

# TD: formule de stirling

La formule de Stirling fait partie du programme et doit être connue.

## 1 Suite

On considère, pour  $n$  entier naturel non nul, la suite de terme général  $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$  et l'on pose  $v_n = \ln(u_n)$ ,  $w_n = v_{n+1} - v_n$ .

1. Donner un équivalent de  $w_n$ . Que peut-on dire de la série de terme général  $w_n$ ?
2. En déduire que la suite  $u_n$  converge vers une limite  $L > 0$
3. En déduire un équivalent en  $+\infty$  de  $n!$

## 2 Détermination de $L$

On considère pour  $n \in \mathbb{N}$  l'intégrale  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$

1. Calculer  $I_0, I_1$
2. On admet (provisoirement) la relation  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  pour  $n \geq 2$ . Montrer que  $nI_n I_{n-1}$  est constant. Déterminer cette constante.
3. Montrer que la suite  $(I_n)$  décroît. En déduire avec 1. un encadrement de  $I_n$  puis un équivalent de  $I_n$  en  $+\infty$ .
4. Montrer la relation  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$  pour tout entier naturel  $p$ . En déduire  $I_{2p+1}$ .
5. A l'aide de l'équivalent de  $n!$  trouvé en 1, et de l'équivalent de  $I_n$  trouvé en 2.3, en déduire la valeur de  $L$  puis la formule de Stirling:

$$n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

6. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la formule obtenue en 2.
7. Etudier la nature des séries de terme général  $I_n$  et  $(-1)^n I_n$ . Calculer leur somme en cas de convergence.

## **3 Révisions DS 21/09**

### **3.1 algèbre linéaire**

Notamment: rang d'une matrice, recherche du rang, de l'inverse d'une matrice. Recherche du noyau et de l'image d'une application linéaire (notamment lorsqu'elle est donnée par sa matrice). Changement de bases. Exemple de calcul de puissances de matrices.

### **3.2 analyse**

Tout ce qui est mentionné dans le programme de colles. Théorème de Rolle, des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis. Application à l'étude de suites récurrentes. Formules de trigonométrie.

### **3.3 séries**

Tout ce qui a été fait en cours. Techniques de sommation, notamment changement d'indice et télescopage. Formule du binôme.