

Correction du devoir maison n° 2

Exercice (Type oral de CCP 2015).

1. (a) Si $n \geq 2$, alors comme $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n(\ln n)^\alpha} \geq \frac{1}{n(\ln 2)^\alpha} \geq 0$ qui est le terme d'une série proportionnelle à la série harmonique donc divergente. Ainsi, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

- (b) Si $\alpha > 0$ alors la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x)^\alpha)}$ est décroissante et positive sur $[2; +\infty[$, donc par comparaison série-intégrale, pour $n \geq 2$ fixé, on a :

$$\sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=2}^n f(k) \leq f(2) + \int_2^n f(t) dt$$

soit

$$\sum_{k=2}^n u_k \leq \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} = \frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)\ln(n)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)\ln(2)^{\alpha-1}}$$

Dans le cas où $\alpha > 1$, le terme de droite de cette inégalité admet une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$, donc la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est majorée. On en déduit que

$\sum u_n$ converge car c'est une série à termes positifs.

2. Pour $n \geq n$, on a $u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2} \geq 0$. Cherchons un équivalent de u_n .

- Pour le numérateur :

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e - e \times e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \\ &= \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

De plus, $e^{\frac{1}{n}} \sim 1$ quand n tend vers $+\infty$, on a donc :

$$\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}} \sim \frac{e}{2n}$$

- Pour le dénominateur :

$$(\ln(n^2 + n))^2 = \left(\ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim (\ln(n^2))^2 = (2 \ln n)^2 = 4(\ln n)^2$$

Donc $u_n \sim \frac{e}{8n(\ln n)^2}$ qui est le terme d'une série convergente, d'après la question 1. (b) avec $\alpha = 2 > 1$. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

Problème. Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Partie 1. Écriture de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ sous forme intégrale

1. On fait une double intégration par parties avec $u''(t) = \cos(nt)$ et $v(t) = at^2 + bt$, deux fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; \pi]$ qui nous donne :

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}((-1)^n(2a\pi + b) - b)$$

Si on choisit les réels a et b tels que $2a\pi + b = 0$ et $b = -1$, c'est à dire $a = \frac{1}{2\pi}$ et $b = -1$, alors on a $\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$ pour tout entier non nul n .

2. Il suffit de remplacer $\frac{1}{k^2}$ par $\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(kt) dt$ avec les a et b choisis dans la question précédente et de permuter l'intégrale avec la somme finie pour k variant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt$$

3. C'est une question de cours vue en sup : il faut utiliser la formule des sommes des termes d'une suite géométrique.

- Si t est tel que $e^{ikt} = 1$, c'est à dire si $t \equiv 0[2\pi]$ alors $\sum_{k=1}^n e^{ikt} = n$.
- Sinon,

$$\sum_{k=1}^n e^{ikt} = e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} = e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} = e^{it} \frac{e^{int/2}(e^{-int/2} - e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) \\ &= \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

(on a utilisé la formule de trigonométrie : $\cos a \sin b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$ pour simplifier la deuxième expression).

4. L'intégrale de la question 2. se faisant sur $]0; \pi[$, on peut injecter cette seconde formule dans l'égalité de la question 2. pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt + \int_0^\pi \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin(t/2)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \end{aligned}$$

avec, pour $t \in]0; \pi]$, $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin(t/2)}$.

5. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \pi]$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, en 0, comme $\sin(t/2) \sim t/2$, on a $f(t) \sim \frac{t}{2\pi} - 1$ et f peut donc être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$.



Ce n'est pas parce que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrons que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ en montrant que f' admet aussi une limite finie en 0. Pour cela, on peut faire un développement limité de

$$f'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin(t/2) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(t/2)}{4 \sin^2(t/2)}$$

et on trouve que $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{1}{2\pi}$. Donc f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.

Partie 2. Une version du théorème de Riemann-Lebesgue

1. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut faire une intégration par parties pour calculer $\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt$ avec $u' : t \mapsto e^{i\lambda t}$ continue et $v = f$ de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient alors :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \left[\frac{e^{i\lambda t} f(t)}{i\lambda} \right]_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{i\lambda} \left(e^{i\lambda b} f(b) - e^{i\lambda a} f(a) - \int_a^b f'(t) e^{i\lambda t} dt \right)$$

Mais $\lambda > 0$ et pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = 1$, on a donc, par l'inégalité triangulaire pour les réels puis pour les intégrales :

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(a)| + |f(b)| + \left| \int_a^b f'(t) dt \right| \right) \leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right)$$

2. L'inégalité précédente nous permet d'affirmer que $\lambda \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt$ est bornée et donc que

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$. De plus, comme f est une fonction réelle, pour tout $t \in [a; b]$:

$$\operatorname{Re}(f(t)e^{i\lambda t}) = f(t) \cos(\lambda t) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f(t)e^{i\lambda t}) = f(t) \sin(\lambda t)$$

on a donc :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

Partie 3. Conclusion

Il est maintenant facile de conclure sur la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. En effet, il existe, d'après la partie 1, une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$ telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt$$

Mais, d'après la partie 2, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2} = +\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = 0$$

ce que implique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$