# Correction DM 3

**Avertissement :** Il subsiste certainement quelques coquilles...

## Problème

### Partie 1 : convergence de séries par transfo d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$.
Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.
$S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0$
$= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$

2. (a) Par théorème, la suite $(a_n)$ étant convergente, la série $\sum_{k \geq 0} a_k - a_{k+1}$ est également convergente (c'est même une CNS).
   (b) Vérifions que la suite $(S_n)$ des sommes partielles est convergente.
   D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.
   Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.
   Le premier terme est une somme partielle de la série de TG $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.
   Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.
   Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times M = (a_k - a_{k+1}) \times M$ car $(a_k)$ est une suite décroissante.
   Ainsi, $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est dominée par une le TG d'une série absolument convergente.
   Donc $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.
   (c) • Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.
   • Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \right)$ est une suite bornée.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce assure bien le résultat demandé.

3. (a) • On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.
   • Par théorème, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{(-2i)\sin(n\theta/2)}{(-2i)\sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$
   (b) • Lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
   • Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
   • Soit $\alpha \in ]0, 1]$.
   On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **2b2**.
   Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.
   La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers $0$.
   D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles qui va bien est bornée.
   Conclusion : la série est convergente.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.
Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la question précédente assure la convergence de la série de TG $z_n$ et le rappel de l'énoncé assure la convergence de la série de TG Im $(z_n) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}, u_n(x) = 0$ ce qui est bien le TG d'une série convergente.
Conclusion : cette série de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$.

**Partie 2 : convergence uniforme de séries**

5. (a)
   - On montre que la suite $(a_n F_n)$ cvu vers la fonction nulle sur $A$.
     $\forall z \in A, |a_n F_n(z)| \leq |a_n| \times M$ et cette majoration par une suite (indépendante de $z$) qui tend vers 0 assure que $(a_n F_n)$ cvu vers 0 sur $A$.
   - Notons comme précédemment, que $\forall k \in \mathbb{N}, |a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$ par décroissance de $(a_n)$.
     Ainsi, $\forall z \in A, |(a_k - a_{k+1})F_n(z)| \leq (a_k - a_{k+1}) \times M$ et cette majoration par le TG d'une série convergente (car la suite $(a_k)$ est convergente) indépendant de $z$ assure que la série de fonction $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur $A$.

   (b) Il est connu qu'une somme de suites de fonctions qui convergent uniformément définit une suite de fonction qui converge uniformément.
   Ainsi, $(a_n F_n)$ cvu sur $A$ et $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})F_k\right)$ cvu sur $A$ (d'après ce qui précède).
   Donc la somme converge uniformément sur $A$ et cette somme est la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f_k\right)$ d'après la tranformation d'Abel.
   Ainsi, la série $\sum a_k f_k$ cvu sur $A$.

6. (a)
   - On factorise $1 - e^{ix}$ par $e^{ix/2}$ pour obtenir le résultat souhaité.
   - La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et de limite nulle.
     Soit $a \in ]0, \pi[$.
     Soit $x \in [a, 2\pi - a]$. Notons tout de suite que $e^{ix} \neq 1$ car $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
     Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| = \left|\text{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \frac{|\sin(nx/2)|}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} = \frac{1}{\sin(|x|/2)}$.
     Or $x \in [a, 2\pi - a]$ donc $(x/2) \in [a/2, \pi - a/2]$.
     Par hypothèse sur $a$, $0 < a/2 \leq \pi/2 \leq \pi - a/2 < \pi$ donc les variations de la fonction $\sin$ donnent $0 < \sin(a/2) = \sin(\pi - a/2) \leq \sin(x/2) = |\sin(x/2)|$.
     Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 2\pi - a]$, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(a/2)}$ ce qui assure le caractère uniformément borné de la série de fonctions qui va bien.
     Ainsi, d'après les questions précédentes, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ converge uniformément sur le segment $[a, 2\pi - a]$.
   - Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes généraux, la convergence uniforme assure la continuité de la limite sur le domaine de convergence. Ainsi, $U$ est continue sur tous les segments $[a, 2\pi - a]$ pour $a \in ]0, \pi[$.
     Donc $U$ est continue sur la réunion de ces segments qui forme l'intervalle $]0, 2\pi[$ tout entier.

   (b) D'après les énoncés précédents, il suffit de démontrer que la suite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\sin(px)$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.
   D'après les calculs précédents, $\forall x \in ]0, \pi]\,, A_n(x) = \displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\sin(px)\right| = \left|\frac{\sin(nx/2)\sin(px)}{\sin(x/2)}\right|$.
   Pour $x \in ]0, \pi]$, on a d'après l'énoncé, $0 < \dfrac{x}{\pi} \leq \sin(x/2)$ ce qui, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ donne $0 < \dfrac{1}{\sin(x/2)} \leq \dfrac{\pi}{x}$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, \pi]\,, A_n(x) \leq \dfrac{|\sin(px)|\pi}{x}$.
   Or, il est bien connu que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t$ réel.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, \pi]\,, A_n(x) \leq \dfrac{p|x|\pi}{x} = p\pi$.
   Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ car la somme est nulle.
   Ainsi, la somme partielle qui va bien est uniformément bornée. De plus, $(1/\sqrt{n})$ est décroissante de limite nulle donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ cvu sur $[0, \pi]$.

## Exercice

On étudie la suite $In = \int_0^1 t^n f(t)dt$

(a) Soit f une fonction réelle continue sur [0,1]. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

$f$ est continue donc bornée sur $[0,1]$ et $|I_n| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 t^n dt = \frac{\|f\|_\infty}{n+1}$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$

(b) Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur [0,1] telle que $f(1) \neq 0$. Montrer que $I_n \sim \frac{f(1)}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ .

On fait une intégration par parties : $\int_0^t {}^n f(t)dt = \left[\frac{f(t)t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt$. Comme $f'$ est continue sur $[0,1]$,on obtient á nouveau : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = f(1)$ et comme $f(1)$ est non nul, $I_n$ est équivalent à $\frac{f(1)}{n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

(c) Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur [0,1]. Trouver des réels $a$ et $b$ de telle sorte que, pour n tendant vers l infini on ait $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(Indication : pour 2) et 3)) faire des IPP.)

On fait une nouvelle intégration par parties et on trouve $I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2} f"(t)dt$.

Le dernier terme est un $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $f"$ est continue et $\frac{f(1)}{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, $\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Finalement :$I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec $a = f'(1)$ et $b = -f'(1) - f"(1)$.