# Corrigé DM1 PC 2021-2022

**Exercice 1 :**

La matrice de $\varphi$ dans la base canonique est:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $Ker(\varphi)$ si et seulement si:

$$\begin{cases} -y = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

si et seulement si:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases},$$

donc $Ker(\varphi)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, soit encore $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

**Exercice 2 :**

1. On montre que $f$ est linéaire : soient $M, N \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). Alors:

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N). \end{aligned}$$

   De plus $f$ est bien une application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même donc c'est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. $Ker(f)$ est l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$, autrement dit les matrices qui commutent avec $A$. Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, on résout le système:

$$\begin{aligned}
AM = MA &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+c & 3b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b & 2a+b \\ c+3d & 2c+d \end{pmatrix} \\
&\Longleftarrow \begin{cases} a+2c = a+3b \\ b+2d = 2a+b \\ 3a+c = c+3d \\ 3b+d = 2c+d \end{cases} \\
&\Longleftarrow \begin{cases} 2c = 3b \\ a = d \end{cases} .
\end{aligned}$$

Donc $Ker(f)$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b/2 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et une base est donnée par $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ (elle est génératrice par ce qui précède et composée de deux vecteurs non colinéaires donc est libre).

En particulier la dimension du noyau est 2. Par le théorème du rang, la dimension de l'image est donc:

$$dim(M_2(\mathbb{R}) - dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Il suffit donc de trouver deux éléments linéairement indépendants du noyau, on pense donc à prendre les images de deux éléments de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$, par exemple:

$$f\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ces deux matrices sont non colinéaires donc forme une famille libre de l'image, de cardinal 2 qui est la dimension de l'image donc c'est une base de $Im(f)$.

3. On montre d'abord que l'intersection de $Ker(f)$ et $Im(f)$ est réduite à 0, ce qui montrera que la somme est directe. Soient $M \in Ker(f) \cap Im(f)$, alors il existe des scalaires $a, b, c, d$ tels que $M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Alors:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3/2b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3d & -2c \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

   donc on aboutit au système:

$$\begin{cases} a = -3d \\ b = -2c \\ 3/2b = 3c \\ a = 3d \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $a = b = c = d = 0$, donc $M = 0$. Donc les espaces sont en somme directe. Comme la somme de leurs dimensions vaut $4 = \dim(M_2(\mathbb{R}))$, ils sont supplémentaires. (Remarque : cela revient à montrer qu'en concaténant les bases précédentes de $Ker(f)$ et $Im(f)$ on obtient une base de $M_2(\mathbb{R})$.)