Correction du devoir maison n° 6

Exercice. 1. X prend ses valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. Pour déterminer la loi de probabilité de X , introduisons les événements $A_i =$ « la bonne clé a été utilisée à la $i^{\text{ème}}$ tentative avec la méthode A », pour $i \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$. Alors, pour tout $n \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$, par la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) \\ &= P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \times \dots \times P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-2}}}(\overline{A_{n-1}}) \times P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}}(A_n) \\ &= \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{9 - (n-2)}{10 - (n-2)} \times \frac{1}{9 - (n-2)} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

La loi de X est donc la loi uniforme sur $\llbracket 1; 10 \rrbracket$.

2. Cette fois-ci, introduisons les événements $B_i =$ « la bonne clé a été utilisée à la $i^{\text{ème}}$ tentative avec la méthode B », pour tout $i \in \mathbb{N}, i \geq 1$. Contrairement à la méthode A, les événements B_i sont mutuellement indépendants car les choix des clés précédentes n'influencent pas les choix suivants et pour tout $i \in \mathbb{N}, i \geq 1, P(B_i) = \frac{1}{10}$. De plus, l'événement « ouvrir la porte au bout du $n^{\text{ième}}$ essai avec la méthode B » est l'événement $\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$, ainsi, par indépendance, on obtient que

la probabilité d'ouvrir la porte au bout du $n^{\text{ième}}$ essai avec la méthode B est égale à $\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \frac{1}{10}$

(plus tard on saura reconnaître la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{10}$).

3. Dans cette situation, il faut construire une suite $(E_n)_n$ décroissante d'événements telle que :

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1} E_n =$ « le gardien n'ouvre jamais la porte avec la méthode B ». Les événements définis par : pour $n \geq 1, E_n =$ « la bonne clé n'a toujours pas été trouvée au bout de la $n^{\text{ième}}$ tentative avec la méthode B » vérifient cette propriété. De plus, pour tout $n \geq 1, E_n = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n}$ et donc $P(E_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n$ par indépendance mutuelle des événements B_i .

Ainsi, par continuité décroissante :

$$P(\text{« le gardien n'ouvre jamais la porte avec la méthode B »}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

4. Introduisons les événements $C =$ « la bonne clé n'a toujours pas été trouvée au bout de la $8^{\text{ième}}$ tentative » et $\mathcal{I} =$ « le gardien est ivre ». On sait que $P(\mathcal{I}) = \frac{1}{3}$ et on cherche à déterminer $P_C(\mathcal{I})$ alors qu'on connaît plutôt des probabilités conditionnées par $\mathcal{I}$ et $\overline{\mathcal{I}}$, on va donc appliquer la formule de Bayes avec le système complet d'événements $(\mathcal{I}, \overline{\mathcal{I}})$:

$$P_C(\mathcal{I}) = \frac{P_{\mathcal{I}}(C)P(\mathcal{I})}{P_{\mathcal{I}}(C)P(\mathcal{I}) + P_{\overline{\mathcal{I}}}(C)P(\overline{\mathcal{I}})}$$

Or, avec les notations des questions précédentes, $P_{\mathcal{I}}(C) = P(E_8) = \left(\frac{9}{10}\right)^8$ et

$$P_{\overline{\mathcal{I}}}(C) = P(X \in \{9, 10\}) = \frac{2}{10} \text{ et donc : } P_C(\mathcal{I}) = \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{10}\right)^8 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{3}} \simeq 0,52.$$

Problème.

Partie 1. 1. arccos étant continue sur $[-1, 1]$ (bijection réciproque d'une fonction continue) et cos étant continue sur $\mathbb{R}$, c_n est continue sur $[-1, 1]$ comme composée de fonctions continues.

2. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$. On a alors immédiatement :

$$c_0(x) = 1 \text{ et } c_1(x) = x$$

Les formules élémentaires de trigonométrie donnent : $c_2(x) = 2x^2 - 1$, de plus :

$$\begin{aligned} c_3(x) &= \cos(3 \arccos(x)) \\ &= \cos(2 \arccos(x))x - \sin(2 \arccos(x)) \sin(\arccos(x)) \\ &= (2x^2 - 1)x - 2 \cos(\arccos(x)) \sin^2(\arccos(x)) \\ &= 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

4. Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $\theta = \arccos(x)$. Alors, pour $n \geq 1$, $c_n(x) = \cos(n\theta)$ et :

$$\begin{aligned} c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) \\ &= 2 \cos(n\theta) \cos(\theta) \\ &= 2x c_n(x) \end{aligned}$$

car $c_1(x) = x$.

5. On montre par une récurrence double que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et si $n \geq 1$, alors le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

Le coefficient dominant de T_0 est lui égal à 1.

- **Initialisation** : le résultat est vrai aux rangs 0 et 1 par définition.

- **Hérédité** : soit $n \geq 1$ tel que le résultat est vrai aux rangs $n-1$ et n . On a alors $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ avec un coefficient devant X^{n+1} égal à deux fois le coefficient dominant de T_n et valant donc 2^n . Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est échelonnée en degré et donc libre. Elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et cet espace est de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Soit $x \in [-1, 1]$. On montre par une récurrence immédiate à partir de la question 4 et de la définition des T_n que $c_n(x) = T_n(x)$ pour tout n (on initialise pour $n=0$ et $n=1$ et les deux suites $(T_n(x))$ et $(c_n(x))$ vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2).

Partie 2. 1.a. • Commençons par montrer que, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale généralisée

$\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente. La fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1; 1[$, mais elle n'est pas définie en 1 et en -1 . De plus, au voisinage de $t = 1$:

$$\left| \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \sim \frac{|P(1)||Q(1)|}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$

donc la fonction $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable en 1 d'après le critère de Riemann en $1-t=0$ avec

$\alpha = \frac{1}{2}$. Par parité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, le même raisonnement s'applique pour montrer que la fonction est intégrable en -1 . L'intégrale proposée est donc absolument convergente donc convergente.

- De plus, l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est une forme.

- Elle est clairement symétrique et linéaire par rapport à la seconde variable (par linéarité de l'intégrale) et donc bilinéaire.

- Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|P) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0$ (on intègre une fonction positive et les bornes sont dans le bon sens).

- Comme la fonction intégrée est **positive ET continue** sur $] -1, 1[$, il n'y a nullité que si la fonction est nulle c'est à dire si P est nulle sur $] -1, 1[$. Ceci implique que P a une infinité de racines, donc que c'est le polynôme nul. Donc l'application est définie positive et définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta)) d\theta$$

- Si $p \neq q$, alors $p+q \neq 0$ et $p-q \neq 0$ et donc

$$I_{p,q} = \left[\frac{1}{p+q} \sin((p+q)\theta) + \frac{1}{p-q} \sin((p-q)\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0$$

- Si $p = q = 0$ alors $p+q = p-q = 0$ et $I_{0,0} = \pi$.
- Si $p = q \neq 0$ alors $p+q \neq 0$ et $p-q = 0$ et $I_{p,p} = \frac{\pi}{2}$.

1.c. La fonction $\cos$ étant une application de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0, \pi[$ dans $] -1, 1[$, on peut poser $x = \cos(\theta)$ pour obtenir (puisque $T_n = c_n, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ quand $\theta \in]0, \pi[$)

$$\int_{-1}^1 \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta = I_{p,q}$$

La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est ainsi orthogonale d'après la question précédente. C'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ mais pas orthonormale puisque $\|T_0\|^2 = \pi$ et $\forall k \geq 1, \|T_k\|^2 = \pi/2$ ne valent pas 1.

- 1.d. T_n étant orthogonal à $T_0, \dots, T_{n-1}$, il est dans l'orthogonal de $\text{Vect}(T_0, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- 1.e. Pour $n \geq 1, T_n - 2^{n-1}X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après 1.5. Son produit scalaire avec T^n est donc nul ce qui donne

$$(T_n | X^n) = \frac{1}{2^{n-1}} \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2^n}$$

2.a. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ étant une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose de façon unique sur cette famille, on a même :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{(P | T_k)}{\|T_k\|^2} T_k$$

2.b. On vient de voir que :

$$b_n = \frac{(P | T_n)}{\|T_n\|^2} = \frac{2(P | T_n)}{\pi}$$

En écrivant $P = X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, comme $(Q | T_n) = 0$, on obtient

$$b_n = \frac{2(X^n | T_n)}{\pi} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

2.c. Toujours d'après les formules en bases orthogonales :

$$\|P\|^2 = \sum_{k=0}^n b_k^2 \|T_k\|^2 \geq b_n^2 \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} b_n^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

2.d. D'après la question précédente :

$$\forall (a_0, \dots, a_{n-1}), \int_{-1}^1 \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \|X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\|^2 \geq \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

Et donc $\inf_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_{-1}^1 \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$, qui représente la distance au carré entre X^n et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est minorée par $\frac{\pi}{2^{2n-1}}$. De plus, le polynôme $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ étant unitaire de degré n , il existe

$\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que $\frac{T_n}{2^{n-1}} = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. Pour ce polynôme, $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ et :

$$\int_{-1}^1 \frac{(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left\| \frac{T_n}{2^{n-1}} \right\|^2 = \frac{\|T_n\|^2}{2^{2n-2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

Le minorant $\frac{\pi}{2^{2n-1}}$ est donc atteint, c'est un minimum et

$$\min_{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_{-1}^1 \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$$

On a donc mieux qu'une borne inférieure.

Partie 3. 1. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a $x_k \in]-1, 1[$ et donc $T_n(x_k) = c_n(x_k)$. Comme $\theta_k \in [0, \pi]$, $c_n(x_k) = \cos(n\theta_k) = 0$ car $n\theta_k = \pi/2[\pi]$. $x_1, \dots, x_n$ sont donc racines de T_n . Elles sont distinctes car $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ et car les θ_k sont des éléments distincts de $[0, \pi]$. Comme $\deg(T_n) = n$, T_n admet enfin au plus n racines (comptées avec leurs multiplicités). Finalement, $x_1, \dots, x_n$ sont exactement les racines de T_n et ce sont, en plus, des racines simples.

2.a. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $Q = \sum_{i=1}^n Q(x_i)L_i$ (c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui prend la valeur $Q(x_i)$ au point x_i et il n'y en a qu'un et donc c'est Q). Ceci montre que $(L_1, \dots, L_n)$ (famille de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$) engendre $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par cardinal et dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

2.b. Soit $G \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a $\sum_{i=1}^n G(x_i)L_i = G$ (on vient de le rappeler) et donc

$$\int_{-1}^1 \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{i=1}^n G(x_i) \int_{-1}^1 \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

ce qui est la formule demandée.

2.c.i D'après le principe de la division euclidienne de $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ par T_n , il existe un unique couple de polynômes (S, U) tel que $R = T_n S + U$ et $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, $T_n S = R - U$ est de degré $\leq 2n-1$ et T_n de degré n donc S est de degré $\leq n-1$. On a ainsi existence et unicité de la décomposition demandée.

2.c.ii On a alors T_n et S que sont orthogonaux (avec II.1.d) et car $U(x_i) = R(x_i)$ puisque $T_n(x_i) = 0$.

2.d.i On a $\forall \theta \in [0, \pi]$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Dérivons cette relation par rapport à θ :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \sin(\theta) T_n'(\cos(\theta)) = n \sin(n\theta)$$

Comme $\sin(\theta_k) = \sqrt{1 - \cos(\theta_k)^2}$ (car $\theta_k \in [0, \pi]$ et son sinus est positif) on obtient

$$\forall k \in [1, n], \sqrt{1 - x_k^2} T_n'(x_k) = n \sin(n\theta_k) = n(-1)^{k+1}$$

On a donc bien $(\sqrt{1 - x_k^2} \neq 0)$

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sqrt{1 - x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sin(\theta_k)}$$

2.d.ii Notons que $T_n'(x_k) \neq 0$ avec l'expression que l'on vient d'obtenir. T_n est scindé à racines simples égales à $x_1, \dots, x_n$. Comme il est de coefficient dominant 2^{n-1} , on a

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

On a donc

$$\forall x \neq x_k, \psi_k(x) = \frac{2^{n-1}}{T_n'(x_k)} \prod_{i=1}^n (X - x_i) = Q_k(x)$$

et $Q_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \psi_k(x) = \frac{1}{T_n'(x_k)} \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{T_n(x) - T_n(x_k)}{x - x_k} = 1 = \psi_k(x_k)$$

Par continuité de Q_k , l'égalité $\psi_k = Q_k$ est vraie sur tout $\mathbb{R}$. ψ_k est donc un polynôme de degré $n-1$. Il est nul en x_i pour $i \neq k$ et vaut 1 en x_k . C'est donc exactement L_k .

2.d.iii En multipliant haut et bas par $\theta - \theta_k$ on voit apparaître deux taux d'accroissement et on a alors

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} = \frac{j \sin(j\theta_k)}{\sin(\theta_k)}$$

L'application $\theta \mapsto \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$ est continue sur $[0, \pi] \setminus \{\theta_k\}$ (toujours par bijectivité de $\cos$ sur $[0, \pi]$, le dénominateur ne s'annule qu'en θ_k). On vient de voir qu'elle est prolongeable par continuité en θ_k . Son intégrale existe donc bien sur le segment $[0, \pi]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).

Par définition (et 2.d.ii), on a (le changement de variable a été justifié dans une question antérieure)

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \int_{-1}^1 \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) - T_n(x_k)}{(x - x_k) T'_n(x_k) \sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{T'_n(x_k)} \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) - \cos(n\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} d\theta \text{ avec } x = \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{T'_n(x_k)} u_n \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k) \end{aligned}$$

2.d.iv On a

$$\begin{aligned} u_{j+1} + u_{j-1} &= \int_0^\pi \frac{\cos((j+1)\theta) - \cos((j+1)\theta_k) + \cos((j-1)\theta) - \cos((j-1)\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{\cos(j\theta) \cos(\theta) - \cos(j\theta_k) \cos(\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{\cos(j\theta) \cos(\theta) - \cos(j\theta) \cos(\theta_k) + \cos(j\theta) \cos(\theta_k) - \cos(j\theta_k) \cos(\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \left(\cos(j\theta) + \cos(\theta_k) \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} \right) d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \cos(j\theta) d\theta + 2(\cos(\theta_k)) u_j \\ &= 2 \cos(\theta_k) u_j \end{aligned}$$

ce qui correspond à la formule demandé à un décalage d'indice près.

2.d.v La suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire $a_{j+1} - 2 \cos(\theta_k) u_j + u_{j-1} = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2 \cos(\theta_k) r + 1 = 0$ et a pour racines $e^{i\theta_k}$ et $e^{-i\theta_k}$. On en déduit qu'il existe a et b réels tels que

$$\forall j \in \mathbb{N}, u_j = a \cos(j\theta_k) + b \sin(j\theta_k)$$

Or $u_0 = 0$ donc $a = 0$ et $u_1 = \pi$ donc $b = \frac{\pi}{\sin(\theta_k)}$ (on a bien $\sin(\theta_k) \neq 0$). Ainsi,

$$u_n = \pi \frac{\sin(n\theta_k)}{\sin(\theta_k)} = \pi \frac{(-1)^{k+1}}{\sin(\theta_k)}$$

et avec 2.d.iii

$$\lambda_k = \frac{\pi}{n}$$

3. 2.c.ii donne alors pour tout $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n R(x_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n R \left(\cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \right)$$