Devoir maison n° 4

À rendre pour le vendredi 28 novembre.

Exercice. Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$, d'après CCP-PSI-13

1. (a) La fonction $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2) dt$ est la primitive de g qui s'annule en 0 :

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient en utilisant la parité de g et $u = -t$:

$$f(-x) = \int_0^{-x} \exp(-t^2) dt = \int_0^x e^{-u^2} (-du) = -f(x).$$

Donc f est une fonction impaire.

- (b) $f' = g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{P}(n)$, la propriété suivante : « il existe une fonction polynôme p_n , de degré $n-1$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = p_n(x) \exp(-x^2)$ ».

On va montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ par récurrence.

- Initialisation : Sachant que $f'(x) = -2x \exp(-x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec $p_1 = 1$ de degré 0.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On obtient alors pour tout x :

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)'}(x) = [p_n'(x) - 2xp_n(x)] \exp(-x^2).$$

En notant $p_{n+1} : x \mapsto p_n'(x) - 2xp_n(x)$ on a bien une fonction polynôme de degré n donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (c) f est impaire et en dérivant n fois la relation « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)$ » on obtient « $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} f^{(n)}(-x)$ »
 p_n est paire (respectivement impaire) quand n est impair (respectivement pair).

- (d) La fonction $g : t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue positive sur $\mathbb{R}$, donc pour montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de la majorer par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $t \geq 1$ alors $t \leq t^2$ et donc :

$$0 \leq \exp(-t^2) \leq \exp(-t)$$

or $t \mapsto \exp(-t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par comparaison g est intégrable sur $[1, +\infty[$.
 Donc $g = f'$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc f admet une limite finie en $+\infty$.

2. (a) On peut étudier la fonction $u \mapsto e^u - 1 - u$ en montrant qu'elle est positive sur $\mathbb{R}$.

- (b) Soit n un entier naturel non nul.

D'après la relation précédente en $-u$ on a pour $u \leq 1 : 0 \leq 1 - u \leq e^{-u}$, on élève ensuite à la puissance $n : (1 - u)^n \leq e^{-nu}$ si $u \leq 1$.

D'après la relation précédente en u on a pour $u > -1 : 0 < 1 + u \leq e^u$, on élève ensuite à la puissance $-n : e^{-nu} \leq \frac{1}{(1+u)^n}$ si $u > -1$.

(c) Soit n un entier naturel non nul.

Pour $x \in [0, 1]$, on a $u = x^2 > -1$ donc $(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2}$ donc en intégrant sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \text{ puis } \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-nx^2} dx \text{ (car } \exp(-nx^2) \geq 0 \text{)}.$$

Par ailleurs la seconde relation de la question 2.(b) donne pour $x \geq 0$, $e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$

relation que l'on peut intégrer car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ converge (par comparaison à $\frac{1}{x^2}$ pour la borne $+\infty$). D'où finalement :

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

(d) En utilisant le changement de variable $x = \sin \theta$ ($\theta \mapsto \sin \theta$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$) :

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^n \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta = W_{2n+1};$$

avec $x = \frac{1}{\sqrt{n}}u$ (changement de variable affine de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif strictement croissant de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{n}} du = \frac{\Delta}{\sqrt{n}};$$

et avec $x = \tan \theta$ (de classe C^1 sur $[0, \pi/2[$, bijectif strictement croissant de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$), $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta)^n \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = W_{2n-2}.$$

La relation de la question 2.(c) s'écrit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1} \leq \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leq W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, on obtient $W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de même pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc par passage à la limite $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \Delta \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'où la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Problème ouvert. Pour modéliser le problème mathématiquement, on interroge au hasard une personne de la région donnée et, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les événements suivants :

- C_n : « la personne vit à la campagne l'année 2014+n »
- M_n : « la personne vit dans une maison en ville l'année 2014+n »
- A_n : « la personne vit dans un appartement en ville l'année 2014+n »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements C_n , M_n et A_n forment un système complet d'événements et d'après l'énoncé, on a :

- $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1$ et donc $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ et $P_{C_n}(M_{n+1}) = 0$;
- $P_{M_n}(C_{n+1}) = 0,5$ et $P_{M_n}(A_{n+1}) = 0$ donc $P_{M_n}(M_{n+1}) = 0,5$;
- $P_{A_n}(M_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$ donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

On obtient donc, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (C_n, M_n, A_n) :

- $P(C_{n+1}) = P(C_n) + 0,5P(M_n) + \frac{1}{3}P(A_n)$;
- $P(M_{n+1}) = 0,5P(M_n) + \frac{1}{3}P(A_n)$;
- $P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n)$.

Ce qui se traduit matriciellement par l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$ avec pour $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} P(C_n) \\ P(M_n) \\ P(A_n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On démontre facilement par récurrence qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$ et il nous faut donc calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, il faut diagonaliser la matrice A (les calculs, plutôt bien faits dans l'ensemble, ne seront pas détaillés dans le corrigé) et on obtient, pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{3^n} - \frac{2}{3^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(C_0) \\ P(M_0) \\ P(A_0) \end{pmatrix}$$

ce qui donne, pour tout $n \geq 1$: $P(C_n) = P(C_0) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) P(M_0) + \left(1 + \frac{1}{3^n} - \frac{2}{3^n}\right) P(A_0)$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1$, ce qui signifie qu'à terme, tous les habitants de cette région habiteront à la campagne.