Surfaces

PC

9 avril 2014

1 Surfaces

1.1 Nappe paramétrée

1.1.1 Définition

Définition 1 *On appelle* ***nappe paramétrée*** *toute application F de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:*

$$(u, v) \mapsto (f(u, v), g(u, v), h(u, v)).$$

L'ensemble $f(D)$ est appelé ***support*** *de la nappe. On dit que la nappe est de classe C^k lorsque F, c'est-à-dire f, g, h, sont de classe C^k.*

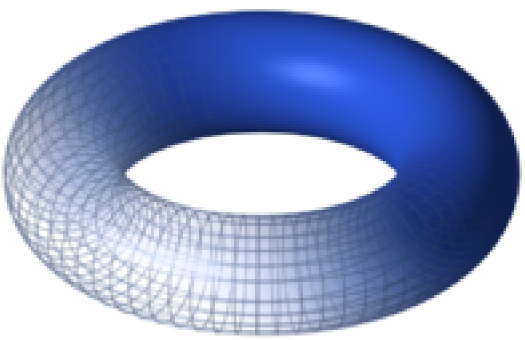
On dit aussi que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(u, v) \\ y & = & g(u, v) \\ z & = & h(u, v) \end{array}\right.$ *est une* ***représentation paramétrique*** *du support de la nappe.*

1.1.2 Exemples

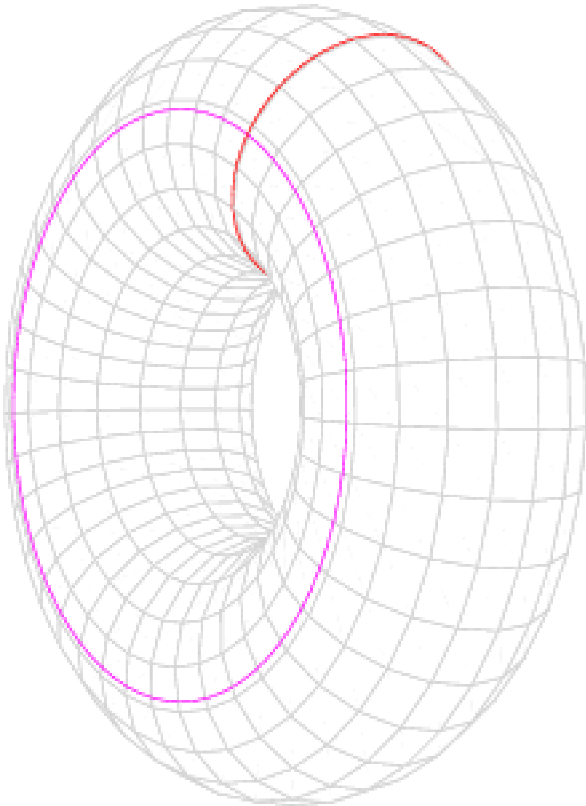
1. Plan . Soit le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ de vecteurs directeurs $\vec{V}(a, b, c)$ et $\vec{W}(a', b', c')$ où $(\vec{V}, \vec{W})$ est libre. Une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + ta + sa' \\ y & = & y_0 + tb + sb' \\ z & = & z_0 + tc + sc' \end{array}\right.$ avec $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Cette représentation est de classe C^∞
2. Sphère Une représentation paramétrique de la sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R s'obtient grâce aux coordonnées sphériques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a + R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y & = & b + R\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z & = & c + R\cos(\varphi) \end{array}\right.$$

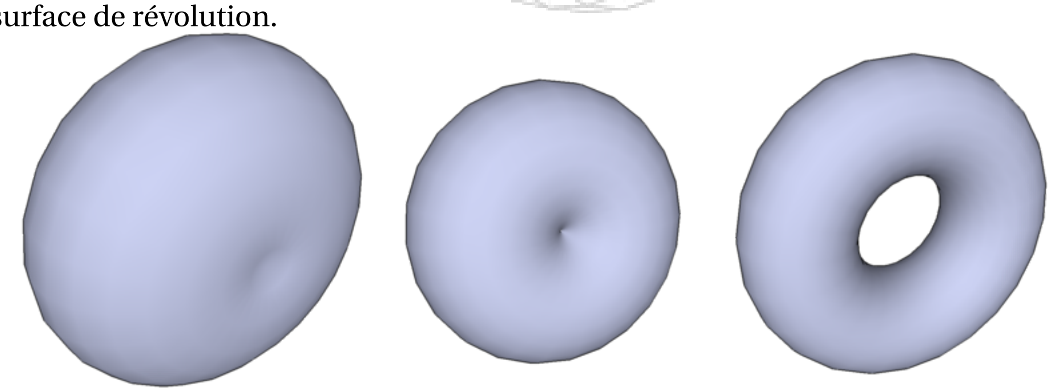
avec $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \theta$ est la longitude et φ la colatitude.



3. Tore Un tore est la surface engendrée par la rotation d'un cercle autour d'un axe de son plan, ne passant pas par son centre. C'est une



surface de révolution.



Il y a trois types de tores : croisé, à collier nul et ouvert.
Si l'on choisit l'axe $(O, \vec{k})$ comme axe de rotation et comme plan initial du cercle le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$, le cercle de rayon $r > 0$ étant centré au point $(R, 0, 0)$ a pour équation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & R + r\cos(v) \\ y & = & 0 \\ z & = & R\sin(v) \end{array} \right.$$

En transformant par la rotation d'axe $(O, \vec{k})$ et d'angle u, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & (R + r\cos v)\cos u \\ y & = & (R + r\cos v)\sin u \\ z & = & r\sin v \end{array} \right.$$

, avec $(u, v) \in [0, 2\pi]^2$.

1.1.3 Remarques

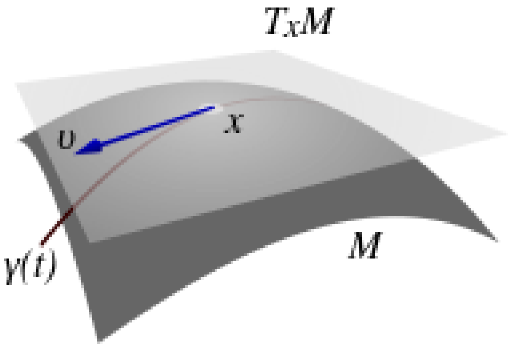
1. Deux nappes paramétrées peuvent voir le même support. C'est le cas notamment si l'on fait un changement de paramètre par difféomorphisme.

2. Un cas particulier important est la notion de surface représentative d'une fonction de deux variables $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. On peut la considérer comme la nappe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u \\ y & = & v \\ z & = & f(u,v) \end{array}\right.$$

avec $(u, v) \in D$

1.2 Plan tangent



1.2.1 Courbe tracée sur une surface

Soit S une surface de classe C^1 :

$$F\colon (u,v) \mapsto \left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(u,v) \\ y & = & g(u,v) \\ z & = & h(u,v) \end{array}\right. \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}$$

et γ une courbe de classe C^1 tracéee sur S. Une telle courbe est donnée par une fonction $\varphi : I \mapsto (u(t), v(t))$ telle que $\varphi(I) \subset D$. Une représentation paramétrique de γ est $F \circ \varphi$, soit :

$$F\circ\varphi\colon t \mapsto \left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(u(t),v(t)) \\ y & = & g(u(t),v(t)) \\ z & = & h(u(t),v(t)) \end{array}\right.$$

$G = F \circ \varphi$ est de classe C^1 et

$$\forall t \in I G'(t) = u'(t)\frac{\partial F}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial F}{\partial v}(u(t), v(t))$$

On voit donc que $G'(t) \in \mathrm{vect}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u(t), v(t)), \frac{\partial F}{\partial v}(u(t), v(t))\right)$.
En un point m de la surface, de paramètres (u_0, v_0), les tangentes à γ sont donc incluses dans le sous-espace affine passant par m de direction $\mathrm{vect}\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$.

1.2.2 Point régulier, plan tangent

On considère la surface S précédente.

Définition 2 (Point régulier) *On dit qu'un point $m(u_0, v_0)$ de la surface est **régulier** lorsque $\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v\right.$ est libre.*

Définition 3 (Plan tangent) *On appelle plan tangent en un point m régulier d'une surface le plan passant par $m(u_0, v_0)$ de vecteurs directeurs :$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$.*

Le plan tangent en un point régulier m est donc la réunion des tangentes aux courbes tracées sur S passant par m. Remarque : Une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier de paramètre (u, v) est donc $\begin{vmatrix} x - f(u,v) & \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ y - g(u,v) & \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ z - h(u,v) & \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = 0$

Lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique et est orienté, un vecteur normal au plan tangent en un point régulier est : $\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}$. Si on connaît ce vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ l'équation du plan tangent s'écrit :

$$a(x - f(u,v)) + b(y - g(u,v)) + c(z - h(u,v)) = 0$$

Exemple : sphère

Exemple : sur face $z = f(x, y)$

1.2.3 Cas particulier d'une courbe $z = f(x, y)$

1.3 Courbe définie par l'intersection de deux surfaces

1.3.1 Surface implicite

Une surface peut être également définie par une équation implicite $f(x, y, z) = 0$.
Exemple : les quadriques définies par :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + kz + l = 0\,;(a,b,c,d,e,f,g,h,k,l) \in \mathbb{R}^10$$

Le tore de révolution a pour équation cartésienne :

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$$

, soit

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$$

Un lien avec la définition précédente est donné par le théorème des fonctions implicites à trois variables.

Théorème 1 *Soit f une application de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ et $(x_0, y_0, z_0) \in U$ tel que $f(x_0, , y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Alors, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[\to]z_0 - \gamma, z_0 + \gamma[$ tel que :*

$$\begin{cases} \forall (x, y, z) \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[\times]z_0 - \gamma,_0 + \gamma[\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \\ \forall (x, y, z) \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[\times]z_0 - \gamma,_0 + \gamma[\ f(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y) \end{cases}$$

φ est alors de classe C^1 et

$$\forall (x, y) \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

Une équation cartésienne du plan tangent en un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de la surface est alors :

$$z - z_0 == -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0)$$

soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Un vecteur normal au plan tangent est donc $(f)_{x_0, y_0, z0}$.

Si $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$, mais que grad(f)$_{x_0, y_0, z0} \neq 0$, on peut alors exprimer l'une des coordonnées x ou y comme fonction des deux autres localement, de classe C^1, et l'on obtient toujours la même équation de plan tangent. On a donc :

Théorème 2 *Soit f une fonction numérique de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de la surface S d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$ tel que*

$$grad(f)_{(x_0, y_0, z_0)} \neq \vec{0}$$

. Alors (S) admet en M_0 un plan tangent de vecteur normal $\overrightarrow{grad}(f)_{(x_0, y_0, z_0)}$.

Exemple : sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R > 0$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$

1.3.2 Intersection de deux surfaces

Nous admettons le théorème suivant :

Théorème 3 *Soient deux surfaces d'équations implicites* (S) $f(x,y,z)=0$ *et* S' $g(x,y,z)=0$ *où* f *et* g *sont des applications d'un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $M(x_0,y_0,z_0) \in S \cap S'$ *tel que*

$$\overrightarrow{grad}(f)_{(x_0,y_0,z_0)} \wedge \overrightarrow{grad}(g)_{(x_0,y_0,z_0)} \neq \vec{0}$$

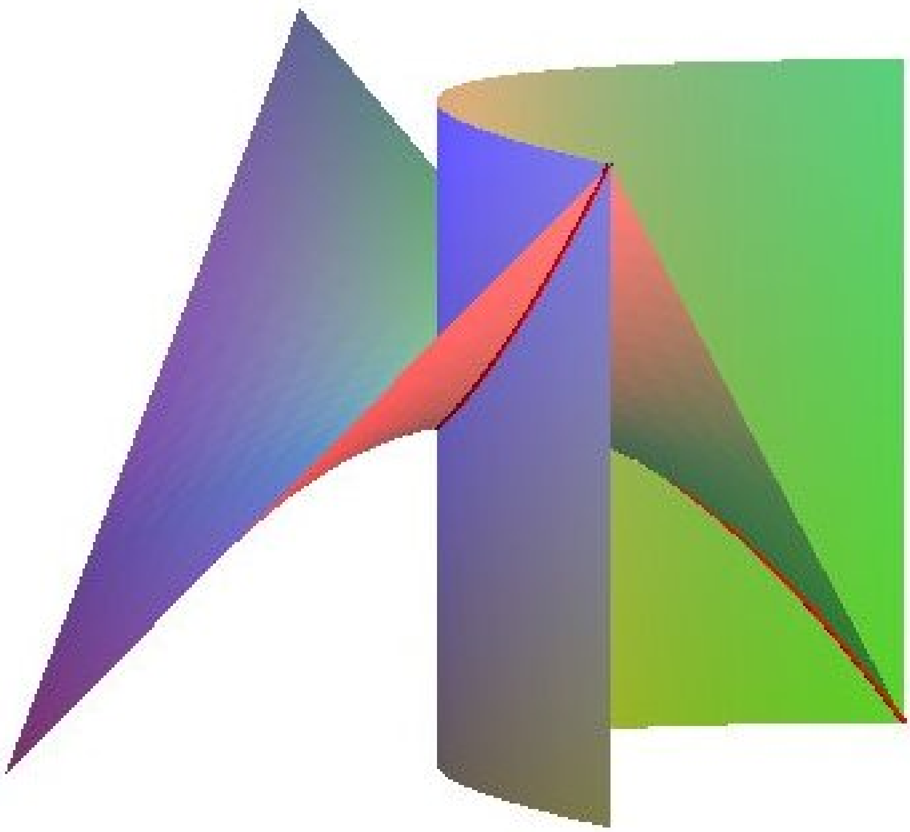
. Alors, $S \cap S'$ *est une courbe qui peut être paramétrée localement par l'une des trois coordonnées et qui admet en* M_0 *une tangente de vecteur directeur*

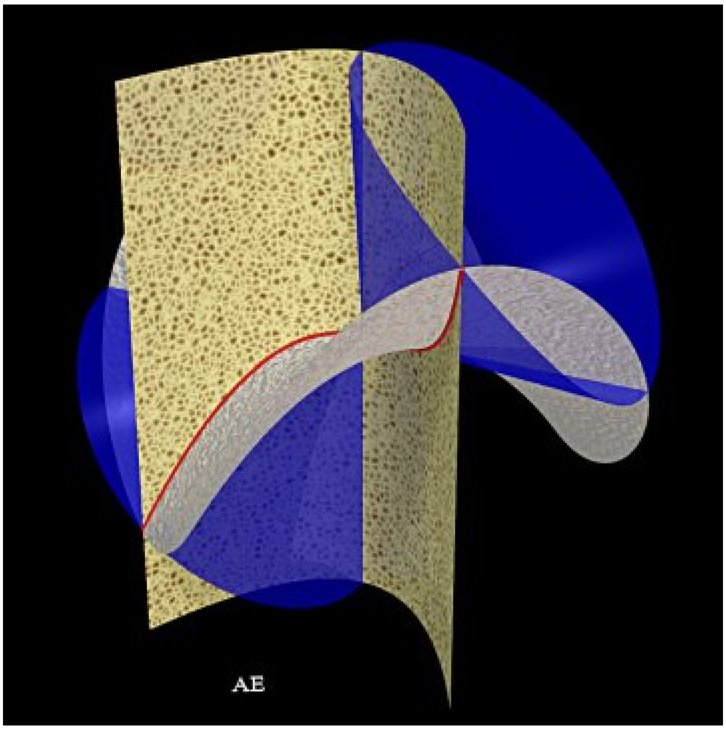
$$\overrightarrow{grad}(f)_{(x_0,y_0,z_0)} \wedge \overrightarrow{grad}(g)_{(x_0,y_0,z_0)}$$

. Cette tangente est l'intersection des plans tangents à S *et* S' *en* M_0.

Exemple

1. Elle est l'intersection des trois quadriques : $ay = x^2$(cylindre parabolique), $xy = z$(paraboloïde hyperbolique), et $y^2 = xz$ (cône de révolution).



hyperbolique.jpg 

2. Intersection d'une sphère et d'un plan, intersection d'une surface et d'un plan.

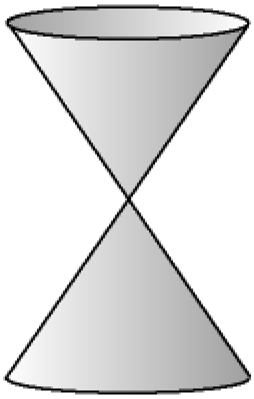
2 Surfaces particulières

2.1 Surfaces coniques

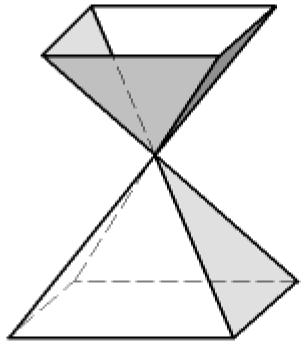
2.1.1 Surfaces

Définition 4 (surfaces coniques) 1. *On dit qu'une surface C est un cône de sommet Ω lorsqu'elle est réunion de droites passant par Ω*

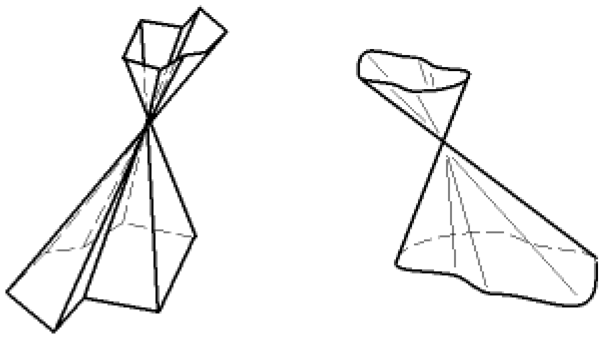
2. *Soit Γ une courbe de l'espace et Ω un point de l'espace n'appartenant pas à Γ. On appelle cône de sommet Ω et de directrice C la réunion des droites joignant Ω à un point de Γ. Une telle droite est appelée une génératrice du cône.*



cône de révolution



cône pyramidal



cônes quelconques

2.1.2 Équation paramétrique

On suppose que $\Omega(a,b,c)$ et que la courbe Γ est donnée par des équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \\ z & = & h(t) \end{array}\right.$ où $f,g,h = I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Alors un système d'équations paramétriques de Γ est donné par $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+\lambda(f(t)-a) \\ y & = & b+\lambda(g(t)-b) \\ z & = & c+\lambda(h(t)-c) \end{array}\right.$ où $(\lambda,t) \in \mathbb{R}\times I$ Exemples :

1. Un plan est une surface conique de sommet n'importe lequel de ses points.
2. Cône de révolution d'axe Oz

2.1.3 Plan tangent

Avec les mêmes notations :$\frac{\partial M}{\partial \lambda}(\lambda,t) = \begin{pmatrix} f(t)-a \\ g(t)-b \\ h(t)-c \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial M}{\partial t}(\lambda,t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$ Le point de la surface est donc régulier si et seulement si le vecteur tangent à Γ en M et $\overrightarrow{\Omega M}$ ne sont pas colinéaires. Le plan tangent passe alors par la génératrice et la droite . Il est le même pour tous les points d'une génératrice.

2.1.4 Équation cartésienne

Théorème 4 *Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un entier k tel que*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x,y,z)$$

, alors l'équation $f(x, y, z) = 0$ définit un cône de sommet O.

Exemple : $2x^2 + y^2 + xy - z^2 = 0$ est l'équation d'un cône. La fonction qui le définit est homogène de degré 2.

1. Tracer l'intersection de ce cône avec le plan d'équation $z = 1$. Quelle est la nature de cette intersection ?
2. Déterminer les points réguliers et l'équation du plan tangent en un point régulier.
3. Vérifier que ce plan tangent contient une génératrice et est le même tout le long d'une génératrice (sauf au sommet)
4. Donner une représentation paramétrique de ce cône.

2.1.5 Contour apparent conique

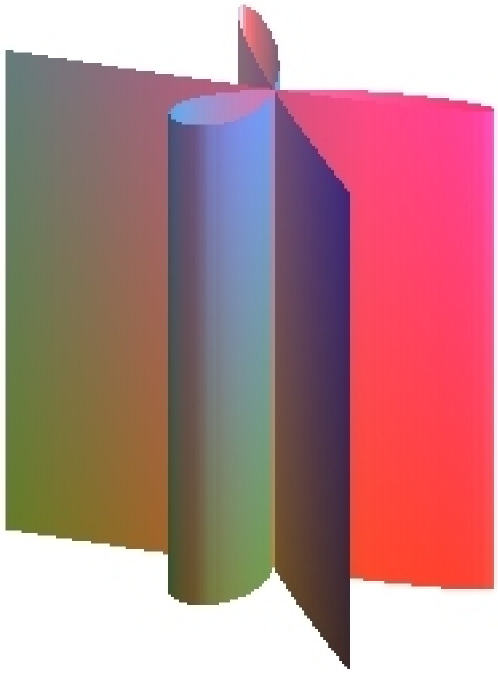
Définition 5 *Soit S une surface. On appelle tangente à (S) toute droite passant par un point $M_0 \in (S)$ incluse dans le plan tangent à (S) en M_0 (on suppose donc que celui-ci existe.*
*On appelle **contour apparent conique** de S vu d'un point A l'ensemble des points M de S tels que la droite AM soit tangente à (S).*

Exemple : contour apparent conique d'une sphère.

2.2 Surfaces cylindriques

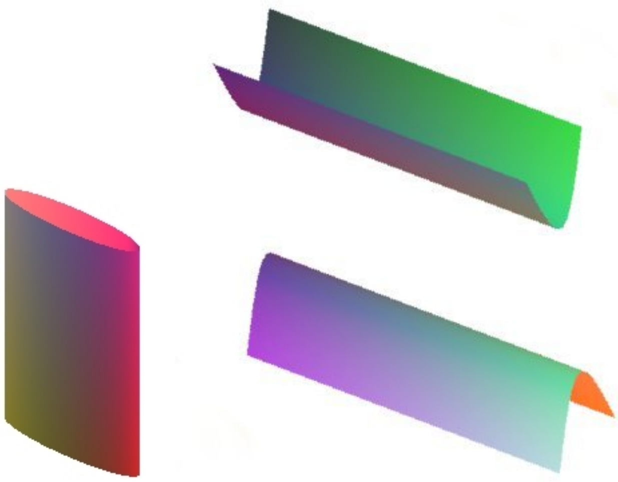
2.2.1 Surface cylindrique

Définition 6
1. *On appelle surface cylindrique toute surface qui est la réunion de droites parallèles.*
2. *On appelle surface cylindrique (C) de courbe directrice l'arc paramétré Γ et de direction vect$(\vec{a})$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$ la réunion des droites passant par un point quelconque de Γ de vecteur directeur $\vec{a}$. Une telle droite est appelée une génératrice du cylindre.*



Exemples

1. Un plan est une surface cylindrique.
2. Cylindre de révolution
3. Cylindre parabolique, elliptique, hyperbolique



2.2.2 Equation paramétrique, plan tangent

Si $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $C : t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$ de classe C^1 sur $I \subset \mathbb{R}$, une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= u(t) + sa \\ y &= v(t) + sb \\ z &= w(t) + sc \end{cases}$ On a alors $\frac{\partial M}{\partial t} = (u'(t), v'(t), w'(t)$ et $\frac{\partial M}{\partial s} = (a, b, c)$ Si $(u'(t), v'(t), w'(t))$ est non colinéaire à $\vec{a}$, en particulier non nul, on a un plan tangent contenant la génératrice au point considéré et la tangente à la directrice au point d'où est issue la génératrice. En particulier, le plan tangent est le même le long d'une même génératrice.

2.2.3 Équation cartésienne

Si $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (a', b', c')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}$ non colinéaires, alors $f(ax+by+cz, a'x+b'y+c'z) = 0$ est l'équation d' une surface cylindrique dont les génératrices sont de direction $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

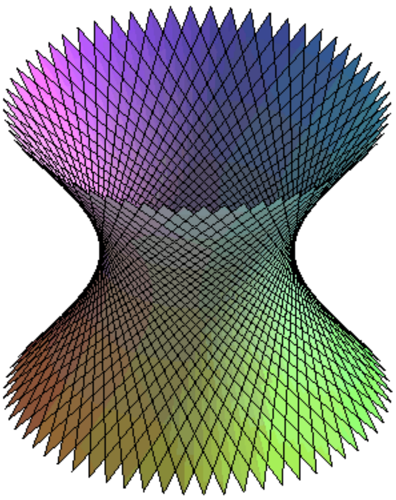
2.2.4 Contour apparent cylindrique

On appelle contour apparent cylindrique de direction $\vec{b}$ d'une surface l'ensemble des points où le plan tangent a pour vecteur directeur $\vec{b}$.

2.3 Surfaces de révolution

2.3.1 Définition

Définition 7
1. *On dit qu'une surface S est de révolution lorsqu'il existe une droite Δ telle que S soit la réunion de cercles d'axe Δ*
2. *Soit C une courbe de l'espace et Δ une droite. La surface de révolution d'axe Δ et de directrice C est la réunion des cercles d'axe Δ passant par un point de C. Ces cercles sont appelés les parallèles. L'intersection de S avec un plan passant par Δ est appelé un méridien. On peut choisir ce méridien comme directrice de la surface*



Par exemple un plan, une sphère un tore, un cylindre de révolution sont des surfaces de révolution.

2.3.2 Équation paramétrique

On suppose que l'axe est Oz et qu'une représentation paramétrique de la directrice est $t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$. Alors, une représentation paramétrique de S est :

$$x = u(t)cos(\theta) - v(t)\sin(\theta); \; y = u(t)\sin(\theta) + v(t)(\cos(\theta)); \; z = w(t)$$

2.3.3 Plan tangent