Mines PC 2007

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On assimilera une matrice $\mathbb{K}^p$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On assimilera une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ avec l'application linéaire de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $X \mapsto M.X$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $M(i,j)$ représente le coefficient en ligne i et colonne j de M.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
La matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 est notée J_n.
Pour $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on considère $\|M\| = \max\left\{\sum_{j=1}^{r} |M(i,j)| \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est POSITIVE (respectivement STRICTEMENT POSITIVE), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs).
Une matrice positive $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque $M.J_m = J_n$.
On désigne par $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes stochastiques.

P est une matrice stochastique, strictement positive, de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

I *Noyau*

I.1 Prouver que J_n appartient à $\ker(P - I_n)$.

I.2 Prouver que si $X \in \ker(P - I_n)$ alors, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} P(i,j)(x_i - x_j) = 0$.

I.3 En considérant un indice p tel que $x_p = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en déduire que les éléments de $\ker(P - I_n)$ sont colinéaires à J_n.

I.4 Déterminer le rang de $P - I_n$.

II *Préliminaires*

II.1 Montrer que $\|MN\| \leqslant \|M\|.\|N\|$ pour toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$.

II.2 Montrer que $\|P\| = 1$.

II.3 Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, P^k est une matrice stochastique.

II.4 Montrer que si $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est une matrice de rang 1 avec $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(U)$, $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors il existe $V \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{K})$ telle que $M = U.V$.

III *Pseudo-inverses*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est un pseudo–inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :
1) $A.B = B.A$
2) $A = A.B.A$
3) $B = B.A.B$

III.1 Montrer que l'existence d'un pseudo–inverse de A implique que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$.

III.2 Prouver que si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ alors $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^2)$ et $\mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

III.3 En considérant une base adaptée prouver que si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2) = r$ alors il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversible telles que

$$A = Q^{-1}.\begin{pmatrix} A' & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.Q \text{ où } 0_{p,q} \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

III.4 Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ alors A admet au moins un pseudo-inverse.[1]

III.5 Prouver que si A admet un pseudo–inverse B alors $\ker(A) = \ker(B)$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$.

III.6 Prouver que si A admet les pseudo–inverses B et B' alors $B.X = B'.X$ pour tout $X \in \ker(A)$ et $B.A^2 = B'.A^2$.

III.7 En déduire que si A admet un pseudo–inverse celui–ci est unique.

[1] On pourra chercher B de la même forme que A.

IV *Un exemple*

On pose $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $A = I_2 - P$.

IV.1 Déterminer $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

IV.2 Prouver que A admet un pseudo–inverse B. Le calculer.

IV.3 Prouver que $P^n = \dfrac{1}{2.3^n}\begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n \end{pmatrix}$.

IV.4 Calculer[2] $\lim\limits_{n\to+\infty} P^n$; comparer avec $I_2 - A.B$.

V *Convergence*

On reprend les notations du début. En particulier P est une matrice stochastique, strictement positive, de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. **On note** $A = I_n - P$.

V.1 Soit $X \in \mathrm{Im}(A) \cap \ker(A)$. Prouver que si $X = A.Y$ alors $P^k.Y = Y - kX$ pour tout $k \geqslant 1$.

V.2 Avec les notations ci–dessus, prouver que les composantes de $P^k.Y$ sont majorées par $M = \max\{|y_1|;\dots,|y_n|\}$ si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

V.3 En déduire que $\mathrm{Im}(A) \cap \ker(A) = \{0\}$ puis que A admet un pseudo–inverse.

On note B le pseudo–inverse de A dont l'unicité est garantie par la question **III.7**.

V.4 Prouver que $P.(I_n - A.B) = I_n - A.B$. En déduire que, pour $k \geqslant 1$, $P^k = P^k.A.B. + I_n - A.B$.

V.5 Établir, pour tout entier naturel non nul k, l'identité suivante

$$\sum_{j=0}^{k-1} P^j = (I_n - P^k).B + k(I_n - A.B)$$

V.6 Prouver que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\| \dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j - (I_n - A.B) \right\| = 0$.

V.7 Calculer $A.(I_n - A.B)$. En déduire que $\mathrm{Im}(I_n - A.B) = \mathrm{Vect}(J_n)$.

V.8 Montrer que $I_n - A.B$ est stochastique. En déduire que $I_n - A.B = J_n.L_\infty$ avec $L_\infty \in \mathcal{K}_n$.

V.9 Calculer $J_\infty.P$.

V.10 Prouver que, pour toute matrice $V \in \mathcal{K}_n$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\| \dfrac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} V.P^j - L_\infty \right\| = 0$.

[2] C'est-à-dire calculer les limites des coefficients des matrices P^n.