Correction Centrale PC 1 2015

Gilbert Primet

1er mai 2015

I Première partie

IA- C'est du cours. Si une droite vectorielle $F = \text{vect}(u), x \in E \setminus \{0_E\}$ est stable par f, alors en particulier $f(u) \in F$ donc :$\exists \lambda \in \mathbb{K}\ f(u) = \lambda u$.Donc u est vecteur propre de f. Réciproquement, si u est est vecteur propre de f, alors $f(u) \in \text{vect}(u)$, et $f(F)$ est le sous espace vectoriel engendré par $f(u)$ donc $f(F) \subset F$: F est donc stable par f.

IB-

I.B.1) $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces de E stables par f (puisque $f(0_E) = 0_E$) et ils sont distincts puisque $E \neq 0_E$.
Dans un espace vectoriel de dimension 2, les sous-espaces non triviaux stables par un endomorphisme f sont forcément de dimension 1. Il suffit donc de prendre un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ n'ayant pas de valeur propre réelle, par exemple l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc le polynôme caractéristique est $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 + 1$.

I.B.2) On sait que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par f. D'après les hypothèses, $\ker(f) \neq \{0_E\}$ (f est non injectif) et $\ker(f) \neq E$ (puisque f est non nul). Donc $\ker f$ est un sous-espace non trivial stable par f. D'où au moins trois sous-espaces stables. De plus $\text{Im} f$ est stable par f et non trivial (puisque en dimension fini $f$injectif $\iff$ $f$surjectif. Si de plus, E est de dimension impaire, on est assuré que $\text{Im} f \neq \ker(f)$, puisque , de part la relation $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f) + \dim\ker(f)$, leurs dimensions sont de parité différentes. Il y a donc dans ce cas quatre sous-espaces stables au moins.
Il faut choisir un endomorphisme de noyau non trivial tel que $\ker(f) = \text{Im}(f)$, par exemple l'endomorphisme canonique ment associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $sp(f) = \{0,\}$ et $\ker(f) = \text{Im} f = \text{vect}(0, 1)$.

I.C-

I.C.1) Si $(v_1, \cdots, v_p)$ est une famille de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, alors , pour tout $x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$f(\sum_{i=1}^{p} x_i v_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i v_i \in \text{vect}(v_1, \cdots, v_p).$$

Ceci prouve que $\text{vect}(v_1, \cdots, v_p)$ est stable par f.
Si $(v_1, \cdots, v_p)$ est une base du sous-espace propre $E_\lambda(f)$, alors , l'endomorphisme induit sur $E_\lambda(f)$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.

I.C.2) Toutes les droites vectorielles d'un sous-espace propre de dimension 2 sont stables par f, puisqu'elles sont engendrées par un vecteur propre, et sont en nombre infini.

1.C.3 Si tous les sous-espaces de E sont stables par f, alors en particulier, toutes les droites vectorielles sont stables par f et donc tout vecteur non nul est vecteur propre pour f :$\forall x \in E\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K}\ \ f(x) = \lambda_x.x$. Pour x non nul fixé, λ_x est unique, car $\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2\ ax = bx \iff (a - b)x = 0 \iff a - b = 0$ puisque $x \neq 0_E$.
Si x et y sont non nuls colinéaires, alors $\lambda_x = \lambda_y$ puisque la restriction de f à $\text{vect}(x)$ est une homothétie vectorielle. Si $\dim(E) = 1$, alors f est donc une homothétie vectorielle. Si E est de dimension

finie supérieure ou égale à 2 ou infinie, soient x et y deux vecteurs linéairement indépendants (donc non nuls). On a alors $x+y\neq 0_E$ et $f(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)=f(x)+f(y)=\lambda_x x+\lambda_y y$. Comme la famille (x,y) est libre, on en déduit que $\lambda x=\lambda_{x+y}=\lambda_y$. Le scalaire λ_x est donc indépendant du vecteur x et il existe un scalaire λ tel que pour tout vecteur x non nul : $f(x)=\lambda x$. Cette relation est encore vraie pour $x=0_E$. f est donc une homothétie vectorielle.
Réciproquement, si f est une homothétie vectorielle, tout sous-espace vectoriel de E est stable par f puisqu'il est stable par la loi externe._

I.D-

I.D.1) Supposons f diagonalisable. Si $F=\{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F stable par f. De même si $F=E$, $\{0_E\}$ est un supplémentaire de E stable par f. Supposons maintenant que F est non trivial. Soit $(v_1,\cdots,v_p)$ une base de F, et $\mathscr{B}=(w_1,\cdots,w_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres. La famille $(v_1,\cdots,v_p)$ est libre. On peut donc la compléter par des vecteurs $w_{i_1},\cdots,w_{i_q}$ de $\mathscr{B}$. Le sous-espace engendré par ces vecteurs est un supplémentaire de F et est stable par f, puisque engendré par des vecteurs propres.

1.D.2) On raisonne par récurrence sur $n=\dim(E)$. Pour $n=1$, f est diagonalisable. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie pour tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et f un endomorphisme de E possédant cette propriété. f admet au moins une valeur propre λ. Soit $x\in E_\lambda(f), x\neq\{0_E\}$. vect$(x)$ est alors stable par f, donc admet un supplémentaire F dans E stable par f. Montrons alors que tout sous-espace vectoriel G de F admet un supplémentaire dans F stable par f. Le sous-espace $G'=G+(x)$ admet un supplémentaire H dans E stable par f. On a $H\cap\text{vect}(x)\subset H\cap G'=\{0_E\}$, donc $H\cap\text{vect}(x)=\{0_E\}$. Soit p la projection sur F de direction (x). Montrons que $p(H)$ est un supplémentaire de G dans F stable par f.
D'une part $p(G')+p(H)=p(G'+H)=p(E)=F$. D'autre part $p(G')=p(G)+p(\text{vect}(x))=p(G)+\{0_E\}=p(G)=G$ Donc $G+p(H)=F$. D'autre part, la restriction de p à H est injective donc $\dim(p(H))=\dim(H)=\dim(E)-\dim(G')=\dim(F)-\dim(G)$. Donc $p(H)$ est un supplémentaire de G dans F. Montrons enfin que $p(H)$ est stable par f. Soit $y\in p(H)$. Il existe z dans H et $k\in\mathbb{C}$ tel que $z=y+kx$. On a alors $f(z)=f(y)+kf(x)=f(y)+\lambda kx$ Or $f(z)\in H$ puisque H est stable par f, et $f(y)\in F$ puisque F est stable par f. Donc $p(f(z))=f(y)$ Donc $f(y)\in p(H)$, ce qui prouve que $p(H)$ est stable par f. On a donc montré que F, qui est de dimension n, possède la propriété requise. L'endomorphisme de F induit par f est donc diagonalisable d'après l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, E peut s'écrire comme somme directe de sous-espaces propres et f est donc diagonalisable.
Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, c'est faux comme on le voit en prenant l'exemple de $I.B.1$: les seuls sous espaces stables par f sont $\mathbb{R}^2$ et $\{0,0)\}$ qui admettent bien un supplémentaire stable par f (respectivement $\{0,0)\}$ et $\mathbb{R}^2$, mais f n'est pas diagonalisable.

II Deuxième partie

II.A)

II.A.1) Soit $x\in F$. Il existe $(x_1,\cdots,x_p)\in((F\cap E_1)\times\cdots\times(F\cap E_p)$ tel que $x=\sum_{i=1}^{p}x_i$. On a donc $f(x)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i x_i$ et comme $F\cap E_i$ est un sous-espace vectoriel de E :

$$\forall i\in[|1,p|]\lambda_i x_i\in F\cap E_i$$

, et donc : $\forall x\in F,\ f(x)\in F$. F est donc bien stable par f.

II A 2) Comme f est diagonalisable, E est la somme directe de ses sous-espaces propres pour f. Donc d'après la définition :

$$\forall x\in E\ \exists!(x_1,\cdots,x_p)\in E_1\times E_2\cdots\times E_p\ x=\sum_{i=1}^{p}x_i.$$

II A 3) La famille $(x_1,\cdots,x_r)$ est une famille génératrice de V_x. Supposons de plus qu'il existe des scalaires $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ tels que $\sum_{i=1}^{x}\alpha_i x_i=0_E$. Alors, $E_1,\cdots,E_r$ étant des sous espaces vectoriels, $\forall i\in[|1,r|]\alpha_i x_i\in$

E_i. On peut compléter la somme en ajoutant des vecteurs nuls jusqu'à E. Comme la somme des E_i, $(i = 1, \cdots, p)$ est directe, tous les vecteurs de la somme sont nuls et en particulier : $\forall i \in [|1, r|] \alpha_i x_i = 0_E$.. Donc : $\forall i \in [|1, r|], \alpha_i = 0$. Ceci prouve que $\mathscr{B}_x = (x_1, \cdots, x_r)$ est libre, donc est une base de V_x.

II.A.4) Par une récurrence aisée, on obtient :

$$\forall j \in [|1, r|] f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i.$$

La matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \geqslant j \geqslant r}$ dans la base $\mathscr{B}_x$ est donc la matrice M carrée d'ordre r de terme général $m_{i,j} = \lambda_i^{j-1}$.

II.A.5) Si $r = 1$, cette matrice est une matrice carrée d'ordre 1 : [1] inversible. Supposons $r \geqslant 2$. La transposée de cette matrice est une matrice de Vandermonde, et son déterminant est le produit des scalaires $\lambda_i - \lambda_j$ avec $1 \leqslant j < i \leqslant r$. Cette matrice est donc inversible et donc $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

II.A.6) Comme $x \in F$ et que F est stable par f, on a : $\forall j \in [|1, r|] f^{j-1}(x) \in F$. Donc $\text{vect}(x_1, \cdots, x_r) \subset F$ et donc $\forall i \in |[1, r|] x_i \in F \cap E_i$. Donc $F \subset \sum_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$. Comme l'autre inclusion est évidente, on a donc $F = \sum_{i=1}^{p} (E_i \cap F)$. De plus, la somme des E_i étant directe, cette somme est a fortiori directe. Finalement, on obtient qu'un sous espace F est stable si et seulement si il est la somme (directe) de ses intersections avec les sous-espaces propres de E. Autrement dit, les sous-espaces stables par un endomorphismes diagonalisable sont les sommes (directes) de sous-espaces des sous-espaces propres.

II.B-

II.B.1 $\dim(E_i) = 1$.

II.B.2 Les droites stables par f sont donc exactement les sous-espaces propres. IL y en a n.

II.B.3 Il faut choisir k sous-espaces propres parmi n : il y a $\binom{n}{k}$ sous-espaces de dimension k stables par f.

II.B.4 Les sous-espaces stables non nuls sont la somme directe (réduite éventuellement à un terme) des droites d'une partie de $\{E_1, \cdots, E_n$. Il y a donc au total 2^n sous-espaces stables par f.

III. Troisième Partie

III.A Il s'agit d'un exercice d'oral classique.

III.A.1) Si P est un polynôme constant, alors $D(P) = 0$ et sinon $\deg(D(P)) = \deg(P) - 1$. Donc si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $D(P) \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(D(P)) < n$, donc $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$.

On a $D(1) = 0$, et $D(X^j) = jX^{j-1}$ si $j \in \mathbb{N}^*$. Donc $A_n \in M_{n+1}(K)$ et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

III.A.2) a)Soit $(v_1, \cdots, v_p)$ une base de F. On prend $n = max \deg(v_1, \cdots, v_p)$. On a alors $\forall k \in [|1, p|]$ $v_k \in \mathbb{K}_n[X]$ et donc, comme $K_n[X]$ est un K espace vectoriel $F \subset K_n[X]$ et $\exists R \in F$ $\deg(F) = n$.
b)On a $\forall i \in [|0, n|] degD^i(R) = n - i$. Les polynômes $D^i(R)$ sont donc non nuls et de degrés deux à deux distincts : ils forment une famille libre d'éléments de F.
c)On a donc $\dim(F) \geqslant n + 1$ et comme $F \subset \mathbb{K}_n[X]$, et que $\dim K_n[X] = n + 1$, on a $\dim F = n + 1$, donc $F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3 On sait que réciproquement $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D. Si un sous-espace de $\mathbb{K}_[X]$ stable par D contient un polynôme non nul P de degré n, il contient d'après ce qui précède $K_n[X]$. Un sous espace stable de dimension non finie contient forcément des polynômes de degré arbitrairement grand, donc contient $K_n[X]$ pour n arbitrairement grand, donc est égal à $K[X]$. Les sous-espaces stables sont donc $\{0_E\}$, $K[X]$ et $K_n[X] (n \in \mathbb{N})$.

III.B- Là encore, il s'agit d'un exercice classique à l'oral.

III.B.1) Une condition nécessaire est que tous les vecteurs $f^{n-i}(u), i = 1, \cdots, n$ soient non nuls. Il est pour ceci nécessaire et suffisant que $f^{n-1}(u)$ soit non nul.
Montrons réciproquement que si $f^{n-1}(u)$ est non nul, alors $\mathscr{B}_{f,u}$ est une base de E. Il suffit de montrer pour ceci que c'est une famille libre. Soit une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^{n-i}(u) = 0$, où $\alpha_i \in \mathbb{K}$. En appliquant f^{n-1} à cette combinaison, on obtient : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^{2n-i-1}(u) = 0$ soit $\alpha_n f^{n-1}(u) = 0$ (car pour $i < n$, alors $2n - i - 1 > n - 1$ donc $f^{2n-i-1} = 0$). Comme $f^{n-1}(u) \neq 0$, on obtient $\alpha_n = 0$. En réitérant le procédé, c'est-à-dire en appliquant successivement $f^{n-2}, \cdots, f^0 = Id_E$, on prouve successivement que $\alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0$ sont nuls. (On pourrait formaliser ceci par une récurrence descendante finie). Donc $\mathscr{B}_{f,u}$ est une famille libre de n vecteurs : c'est une base de E.

III.B.2) C'est une matrice carrée d'ordre n avec $b_{i,j} = \delta_{i-1,j}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

III.B.3) On prend la base $(v_1, \cdots, v_n)$ où $v_i = (i-1)! u_i$.On a alors $\forall i \in [|2, n|] f(v_i) = (i-1)! f(u_i) = (i-1)! u_{i-1} = (i-1) v_{i-1}$

III.B.3) En utilisant l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, on constate que les sous-espaces non nuls stables par f, sont les sous-espaces vect$(x, \cdots, f^k(x)$, où $k \in [|0, n-1|]$. Il y a $n+1$ sous-espaces stables. Ces sous-espaces sont les $\ker(f^i)$ pour $i \in [|0, n|]$.