N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'i a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

I. PROBLÈME

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

I.1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geq 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

I.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

I.2.a Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

I.2.b En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

I.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

I.3. Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

I.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$

I.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$.

I.4. Soit la série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si , les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \mathcal{R}e(u_n)$ et $\sum \mathcal{I}m(u_n)$) convergent.
On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

I.5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée)

I.5.a Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A.

I.5.b A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.

I.6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

I.6.a Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.

En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

I.6.b Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \frac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi[$.

On pourra, par exemple,montrer que :

$$\text{pour tout } x \in [0, \pi],\ \frac{2}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

1 Exercice

On étudie la suite $In = \int_0^1 t^n f(t)dt$

1. Soit f une fonction réelle continue sur [0,1]. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f(t)dt = 0$
2. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1] telle que $f(1) \neq 0$. Montrer que $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur [0,1]. Trouver des rÃ©els a et b de telle sorte que, pour n tendant vers lâinfini on ait $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (Indication : pour 2) et 3)) faire des IPP.)