Synthèse séries

Gilbert Primet

27 septembre 2013

1 Généralités

1.1 Série convergente ou divergente

Convergence Soit (u_n) une suite réelle ou complexe définie à partir du rang n_0. A cette suite, on associe la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

. On dit que la *série* de terme général u_n, que l'on note$\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge lorsque la *suite* S_n converge. Le nombre $\lim_{n \to \infty} S_n$ est alors appelé somme de la série et est noté

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$$

.

Si la série $\sum u_n$ ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Étudier la *nature* d'une série, c'est dire si elle converge ou elle diverge

Attention

1. Il ne faut pas confondre la suite (u_n) et la série $\sum u_n$ de terme général u_n.
2. Le symbole $\sum$ remplit deux rôles distincts : désignation de la série (quelle que soit sa nature), et somme de la série en cas de convergence. la notation $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est réservée à ce deuxième cas.

Condition nécessaire de convergence Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

*Cette condition n'est pas suffisante.*Par exemple $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite *grossièrement divergente.*

Correspondance suite-séries La *suite* (u_n) converge si et seulement si la *série*$\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Indépendance de l'indice de départ de la sommation Soit $(u_n)_{n_0}$ une suite à termes réels ou complexes Les séries $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_1} u_n$ $(n_1 > n_0)$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1 - 1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n$$

Reste d'une série convergente Le reste d'une série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ convergente à l'ordre n est :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

. On a alors :

$$S = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$$

Le fait de connaître une majoration de $|R_n|$ permet de prendre S_n comme approximation de S avec une erreur connue.

Séries à termes complexes Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Alors :
$\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent et en cas de convergence :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \operatorname{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n$$

1.2 Opérations

Somme Soient $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ des séries à termes réels ou complexes.

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

.

2. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
3. Si les deux séries divergent, on ne peut rien dire.

Produit par un scalaire Si α est un scalaire *non nul*, alors $\sum u_n$ et $\sum \alpha u_n$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

2 Séries de référence

Série géométrique $\sum q^n$ $(q \in \mathbb{C})$ Elle converge ssi $|q| < 1$ et alors :.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Remarque : Pour$|q| < 1$ et $r \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=r}^{\infty} q^n = \frac{q^r}{1-q}$$

Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}$ Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$

Série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ $(z \in \mathbb{C})$ Elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

.

Remarque : La sommation des séries de terme général $\frac{P(n)}{n!}$, où P est un polynôme se fait en se ramenant à des séries exponentielles par divisions successives de P par $n, n-1, n-2 \cdots$ et des changements d'indice.

3 Cas des séries à termes positifs

3.1 Comparaison

Soient des séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum u_n$

Prépondérance Si $u_n = O_{n \mapsto +\infty}(v_n)$, alors :$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Inégalité Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Négligeabilité Si $u_n = o_{n \mapsto +\infty}(v_n)$, alors :$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge. Dans les trois cas qui précèdent on a donc :$\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ diverge.

Équivalence Si $u_n \sim_{n \mapsto +\infty} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Attention

1. le signe est essentiel. Par exemple $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ mais :
$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge alors que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ diverge.
2. Pour calculer la somme de la série $\sum u_n$, on ne peut pas (même dans le cas de termes positifs), remplacer u_n par un équivalent.

3.2 Comparaison logarithmique,règle de d'Alembert

Comparaison logarithmique Soient des suites (u_n) et (v_n) strictement positives à partir d'un certain rang. Si à partir d'un certain rang,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = O_{+\infty}(v_n)$.

Règle de d'Alembert Soit une suite (u_n) strictement positives à partir d'un certain rang. On suppose que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

.Alors :

Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Si $\ell = 1$ le cas est indéterminé

Exemple Soit $q > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum n^\alpha q^n$ converge pour $q < 1$ et diverge grossièrement pour $q > 1$. Pour $q = 1$, on est ramené à une série de Riemann qui converge si $\alpha < -1$ et diverge sinon (à savoir retrouver)

Attention La réciproque est fausse : la série $\sum u_n$ peut converger sans que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite.

3.3 Comparaison série-intégrale

Soit $f : [n_0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}_+$ continue et décroissante ($n_0 \in \mathbb{R}$). Alors l' intégrale $\int_{n=n_0}^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ sont de même nature.
Application

1. Nature des séries de Riemann
2. Étude des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$;$((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, notamment dans le cas critique $\alpha = 1$

4 Convergence absolue

4.1 Convergence absolue

On dit que la série $\sum u_n$ *converge absolument* lorsque $\sum |u_n|$ converge.
La convergence absolue d'une série entraîne sa convergence.De plus :

$$|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$$

Intérêt : On peut utiliser tous les critères relatifs aux séries à termes positifs pour prouver l'éventuelle convergence absolue d'une série.
Attention : la réciproque est fausse. Par exemple $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le TSSA mais ne converge pas absolument.

4.2 Produit de Cauchy

Soient deux séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_1} v_n$. Le *produit de Cauchy* de ces deux séries est la série de terme général :

$$w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

Elle est définie pour $n \geqslant n_0 + n_1$. En particulier, si $n_0 = n_1 = 0$, le produit de Cauchy est défini par

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} v_i$$

4.2.1 Théorème

Si les deux séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_1} v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant n_0+n_1} w_n$ converge absolument et :

$$\sum_{n=n_0+n_1}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=n_1}^{+\infty} v_n\right)$$

4.2.2 Application

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \exp(z)\exp(z') = \exp(z+z')$$

5 Théorème spécial des séries alternées

5.1 Série alternée

On dit qu'une série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est alternée lorsque $u_n = (-1)^n a_n$, où a_n garde un signe constant.
On a donc selon les cas $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$

5.2 Théorème spécial des séries alternées

Si la valeur absolue $|u_n|$ du terme d'une série alternée $\sum u_n$ décroît et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors la série converge.
De plus $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$. La somme est du signe du premier terme (et le reste R_n est donc du signe de u_{n+1})
Exemple$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge pour tout réel $\alpha > 0$ (et ne converge donc pas absolument pour $\alpha \in]0,1]$).