

Résumé intégrales généralisées

Gilbert Primet

3 novembre 2013

On est invité à réfléchir aux exemples donnés.

1 Convergence, divergence d'une intégrale

1.1 Définitions

1. Soit $f \in \mathcal{C.M}([a, b[, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge lorsque l'application de $]a, b[$ dans $\mathbb{K} : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ possède une *limite finie* lorsque x tend vers b . Cette limite est alors appelée l'intégrale de a à b de f et est notée : $\int_a^b f(t) dt$.

Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

Étudier la *nature* d'une intégrale, c'est dire si elle converge ou si elle diverge.

Remarques

- (a) Si b est réel et si f admet une limite finie en b , alors, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge. On dit qu'elle est faussement généralisée.

- (b) Si $b = +\infty$ et si f admet une limite en b autre que 0, alors, $\int_a^b f(t) dt$ diverge. On dit que la divergence est grossière.

Par contrapposition, si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge et si f a une limite finie en $+\infty$, cette limite est forcément 0.

Attention, f peut ne pas avoir de limite en $+\infty$. Exemple : soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est affine par morceaux sur $[n, n+1]$: $f(n + \frac{1}{2}) = n$, f est nulle sur $[n, n + \frac{1}{2} - \frac{1}{3n^3}]$ et sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{3n^3}, n+1]$, f est affine sur $[n + \frac{1}{2} - \frac{1}{3n^3}, n + \frac{1}{2}]$ et sur $[n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3n^3}]$. Enfin, f est nulle sur $[0, 1]$. (Faire un dessin) f n'a pas de limite en $+\infty$, mais $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

- (c) Si $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \text{ (Relation de Chasles)}$$

- (d) Si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t) dt = 0$

2. On a des notions identiques lorsque f est continue par morceaux sur $]a, b]$, en considérant la limite de $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ en a .

3. Soit $f \in \mathcal{C.M}([a, b[, \mathbb{K})$, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ converge lorsque pour un certain $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent. Lorsque c'est le cas, on pose par définition :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

(La nature de l'intégrale et sa valeur sont indépendantes de c d'après la relation de Chasles).

Remarque Selon l'exemple, on aura affaire à une intégrale généralisée sur un intervalle de type $[a, b[,]a, b],]a, b[, \dots$ ou non généralisée (Fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$). Il appartient au lecteur de déterminer le cas où l'on est, en prenant garde de ne pas inclure une extrémité où l'intégrale n'est pas généralisée).

4. **Exemples de référence** $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge et : $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}$

$\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$

1.2 Propriétés

1.2.1 Somme

f et g sont des fonctions continues par morceaux sur un intervalle d'extrémités a et b .

– Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ converge et

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

– Si $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$ diverge.

– Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ divergent, alors on ne peut rien dire sur la nature de $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt$

1.2.2 Produit par un scalaire

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ Alors, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b \lambda f(t) dt$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

1.2.3 Cas des fonctions à valeurs complexes

$\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt$ convergent et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt$$

1.2.4 Conjugaison

Si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_a^b \overline{f(t)} dt$ converge et $\int_a^b \overline{f(t)} dt = \overline{\int_a^b f(t) dt}$

1.2.5 Cas d'une décomposition de la fonction à intégrer

Lorsque la fonction à intégrer est décomposée en somme, par exemple, dans le cas d'une décomposition en éléments simples, il convient de rester prudent : les intégrales des différents termes peuvent diverger, même si l'intégrale initiale converge. Dans ce cas il faut rester entre des bornes finies puis passer à la limite, en recherchant les compensations de termes.

Exemple : Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}$

2 Cas des fonctions à valeurs réelles positives

2.1 Ordre et comparaison

Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs réelles positives.

majoration $\int_a^b f(t)dt$ converge $\iff (x \in [a, b[\mapsto \int_a^x f(t)dt)$ est majorée.

Si c'est le cas :

$$\int_a^b f(t)dt = \sup_{x \in [a, b[} \int_a^x f(t)dt$$

Prépondérance, négligeabilité Si $f = O_b(g)$ alors : $\int_a^b g(t)dt$ converge $\implies \int_a^b f(t)dt$ converge. (et donc par contrapposition : $\int_a^b f(t)dt$ diverge $\implies \int_a^b g(t)dt$ diverge.)

(Ceci vaut donc en particulier si $f = o_b(g)$)

Application classique : comparaison à une intégrale de Riemann par calcul de la limite en b de $t^\alpha f(t)$ (si $b = +\infty$), ou de $(b-t)^\alpha f(t)$ (si $b \in \mathbb{R}$), avec α judicieusement choisi.

Ordre Si $f \leq g$ alors :

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge et } \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

(et donc par contrapposition : $\int_a^b f(t)dt$ diverge $\implies \int_a^b g(t)dt$ diverge)

(Il suffit d'avoir l'inégalité $f \leq g$ sur un certain intervalle $[c, b[$, $c \in [a, b[$)

Équivalents Si $f \sim_b g$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Remarques

1. Il suffit que f (ou g) soit de signe constant au voisinage de b
2. La condition du signe est essentielle. On pourra par exemple montrer en exercice que $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(t)}}{\sqrt{t}} dt$ converge, alors que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{E(t)}}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} \right) dt$ diverge, bien que les deux fonctions à intégrer soient équivalentes en $+\infty$
3. Pour le calcul de l'intégrale, on ne peut bien sûr pas remplacer une fonction par une fonction équivalente.

Cas d'un l'intervalle]a,b] On a des théorèmes identiques, en les transposant bien entendu en a .

Remarque Pour l'application d'un critère, on risque parfois d'introduire des problèmes de divergence à l'autre extrémité de l'intervalle en changeant de fonction. Il faut alors restreindre l'intervalle. Un cas classique est la comparaison en $+\infty$ avec $\frac{1}{t^\alpha}$.

2.2 Comparaison série-intégrale

2.2.1 Théorème de comparaison série-intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux, positive, décroissante sur $[N, +\infty[$, $N \in \mathbb{N}$. Alors :

1. La série de terme général $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$ converge
2. La série $\sum_{n \geq N} f(n)$ et l'intégrale $\int_N^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

2.2.2 Exemples

1. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

2. La série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
(En fait si α est différent de 1, on utilise la comparaison avec $\frac{1}{n^\beta}$, où β est compris entre α et 1. La comparaison série-intégrale n'est utilisée que dans le cas $\alpha = 1$ pour $\beta > 0$.)
3. On peut aussi utiliser des intégrales pour encadrer la somme partielle d'une série ou le reste d'une série $\sum f(n)$, où f est une fonction monotone positive, pour par exemple trouver un équivalent de la somme partielle (lorsque la série diverge) ou du reste (lorsque la série converge).
On pourra par exemple examiner le cas des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$: Si $\alpha < 1$, $S_n \sim \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$ et si $\alpha > 1$ $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

2.3 Convergence absolue

On revient à des fonctions quelconques

2.3.1 Convergence absolue

Soit I un intervalle non trivial et f une fonction de I dans \mathbb{K} continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_I f(t) dt$ converge absolument lorsque $\int_I |f(t)| dt$ converge.

2.3.2 Propriété

Si l'intégrale $\int_I f(t) dt$ converge absolument, alors elle converge et :

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$$

2.3.3 Application

On peut utiliser sur $|f|$ les critères de convergence pour les intégrales de fonctions positives. Lorsque par exemple $I =]a, b[$: si $|f| \leq g$ ou $|f| = o_a(g)$, et que $\int_I g$ converge (g étant définie et continue par morceaux sur I), alors $\int_I f$ converge absolument donc converge.

2.3.4 Exemple

1. $\forall \alpha \in]1, 2[$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}$ converge absolument.
2. $\forall \alpha \in]0, 1[$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}$ converge mais ne converge pas absolument. (Exemple à savoir retrouver. Dans les deux cas, l'intégrale est faussement généralisée en 0. Dans le deuxième cas, pour montrer la convergence, on fait une intégration par parties sur $[1, +\infty[$, et pour montrer la non convergence absolue, on montre la divergence de la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}$ par un changement de variables $t = u + n\pi$)
3. L'exemple précédent montre en particulier que la convergence n'implique pas la convergence absolue.

3 Fonctions intégrables

3.1 Définition

On dit qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} est intégrable lorsque l'on est dans l'un des deux cas suivants :

1. I est un segment $[a, b]$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$)
2. I n'est pas un segment et l'intégrale généralisée $\int_I f(t) dt$ converge absolument (c'est-à-dire $\int_I |f(t)| dt$ converge)

3.1.1 Notation

On note $L_1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{K} continues par morceaux intégrables sur I

3.2 Propriétés

3.2.1 Caractérisation

f est intégrable sur I si et seulement si l'ensemble des intégrales $\int_J |f(t)| dt$, (où J est un *segment* inclus dans I) est majoré.

Ce critère sert à unifier la définition mais est peu commode d'emploi.

3.2.2 Linéarité

Si f et g sont des fonctions intégrables sur I , alors $f + g$ et λf sont intégrables sur I et :

$$\int_I |f + g| \leq \int_I |f| + \int_I |g|$$

En particulier, $L_1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} espace vectoriel.

3.2.3 Conjugaison

Si f est intégrable sur un intervalle I , alors \bar{f} est intégrable sur I

3.2.4 Chasles

Soient I et J deux intervalles réels non triviaux tels que $I \cup J$ soit un intervalle, et tels que $I \cap J$ soit un singleton ou vide (autrement dit : I et J ont une extrémité réelle commune, sont situés de part et d'autre de cette extrémité commune qui appartient à au moins un des deux intervalles).

Si $f : I \cup J \rightarrow \mathbb{K}$ est intégrable sur I et sur J , alors f est intégrable sur $I \cup J$ et

$$\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f$$

3.2.5 Produit, inégalité de la moyenne

Si f et g sont des fonctions continues par morceaux, f intégrable sur I et g bornée sur I , alors fg est intégrable sur I et :

$$\left| \int_I fg \right| \leq \int_I |fg| \leq \sup_I |g| \int_I |f|$$

3.3 Changement de variables, intégration par parties

3.3.1 Changement de variables dans les intégrales généralisées

Soient I et J deux intervalles réels non triviaux, f une application continue de I dans \mathbb{K} , φ une bijection de classe C^1 de J sur I .

Alors :

1. f est intégrable sur I si et seulement si $f \circ \varphi |\varphi'|$ est intégrable sur J .
2. Si c'est le cas :

$$\int_J f \circ \varphi |\varphi'| = \int_I f$$

Remarque φ est nécessairement strictement monotone. La valeur absolue est là pour rétablir l'ordre des bornes de J lorsque φ est décroissante.

3.3.2 Intégration par parties

On ne donne pas de théorème général. On intègre d'abord sur un segment, et on passe à la limite

3.4 Fonctions de carré intégrable

3.4.1 Définition

On dit qu'une fonction f continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} est de carré intégrable sur I lorsque $|f|^2$ est intégrable sur I

Notation On note $L^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

3.4.2 Inégalité de Schwarz

Soient f et g des fonctions de carré intégrable sur I . Alors $\overline{f}g$ est intégrable sur I et :

$$\left| \int_I \overline{f}g \right|^2 \leq \left(\int_I |fg| \right)^2 \leq \int_I |f|^2 \int_I |g|^2$$

3.4.3 Espace vectoriel $L^2(I, \mathbb{K})$

Si $(f, g) \in L^2(I, \mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g \in L^2(I, \mathbb{K})$ et $\lambda f \in L^2(I, \mathbb{K})$.

$L^2(I, \mathbb{K})$ est donc un \mathbb{K} espace vectoriel (car il contient la fonction nulle sur I).