Théorèmes d'interversion: séries

2 décembre 2013

Convergence normale Une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur un intervalle I lorsque les fonctions f_n sont bornées sur I et que la série $\sum \sup_I |f_n|$ converge.

Propriétés

1. Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors $\sum f_n(x)$ converge absolument pour tout x de I, et en particulier $\sum f_n$ converge simplement sur I
2. Pour qu'une série $\sum f_n$ converge normalement sur un intervalle I, il faut et il suffit qu'il existe une suite (α_n) telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in I |f_n(x)| \leqslant \alpha_n \text{ et } \sum \alpha_n \text{ converge}$$
.
3. Si $\sum f_n$ converge normalement sur un intervalle I, alors $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $J \subset I$

Méthode Pour étudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur un intervalle I, on peut étudier les variations de f_n, pour trouver $sup_I |f_n|$ s'il existe, ou majorer $|f_n|$ sur I

Convergence normale sur tout segment Une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \to \mathbb{K}$ converge normalement sur tout segment de I lorsque pour tout *segment* $J \subset I$, la série $\sum f_{n|J}$ converge normalement.
La convergence normale sur un intervalle I entraîne la convergence normale sur tout segment de I mais la réciproque est fausse.

Propriété	Hypothèses	Résultat
Théorème de continuité	Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ On suppose que : **TCS1** Pour tout $n \geqslant n_0,\ f_n$ est continue sur I **TCS2** La série $\sum f_n$ converge normalement sur I ou **TCS'2** La série $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans I	La somme $f = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I
Limite en une borne de l'intervalle	Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions convergeant normalement sur un intervalle I. On suppose qu'en une borne a de I (réelle ou infinie) : $$\lim_{x\to a} f_n(x) = b_n$$	– $b_n \in \mathbb{K}$ – $\sum b_n$ converge – $\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ où f est la somme de la série.
Théorème de dérivabilité : dérivation terme à terme	Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ On suppose que : **TDS1** Pour tout $n \geqslant n_0,\ f_n$ est de classe C^1 sur I **TDS2** La série $\sum f_n$ converge simplement sur I **TDS3** La série $\sum f_n'$ converge normalement sur I ou **TDS'3** La série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans I	La somme $f = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et $$\forall x \in I f'(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n'(x)$$
Théorème de classe C^p : dérivation terme à terme	Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ On suppose que : **TD'S1** Pour tout $n \geqslant n_0,\ f_n$ est de classe C^p sur I **TD'S2** La série $\sum f_n$ converge simplement sur I **TD'S3** Pour tout $k \in [\|1,p\|]$, la série $\sum f_n^{(}k)$ converge normalement sur I ou **TD'S'3** sur tout segment inclus dans I	La somme $f = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I et $$\forall x \in I \forall k \in [\|1,p\|] f^{(k)}(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Théorème d'intégration terme à terme	Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ convergeant normalement sur $[a,b]$	On peut intégrer terme à terme : $$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t)dt$$