Colle 7 PC : Semaine du 08/11/2021

Probabilités

Rappels de première année sur les probabilités sur des univers fini.

Lois usuelles à support fini : uniforme, Bernouilli, binomiale.

Nouvelles lois à support infini : géométrique, Poisson.

Dénombrabilité (juste la définition, pas d'exercices centrés là-dessus).

Probabilités sur des univers dénombrables (la notion de tribu a été vue mais pas d'exercices spécifiques là-dessus). Sous-additivité, continuité croissante et décroissante.

Probabilité conditionnelle. Indépendance d'évènements. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes (dans le cadre du programme de deuxième année, avec des systèmes complets d'évènements finis ou dénombrables).

Variables aléatoires discrètes. Fonction de répartition. Espérance. Variance. Covariance. Coefficient de corrélation. Inégalité de Cauchy-Schwarz (versions avec l'espérance et la covariance). Indépendance.

Pas encore de couples de variables aléatoires, de séries génératrices, ou de résultats asymptotiques (inégalités de Markov, Chebychev, loi faible des grandes nombres).

Questions de cours

1. Lois de probabilités usuelles (uniforme, Bernouilli, binomiale, géométrique, Poisson au choix du colleur) : définition, calcul de l'espérance et de la variance (on admet que l'on peut dériver sous le signe somme).

2. Probabilité conditionnelle : définition et montrer que c'est une probabilité.

3. Formule des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes (au choix du colleur) : énoncé et démonstration (dans le cas d'un système complet d'évènements fini ou dénombrable).

4. Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson.

Exercices de base

1. Exercices de bases sur les probabilités sur un univers fini.

2. Problème du collectionneur: Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi suivie par la variable $X_{k+1} - X_k$.

   (b) En déduire l'espérance de X_N.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer $P(X=Y)$ et $P(X>Y)$.

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer pour tous entiers naturels m et n la relation : $P(X > m+n | X > n) = P(X > m)$ (on dit que la loi géométrique est "sans mémoire").

   (Approfondissement) Étudier la réciproque pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Exercices d'approfondissement

1. On dispose de deux urnes : l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires, l'urne U_2 contient une boule blanche et une boule noire. A et B effectuent des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée : c'est A qui commence. Le premier qui tire une boule blanche gagne et le jeu s'arrête. On remarquera que A tire les rangs impairs et B tire les rangs pairs.

   (a) Calculer les probabilités des événements:
   A_{2n+1} : "A gagne au $(2n+1)$-ième tirage."
   B_{2n+2} : "B gagne au $(2n+2)$-ième tirage."

   (b) Calculer les probabilités des événements:
   G_A : "A gagne."
   G_B : "B gagne."
   F: "Le jeu s'arrête."

2. Une secrétaire appelle au téléphone n clients avec pour chacun d'eux la probabilité p qu'il réponde. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui ont répondu.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   (b) La secrétaire rappelle une deuxième fois les clients qui n'ont pas répondu. On appelle Y le nombre de clients qui ont répondu la deuxième fois. Déterminer pour tout couple d'entiers $(k,l) \in [\![0,n]\!]^2$ la probabilité $P(Y=l|X=k)$.

   (c) En déduire que le nombre total de clients qui ont répondu (c'est-à-dire $X+Y$) suit une loi $\mathcal{B}(n, 1-(1-p)^2)$. Retrouver ce résultat d'une autre façon.

   (d) La secrétaire rappelle jusqu'à ce que tous les clients répondent. Soit W le nombre de séries d'appels nécessaires. Déterminer la loi de W.

3. (Loi du zéro-un de Borel) Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants. On considère l'événement:

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n.$$

   (a) Interpréter l'événement A.

   (b) On suppose la convergence de la série $\sum P(A_n)$. Montrer que $P(A)=0$.

   (c) On suppose la divergence de la série $\sum P(A_n)$. Montrer que $P(A)=1$.