Exercices:algèbre linéaire,hyperplans interpolation, trace

5 janvier 2014

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. (a) Montrer que les fonctions $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ forment une famille libre de $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ où $f_a : x\mapsto |x-a|$

   (b) On dit qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est finiment affine par morceaux sur $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe un nombre fini de réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tels que f est affine sur $]-\infty, a_1], [a_1, a_2], [a_2, a_3], \cdots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, +\infty[$ (n peut être égal à 0 et la définition signifie alors que f est affine sur $\mathbb{R}$, c'est à dire de la forme $x\mapsto ax+b$. On dit alors que $\sigma = (a_1, \cdots, a_n)$ est une subdivision adaptée à f.
   Montrer que l'ensemble des fonctions finiment affines par morceaux forme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel contenant les fonctions $x\mapsto |x-a|$

   (c) On suppose ici la subdivision $\sigma = (a_1, \cdots, a_n)$ fixée. Montrer que l'ensemble E_σ des fonctions affines par morceaux de subsdivision adaptée σ est un espace vectoriel.

   (d) Montrer que l'application $f\mapsto (f(a_1-1), f(a_1), \cdots, f(a_n), f(a_n+1)$ est un isomorphisme de E_σ dans $\mathbb{R}^{n+2}$. En déduire que E_σ est de dimension finie $n+2$

   (e) Montrer que les fonctions $x\mapsto 1, x\mapsto x, x\mapsto |x-a_1|, \cdots, x\mapsto |x-a_n|$ forment une base de E_σ.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $A = \left\{P\in\mathbb{R}_n[X] | \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(1) = 0\right\}$

   (a) Montrer que A est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et en déterminer une base.

   (b) Soit maintenant $B = \left\{P\in\mathbb{R}[X] | \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(1) = 0\right\}$ Montrer que la somme intervenant dans la définition de B a bien un sens pour tout polynôme P et montrer que B est un hyperplan de E. En déterminer une famille génératrice et un supplémentaire.

3. On pose $x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$.

   (a) Déterminer l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P(x_0) = 2,\ P(x_1) = 3\ P(x_2) = -1,\ P(x_3) = 4$ en utilisant les polynômes de Lagrange.

   (b) Montrer que $(1, (X-x_0), (X-x_0)(X-x_1), (X-x_0)(X-x_1)(X-x_2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ Retrouver le polynôme P en le cherchant par ses coordonnées dans cette base.

   (c) On cherche maintenant une méthode incrémentale de calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange. On appelle $P_{x_0,x_1,\cdots,x_n}^{y_0,y_1,\cdots,y_n}$ l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que $\forall i\in[|0,\cdots,n|] P(x_i) = y_i$. (Les $(x_i)_{i\in[|0,n|]}$ et les $(y_i)_{i\in|0,n|]}$ sont des scalaires, les x_i étant deux à deux distincts.)

      i. Que vaut $P_{x_0}^{y_0}$?
      ii. Vérifier que
      $$P_{(x_0,\cdots,x_n,x_{n+1})}^{(y_0,\cdots,y_n,y_{n+1})} = \frac{1}{x_0-x_{n+1}}\left((x-x_{n+1})P_{(x_0,\cdots,x_{n-1},x_n)}^{(y_0,\cdots,y_{n-1},y_n)} + (x_0-x)P_{x_1,\cdots,x_{n+1}}^{y_1,\cdots,y_{n+1}}\right)$$
      iii. Retrouver ainsi le polynôme d'interpolation du a).

4. (Interpolation de Hermite) Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$, et $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $n+1$ points distincts de cet intervalle.

   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n+1$, tel que
   $$\forall i\in[|0,N|] P(x_i) = f(x_i)\ P'(x_i) = f'(x_i)$$
   On pourra introduire l' application : u : $\begin{cases} \mathbb{K}_{2n+1}[X] & \to & \mathbb{K}^{2(n+1)} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \cdots, P(x_n), P'(x_0), \cdots, P'(x_n)) \end{cases}$

   (b) Exprimer P en fonction des $x_i, f(x_i), f'(x_i)$ (On considérera l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{K}^{2n}$ par l' application du a)).

5. (Classique à l'oral). Soit $A\in\mathscr{M}_n(K)$, $\mathrm{tr}(A)\neq 0$. On considère l'application u : $\begin{cases} \mathscr{M}_n(K) & \to & \mathscr{M}_n(K) \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A \end{cases}$

   (a) Montrer que u est linéaire.

(b) Déterminer le noyau de u

(c) Déterminer l'image de u (On pourra d'abord calculer $\mathrm{tr}(u(M))$).

(d) Déterminer la trace de u en fonction de A et n. (Indication : on pourra calculer $u(E_{i,j})$ où $(E_{1,1},\cdots,E_{n,n})$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$

(e) Déterminer $u\circ u$. A quelle condition u est-il un projecteur ? Déterminer alors ses éléments.

(f) (5/2). Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

6. Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

   (a) Montrer que $A^2-\mathrm{tr}(A)A+\det(A)I_2=0_2$

   (b) En déduire A^4 en fonction de A, (A) $det(A)$

   (c) Montrer que si $A^4-=0A$ et $\mathrm{tr}(A)=0$, alors $A=0$

   (d) (5/2)Retrouver ce résultat avec des considérations de diagonalisation

7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E de rang r. Montrer que l'ensemble f des endomorphisme de E tels que $f\circ p=p$ est un sous-espace affine de E et déterminer sa dimension. (On remarquera en le justifiant que l'on a une équation linéaire, et on trouvera une solution "évidente" de cette équation)

8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Déterminer la trace d'une symétrie s de E (en fonction de la dimension p de l'ensemble de ses éléments invariants et de n), d'une homothétie vectorielle de E de rapport λ.
(5/2)Déterminer le déterminant de ces applications.

9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n>1$.

   (a) Montrer que $f\in\mathscr{L}(E)$, de rang 1 n'est pas forcément un projecteur.

   (b) Montrer que $f\in\mathscr{L}(E)$, de rang 1 et de trace 1 est un projecteur.

   (c) Trouver une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ composée de matrices de projecteurs.

   Soient deux réels a et b, avec $a<b$. On pose $c=\frac{a+b}{2}$. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Déterminer l'unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 2 prenant les mêmes valeurs que f aux points a,b,c.(On utilisera les polynômes d'interpolation)

   (b) Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels. Montrer que :

$$\int_a^b P(t)dt=\frac{b-a}{6}\left(P(a)+4P\left(\frac{a+b}{2}\right)+P(b)\right)$$

   (c) Montrer que la formule précédente reste encore vraie si P est de degré inférieur ou égal à 3

   (d) On approche $\int_a^b f(t)dt$ par

$$\int_a^b P_f(t)dt=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

      i. Justifier cette formule.

      ii. On suppose maintenant f de classe C^4 sur $[a,b]$.

         A. Montrer qu'il existe un polynôme q de degré inférieur ou égal à 3 tel que $Q(a)=f(a)$, $Q(b)=f(b)$, $Q(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})$, $Q'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (On pourra chercher Q sous forme $P_f+\lambda(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$, λ scalaire à déterminer

         B. Montrer que $¡nt_a^b¶_f(t)dt=\int_a^b Q(t)$ dt

         C. On cherche maintenant à évaluer l'erreur commise en approchant $\int_a^b f(t)dt$ par $\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$. On évalue d'abord $\sup\limits_{[a,b]}|f-Q|$. On pose $m=\frac{a+b}{2}$ Soit g une fonction de classe C^4 sur $[a,b]$ telle que $g(a)=g(b)=g(m)=g'(m)=0$ Soit $x\in[a,b]\setminus\{a,m,b\}$. On pose $\forall t\in[a,b]h(t)=g(t)-\lambda(t-a)(t-m)^2(t-b)$ où λ est choisi de façon que $h(x)=0$.(on vérifiera que c'est possible). Calculer $h(a),h(b),h(m),h'(m)$. Montrer, avec le théorème de Rolle, que h' s'annule en au moins 4 éléments distincts de $]a,b[$

         D. En déduire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $h^{(4)}(c)=0$. Vérifier que $\lambda=\frac{h^{(4)}(c)}{24}$

         E. Montrer finalement que pour tout $x\in[a,b]|f(x)-Q(x)|\leqslant\frac{\sup|f^{(4)}}{24}(x-a)(x-m)^2(x-b)$

         F. Calculer $\int_a^b(x-a)(x-b)(x-m)^2dx$ (On pourra poser $x=m+u\frac{a+b}{2}$, avec $u\in[-1,1]$

         G. En déduire que

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(m)+f(b))\right|\leqslant\frac{(b-a)^5}{2880}\sup_{[a,b]}|f^{(4)}|$$