Exercices sous-espaces stables, blocs

PC

December 2014

1. Soient $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
   (a) Montrer que la somme $F_1 + \cdots F_p$ est directe si et seulement si $\forall i \in [|1,p|], i \geqslant 2, F_i \cap (F_1 + \cdots F_{i-1}) = \{0_E\}$
2. Montrer qu'un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, les espaces $\text{Im}p$ et $\ker p$ sont stables par f.
3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
   a) Montrer que $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont stables par g i.e. $g(\ker f) \subset \ker f$ et $g(\text{Im} f) \subset \text{Im} f$
   b) En déduire que, si p est un projecteur de E, on a :
   p et f commutent si, et seulement si, $\text{Im}p$ et $\ker p$ stables par f.
4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\text{Id}_E$.
   (a) Soit $a \in E$ non nul. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.
   On pose $F(a) = \text{Vect}\,(a, f(a))$.
   (b) Montrer que $F(a)$ est stable par f.
   (c) Montrer qu'il existe des vecteurs de E $a_1, \ldots, a_p$ non nuls tels que
   $$E = F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_p)$$
   (d) En déduire que la dimension de E est paire et justifier l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs 2-2.
5. Déterminer les sous-espaces vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.
6. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et
   $$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

(a) Montrer que A est inversible si, et seulement si, B l'est.

(b) Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r décomposée par blocs sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ supposée inversible.
a) Montrer que pour toute colonne $Y \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$ il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ telle que
$$M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}$$
b) En déduire que $D = CA^{-1}B$.

8. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

9. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice
$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$
Etablir
$$\mathrm{rg} M = \mathrm{rg} A + \mathrm{rg} B$$

10. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et
$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$
On suppose B inversible. Etablir
$$\mathrm{rg} M = p \Leftrightarrow A = O_n$$

11. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
a) On note $\left(A \mid B \right) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les colonnes de B à droite de celles de A.
Montrer
$$\mathrm{rg} \left(A \mid B \right) = \mathrm{rg} A \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B = AU$$

b) On note $\left(\frac{A}{C}\right) \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les lignes de C en dessous de celles de A.
Montrer

$$\text{rg}\left(\frac{A}{C}\right) = \text{rg}A \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), C = VA$$

c) En déduire

$$\text{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rg}A \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$$

12. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB - BA = I_n\,?$$

(Utiliser la trace).

13. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (C'est à dire une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \text{tr}(AM)$.

14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + {}^tX = \text{tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

15. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer

$$f^2 = \text{tr}(f).f$$

A quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

16. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer

$$f^2 = \text{tr}(f).f$$

A quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

17. Dans l'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F_1 = \{f \in E / f \text{ est constante}\}\,,\ F_2 = \{f \in E / \forall t \in [-1, 0]\,, f(t) = 0\}$$

$$\text{et } F_3 = \{f \in E / \forall t \in [0, 1]\,, f(t) = 0\}$$

Etablir

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$