Formes linéaires, trace d'une matrice

Gilbert Primet

24 décembre 2013

1 Hyperplans, forme linéaire

1.1 Hyperplans

1.1.1 Définition

On appelle **hyperplan d'un espace vectoriel** un sous-espace vectoriel ayant un supplémentaire de dimension 1.
Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.

1.1.2 Remarque

Grâce au théorème noyau-image, on montre que tous les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel sont isomorphes. Les supplémentaires d'un hyperplan sont donc tous de dimension 1 (ce qui est évident en dimension finie)

1.2 Forme linéaire

1.2.1 Définition

on appelle **forme linéaire** sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

1.2.2 Propriétés

1. Toute forme linéaire non nulle est surjective
2. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan
3. Deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité non nul.
4. Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire φ (définie à une constante de proportionnalité près).L'équation linéaire $\varphi(x) = 0$ est appelée une équation de H.
5. Si H est un hyperplan, toute droite vectorielle D telle que $D \cap H = \{0_E$ est supplémentaire de H.
6. Exemples
   (a) Dans $\mathbb{K}^n$, les formes linéaires sont de type $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$
   (b) De façon plus générale, dans un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, les formes linéaires ont pour expression relativement à une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$: $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
   En particulier, les applications $x \mapsto x_i$ sont des formes linéaires appelées formes linéaires coordonnées.
   (c) Dans K^n les hyperplans ont une équation de la forme :
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \ (a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$$
   .
   Plus généralement dans un espace vectoriel de dimension finie, une équation d'un hyperplan relativement à une base $\mathscr{B}$ est de la forme :
   $$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$
   avec $(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$
   (d) Sur $\mathbb{K}[X]$, les applications $P \mapsto P(a)$, $P \mapsto P^{(k)}(a)((a,k) \in \mathbb{K} \times \mathbb{N})$ sont des formes linéaires.
   (e) Sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$, l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire.
7. Pour obtenir (en dimension finie) une équation relativement à une base $\mathscr{B}$d'un hyperplan H d'un espace vectoriel E dont on connaît une base $(v_1, \cdots, v_{n-1})$, il suffit

d'écrire que :

$$\forall x \in E \left(x \in H \iff (v_1, \cdots, v_{n-1}, x) \text{ est liée} \iff \det_{\mathscr{B}}(e_1, \cdots, e_{n-1}, x) = 0 \right)$$

On peut aussi chercher une équation paramétrique de H puis éliminer les paramètres, ou, dans un espace euclidien, utiliser un vecteur directeur a de $H^\perp$ en écrivant :

$$x \in H \iff (x|a) = 0$$

2 Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

2.1 Trace d'une matrice

2.1.1 Définition

On appelle **trace d'une matrice carrée** $A = (a_{i,j})$ **d'ordre** n le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

2.1.2 Propriétés

1. La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(K)$.
2. $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(K) \;\; tr(AB) = tr(BA)$
3. $\forall A \in (M)_n(K) \forall P \in GL_n(K) tr(P^{-1}AP = tr(A)$

2.2 Trace d'un endomorphisme

2.2.1 Définition

On appelle **trace d'un endomorphisme** u d'un espace vectoriel non nul de dimension finie E la trace de la matrice de u dans une base quelconque B :

$$tr(u) = tr(Mat_B(u))$$

2.2.2 Remarque

Cette définition est indépendante de la base puisque $Mat(u)_{B'} = P_{B\to B}^{-1} Mat_B(u) P_{B\to B'}$

2.3 Propriétés

1. tr est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.
2. $\forall (u, v) \in \mathscr{L}(E)^2 tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$
3. Si p est un projecteur, alors $tr(p) = rg(p)$

Les deux premières propriétés sont la traduction immédiate sur les endomorphismes du cas matriciel. Pour la dernière, il suffit de considérer une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$