I endomorphismes symétriques

.

.

Définition (1)

Soit $(E, \langle|\rangle)$ un espace euclidien réel réel. On dit qu'un endomorphisme u de E est **symétrique** lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle \tag{1}$$

.

Définition (1)

Soit $(E, \langle|\rangle)$ un espace euclidien réel réel. On dit qu'un endomorphisme u de E est **symétrique** lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle \tag{1}$$

I endomorphismes symétriques

.

Définition (1)

Soit $(E, \langle|\rangle)$ un espace euclidien réel réel. On dit qu'un endomorphisme u de E est **symétrique** lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle \tag{1}$$

Exemple (1)

Les homothéties vectorielles, les projecteurs et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques.
Réciproquement, les projecteurs et les symétries symétriques sont orthogonaux

.

Définition (1)

Soit $(E, \langle|\rangle)$ un espace euclidien réel réel. On dit qu'un endomorphisme u de E est **symétrique** lorsque

$$\forall (x,y) \in E^2 \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle \quad (1)$$

Exemple (1)

Les homothéties vectorielles, les projecteurs et les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques.
Réciproquement, les projecteurs et les symétries symétriques sont orthogonaux

Démonstration.

$\forall (x,y) \in E^2 \ \langle x - p(x)|p(y)\rangle = 0 = \langle p(x)|y - p(y)\rangle$ D'où..
$s_F = 2p_F - Id_E$ d'où.. □

Théorème (2. Structure)

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Théorème (2. Structure)

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Démonstration.

$\forall (u,v) \in S(E)^2 \forall \lambda \in \mathbb{R} \langle (\lambda u + v)(x) | y \rangle = ..$ □

Théorème (2. Structure)

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Démonstration.

$\forall (u,v) \in S(E)^2 \forall \lambda \in \mathbb{R} \langle (\lambda u + v)(x) | y \rangle = ..$ □

Théorème (2. Structure)

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Démonstration.

$\forall (u,v) \in S(E)^2 \forall \lambda \in \mathbb{R} \langle (\lambda u + v)(x) | y \rangle = ..$ □

Théorème (3. Caractérisation)

Un endomorphisme de E est symétrique si et seulement si sa matrice relativement à une **base orthonormée** *est symétrique .*

Théorème (2. Structure)

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Démonstration.

$\forall (u,v) \in S(E)^2 \forall \lambda \in \mathbb{R} \langle (\lambda u + v)(x) | y \rangle = ..$ □

Théorème (3. Caractérisation)

Un endomorphisme de E est symétrique si et seulement si sa matrice relativement à une **base orthonormée** *est symétrique .*

Démonstration.

$\forall (i,j) \in |1,n|]^2 \ \langle s(e_i) | e_j \rangle = \langle e_i | s(e_j) \rangle$.. Réciproquement.. □

II automorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.

II automorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

Exemple

Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux

II automorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

Exemple

Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux

II automorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

Exemple

Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux

Théorème

II automorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

Exemple

Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux

Théorème

1. *Un endomorphisme u de E est orthogonal $\iff$ il conserve la norme*

II automorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

Exemple

Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux

Théorème

1. *Un endomorphisme u de E est orthogonal $\iff$ il conserve la norme*
2. *Un endomorphisme orthogonal de E est en fait un automorphisme. u est un automorphisme orthogonal de E*

II automorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien)

Définition : On dit qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal lorsque $\forall (x, y) \in E^2 \ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.

Exemple

Les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux

Théorème

1. *Un endomorphisme u de E est orthogonal $\iff$ il conserve la norme*
2. *Un endomorphisme orthogonal de E est en fait un automorphisme. u est un automorphisme orthogonal de E*
3. *$O(E)$:ensemble des automorphismes orthogonaux de E. $(O(E), \circ)$ est un groupe : groupe orthogonal de E*

Démonstration.

1. Si u est orthogonale : $\forall x \in E \ \ \|u(x)\|^2 = \|x\|$.
   Réciproquement, on utilise la polarisation :
   $\forall (x,y) \in E^2 \langle u(x)|u(y)\rangle =$
   $\frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \frac{1}{4}\|u(x)-u(y)\|^2 = ..\right.$

□

Théorème

Un endomorphisme de E est orthogonal $\iff$ Il transforme une (toute) base orthonormale de E en une base orthonormale.

Démonstration.

1. Si u est orthogonale : $\forall x \in E \ \ \|u(x)\|^2 = \|x\|$.
   Réciproquement, on utilise la polarisation :
   $\forall (x,y) \in E^2 \langle u(x)|u(y)\rangle =$
   $\frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \frac{1}{4}\|u(x)-u(y)\|^2 = ..\right.$
2. $\forall x \in E \ \ u(x) = 0_E \iff \|u(x)\| = 0_E \iff ...$

□

Théorème

Un endomorphisme de E est orthogonal $\iff$ Il transforme une (toute) base orthonormale de E en une base orthonormale.

Démonstration.

1. Si u est orthogonale : $\forall x \in E \ \ \|u(x)\|^2 = \|x\|$.
   Réciproquement, on utilise la polarisation :
   $\forall (x,y) \in E^2 \langle u(x)|u(y)\rangle =$
   $\frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \frac{1}{4}\|u(x)-u(y)\|^2 = ..\right.$
2. $\forall x \in E \ \ u(x) = 0_E \iff \|u(x)\| = 0_E \iff ...$
3. On montre que c'est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, c'est-à dire qu'il est non vide, stable par $\circ$ et passage à l'inverse.

□

Théorème

Un endomorphisme de E est orthogonal $\iff$ Il transforme une (toute) base orthonormale de E en une base orthonormale.

Matrices orthogonales

Matrices orthogonales

Définition

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale $\iff$ l'endomorphisme canoniquement associé est orthogonal (pour le produit scalaire canonique). Ensemble des matrices orthogonales $O(n)$

Matrices orthogonales

Définition

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale $\iff$ l'endomorphisme canoniquement associé est orthogonal (pour le produit scalaire canonique). Ensemble des matrices orthogonales $O(n)$

Théorème

$M \in O(n) \iff {}^tMM = I_n \iff M{}^tM = I_n$

$M \in O(n) \iff M \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $M^{-1} = {}^t M$

$M \in O(n) \iff$ *les colonnes de* M *forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$

Matrices orthogonales

Définition

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale $\iff$ l'endomorphisme canoniquement associé est orthogonal (pour le produit scalaire canonique). Ensemble des matrices orthogonales $O(n)$

Théorème

$M \in O(n) \iff {}^tMM = I_n \iff M{}^tM = I_n$

$M \in O(n) \iff M \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $M^{-1} = {}^t M$

$M \in O(n) \iff$ *les colonnes de* M *forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$

Matrices orthogonales

Définition

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale $\iff$ l'endomorphisme canoniquement associé est orthogonal (pour le produit scalaire canonique). Ensemble des matrices orthogonales $O(n)$

Théorème

$M \in O(n) \iff {}^tMM = I_n \iff M{}^tM = I_n$
$M \in O(n) \iff M \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $M^{-1} = {}^t M$
$M \in O(n) \iff$ *les colonnes de* M *forment une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$

Démonstration.

$({}^tMM)_{i,j} = \langle u(e_i)|u(e_j)\rangle$ □

O(n) et O(E)

1.

O(n) et O(E)

Théorème

$M \in O(n) \Rightarrow det(M) \in \{-1, 1\}$ *(Réciproque fausse)*

1.

O(n) et O(E)

Théorème

$M \in O(n) \Rightarrow det(M) \in \{-1, 1\}$ *(Réciproque fausse)*

Démonstration.

${}^tMM = I_n$ donc $\det({}^tMM) = 1 = \det(M)^2$ □

1.

O(n) et O(E)

Théorème

$M \in O(n) \Rightarrow det(M) \in \{-1, 1\}$ *(Réciproque fausse)*

Démonstration.

${}^tMM = I_n$ donc $\det({}^tMM) = 1 = \det(M)^2$ □

1.

2.

O(n) et O(E)

Théorème

$M \in O(n) \Rightarrow det(M) \in \{-1, 1\}$ *(Réciproque fausse)*

Démonstration.

${}^tMM = I_n$ donc $\det({}^tMM) = 1 = \det(M)^2$ □

1.

Théorème

$(O(n), .)$ *est un groupe appelé groupe orthogonal d'ordre n. En particulier :* $(A, B) \in O(n)^2 \Rightarrow AB \in O(n)$ *et* $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$

2.

O(n) et O(E)

Théorème

$M \in O(n) \Rightarrow det(M) \in \{-1, 1\}$ *(Réciproque fausse)*

Démonstration.

${}^tMM = I_n$ donc $\det({}^tMM) = 1 = \det(M)^2$ □

1.

Théorème

$(O(n), .)$ *est un groupe appelé groupe orthogonal d'ordre n. En particulier :* $(A, B) \in O(n)^2 \Rightarrow AB \in O(n)$ *et* $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$

2.

3.

O(n) et O(E)

Théorème

$M \in O(n) \Rightarrow det(M) \in \{-1, 1\}$ *(Réciproque fausse)*

Démonstration.

${}^tMM = I_n$ donc $\det({}^tMM) = 1 = \det(M)^2$ □

1.

Théorème

$(O(n), .)$ *est un groupe appelé groupe orthogonal d'ordre n. En particulier :* $(A, B) \in O(n)^2 \Rightarrow AB \in O(n)$ *et* $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$

2.

Théorème

$SO(n) = \{r \in O(n) | \det(r) = 1\}$ *est un sous-groupe de* $O(n)$.

3.

Propriétés

Propriétés

Théorème

E espace euclidien, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, *$B$ base orthonormée de E.*

Propriétés

Théorème

E espace euclidien, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, B base orthonormée de E.

1. 1. *Une famille $B' \in E^n$ est une base orthonormée ssi $Mat_B(B') \in O(n)$.*

Propriétés

Théorème

E espace euclidien, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, B base orthonormée de E.

1. 1. *Une famille $B' \in E^n$ est une base orthonormée ssi $Mat_B(B') \in O(n)$.*
   2. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale $\iff$ $Mat_B(u) \in O(n)$*

Propriétés

Théorème

E espace euclidien, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, B base orthonormée de E.

1. 1. *Une famille $B' \in E^n$ est une base orthonormée ssi $Mat_B(B') \in O(n)$.*
   2. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale $\iff$ $Mat_B(u) \in O(n)$*
2. Changement de base orthonormale : $X = PX'$ (coordonnées). $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = {}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$ où $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$

Propriétés

Théorème

E espace euclidien, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, *$B$ base orthonormée de E.*

1. 1. *Une famille $B' \in E^n$ est une base orthonormée ssi $Mat_B(B') \in O(n)$.*
   2. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale $\iff$ $Mat_B(u) \in O(n)$*
2. Changement de base orthonormale : $X = PX'$ (coordonnées). $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = {}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$ où $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$
3. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.

Propriétés

Théorème

E espace euclidien, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, *$B$ base orthonormée de E.*

1. 1. *Une famille $B' \in E^n$ est une base orthonormée ssi $Mat_B(B') \in O(n)$.*
   2. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale $\iff$ $Mat_B(u) \in O(n)$*
2. Changement de base orthonormale : $X = PX'$ (coordonnées). $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = {}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$ où $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$
3. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.
4. $SO(E) = \{u \in O(E) | \det(u) = 1\}$: ensemble des rotations vectorielles.

Propriétés

Théorème

E espace euclidien, $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, *B base orthonormée de E.*

1. 1. *Une famille* $B' \in E^n$ *est une base orthonormée ssi* $Mat_B(B') \in O(n)$.
   2. $u \in \mathcal{L}(E)$ *est orthogonale* $\iff$ $Mat_B(u) \in O(n)$
2. Changement de base orthonormale : $X = PX'$ (coordonnées). $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = {}^t P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$ où $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$
3. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.
4. $SO(E) = \{u \in O(E) | \det(u) = 1\}$: ensemble des rotations vectorielles.
5. Si s est une réflexion , alors $det(s) = -1$

b]

Théorème (4.Diagonalisation des endomorphismes symétriques)

Tout endomorphisme symétrique s est diagonalisable.Les valeurs propres de s sont réelles Les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale. Il existe une base orthonormale de vecteurs propres

Démonstration.

Contentons-nous d'examiner les deux derniers points. Soit $(\lambda, \mu) \in sp(u)^2, \lambda \neq \mu$.
$\forall (x, y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)\ \langle u(x)|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle = \langle x|\mu y\rangle$
d'où.... . Pour construire une base orthonormée de vecteurs propres, il suffit alors de considérer une base orthonormale de chaque sous-espace propre, et..

3)Applications aux matrices carrées réelles symétriques

1. Toute matrice symétrique carrée réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale

3)Applications aux matrices carrées réelles symétriques

1. Toute matrice symétrique carrée réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale
2. Plus précisément, il existe D diagonale réelle telle que. $D = {}^tPAP$ où $P \in O(n)$

3)Applications aux matrices carrées réelles symétriques

1. Toute matrice symétrique carrée réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale
2. Plus précisément, il existe D diagonale réelle telle que. $D = {}^t PAP$ où $P \in O(n)$
3. A revoir $O(2)$,$SO(2)$, $SO(3)$ (cours 1 année)