

Exercices

Vrai ou faux ? _____

	Vrai	Faux
a) l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$ converge pour tout entier naturel n	☐	☐
b) Si $a > 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 x ^a e^{at} dt$ converge pour tout $a > 0$	☐	☐
c) Toute fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ y admet une primitive	☐	☐
d) La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)(x - E(x))$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$	☐	☐
e) Si une fonction est continue et paire sur $\mathbb{R}$, elle admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui est impaire	☐	☐
f) Si une fonction est continue et impaire sur $\mathbb{R}$, elle admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui est paire	☐	☐
g) Si une fonction continue est périodique, toute primitive sur $\mathbb{R}$ de cette fonctions est périodique	☐	☐
h) Si f est une fonction positive continue sur $\mathbb{R}$ et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 0$, alors f est nulle sur $\mathbb{R}$	☐	☐
i) Si l'intégrale d'une fonction continue périodique converge absolument sur $\mathbb{R}$, alors cette fonction est nulle	☐	☐
j) $x \mapsto \frac{x x }{2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x $	☐	☐
k) Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I fg$ converge	☐	☐
l) Si une fonction f continue sur $[1, +\infty[$ est telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$, alors $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.	☐	☐
m) Lorsque $a \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(at) dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(a) > 0$	☐	☐

n)	L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge et a la même valeur que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$	☐	☐
o)	Si f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = 0$	☐	☐
p)	$\int_0^{+\infty} \frac{E(t)}{t^3} dt$ converge	☐	☐
q)	Si f une fonction positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors le reste $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} f(t) dt$ est équivalent à $\int_{t=n+1}^{+\infty} f(t) dt$ lorsque n tend vers $+\infty$	☐	☐
r)	La fonction $x \rightarrow \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \rightarrow \exp(-x^2)$	☐	☐
s)	Si f est CPM sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t) dt = 0$	☐	☐
t)	Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors , l'application $x \rightarrow \int_x^{x^2} f(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \rightarrow f(x^2) - f(x)$	☐	☐
u)	$\int_0^1 (\ln(t))^n dt$ converge pour tout entier naturel n	☐	☐

Corrigés

Corrigés des Vrai/Faux

Exercice 1

- a) vrai puisqu'elle est faussement généralisée en 0 et π
- b) vrai puisque $|x|^a e^{nt} = o_{-\infty} \frac{1}{t^2}$
- c) faux si f n'est pas continue. Si F était une primitive de f sur $[0, 1]$, alors, F serait continue et en un point où f n'est pas continue. Si ce point est intérieur à l'intervalle, $F' = f$ aurait des limites finies à droite et à gauche distinctes, donc, d'après le théorème de limite de la dérivée, des dérivées à droite et à gauche distinctes, donc ne serait pas dérivable contrairement à l'hypothèse. Si ce point est une extrémité de l'intervalle, la fonction F serait dérivable en ce point et la dérivée continue, d'après le théorème de la limite de la dérivée
- d) Vrai puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$
- e) Vrai Soit f une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$ et F son unique primitive prenant la valeur 0 en 0. Alors, la fonction $G : x \mapsto F(x) + F(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto f(x) - f(-x) = 0$. G est donc constante et comme $G(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R} G(x) = F(x) + F(-x) = 0$. F est donc impaire. Réciproquement, une primitive de f qui est impaire s'annule en 0, donc il y a unicité.
- f) Faux Soit f une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Toutes les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont paires. En effet la fonction $x \mapsto F(x) - F(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et prend la valeur 0 en 0.
- g) Faux : par exemple, une fonction constante non nulle n'admet aucune primitive périodique sur $\mathbb{R}$. De façon générale si f est une fonction périodique et continue de période $T > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout entier naturel n , $\int_0^{nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt = F(nT) - F(0)$, où F est une primitive de f . De plus une fonction périodique et continue est bornée sur une période, donc sur $\mathbb{R}$. Si F est périodique, alors nécessairement $\int_0^T f(t) dt = 0$, car sinon $F(nT)$ aurait une limite infinie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui contredirait le caractère borné de F .
Réciproquement, supposons que $\int_0^T f(t) dt = 0$. Alors, la fonction $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ a une dérivée nulle et s'annule en 0 : elle est nulle. F est donc périodique de période T .
En conclusion, une CNS pour qu'une fonction f périodique de période T admette une primitive périodique est que $\int_0^T f(t) dt = 0$. Toutes les primitives de cette fonction ont alors T pour période.

- h) Vrai. L'application $x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t)dt$ est alors positive, dérivable, a pour dérivée $f \geq 0$ donc est croissante, et a pour limite 0 en $+\infty$ donc est nulle, et sa dérivée f est donc nulle sur $\mathbb{R}$.
- i) Vrai. Si f est périodique de période $T > 0$, alors $|f|$ également et $\forall n \in \mathbb{N} \int_0^{nT} f(t)dt = n \int_0^T |f(t)|dt$. Si l'intégrale de f converge absolument sur $\mathbb{R}$, alors $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ converge également et $\int_0^{nT} |f(t)|dt$ a une limite finie lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$. Donc nécessairement, $\int_0^T |f(t)|dt = 0$ et comme $|f|$ est continue et positive : $\forall t \in [0, T] |f(t)| = 0$. Mais alors, comme f est T -périodique, f est nulle sur $\mathbb{R}$. (Remarque : la propriété est encore vraie en supposant seulement que l'intégrale de f converge sur $\mathbb{R}$).
- j) Vrai (On regarde successivement sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et en 0). Ceci montre qu'une fonction peut très bien contenir des fonctions non dérivables dans son expression (ici en 0) et être dérivable.
- k) Faux. Par exemple $I =]0, 1]$, $f(t) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$
- l) Vrai. Pour $\ell \neq 0$, alors $f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n^a}$ et pour $\ell = 0$, on obtient $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{n^a})$.
- m) Faux Pour $a = 0$, l'intégrale diverge. Pour $a \neq 0$, et $x > 0$:

$$\int_0^x \exp(at)dt = \frac{1}{a}(\exp(ax) - 1)$$

. Pour que $\exp(ax)$ tende vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, il faut que $|\exp(ax)| = \exp(\operatorname{Re}(a)x)$ ait une limite finie, c'est-à-dire $\operatorname{Re}(a) < 0$. Réciproquement, si $\operatorname{Re}(a) < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(ax) = 0$, et donc l'intégrale converge. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(at)dt$ converge donc si et seulement si $\operatorname{Re}(a) < 0$

- n) Vrai D'une part $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} = 0$, donc l'intégrale est faussement généralisée en 0, donc converge en 0. D'autre part $\forall t \geq 1 \quad 0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ donc l'intégrale converge au voisinage de $+\infty$. Si $(a, b) \in \mathbb{R}_+^*$, $a < b$, on a, en intégrant par parties : $\int_a^b \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = [-\frac{\sin^2 t}{t}]_a^b + 2 \int_a^b \frac{\cos t \sin t}{t} dt$ D'où le résultat en faisant tendre a et b vers respectivement 0 et $+\infty$, après changement de variable $u = 2t$ dans la deuxième intégrale.
- o) Vrai. On effectue une intégration par parties.
- p) vrai La fonction à intégrer vaut 0 sur $]0, 1]$ et est équivalente à $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$
- q) Faux en général. Par exemple, si l'on prend $f(t) = \exp(-at)$ avec $a > 0$, alors $R_n = \frac{\exp(-(n+1)t)}{1 - \exp(-a)}$ et $\int_{n+1}^{+\infty} \exp(-at)dt = \exp(-a(n+1))$ qui ne sont pas équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.
- r) Faux. $\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt - \int_0^x \exp(-t^2)dt$ (Les intégrales convergent bien). La fonction est donc dérivable et sa dérivée est $x \mapsto -\exp(-x^2)$
- s) Vrai puisque $\int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$ et que par définition :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(t)dt$$

- t) Faux $\int_x^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(x)$. L'application $x \mapsto \int_x^{x^2} f(t) dt$ est donc dérivable, et sa dérivée est $x \mapsto 2x f(x^2) - f(x)$.
- u) vrai Pour $n=0$, la fonction est constante. Pour $n > 0$, alors $\ln(t)^n = o_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}$, donc l'intégrale converge absolument..