On obtient l'égalité $\dfrac{\partial^{2n+2} h}{\partial x^{2n+2}}(x,t) = (-1)^{n+1} t^{2n+2}\dfrac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}$ en dérivant $\dfrac{\partial^{2n+1} h}{\partial x^{2n+1}}$ par rapport à x à l'aide de $\dfrac{\partial \cos(xt)}{\partial x} = -t\sin(xt)$ et l'égalité $\dfrac{\partial^{2n+3} h}{\partial x^{2n+3}}(x,t) = (-1)^{n+1} t^{2n+3}\dfrac{\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}$ s'obtient en dérivant $\dfrac{\partial^{2n+2} h}{\partial x^{2n+2}}$ grâce à $\dfrac{\partial \sin(xt)}{\partial x} = t\cos(xt)$.

   Et on conclut par le principe de récurrence que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$:

$$\boxed{\frac{\partial^{2n} h}{\partial x^{2n}}(x,t) = (-1)^n t^{2n}\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^{2n+1} h}{\partial x^{2n+1}}(x,t) = (-1)^n t^{2n+1}\frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}}$$

   (b) La fonction $t \to \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par rapport à t sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues ne s'annulant par sur $]0,+\infty[$. De plus, sachant que

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\exp(\pi t)-1}=\dfrac{1}{\pi}$, elle prolongeable par continuité en $t=0$ pour $x\in\mathbb{R}$ fixé. Enfin, $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ qui est une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le critère de Riemann avec $\alpha=2>1$. On en déduit donc que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{\text{la fonction } t\to\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) \text{ est continue et intégrable sur }]0,+\infty[}$.

3. On sait déjà, d'après la question II.1.(b), que f est bien définie et on va appliquer un corollaire du théorème de dérivation sous le signe intégrale pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   (i) Pour tout $t>0$, $x\mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (question 2.(a)) ;
   (ii) pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (question 2.(b)) ;
   (iii) il reste à majorer $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ par une fonction $\varphi_n(t)$ indépendante de x, positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$. Il suffit que prendre $\varphi_n(t)=\dfrac{t^n}{\exp(\pi t)-1}$ (les arguments pour montrer qu'elle est continue et intégrable sont les mêmes que ceux développés à la question 2.(b)).

   On peut donc affirmer que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ et que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$:
   $f^{(n)}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\mathrm{d}t$ soit, d'après la question 2.(a) :
   $$\boxed{f^{(2n)}(x)=\int_0^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f^{(2n+1)}(x)=\int_0^{+\infty}(-1)^n t^{2n+1}\frac{\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\mathrm{d}t}$$

4. (a) Pour $t>0$, $\exp(-\pi t)\in]0,1[$. La série géométrique de raison $\exp(-\pi t)$ est donc convergente et :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\exp(-n\pi t)=\exp(-\pi t)\sum_{n=0}^{+\infty}(\exp(-\pi t))^n=\frac{\exp(-\pi t)}{1-\exp(-\pi t)}=\frac{1}{\exp(\pi t)-1}$$
   (b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\exp(-n\pi t)\sin(tx)$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues. De plus, $\exp(-n\pi t)\sin(tx)=\mathrm{O}(\exp(-n\pi t))$ qui est une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\boxed{t\mapsto\exp(-n\pi t)\sin(tx) \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[}$.
   De plus, si l'on note $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-n\pi t)\sin(tx)\mathrm{d}t$, alors par une première intégration par parties en posant $u(t)=\sin(tx)$ et $v(t)=\dfrac{\exp(-n\pi t)}{-n\pi}$, les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telles que $u(0)v(0)=\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$, on obtient : $\mathrm{I}_n=\dfrac{x}{n\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-n\pi t)\cos(tx)\mathrm{d}t$. Puis, une deuxième intégration par parties avec $\tilde{u}(t)=\cos(xt)$ et $v(t)=\dfrac{\exp(-n\pi t)}{-n\pi}$, les fonctions $\tilde{u}$ et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telles que $\tilde{u}(0)v(0)=\dfrac{-1}{n\pi}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\tilde{u}(t)v(t)=0$, donne : $\mathrm{I}_n=\dfrac{x}{(n\pi)^2}(1-x\mathrm{I}_n)$ soit $\mathrm{I}_n=\dfrac{x}{x^2+n^2\pi^2}$, on a donc montré que : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-n\pi t)\sin(tx)\mathrm{d}t=\frac{u_n(x)}{2}}$.
   Remarque : on aurait aussi pu écrire $\sin(tx)=\mathrm{Im}\left(e^{itx}\right)$ *et travailler avec la somme des termes d'une suite géométriqie.*
   (c) *Remarque : pour exprimer $f(x)$ à l'aide d'une série, l'énoncé revient aux sommes partielles car le théorème d'interversion série-intégrale ne s'applique pas.*
   Pour tous $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$ et $t>0$:
   $$h_n(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\left(\exp(-\pi t)\right)^k\sin(tx)=\exp(-\pi t)\frac{1-\exp(-n\pi t)}{1-\exp(-\pi t)}\sin(tx)$$

(car $\exp(-n\pi t) \in [0,1[$). Soit $\boxed{h_n(x,t) = (1-\exp(-n\pi t))\dfrac{\sin(tx)}{e^{\pi t}-1}}$.

On va appliquer le théorème de convergence dominée (x est fixé) :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto h_n(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$ (continue sur $]0;+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et $h_n(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$) ;

(ii) pour tout $t > 0$, $h_n(x,t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sin(tx)}{e^{\pi t}-1}$, on remarque que la limite simple est la fonction $t \mapsto h(x,t)$ qui est continue sur $]0;+\infty[$ (question 1.(b)) ;

(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t > 0, \quad |h_n(x,t)| = \left|(1-\exp(-n\pi t))\frac{\sin(tx)}{e^{\pi t}-1}\right| \leqslant \frac{|\sin(tx)|}{e^{\pi t}-1}$$

et on a vu à la question 1.(b) que la fonction $t \mapsto |h(x,t)|$ était intégrable sur $]0;+\infty[$

donc d'après le théorème de convergence dominée : $\boxed{f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt}$.

Or par linéarité et d'après ce que l'on a montré au début de cette question :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\exp(-k\pi t)\sin(tx)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty}\exp(-k\pi t)\sin(tx)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}u_k(x)$$

et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{U}(x)}$.

Exercice 2 : *(d'après G2E 2009)*

Partie I

1. (a) On a $\mathrm{JK} = \mathrm{O}_{4,4} = \mathrm{KJ}$. On en déduit $f \circ g = \tilde{0} = g \circ f$.
   Ainsi, $\boxed{\text{les endomorphismes } f \text{ et } g \text{ commutent}}$.

   (b) Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g) \iff \mathrm{J}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \mathrm{K}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x+y+z+t=0\\ x-z=0\\ y-t=0\end{cases} \iff \begin{cases} x+y+x+y=0\\ z=x\\ t=y\end{cases} \iff \begin{cases} y=-x\\ z=x\\ t=-x\end{cases}$$

   On a donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Ker}(g) = \{(x,-x,x,-x)\ /\ x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-1,1,-1))}$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   On a $\mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b&0&-b&0\\0&b&0&-b\\-b&0&b&0\\0&-b&0&b\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\mathrm{M}(a,b) = a\mathrm{J}+b\mathrm{K}}$.

3. On considère $\mathrm{M}(a,b)$ et $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ deux éléments de E avec $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M}(a,b)\mathrm{M}(\alpha,\beta) & = & (a\mathrm{J}+b\mathrm{K})(\alpha\mathrm{J}+\beta\mathrm{K}) \qquad \text{d'après la question précédente} \\ & = & a\alpha\mathrm{J}^2 + a\beta\mathrm{JK} + b\alpha\mathrm{KJ} + b\beta\mathrm{K}^2 \\ & = & a\alpha\mathrm{J}^2 + b\beta\mathrm{K}^2 \qquad \text{car } \mathrm{JK}=\mathrm{KJ}=\mathrm{O}_{4,4} \end{array}$$

Or $\mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4\mathrm{J}$ et $\mathrm{K}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathrm{K}$.

On obtient $\mathrm{M}(a,b)\mathrm{M}(\alpha,\beta) = 4a\alpha\mathrm{J} + 2b\beta\mathrm{K} = \mathrm{M}(4a\alpha, 2b\beta) \in \mathrm{E}$.

On a montré que $\boxed{\text{le produit de deux éléments de E est un élément de E}}$.

4. D'après la question 1. (b), on a $(1,-1,1,-1) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

   Si on note $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a donc $\mathrm{JU} = \mathrm{KU} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   $\mathrm{M}(a,b)\mathrm{U} = (a\mathrm{J}+b\mathrm{K})\mathrm{U} = a\mathrm{JU} + b\mathrm{KU} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Il existe une matrice colonne non nulle U telle que $\mathrm{M}(a,b)\mathrm{U} = \mathrm{O}_{4,1}$ donc $\boxed{\text{la matrice } \mathrm{M}(a,b) \text{ n'est pas inversible}}$.

5. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : $(\mathrm{M}(a,b))^n = \mathrm{M}\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$.

   ∗ *Initialisation :* Pour $n = 1$, on a $(\mathrm{M}(a,b))^n = \mathrm{M}(a,b)$ et $\mathrm{M}\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right) = \mathrm{M}(a,b)$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

   ∗ *Hérédité :* On suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on a $(\mathrm{M}(a,b))^n = \mathrm{M}\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)$.

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{M}(a,b))^{n+1} & = & (\mathrm{M}(a,b))^n\mathrm{M}(a,b) \\ & = & \mathrm{M}\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)\mathrm{M}(a,b) \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & \mathrm{M}\left(4 \times 4^{n-1}a^n \times a, 2 \times 2^{n-1}b^n \times b\right) \qquad \text{d'après la question 4.} \\ & = & \mathrm{M}\left(4^n a^{n+1}, 2^n b^{n+1}\right) \end{array}$$

   La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

   On a montré par récurrence : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ (\mathrm{M}(a,b))^n = \mathrm{M}\left(4^{n-1}a^n, 2^{n-1}b^n\right)}$.

Partie II

1. On remarque que si le pion est sur une case blanche, alors il ne peut se déplacer que vers une case noire. De même, si le pion est sur une case noire, alors il ne peut se déplacer que vers une case blanche.

   On sait qu'au départ, le pion est sur une case blanche. On en déduit qu'après un nombre pair de déplacements, il se trouvera sur une case blanche et qu'après un nombre impair de déplacements, il se trouvera sur une case noire.

2. D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(\mathrm{N}_{k,n}\right)_{1 \leq k \leq 4}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

   $\forall\, i \in [\![1,5]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i,n}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i,n} \,|\, \mathrm{N}_{k,n})\mathrm{P}(\mathrm{N}_{k,n})$, c'est-à-dire $\boxed{p_{i,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}(\mathrm{B}_{i,n} \,|\, \mathrm{N}_{k,n}) q_{k,n}}$.

   Or en observant le damier, on obtient :

   $\forall\, k \in [\![1,4]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{B}_{1,n} \,|\, \mathrm{N}_{k,n}) = \dfrac{1}{3}$;

   $\mathrm{P}(\mathrm{B}_{2,n} \,|\, \mathrm{N}_{3,n}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{2,n} \,|\, \mathrm{N}_{2,n}) = 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}_{2,n} \,|\, \mathrm{N}_{1,n}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{2,n} \,|\, \mathrm{N}_{4,n}) = \dfrac{1}{3}$;

$P(B_{3,n}\,|\,N_{4,n}) = P(B_{3,n}\,|N_{3,n}) = 0$ et $P(B_{3,n}\,|\,N_{1,n}) = P(B_{3,n}\,|N_{2,n}) = \dfrac{1}{3}$;

$P(B_{4,n}\,|\,N_{1,n}) = P(B_{4,n}\,|N_{2,n}) = 0$ et $P(B_{4,n}\,|\,N_{3,n}) = P(B_{4,n}\,|N_{4,n}) = \dfrac{1}{3}$;

$P(B_{5,n}\,|\,N_{1,n}) = P(B_{5,n}\,|N_{4,n}) = 0$ et $P(B_{5,n}\,|\,N_{2,n}) = P(B_{5,n}\,|N_{3,n}) = \dfrac{1}{3}$.

On pose $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, V_n = BW_n}$.

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(B_{k,n-1}\right)_{1\leq k\leq 5}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$\forall\, i \in [\![1,4]\!], P(N_{i,n}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} P(N_{i,n}\,|\,B_{k,n-1})P(B_{k,n-1})$, c'est-à-dire $\boxed{q_{i,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} P(N_{i,n}\,|\,B_{k,n-1})\,p_{k,n-1}}$.

En observant le damier, on obtient :

$P(N_{1,n}\,|\,B_{4,n-1}) = P(N_{1,n}\,|\,B_{5,n-1}) = 0$, $P(N_{1,n}\,|\,B_{2,n-1}) = P(N_{1,n}\,|\,B_{3,n-1}) = \dfrac{1}{2}$ et $P(N_{1,n}\,|\,B_{1,n-1}) = \dfrac{1}{4}$;

$P(N_{2,n}\,|\,B_{2,n-1}) = P(N_{2,n}\,|\,B_{4,n-1}) = 0$, $P(N_{2,n}\,|\,B_{3,n-1}) = P(N_{2,n}\,|\,B_{5,n-1}) = \dfrac{1}{2}$ et $P(N_{2,n}\,|\,B_{1,n-1}) = \dfrac{1}{4}$;

$P(N_{3,n}\,|\,B_{2,n-1}) = P(N_{3,n}\,|\,B_{3,n-1}) = 0$, $P(N_{3,n}\,|\,B_{4,n-1}) = P(N_{3,n}\,|\,B_{5,n-1}) = \dfrac{1}{2}$ et $P(N_{3,n}\,|\,B_{1,n-1}) = \dfrac{1}{4}$;

$P(N_{4,n}\,|\,B_{3,n-1}) = P(N_{4,n}\,|\,B_{5,n-1}) = 0$, $P(N_{4,n}\,|\,B_{2,n-1}) = P(N_{4,n}\,|\,B_{4,n-1}) = \dfrac{1}{2}$ et $P(N_{4,n}\,|\,B_{1,n-1}) = \dfrac{1}{4}$.

On pose $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On a : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, W_n = AV_{n-1}}$.

3. $AB = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = M\left(\dfrac{3}{12}, \dfrac{2}{12}\right) = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}\right)$.

   Ainsi, $\boxed{AB = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}\right) \in E}$.

4. D'après la question 5. de la partie I, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

   $(AB)^n = \left(M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}\right)\right)^n = M\left(4^{n-1} \times \dfrac{1}{4^n}, 2^{n-1} \times \dfrac{1}{6^n}\right) = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\times 3^n}\right)$.

   $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, (AB)^n = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\times 3^n}\right)}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\boxed{(BA)^n = B(AB)^{n-1}A}$.

   Or $(AB)^{n-1} = M\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2\times 3^{n-1}}\right)$.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2\times 3^{n-1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2\times 3^{n-1}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2\times 3^{n-1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2\times 3^{n-1}} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\times 3^{n-1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2\times 3^{n-1}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2\times 3^{n-1}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{2\times 3^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4+\frac{4}{3^{n-1}} & 4 & 4 & 4-\frac{4}{3^{n-1}} \\ 4 & 4 & 4+\frac{4}{3^{n-1}} & 4-\frac{4}{3^{n-1}} & 4 \\ 4 & 4 & 4-\frac{4}{3^{n-1}} & 4+\frac{4}{3^{n-1}} & 4 \\ 4 & 4-\frac{4}{3^{n-1}} & 4 & 4 & 4+\frac{4}{3^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } (BA)^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} \\ 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1+\frac{1}{3^{n-1}} & 1 \\ 1 & 1-\frac{1}{3^{n-1}} & 1 & 1 & 1+\frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix}$$

6. D'après la question 2., pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = BW_n = B(AV_{n-1}) = (BA)V_{n-1}$.
   On montre par récurrence que : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = (BA)^n V_0}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité que le pion soit sur la case B_1 après le $(2n)$-ième déplacement est $p_{1,n}$.
   Or $V_n = (BA)^n V_0$ donc $p_{1,n}$, le premier coefficient de V_n, vaut :
   $p_{1,n} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5} 2p_{k,0} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{5} p_{k,0} = \frac{1}{3}$ car $(B_{k,0})_{1\leq k\leq 5}$ est un système complet d'événements.
   $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_{1,n} = \frac{1}{3}.}$
   On remarque que cette probabilité ne dépend pas de n.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   La famille $(N_{k,n+1})_{1\leq k\leq 4}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(B_{1,n+1} \cap B_{1,n}) &= \sum_{k=1}^{4} P(B_{1,n+1} \cap B_{1,n} \cap N_{k,n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{4} P(B_{1,n+1} \mid B_{1,n} \cap N_{k,n+1})P(B_{1,n} \cap N_{k,n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{4} P(B_{1,n+1} \mid N_{k,n+1})P(B_{1,n} \cap N_{k,n+1}) \qquad \text{d'après le résultat admis dans l'énoncé} \\ &= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{3}P(B_{1,n} \cap N_{k,n+1}) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} P(B_{1,n} \cap N_{k,n+1}) \\ &= \frac{1}{3}P(B_{1,n}) \qquad \text{car } (N_{k,n+1}) \text{ est un système complet d'événements} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les événements } B_{1,n} \text{ et } B_{1,n+1} \text{ sont indépendants.}}$

9. La famille $\left(B_{1,k}\right)_{1\leq k\leq n}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants de même probabilité, $\dfrac{1}{3}$.

   X est égale au nombre d'événements de cette famille qui se réalise. $\boxed{\text{X suit donc la loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \dfrac{1}{3}}$.

   On a $\boxed{E(X) = \dfrac{n}{3}}$ et $\boxed{V(X) = n \times \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2n}{9}}$.

DS 5 Barème

Exercice 1 : Séries de fonctions-Intégrales à paramètre

Compétences	NA	MA	A	Points
I 1. (a) Ra Ca convergence simple d'une série de fonctions				/1,5
1. (b) Ca Ch convergence normale d'une série de fonctions				/2
1. (c) Ra continuité de la somme d'une série de fonctions				/1
2. (a) Ca calcul de primitive				/1
2. (b) Ra Ca convergence simple d'une série de fonctions				/1.5
2. (c) Ra théorème de dérivation ou d'intégration terme à terme				/2.5
3. Ch Co Ca suite de fonctions définie par un produit				/3
II 1. (a) Ca détermination d'une limite				/1.5
1. (b) Ra Ca intégrabilité d'une fonction				/2
2. (a) Ca Ra Co calcul de dérivée n-ième				/2.5
2. (b) Ra Ca intégrabilité d'une fonction				/2.5
3. Co Ra théorème de dérivation sous le signe intégrale				/3
4. (a) Ca série géométrique				/1.5
4. (b) Ca Ra Ch intégrabilité d'une fonction - intégration par parties				/3,5
4. (c) Co Ra Ch Ca théorème de convergence dominée				/5

Exercice 2 : Algèbre linéaire - Probabilités

Compétences	NA	MA	A	Points
I 1. (a) Ca produit de matrices				/1
1. (b) Ca Ra système linéaire - sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$				/2
2. Ca somme de matrices				/1
3. Ca Ra calcul matriciel				/2
4. Ra inversibilité d'une matrice				/1.5
5. Co Ra démonstration par récurrence				/2
II 1. Co Ra comprendre un énoncé de probas				/1.5
2. M Co Ra reconnaître un sce - utiliser la formule des probas totales - traduire un énoncé de probas				/6
3. Ca produit matriciel				/1.5
4. Ca Ra calcul				/1
5. Ca Ra produit matriciel				/2
6. Ra Co démonstration par récurrence				/1.5
7. Ca Ra calcul - utiliser un sce				/2
8. Ca Ra indépendance d'événements - formule des probabilités totales				/3
9. Ra loi d'une variable aléatoire - espérance - variance				/2

DS 6 — 4 avril 2015 - PC

L'usage d'une calculatrice est interdit. Vous êtes invités à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, que vous aurez développée.
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. *Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs et les conclusions de vos raisonnements.*

Exercice 1 : **Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.**

Partie I Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$.

1. (a) Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et calculer ses dérivées partielles premières en tout point de cet ensemble.
   (c) h possède-t-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
2. (a) Montrer que $\mathscr{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<\sqrt{x^2+y^2}<2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) h a-t-elle des points critiques dans $\mathscr{U}$?
   (c) Montrer que h est bornée sur $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leqslant 4\}$ et qu'elle y atteint ses bornes, puis déterminer les points de $\mathscr{D}$ en lesquels ces bornes sont atteintes.

Partie II Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ par $g(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1. (a) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de φ'.
   (b) Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction de φ' et φ''.
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(1+t^2)x''+2tx'=t \qquad (1)$$

   on pourra chercher à dériver l'expression $(1+t^2)x'$ *par rapport à* t.
3. On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\frac{y}{x^3},\quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R} \qquad (2)$$

   (a) Montrer que si g vérifie (2) alors φ vérifie l'équation différentielle (1).
   (b) En déduire l'expression de φ puis celle de g.
   (c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement des solutions de (2).

Exercice 2 : Pour un entier n supérieur à 1, on note I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que l'application $\mathrm{M}\mapsto {}^t\mathrm{M}\mathrm{M}-\mathrm{I}_n$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier que, si $\mathrm{A}=(a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall\,(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\quad |a_{i,j}|\leqslant 1$$

3. En déduire que le groupe orthogonal $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. On considère une matrice symétrique S dont les valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont toutes positives et on note Δ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
   Si A est une matrice orthogonale, on note $\mathrm{T}(\mathrm{A})$ le réel $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AS})$.

(a) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.

(b) Démontrer que l'application T de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.

(c) Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Exercice 3 : **Les deux parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes.**

On s'intéresse ici aux propriétés de la fonction polylogarithme, définie comme série entière, et à son prolongement grâce à une représentation intégrale.

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

1. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par : $L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

   (b) Justifier que l'application L_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

   (c) Montrer que :
$$\forall x \in]-1,1[,\ L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

2. (a) Pour tout $x \in]-1,1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.
   Exprimer $L_{\alpha+1}(x)$ sous forme de l'intégrale entre 0 et x d'une certaine fonction.

   (b) Pour $x \in]-1,1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha \leq 1$.
   Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures. Pour cela, on pourra chercher à minorer $L_\alpha(x)$ pour $x \in]0,1[$.

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1.

1. (a) Montrer que la fonction L_α définie dans la partie I est continue sur $[-1,1]$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.

2. (a) Montrer que l'application $\varphi : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   (b) Pour tout réel $x \leq 1$, justifier l'existence de $K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\,du$.

   (c) Montrer que l'application K_α ainsi définie est continue sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

   (d) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 2$.
   Montrer que la fonction K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

   (e) On revient au cas général où $\alpha > 1$.
   Montrer que la fonction K_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ avec $a < b < 1$, puis sur l'intervalle $]-\infty,1[$.

3. (a) Prouver l'existence de $G_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$ et justifier que $G_\alpha > 0$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout $u > 0$, on a :
$$\frac{1}{e^u - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-(k+1)u}.$$

(c) En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, en utilisant $L_\alpha(x)$ défini dans la partie I et $K_\alpha(x)$ défini dans la question 2. (b) de la partie II, on a la relation :

$$xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x).$$

On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

4. (a) Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on prolonge la définition de $L_\alpha(x)$ en posant :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\, du.$$

Montrer que l'application L_α ainsi définie est continue sur $]-\infty, 1]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

(b) Montrer que pour tout réel $x \leq 1$, on a :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt}\, dt.$$

(c) Justifier que l'on peut prolonger la fonction L_α sur $\mathbb{C} \setminus]1, +\infty[$ par la définition :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus]1, +\infty[,\ L_\alpha(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}\, du.$$

Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \notin]1, +\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

Exercice 1 : *D'après CNC TSI et MP 2009*

Partie I

1. (a) La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ qui est le domaine de continuité de la fonction racine carré. Donc $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue et la fonction $(x,y) \mapsto y^2-1$ étant polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2}$ comme somme de fonctions continues.

   (b) Pour $y \neq 0$, l'application partielle $h_{(\cdot,y)} : x \neq 0 \mapsto \sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe si $(x,y) \neq (0,0)$ et vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. De même, pour $x \neq 0$, l'application partielle $h_{(x,\cdot)} : y \neq 0 \mapsto \sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe si $(x,y) \neq (0,0)$ et vaut $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y$. Ces deux dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas donc $\boxed{h \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$.

   (c) L'application partielle $h_{(\cdot,0)} : x \mapsto \sqrt{x^2}-1$ n'est pas dérivable en 0 donc $\boxed{h \text{ n'admet pas de dérivée partielle par rapport à } x \text{ en } (0,0)}$. De même, l'application partielle $h_{(0,\cdot)} : y \mapsto \sqrt{y^2}+y^2-1$ n'est pas dérivable en 0 donc $\boxed{h \text{ n'admet pas de dérivée partielle par rapport à } y \text{ en } (0,0)}$.

2. (a) On a montré à la question 1.(a) que la fonction $f_1 : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc la fonction $f_2 : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}-2$ est continue aussi sur $\mathbb{R}^2$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathscr{U} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2}>0\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2}-2<0\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f_1(x,y)>0\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f_2(x,y)<0\}\end{aligned}$$

   Or f_1 et f_2 étant continues, d'après le cours, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2}>0\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2+y^2}-2<0\}$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et donc $\boxed{\mathscr{U} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2}$.

   (b) $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour étudier les points critiques de h sur $\mathscr{U}$, il faut chercher les couples (x,y) tels que $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Or, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &=& 0\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ |y|+2y &=& 0\end{array}\right.$$

   ce qui est impossible donc $\boxed{h \text{ n'admet pas de points critiques dans } \mathscr{U}}$.

   (c) La fonction $f_3 : (x,y) \mapsto x^2+y^2-4$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc d'après le cours, $\mathscr{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f_3(x,y) \leqslant 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus, si l'on note $||\cdot||_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ définie par, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ alors $\mathscr{D}$ est une partie bornée par 2 pour cette norme. L'espace $\mathbb{R}^2$ étant de dimension finie, $\mathscr{D}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ pour n'importe quelle norme. De plus, on a montré à la question 1 que h est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $\mathscr{D}$, $\boxed{h \text{ est donc bornée et atteint ses bornes sur } \mathscr{D}}$. De plus, d'après la question 2.(b), h n'admet pas de points critiques dans $\mathscr{U}$ qui est l'intérieur de $\mathscr{D}$. Mais un extremum est un point critique donc h atteint forcément ses bornes sur la frontière $\mathscr{C}$ de $\mathscr{D}$ qui est le cercle de rayon 2. Or si $(x,y)\in\mathscr{C}$ alors $h(x,y) = y^2+1$ qui atteint son maximum en $y=\pm 2$ et son minimum en $y=0$. $\boxed{\text{Les extremums de } h \text{ sont donc atteints en les points } (0,2),\ (0,-2),\ (2,0) \text{ et } (-2,0)}$.

Partie II

1. (a) La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{y}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas et φ étant une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \text{ comme composée de fonctions de classe } \mathscr{C}^2}$. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$$

(b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + 2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)}$$

2. L'équation différentielle (1) peut s'écrire : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 + t^2)x' = t$, soit $(1 + t^2)x' = \dfrac{t^2}{2} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Ce qui donne $x'(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 + t^2} + \dfrac{c}{1 + t^2}$.

$\boxed{\text{Les solutions des (1) sont donc de la forme : } \forall\ t \in \mathbb{R},\ x(t) = \dfrac{t}{2} + \lambda \mathrm{Arctan}\,(t) + \mu, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$.

3. (a) En injectant les formules obtenues à la question 1.(b) dans l'EDP (2), on obtient :

$$\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + 2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x^3}$$

ce qui donne, en multipliant par $x^2 \neq 0$:

$$\frac{y^2}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + 2\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$$

soit, en posant $t = \dfrac{y}{x}$: $t^2\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) + \varphi''(t) = t$ et donc $\boxed{\varphi \text{ est solution de (1)}}$.

(b) On obtient donc d'après la question 2 : $\boxed{\forall\ t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \dfrac{t}{2} + \lambda \mathrm{Arctan}\,(t) + \mu, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$ soit $\boxed{\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R},\ g(x, y) = \dfrac{y}{2x} + \lambda \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \mu, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$.

(c) Les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \dfrac{y}{2x} + \lambda \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \mu$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et on peut vérifier qu'elles sont bien solutions de (2).

Exercice 2 : *D'après CCP MP 2006*

1. Les coefficients de ${}^t\mathrm{MM} - \mathrm{I}_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M, donc d'après le cours, $\boxed{\text{l'application } \mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{MM} - \mathrm{I}_n \text{ est continue}}$.
2. D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique que $\boxed{\text{pour tout } i \in \{1, \cdots, n\},\ |a_{i,j}| \leq 1}$.
3. Si, pour tout $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||\mathrm{M}||_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée par 1 d'après la question précédente. L'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelque soit la norme utilisée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si l'on note f l'application $\mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{MM} - \mathrm{I}_n$ de la question

1, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = O_n\}$. On va montrer que c'est une partie fermée en utilisant la caractérisation séquentielle d'un fermé. Soit $(M_k)_k$ une suite de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. Montrons que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(M_k) = O_n$ et, comme f est continue d'après la question 1, $\lim\limits_{k\to+\infty} f(M_k) = f(M)$ donc $f(M) = O_n$ et $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a donc montré que $\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

4. (a) Comme S est une matrice symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée d'après le théorème spectral, donc il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta\, {}^tP$. Ainsi :

$$T(A) = \mathrm{Tr}(AP\Delta P^{-1}) = \mathrm{Tr}((AP\Delta)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(AP\Delta)) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$$

en posant $B = P^{-1}AP$. Et comme A et P sont toutes deux orthogonales, B est orthogonale. On a donc construit $\boxed{B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)}$.

(b) Par linéarité de la trace, on vérifie que, pour tout $(C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}((\alpha C + D)S) = \alpha\mathrm{Tr}(CS) + \mathrm{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \mathrm{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après la question 3, donc $\boxed{\text{T admet un maximum sur } \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$.

(c) $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient d'une matrice M :

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n} (B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\Delta_{j,i}$$

mais Δ est diagonale, donc $T(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$. D'après la question 2, et les λ_i étant positifs, $T(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$. Ainsi $t \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, mais de plus $\mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $\boxed{t = \mathrm{Tr}(S)}$.

Exercice 3 : *(d'après CCP PC 2012)*

Partie I

1. (a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et n un entier supérieur à 1, on pose $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. On a alors, pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{x^{n+1}}\dfrac{x^n}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} = x$ donc par le critère de d'Alembert appliqué aux séries entières, $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière est égal à 1}}$.

(b) L_α est définie comme la somme d'une série entière. Or d'après le cours, la somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$. Or ici $R = 1$ d'après la question précédente, donc $\boxed{L_\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[}$.

(c) Tout d'abord, pour $x \in]-1,1[$, $-x$ et $x^2 \in]-1,1[$ donc $L_\alpha(-x)$ et $L_\alpha(x^2)$ existent. De plus :

$$L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n^\alpha} = 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)^\alpha} = 2^{1-\alpha}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p^\alpha}$$

soit $\boxed{\forall\, x \in]-1,1[,\ L_\alpha(x) + L_\alpha(-x) = 2^{1-\alpha}L_\alpha(x^2)}$.

2. (a) On sait d'après la question 1.(b) que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, L_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et d'après le cours, pour $x \in]-1,1[$, $L'_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}}$, on obtient donc :

$$xL'_{\alpha+1}(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

soit $\boxed{\forall\, x \in]-1,1[,\ x\mathrm{L}'_{\alpha+1}(x) = \mathrm{L}_\alpha(x)}$. On en déduit donc que, pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{L}'_{\alpha+1}(x) = \dfrac{\mathrm{L}_\alpha(x)}{x}$. Or $\mathrm{L}_\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, par conséquent, la fonction $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}_\alpha(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $]-1,1[$ et $\mathrm{L}_{\alpha+1}$ est l'unique primitive de cette fonction qui s'annule en 0, soit $\boxed{\forall\, x \in]-1,1[,\ \mathrm{L}_{\alpha+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{L}_\alpha(t)}{t}\mathrm{d}t}$.

(b) Pour $\alpha = 0$ et $x \in]-1,1[$, $\mathrm{L}_0(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1$ soit $\boxed{\mathrm{L}_0(x) = \dfrac{x}{1-x}}$.

Pour $\alpha = -1$ et $x \in]-1,1[$, $\mathrm{L}_{-1}(x) = x\mathrm{L}'_0(x)$ d'après la question 2.(a) soit $\boxed{\mathrm{L}_{-1}(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$.

Pour $\alpha = 1$ et $x \in]-1,1[$, $\mathrm{L}_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ soit $\boxed{\mathrm{L}_1(x) = -\ln(1-x)}$.

3. Pour $\alpha \leqslant 1$ et $x \in]0,1[$, on a d'après la question 2.(a) : $\mathrm{L}'_\alpha(x) = \dfrac{\mathrm{L}_{\alpha-1}(x)}{x} \geqslant 0$. Donc L_α est croissante sur $]0,1[$ et donc :
   - soit elle est majorée et dans ce cas, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures ;
   - soit elle n'est pas majorée et alors $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \mathrm{L}_\alpha(x) = +\infty$.

   Dans tous les cas, notons ℓ sa limite en 1^- (finie ou égale à $+\infty$).

   De plus, pour tous $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$, $\mathrm{L}_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{n^\alpha}$ donc, en passant à la limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$.

   Mais comme $\alpha \leqslant 1$, par le critère de Riemann, on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$. On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \mathrm{L}_\alpha(x) = +\infty}$.

Partie II

1. (a) Pour $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$. Alors f_n est continue sur $[-1,1]$, elle est donc bornée sur le segment $[-1,1]$ et $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui est le terme d'une série convergente si $\alpha > 1$ d'après le critère de Riemann. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1,1]$ et donc, par un théorème du cours, sa somme $\boxed{\mathrm{L}_\alpha \text{ est une fonction continue sur } [-1,1]}$.

   (b) D'après la question **I**.2.(a), pour tout $x \neq 0$ de l'intervalle $[-1,1]$, on a : $\mathrm{L}'_2(x) = \dfrac{\mathrm{L}_1(x)}{x}$. Or on a vu à la question **I**.3 que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \mathrm{L}_1(x) = +\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \mathrm{L}'_2(x) = +\infty}$ et donc $\boxed{\mathrm{L}_2 \text{ n'est pas dérivable en } 1}$.

2. (a) L'application φ est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   De plus, au voisinage de 0, on a : $\varphi(u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} \sim \dfrac{u^{\alpha-1}}{u} = \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$ avec $2-\alpha < 1$ donc φ est intégrable en 0 d'après le critère de Riemann.

   Enfin, au voisinage de $+\infty$, on a : $\varphi(u) = \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-1} = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ donc φ est intégrable en $+\infty$ d'après le critère de Riemann avec $2 > 1$.
   On a donc montré que $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$.

(b) Pour $x \leqslant 1$ et $u > 0$, on a : $0 < e^u - 1 \leqslant e^u - x$ donc $0 \leqslant \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} \leqslant \varphi(u)$ or on a montré que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc, par comparaison $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est aussi intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\boxed{\mathrm{K}_\alpha(x) \text{ existe}}$.

(c) (i) Pour tout $x \leqslant 1$, l'application $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue sur $]0,+\infty[$;

(ii) pour tout $u > 0$, l'application $x \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue sur $]-\infty,1]$;

(iii) pour tous $u > 0$ et $x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} \leqslant \varphi(u)$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question 2.(a).

On en déduit par le théorème de continuité sous le signe intégral que $\boxed{\mathrm{K}_\alpha \text{ est continue sur }]-\infty,1]}$.

(d) On considère $\alpha > 2$.

(i) Pour tout $x \leqslant 1$, l'application $u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$;

(ii) pour tout $u > 0$, l'application $x \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1]$;

(iii) pour tout $x \leqslant 1$, l'application $u \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} = \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$;

(iv) pour tous $u > 0$ et $x \leqslant 1$, on a $0 < e^u - 1 \leqslant e^u - x$ donc $0 < (e^u - 1)^2 \leqslant (e^u - x)^2$ donc $0 \leqslant \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - 1)^2}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$ et équivalente à $\dfrac{1}{u^{3-\alpha}}$ en 0 avec $3-\alpha < 1$ donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, $\boxed{\mathrm{K}_\alpha \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-\infty,1]}$.

(e) Pour $\alpha > 1$, les trois premières propositions de la question précédente sont toujours vérifiées et pour le point (iv), pour tous $u > 0$ et $x \in [a,b]$ avec $a < b < 1$, le fait que $0 < e^u - b \leqslant e^u - x$ implique que : $0 \leqslant \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2} \leqslant \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - b)^2}$ qui est une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ par le même raisonnement que celui fait à la question précédente. On en déduit en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral que $\boxed{\mathrm{K}_\alpha \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur tout segment } [a,b] \text{ inclus dans }]-\infty,1] \text{ et donc sur }]-\infty,1[}$.

3. (a) Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, $\boxed{\mathrm{G}_\alpha \text{ existe}}$. De plus, $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$ donc, comme cette fonction est continue, son intégrale est strictement positive, soit $\boxed{\mathrm{G}_\alpha > 0}$.

(b) Pour tous $x \in [-1,1]$ et $u > 0$, $\dfrac{1}{e^u - x} = \dfrac{1}{e^u}\dfrac{1}{1-\frac{x}{e^u}}$ avec $\left|\dfrac{x}{e^u}\right| \leqslant \dfrac{1}{e^u} < 1$ donc $\dfrac{1}{e^u - x} = \dfrac{1}{e^u}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{e^u}\right)^k$

soit $\boxed{\dfrac{1}{e^u - x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} = x^k e^{-(k+1)u}}$.

(c) Pour $x \in [-1,1]$:

$$x\mathrm{K}_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} x\frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u^{\alpha-1}x^k e^{-ku}\mathrm{d}u$$

Pour intervertir l'intégrale et la somme, on va utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions. Pour cela, posons pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0$, $g_k(u) = u^{\alpha-1}x^k e^{-ku}$. Les fonctions g_k sont continues et intégrables sur $[0,+\infty[$ par les mêmes arguments que ceux invoqués à la question 3.(a), de plus, le calcul effectué à la question 3.(b) montre que la série de fonction $\sum g_k$ converge simplement vers la fonction $g\ :\ u\mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}x}{e^u-x}$. Enfin :

$$\int_0^{+\infty}|g_k(u)|\mathrm{d}u = x^k\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-ku}\mathrm{d}u$$

et, en posant $t=ku$ ($u\mapsto ku$ est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone), on obtient :

$$\int_0^{+\infty}|g_k(u)|\mathrm{d}u = x^k\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{k}\right)^{\alpha-1}e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{k} = \mathrm{G}_\alpha\frac{x^k}{k^\alpha}$$

Or pour $x\in[-1,1]$, $\left|\dfrac{x^k}{k^\alpha}\right|\leqslant\dfrac{1}{k^\alpha}$ qui est le terme d'une série convergente car $\alpha>1$. Donc la série numérique $\sum\displaystyle\int_0^{+\infty}|g_k(u)|\mathrm{d}u$ converge et donc on peut intervertir la somme et l'intégrale dans le calcul de $x\mathrm{K}_\alpha(x)$:

$$x\mathrm{K}_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}x^k\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-ku}\mathrm{d}u = \mathrm{G}_\alpha\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^\alpha}$$

soit $\boxed{x\mathrm{K}_\alpha(x)=\mathrm{G}_\alpha\mathrm{L}_\alpha(x)}$.

4. (a) Par construction, pour $x\in[-1,1]$, on a $\mathrm{L}_\alpha(x)=\dfrac{x\mathrm{K}_\alpha(x)}{\mathrm{G}_\alpha}$. Or on a vu aux questions 2.(c) et 2.(e) que la fonction K_α est continue sur $[1,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ donc $\boxed{\mathrm{L}_\alpha \text{ est continue sur } [1,+\infty[\text{ et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]1,+\infty[}$.

(b) L'application $u\mapsto e^{-u}$ est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante. On peut donc poser le changement de variable $t=e^{-u}\iff u=-\ln(t)$ pour calculer $\mathrm{L}_\alpha(x)$:

$$\mathrm{L}_\alpha(x)=\frac{x}{\mathrm{G}_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{1-xe^{-u}}\mathrm{d}u=\frac{x}{\mathrm{G}_\alpha}\int_0^1\frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}t}{1-xt}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

soit $\boxed{\mathrm{L}_\alpha(x)=\dfrac{x}{\mathrm{G}_\alpha}\displaystyle\int_0^1\frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1-xt}\mathrm{d}t}$.

(c) Pour $z\in\mathbb{C}$, posons $z=a+ib$ avec a et b des réels. Alors la fonction $u\mapsto\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-z}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car son dénominateur ne peut pas s'annuler si $z\notin]1,+\infty[$. De plus :

- si $b=0$ alors $z=a\in]-\infty,1]$ et on sait d'après la question 2.(b) que $u\mapsto\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u-a}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$;
- si $b\neq0$ alors :

$$\left|\frac{u^{\alpha-1}}{e^u-z}|\right|=\frac{u^{\alpha-1}}{\sqrt{(e^u-a)^2+b^2}}$$

est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après le critère de Riemann.

On a donc montré que $\boxed{\forall\ z\in\mathbb{C}\backslash]1,+\infty[,\ \mathrm{L}_\alpha(z) \text{ est bien défini et prolonge la fonction } \mathrm{L}_\alpha}$.

De plus, si $z^2\notin]1,+\infty[$ alors z et $-z\notin]1,+\infty[$ alors $\mathrm{L}_\alpha(z)$, $\mathrm{L}_\alpha(-z)$ et $\mathrm{L}_\alpha(z^2)$ existent et on peut calculer $\mathrm{L}_\alpha(z)+\mathrm{L}_\alpha(-z)$ à l'aide du changement de variable affine $u=2v$:

$$\mathrm{L}_\alpha(z)+\mathrm{L}_\alpha(-z)=\frac{2z^2}{\mathrm{G}_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{e^{2u}-z^2}\mathrm{d}u=\frac{2z^2}{\mathrm{G}_\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{(v/2)^{\alpha-1}}{e^v-z^2}\frac{\mathrm{d}v}{v}=2^{1-\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{e^v-z^2}\mathrm{d}v$$

soit $\boxed{\mathrm{L}_\alpha(z)+\mathrm{L}_\alpha(-z)=2^{1-\alpha}\mathrm{L}_\alpha(z^2) \text{ pour tout } z\in\mathbb{C} \text{ tel que } z^2\notin]1,+\infty[}$.

Barème

Exercice 1 : Calcul différentiel - EVN

Compétences	**NA**	**MA**	**A**	Points
1. (a) Nature d'une série				/1
1. (b) Ca Egalité entre les sommes de séries et récurrence forte				/3
2. Nature de 2 séries (série alternée et/ou utilisation d'un DL)				/3