

PRÉPARATION ORAL PC 2015

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, NORMES

Exercice 1 (*Maxime Breton*) Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
(b) Montrer que $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 2 (*Celia Boltzer*)

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E .

On note $\overline{A}$ l'adhérence de A .

1. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
2. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

Exercice 3 (*Marion Heurté*)

1. Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
 - (a) Quel est le domaine de définition de f ?
Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Justifier l'existence et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 - (c) Justifier l'existence et donner la valeur de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
 - (d) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 (*Baptiste le Goff*) On travaille dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormal direct. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $xyz = 1$.

1. Déterminer le gradient de $f : (x, y, z) \mapsto xyz - 1$.
2. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.
3. Déterminer et tracer les courbes intersections avec le plan $z = k$
4. Déterminer le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan tangent à $\mathcal{S}$ passant par $(1, \frac{1}{2}, 2)$.

Exercice 5 (*Pauline Lesongeur*) Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 (*Antoine Guilleux*) Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$, où $a > 0$ (On pourra faire le changement de variables $u = ax + y, v = ax - y$, en montrant d'abord qu'il est bijectif).

Exercice 7 (*Vincent Larreur*)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ (On pourra faire le changement de variables $u = x + y, v = x - y$)

2. Résoudre de façon plus générale : l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + a \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ où a est un réel. On étudiera successivement les cas $a = 0$ et $a \neq 0$

Exercice 8 *Juliette Parisot* Résoudre l'équation aux dérivées partielles sur $x > 0$: $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en passant en coordonnées polaires.

ICNA

Exercice 9 *Thibault Michel* On note $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$ ($p, q \in \mathbb{N}$).

1. Calculer $I_{p,q}$. (On pourra chercher une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ si q est non nul.
2. Étudier la série $\sum I_{n,n}$.
3. Rayon de convergence de la série entière $\sum I_{n,n} x^n$.

Exercice 10 (*Lise Abiven*) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\text{Id}_E$.

1. Montrer que f est bijectif et n'admet pas de valeur propre (réelle).
2. En déduire que E est de dimension paire.
3. Soit $u \in E$, non nul. Montrer que $\text{Vect}(u, f(u))$ est un plan stable par u .
4. On suppose ici que $n = 4$. Montrer qu'il existe $u, v \in E$ tel que $(u, f(u), v, f(v))$ est une base de E . Donner la matrice de f dans cette base.
5. Généraliser à n quelconque.
6. Donner un exemple de tels endomorphismes en dimension 2.

ISUP, actuariat Dauphine

Exercice 11 (*Gabriel Le Doudic*) Soit l'application $N : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$. Montrer que N est une norme de $\mathbb{R}^2$ et tracer sa boule unité.

Exercice 12 (*Antoine Guilleux*) Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E telle que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle^2$. Montrer que $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

Exercice 13 (*Maiwenn Graindorge*) Soit $u : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$
2. Déterminer l'image et le noyau de u .
3. Trouver une base dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients nuls sauf les coefficients d'indices $(i, i+1)$ qui valent 1.

ENSSAT Lannion

Exercice 14 (*Elsa Briqualeur*) Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E . Soit $F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2)$. Déterminer la matrice dans e du projecteur orthogonal sur F .

Exercice 15 (*Juliette Parisot*)

1. Montrer que les séries $\sum x^n \cos(nx)$ et $\sum x^n \sin(nx)$ convergent pour tout $x \in]-1, 1[$ et calculer leur somme.
2. Montrer que la fonction $g : x \in]-1, 1[\mapsto \text{Arctan} \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ est définie et dérivable sur $] -1, 1[$. Calculer $g'(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(nx)$.

Exercice 16 (Marion Miklaz) Soit A une matrice réelle. Montrer que $rg(A) = rg({}^tAA)$

Exercice 17 (Maxime Breton) Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{3x^2-1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{x-1} dx$.

Exercice 18 (Clement Vary) Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes réelles convergeant uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$

Montrer que la suite $P_{n+1} - P_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

En déduire qu'à partir d'un certain rang (P_n) est un polynôme constant.

Que peut-on dire de la fonction f ?

Exercice 19 (Célia Le Troquer) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = n^a x^2 e^{-2nx}$.

1. À x fixé, déterminer la limite de $(f_n(x))$ quand n tend vers $+\infty$.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?
3. Donner les intervalles sur lesquels la suite (f_n) converge uniformément pour tout a .
4. Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\int_1^2 f_n(x) dx$.
5. Peut-on appliquer la même méthode pour étudier la limite de $\int_0^2 f_n(x) dx$? de $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$? Quelle méthode pourrait-on utiliser sinon?

Exercice 20 (Gwladys Kervella) Soit l'équation différentielle (E) : $y' + \sin(x)y = \sin(2x)$.

1. Trouver les solutions.
2. On considère la solution vérifiant en outre $y(0) = 0$. Montrer que y est 2π -périodique.

Exercice 21 Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Montrer que $\operatorname{Im}(u)^\perp = \ker(u)$

Exercice 22 (Steffen Morvan) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Déterminer les sous-espaces propres de A .
3. Soit w une solution du système différentiel $w'(t) = Aw(t)$, à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Étudier (les variations de) la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \|w(t)\|^2$, où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne canonique. Montrer que la courbe d'équation $X = w(t)$ appartient à une surface que l'on précisera.

Minettes

Exercice 23 (Baptiste Le Goff) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ existe-t-elle? La calculer. (On pourra utiliser une fonction définie par une intégrale)

Exercice 24 (Maxime Quemeneur) Que dire des matrices nilpotentes diagonalisables?

Exercice 25 (Marion Miklaz) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = nxe^{-nx}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^+$, et sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 26 (Marion Heurté)

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $(P, Q) \longrightarrow \sum_{i=1}^3 P(i)Q(i)$ est un espace vectoriel euclidien
2. Trouver une base orthonormée

Exercice 27 (Matthieu Nicolas-Le Pré) On considère $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ pour $x \in]-1, +\infty[$

1. Montrer que S est définie et continue.
2. Étudier les variations de S .
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$.

4. Trouver un équivalent de $S(x)$ en -1^+ .
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
6. Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 28 (*Maelle Galliou*) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Discuter de l'inversibilité de M en fonction de a, b, c et calculer l'inverse de M quand c'est possible.

Exercice 29 (*Clément Vary*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$. Rechercher les extrema locaux. Les extrema trouvés sont-ils globaux?

Exercice 30 (*Gautier Scaerou*) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice 31 (*Axel Hiverlet*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n et f un endomorphisme diagonalisable de E de spectre $\{-1, 2\}$.

1. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^2 = af + bId_E$
 2. Exprimer la trace et le déterminant de f en fonction de $\dim(\ker(f + Id_E))$ et n .
 3. Exprimer $f^n (n \in \mathbb{N})$ comme combinaison linéaires de f et Id_E .
4. Déterminer les projecteurs appartenant à $Vect(Id_E, f)$. Quelle est leur image et leur noyau?

Exercice 32 (*Aziliz*) Soit $a \in]-1, 1[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par $f_n(x) = a^n x \sin(nx)$.

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est définie par $S(x) = \frac{ax \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2}$.
2. Montrer que $\int_0^\pi S(x) dx = \pi \ln(1+a)$.

Exercice 33 (*Vincent*) Soit $u_n = \frac{1}{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \dots + \ln^2 n}$. a) En encadrant le dénominateur par une intégrale, donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ? c) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$?

Exercice 34 (*Jules Bertic*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de colonnes $C_k, 1 \leq k \leq n$, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de colonne $D_k, 1 \leq k \leq n$, avec $D_k = \sum_{i \neq k} C_i$. Relier $\det(B)$ à $\det(A)$.

Exercice 35 (*Justine Roué*) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Quel est le rang de f ? Quelle est la trace de f ? (Indication : on considère $x \in E$ tel que $f^{(n-1)}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$ est une base de E .)

Exercice 36 () Nature de la série de terme général $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$?

Exercice 37 () Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-1)P' + \alpha P(1)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme.
2. Rechercher les vecteurs et valeurs propres de ϕ . Étudier la diagonalisabilité de ϕ .
3. Pour $n = 2$, donner la matrice de ϕ dans la base canonique.

Exercice 38 () Soit $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite ℓ .
2. (Hors oral) Trouver un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 39 ()

1. Montrer que, pour toute fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt.$$

2. Étudier la nature de la série $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$.

Exercice 40 () Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, distincts. Montrer l'existence d'une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \left| \int_0^1 P(t) dt \right| \leq C \sum_{k=0}^n |P(a_k)|.$$

Exercice 41 () Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

Exercice 42 () Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M^2 + M = A$. Montrer que $\text{Sp}(M) \subset \{1, -2, 2, -3\}$. Montrer que M est diagonalisable. Résoudre.

Exercice 43 () Étude et tracé de la fonction $x \mapsto \frac{\ln |x^2 - 1|}{x^2}$.

Exercice 44 () Soit n un entier naturel non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + 6I_n$. Calculer $\det(A)$.

CCP

Exercice 45 () Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 46 ()

1. Soit $f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$. Noyau et image ?
2. Soit $g : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par $g(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que g est surjective.

Exercice 47 () Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose ici que le polynôme caractéristique de f (noté χ_f) est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un plan stable.
2. On suppose ici que χ_f n'est pas scindé et on note $P = (X-a)^2 + b^2$ un facteur irréductible de χ_f ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$). On note A la matrice de f dans une base de référence notée e .
 - (a) Montrer l'existence de $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $Z \neq 0$, tel que $AZ = (a+ib)Z$.
 - (b) En déduire que f admet un plan stable.

3. On suppose que A vaut $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer χ_f et en déduire que E est la somme directe de deux plans stables.

Exercice 48 () On définit la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x \cos x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 49 () Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$. On souhaite montrer de trois façons que f est nilpotent.

1. Montrer $\forall k \in \mathbb{N}, f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$.
2. À l'aide de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ g - g \circ u$, montrer que f est nilpotent.

3. Montrer $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$. En déduire à nouveau que f est nilpotent.
4. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
 - (a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Tr}(f^k) = 0$.
 - (b) Soit p le nombre de valeurs propres distinctes de f . Montrer que p vaut 1.
 - (c) En déduire que f est nilpotent.

Exercice 50 () Soit $a \in]0, +\infty[, I =]-a, a[$ et $f : I^2 \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose l'existence d'une constante $K \in [0, 1[$ telle que $\forall (x, y) \in I^2, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K$.

1. Soit $(x, y), (x', y') \in I^2$. En utilisant la fonction $\phi : t \in [0, 1] \mapsto f(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')$, montrer que $|f(x, y) - f(x', y')| \leq K \max(|x - x'|, |y - y'|)$.
2. Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0, u_1 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$.
 - (a) On pose $a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$. Étudier la décroissance de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \leq Ka_n$.
 - (c) En étudiant la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 51 () Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P(1 - X)$.

1. Calculer $u \circ u$. En déduire les valeurs propres de u . Que dire de u ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1 - x)$. Que dire de la courbe représentative de f ?
3. Trouver les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de u . L'endomorphisme u est-il diagonalisable?

Exercice 52 () Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f | g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$.

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire de E .
2. Soit $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f'' = f\}$.
 - (a) Montrer que F et G sont orthogonaux.
 - (b) Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 53 () Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in K[X]$, annulateur de f , et vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $\text{Im } f$ et $\text{ker } f$ sont supplémentaires dans E . Que devient le résultat si E est de dimension infinie?

Exercice 54 ()

1. Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.
2. Étudier la série en $x = \pm R$.
3. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$. Étudier la continuité de S (variable réelle).
4. Montrer que la limite lorsque x tend vers 1^- de $(1 - x)S(x)$ est égale à 0.

Exercice 55 () Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, le déterminant $D(x)$ de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent x , ceux au-dessus de la diagonale $x - a$, et les autres $x - b$.

1. Montrer que D est une fonction polynôme de degré au plus 1.
2. Calculer $D(x)$ en fonction de a, b et x .

Exercice 56 () Soit deux suites complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_0(x) = a_0$ et, pour $n \geq 1, u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

1. Montrer l'existence d'une unique suite complexe $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = c_n e^{nx} + c_{-n} e^{-nx}$.
Montrer que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument si et seulement si $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ convergent absolument.
2. Montrer que $\|u_n\|_\infty = |c_n| + |c_{-n}|$.
Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

Exercice 57 () On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, et A l'ensemble des $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f(x) dx \geq 1$.

- (a) Montrer que A est une partie fermée de E .
- (b) Montrer que, pour tout $f \in A, \|f\|_\infty \geq 1$.