Espaces vectoriels : somme, somme directe, projecteur

Notion	Définitions	Résultats
Somme de deux sous espaces vectoriels	Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On appelle somme de F et G l'ensemble des sommes $x+y$, où $x \in F$ et $y \in G$ $$F+G=\{z \in E \mid \exists (x,y) \in F \times G z = x+y\}$$	1. $F+G$ est un sous-espace-vectoriel de E 2. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant à la fois F et G 3. $F+G=F$ si et seulement si $G \subset F$ 4. En particulier $F+0_E=F$, $F+F=F$ et $F+E=E$ 5. Si $F=\text{vect}(v_1,\cdots,v_p)$ et $G=\text{vect}(w_1,\cdots,w_q)$, alors $F+G=\text{vect}(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q)$ 6. Si F et G sont de dimension finie, alors $$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels	Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. 1. On dit que la somme $F+G$ est ***directe*** lorsque tout élément de $F+G$ s'écrit de façon *unique* comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Cette somme est alors notée $F\oplus G$. 2. On dit que F et G sont deux ***sous-espaces vectoriels supplémentaires*** de E lorsque $$E=F\oplus G$$	1. La somme $F+G$ est directe si et seulement si $$F\cap G=\{0_E\}$$ 2. La somme $F+G$ est directe si et seulement si : $$\forall (x_1,x_2)\times G\,; x_1+x_2=0_E \Rightarrow x_1=x_2=0_E$$ 3. $E=F\oplus G \iff E=F+G$ et $F\cap G=\{0_E\}$ 4. Lorsque E est de dimension finie : (a) Si la somme $F+G$ est directe, alors :$\dim(F\oplus G)=\dim F+\dim G$ (b) $E=F\oplus G \iff \dim E=\dim F+\dim G$et $F\cap G=\{0_E\}$

Notion	Définitions	Résultats
projecteurs, symétries	Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E.On donc $$\forall x \in \mathbb{E} \exists!(x_1, x_2) \in F \times G \;\; x = x_1 + x_2$$ L'application $p/E \to E : x \mapsto x_1$ est appelée ***projecteur*** sur F de direction G. L'application $s : E \to E \;\; : x \mapsto x_1 - x_2$ est appelée ***symétrie*** par rapport à F de direction G	1. $p \in \mathscr{L}(E)$; $s \in \mathscr{L}(E)$; $s = 2p - Id_E$ 2. $\ker(p) = G$; $\mathrm{Im} p = F = \ker(p - Id_E)$ 3. $\ker(s - Id_E) = F$; $\ker(s + Id_E) = G$ 4. $p \circ p = p$; $s \circ s = Id_E$ 5. Si $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$, alors p est un projecteur 6. Si $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = Id_E$, alors s est une symétrie.
Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels	Soient $F_1, \cdots, F_p (p \in \mathbb{N}^*$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. 1. On appelle ***somme de ces sous-espaces vectoriels*** l'ensemble : $$\{x_1 + \cdots + x_p\} \text{ où } \forall i \in [\![1, p]\!] x_i \in F_i$$. On note cet ensemble : $\sum_{i=1}^{p} F_i$ 2. On dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est ***directe*** lorsque : $$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i \exists!(x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p x = x_1 + \cdots + x_p$$ On la note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$	1. $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E 2. $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E au sens de l'inclusion contenant tous les F_i 3. On peut permuter, parenthèser les termes d'une somme. Si l'un des termes vaut E, la somme est égale à E. Si l'un des termes vaut $\{0_E\}$, on peut l'omettre (sauf s'il est seul). 4. $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi : $$\forall (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \; x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0_E$$ 5. Si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe,et les F_i de dimension finie, alors $\dim \bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$. En particulier, cette somme vaut E si et seulement si $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$