Première partie

1. On a, pour une série de réels :

A) Une série convergente est absolument convergente.
B) Une série divergente est absolument divergente.
C) Une série absolument convergente est convergente.
D) Une série absolument divergente est divergente.

2. On a, pour une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

A) La convergence uniforme sur I entraine la convergence normale sur I.
B) La convergence uniforme sur I entraine la convergence absolue en tout point de I.
C) La convergence absolue en tout point de I entraine la convergence uniforme sur I.
D) Pour établir que la série ne converge pas normalement sur I il est nécessaire d'établir la non convergence uniforme sur I.

On pose pour x réel et n entier naturel, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$ et lorsque cette série converge on note f sa somme : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

3. On a :

A) Si $x \leq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ diverge grossièrement puisque la suite $(u_n(x))_n$ ne converge pas vers 0.

B) Si $x \leq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ ne diverge pas grossièrement.

C) Si $0 < x \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 0} |u_n(x)|$ diverge.

D) Si $0 < x \leq 1$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ diverge.

Tournez la page S.V.P.

4. On a:

A) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente pour $x \in]0,+\infty[$.

B) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente pour $x \in]1,+\infty[$

C) L'ensemble de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$.

D) L'ensemble de définition de la fonction f est $]1,+\infty[$.

5. On a :

A) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) \geq 0$.

B) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) \leq 0$.

C) La fonction f ne garde pas un signe constant sur $]0,+\infty[$.

D) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) \leq 1$.

6. On a:

A) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergente uniformément sur $]0,+\infty[$.

B) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergente normalement sur $]0,+\infty[$.

C) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergente normalement sur $]1,+\infty[$.

D) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur tout compact inclus dans $]1,+\infty[$.

7. On a:

A) Une série de fonctions qui est uniformément convergente sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ n'est pas nécessairement uniformément convergente sur cet intervalle.

B) Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série de réels convergente on peut toujours écrire $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|$.

C) Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série de réels convergente on peut toujours écrire, pour n entier naturel, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k|$.

D) Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série de réels absolument convergente on peut toujours écrire, pour n entier naturel, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| \leq v_{n+1}$.

8. Soit $[a,\ b]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. On a, pour tout $x \in [a,\ b]$:

A) $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^x}$

B) $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^a}$

C) $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^b}$

D) $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \dfrac{(-1)^n}{(2n+3)^x}$.

9. On a :

A) Si $x \in [a,\ b]$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+3)^x} = 0$, la suite des restes (R_n) (où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$) converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[a,\ b]$ et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ est uniformément convergente sur $[a,\ b]$.

B) La fonction f n'est continue que sur $]1, +\infty[$.

C) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Tournez la page S.V.P.

10. On note $I =]1, +\infty[$ et on a :

A) Les fonctions u_n sont dérivables sur $I =]1, +\infty[$ et

pour $x \in I$, $u_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} x}{(2n+1)^{x+1}}$.

B) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans I.

C) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} u_n'$ converge normalement sur I.

D) Par le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, la fonction f est dérivable sur I et,

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^x} \ln(2n+1).$$

11. On a :

A) $f(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{2n}\, \mathrm{d}t$.

B) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n t^{2n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

C) La série $\sum\limits_{n \geq 0} \int_0^1 \left|(-1)^n t^{2n}\right| \mathrm{d}t$ converge.

D) On peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme pour intervertir $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_0^1$.

12. On pose $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n t^{2n}\, \mathrm{d}t$. On a :

A) $S_N = 1 + J_N$ où $J_N = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t^2)^{N+1}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

B) $S_N = \dfrac{\pi}{4} + J_N$ où $J_N = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

C) $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

D) $f(1) = 1$.

13. On a :

A) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x}$.

B) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

C) Pour tout $x \in]-1,1]$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

D) Pour tout $x \in]-1,1]$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$.

Deuxième partie

On note F l'ensemble des applications dérivables f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = f(\sqrt{x}).$$

On note G l'ensemble des applications dérivables g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = e^t g\left(\frac{t}{2}\right).$$

14. On a :

A) F et G ne sont pas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour les opérations usuelles.

B) Si $f \in F$, $t \mapsto f(e^{\frac{t}{2}})$ est élément de G.

C) Si $f \in F$, $t \mapsto f(e^t)$ est élément de G.

D) Soit $g \in G$, si on pose pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f(x) = g(\ln x)$, alors $f \in F$.

15. Soit Ψ l'application de F dans G qui, à toute application f de F, associe l'application g de G définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f(e^t)$.

A) Ψ est linéaire.

B) $\operatorname{Ker}\Psi = \{0\}$ et Ψ est injective.

C) Ψ est un isomorphisme car endomorphisme injectif en dimension finie.

D) Ψ n'est pas surjective.

16. On sait que :

A) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est une série convergente.

B) Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

C) Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayon respectivement R_a et R_b et si pour tout n entier naturel on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, le rayon R de la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ est : $R = \min(R_a, R_b)$.

D) Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayon respectivement R_a et R_b et si pour tout n entier naturel on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, le rayon R de la série produit $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ vérifie : $R \leq \min(R_a, R_b)$.

17. Supposons qu'il existe une série entière de la variable réelle $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ de rayon de convergence infini, avec $a_0 = 1$, dont la somme est élément de G. On a :

A) $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!} = n a_n$.

B) $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!} = a_n$.

C) $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-1-k)!} = a_n$.

D) $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} \frac{1}{(n-1-k)!} = a_n$.

18. On a :

A) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{2^n}{n!}$.

B) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{1}{n!}$.

C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{2^n}{n}$.

D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{n!}{2^n}$.

19. Soit g élément de G, on a :

A) g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

B) g est uniquement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

C) La formule de Leibniz pour $n \geq 1$ donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} e^t g^{(i)}\left(\frac{t}{2}\right).$$

D) La formule de Leibniz pour $n \geq 1$ donne :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} e^t \frac{1}{2^i} g^{(i)}\left(\frac{t}{2}\right).$$

20. Soit $A \geq 1$ et $M = \max_{t \in [-A,\, A]} |g(t)|$, on a :

A) $\forall t \in [-A, A]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|g^{(n)}(t)| \leq M$.

B) $\forall t \in [-A, A]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|g^{(n)}(t)| \leq Me^{nA}$.

C) $\forall t \in [-A, A]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|g^{(n)}(t)| \leq Me^{A}$.

D) $\forall t \in [-A, A]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|g^{(n)}(t)| \leq Mne^{nA}$.

21. $\forall t \in [-A, A]$, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et t à l'ordre N :

A) $g(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n = \int_0^t \frac{(t-u)^N}{N!} g^{(N)}(u)\mathrm{d}u$.

B) $g(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n = \int_0^t \frac{(t-u)^N}{n!} g^{(N+1)}(u)\mathrm{d}u$.

C) $g(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n = \int_0^1 \frac{(t-u)^N}{N!} g^{(N+1)}(u)\mathrm{d}u$.

D) $g(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{N+1}}{(N+1)!} g^{(N+1)}(u)\mathrm{d}u$.

On pourra utiliser les deux résultats suivants :

Toute application g élément de G est développable en série entière.

Il existe une unique application de G développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et prenant la valeur 1 en $t = 0$. On la notera φ.

22. On a :

A) $G=\{\varphi\}$.

B) $\dim G\geq 2$.

C) $G=\text{vect }\{\varphi\}$.

D) $\dim F=\dim G$ car F et G sont isomorphes.

Troisième partie

On désigne par M et A deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n\geq 2$, φ et f sont leurs endomorphismes canoniquement associés.

23. On suppose que $M^2=I$ où I est la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

A) La matrice M est diagonalisable.

B) Si on note SP(M) l'ensemble des valeurs propres de la matrice M on a : $\{-1,1\}\subset$ SP(M).

C) On a nécessairement $M=I$ ou $M=-I$.

D) Il n'existe pas de matrice différente de I vérifiant $M^2=I$.

24. On a :

A) On suppose que M est diagonalisable et que $M^2=A$ alors A est diagonalisable.

B) M est diagonalisable si et seulement si M^2 est diagonalisable.

C) Si A est diagonalisable, il existe au moins une matrice diagonalisable M telle que $M^2=A$.

D) Une matrice nilpotente non nulle est diagonalisable.

25. On a :

A) Il existe deux matrices M vérifiant $M^2=A$.

B) Si M et A commutent alors $M^2=A$.

C) Si $M^2=A$, alors φ est un projecteur.

D) Si $M^2=A$, alors M et A commutent.

26. on a :

A) Si μ est une valeur propre de φ, μ est une valeur propre de φ^2.

B) Si μ est une valeur propre de φ^2, μ est une valeur propre de φ.

C) Si x est un vecteur propre de φ, x est un vecteur propre de φ^2.

D) Si x est un vecteur propre de φ^2, x est un vecteur propre de φ.

27. On donne quatre assertions :

(1) φ est non injectif ;

(2) 0 est valeur propre de φ ;

(3) 0 est valeur propre de φ^2 ;

(4) φ^2 est non injectif.

On a :

A) Les quatre assertions sont équivalentes.

B) Trois des quatre assertions seulement sont équivalentes.

C) Deux des quatre assertions seulement sont équivalentes.

D) Aucune de ces assertions n'est équivalente à une autre.

28. Pour φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E, si P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, on a :

A) $\operatorname{Ker} P(\varphi) \oplus \operatorname{Ker} Q(\varphi) = \operatorname{Ker}(PQ)(\varphi)$.

B) $\operatorname{Ker} P(\varphi) \oplus \operatorname{Ker} Q(\varphi) = E$.

C) $\operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker}(PQ)(\varphi)$.

D) $\operatorname{Ker} P(\varphi) \oplus \operatorname{Ker} Q(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

29. Soit λ une valeur propre non nulle de φ^2, et μ un nombre complexe tel que $\mu^2 = \lambda$; on a :

A) $\operatorname{Ker}(\varphi^2 - \lambda\, id) = \operatorname{Ker}(\varphi - \mu\, id) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi + \mu\, id)$.

B) $E = \operatorname{Ker}(\varphi - \mu\, id) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi + \mu\, id)$.

C) Si on suppose que φ^2 est diagonalisable,
on a (φ diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{Ker}\varphi^2 = \operatorname{Ker}\varphi$).

D) On a (φ^2 diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{Ker}\varphi^2 = \operatorname{Ker}\varphi$).

30. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes et soit un endomorphisme φ vérifiant $\varphi^2 = f$, on a :

A) φ est diagonalisable.

B) Il y a $2n$ endomorphismes φ vérifiant $\varphi^2 = f$ si 0 n'est pas valeur propre de f.

C) Il y a 2^n endomorphismes φ vérifiant $\varphi^2 = f$ si 0 n'est pas valeur propre de f.

D) Il y a 2 endomorphismes φ vérifiant $\varphi^2 = f$ si 0 est valeur propre de f.

Tournez la page S.V.P.

Dans les deux questions suivantes, $n=3$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

31. On a :

A) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable donc son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

B) $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage qui permet de diagonaliser la matrice A.

C) $P=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage qui permet de diagonaliser la matrice A.

D) $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage qui permet de diagonaliser la matrice A.

32. Si on fait la somme et le produit de toutes les matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = A$.

A) La somme est la matrice identité.

B) Le somme est la matrice nulle.

C) Le produit donne une matrice de trace 258.

D) Le produit donne une matrice de trace 2^8.

33. A et n sont à nouveau quelconques.
On suppose que f est diagonalisable et que l'une au moins de ses valeurs propres est non nulle avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.

A) Il n'existe aucun endomorphisme φ diagonalisable tels que $\varphi^2 = f$.

B) Il existe un nombre fini d'endomorphismes φ diagonalisables tels que $\varphi^2 = f$.

C) Il existe une infinité d'endomorphismes φ diagonalisables tels que $\varphi^2 = f$.

D) Il existe deux endomorphismes φ diagonalisables tels que $\varphi^2 = f$.

Quatrième partie

34. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ lorsque

A) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{\lambda}\dfrac{\lambda}{n}$.

B) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda}{n}$.

C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n}$.

D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda}{n!}$.

35. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, on a :

A) Son espérance $E(X)$ et sa variance $V(X)$ sont égales.

B) Son espérance est : $E(X) = e^{-\lambda}$.

C) Sa série génératrice est une série entière de rayon 1.

D) Sa série génératrice est une série entière de rayon $+\infty$.

36. On a :

A) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectivement λ et μ alors $E(X+Y) = \lambda\mu$.

B) Si X et Y sont deux variables aléatoires suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectivement λ et μ alors $E(X+Y) = \lambda + \mu$.

C) Si P est une probabilité sur un espace probabilisable et si A et B sont deux évènements alors $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

D) Si P est une probabilité sur un espace probabilisable et si A et B sont deux évènements alors $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dans la suite :
On suppose que la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients entrant dans une épicerie dans un certain intervalle de temps suit la loi de Poisson λ.
En moyenne il rentre n personnes dans l'épicerie en une heure.
Y est une variable aléatoire réelle, indépendante de X définie par :
$P(Y=1)=P(Y=2)=\dfrac{1}{2}$.
On note Z la variable aléatoire XY.

37. On a :

A) La probabilité pour que k personnes entrent dans un intervalle de temps T est : $P(X=k)=e^{-nT}\dfrac{(nT)^k}{k!}$.

B) La probabilité pour que k personnes entrent dans un intervalle de temps T est : $P(X=k)=e^{-T}\dfrac{(T)^k}{k!}$.

C) La probabilité pour qu'il y ait un seul client qui se présente au bout du temps $T=\dfrac{2}{n}$ est e^{-2}.

D) La probabilité pour qu'il y ait un seul client qui se présente au bout du temps $T=\dfrac{2}{n}$ est $2e^{-2}$.

38. La probabilité pour qu'il y ait au moins quatre entrées dans un intervalle de temps $T=\dfrac{1}{n}$ est :

A) $\dfrac{1}{4}e^{-2}$.

B) $1-\dfrac{5}{4}e^{-2}$.

C) $1-\dfrac{8}{3}e^{-1}$.

D) $\dfrac{5}{3}e^{-1}$.

On revient au cas général.

39. On note p la probabilité que X soit un nombre pair :

A) $p = e^{-\lambda} \operatorname{ch} \lambda$.

B) $p = e^{-\lambda} \operatorname{sh} \lambda$.

C) $p \geq \frac{1}{2}$.

D) $p \leq \frac{1}{2}$.

40. La probabilité pour que Z soit un nombre pair est (en fonction de p de la question précédente) :

A) $\frac{p}{2}$.

B) $p\lambda$.

C) $\frac{p\lambda}{2}$.

D) $\frac{p+1}{2}$.