Lycée Lakanal

2023 - 2024

PC

Cours – variables à densité

Programme AST1

Chapitre 1
Variables aléatoires à densité

I VARIABLE ALÉATOIRE A DENSITÉ

1. Variables aléatoires à densité ; densité de probabilité d'une variable à densité

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

- ***Définition 1 :*** **Variable aléatoire à densité**

On dit que X est une **variable aléatoire à densité**, ou **variable aléatoire absolument continue** (vac),

lorsque sa fonction de répartition $F_X : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{pmatrix}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

i – F_X est continue sur $\mathbb{R}$;

ii – F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

• • ***Définition 2 :*** **Densité de probabilité d'une vac**

Soit X une variable absolument continue.

On appelle **densité** (ou **densité de probabilité**) de X toute application f_X telle que :

i – f_X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

ii – Pour tout réel x, sauf éventuellement en un nombre fini de points de $\mathbb{R}$: $f_X(x) = F_X'(x)$.

• • • ***Remarque***

Ne jamais parler de **la** densité d'une vac X, mais **d'une** densité de X : il ressort en effet clairement de la définition qu'il n'y a jamais unicité.

2. Caractérisation – théorèmes d'existence

a. Caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité

Proposition *admise*

Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

$(\mathbf{1})$ F est continue sur $\mathbb{R}$;

$(\mathbf{2})$ F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

$(\mathbf{3})$ F est croissante sur $\mathbb{R}$;

$(\mathbf{4})$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire absolument continue X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tels que F soit la fonction de répartition de X.

b. Densités de probabilité et densités de probabilité de var.

Définition : densité de probabilité

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est une **densité de probabilité** lorsque :

$(\mathbf{1})$ f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

$(\mathbf{2})$ f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

$(\mathbf{3})$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Proposition *à nouveau admise*

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que :

$(\mathbf{1})$ f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

$(\mathbf{2})$ f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

$(\mathbf{3})$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire absolument continue X sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tels que f soit une densité de X.

Remarques :

1 _ Autrement dit, toute densité de probabilité est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

2 _ Les réciproques des résultats énoncés en **a.** et **b.** sont immédiates.

c Exercices

Exercice 1

Soit f l'application définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} k\,\dfrac{x + \ln x}{x^2} & \text{si } 1 \leq x \leq \mathrm{e} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer k de manière à ce que f soit une densité d'une variable absolument continue X.

2. Déterminer alors la fonction de répartition de X.

Exercice 2

On considère l'application F définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue X.

Déterminer une densité de X.

Solutions

Exercice 1

1. • L'application f est définie sur $\mathbb{R}$, continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{1, \mathrm{e}\}$.

•• De plus, f est à valeurs positives si et seulement si $k \geq 0$, et il est clair que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. L'application f est donc une densité si et seulement si $k \geq 0$ et $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Or on a : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t = k\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + k\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Dans la deuxième intégrale, on effectue une intégration par parties, en posant $u(t) = -\dfrac{1}{t}$ et $v(t) = \ln t$; les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1, \mathrm{e}]$, et pour tout $t \in [1, \mathrm{e}]$: $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$, et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$. L'intégration par parties donne :

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t = k\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + k\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = k\left\{[\ln t]_1^{\mathrm{e}} - \left[\frac{\ln t}{t}\right]_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right\},$$

puis : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t = k\left[\ln t - \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^{\mathrm{e}} = 2k\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2k(\mathrm{e} - 1)}{\mathrm{e}}$.

On en déduit que f est une densité de probabilité si et seulement si : $k = \dfrac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e} - 1)}$ (ce réel est bien positif).

2. Notons F la fonction de répartition de X. On a bien sûr $F(x) = 0$ pour $x < 1$, $F(x) = 1$ pour $x > \mathrm{e}$.

Pour $x \in [1, \mathrm{e}]$, $F(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e} - 1)}\left(\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{x} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.

Les calculs sont les mêmes que dans la question **1.**. On obtient : $\boxed{F(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e} - 1)}\,\dfrac{(1 + \ln x)(x - 1)}{x}}$.

Exercice 2

L'application F est définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \dfrac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2} > 0$: F est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, et : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

On sait alors que $\boxed{F \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue } X}$, et qu'une densité f de X est la fonction f donnée par : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = F'(x) = \dfrac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2}}$.

3. Densités de probabilités d'une vac

a. Quasi – égalité des densités d'une variable aléatoire absolument continue

Comme on l'a vu, une variable absolument continue n'admet pas une unique densité. Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition

Soit X une variable absolument continue, soient f et g deux densités de X.
Alors f et g sont égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Preuve

C'est immédiat : si l'on note F_X la fonction de répartition de X, f et g sont, par définition, égales à F_X' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Les fonctions f et g sont donc égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

b. Réciproque du point précédent

Proposition

Soit X une variable absolument continue, et soit f une densité de X.
Soit g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors g est une densité de X si et seulement si :

1. g est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

2. f et g sont égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Preuve

C'est, à nouveau, une conséquence directe de la définition d'une densité de probabilité d'une vac.

Une remarque pas neuve

Insistons encore une fois sur le fait qu'il est incorrect de parler de **la** densité d'une vac X, il n'y a, vraiment, pas unicité… parler plutôt **d'une** densité de X.

4. Appartenance à un domaine de $\mathbb{R}$ et univers – image

a. Expression de la probabilité d'appartenance à un intervalle

Proposition

Soit X une variable à densité. On note F_X la fonction de répartition de X, et f_X une densité de X.

Alors :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\mathbb{P}(X = x) = 0}$.
- •• Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$:

$$\boxed{\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}(X \in [a, b]) \\ &= \mathbb{P}(X \in [a, b[) \\ &= \mathbb{P}(X \in]a, b]) \\ &= \mathbb{P}(X \in]a, b[) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}}.$$

Les formules analogues restent vraies lorsque $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, à condition de remplacer $F_X(b)$ ou $F_X(a)$ par les limites correspondantes (1 en $+\infty$, 0 en $-\infty$).

Preuve

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, l'évènement $(X = x)$ est inclus dans l'évènement $(X \in]x - \varepsilon, x])$, on a donc $\mathbb{P}(X = x) \leq \mathbb{P}(X \in]x - \varepsilon, x])$.

Or $(X \leq x) = (X \leq x - \varepsilon) \cup (X \in]x - \varepsilon, x])$, et cette réunion est disjointe, par conséquent $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x - \varepsilon) + \mathbb{P}(X \in]x - \varepsilon, x])$, puis :

$$\mathbb{P}(X \in]x - \varepsilon, x]) = F_X(x) - F_X(x - \varepsilon).$$

Il résulte de ce qui précède que $0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq F_X(x) - F_X(x - \varepsilon)$.

La continuité de F_X assure que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(F_X(x) - F_X(x - \varepsilon)\right) = 0$, on a donc, par encadrement et passage à la limite : $\boxed{\mathbb{P}(X = x) = 0}$.

- •• Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. On a

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) \\ &= \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a) \quad \text{car } \mathbb{P}(X = a) = 0 \\ &= \mathbb{P}(X \in]-\infty, b]) - \mathbb{P}(X \in]-\infty, a]) \\ &= \mathbb{P}(X \in [a, b]), \end{aligned}$$

car ici encore $X \in \left]-\infty, b\right] = \left(X \in \left]-\infty, a\right] \right) \cup \left(X \in [a, b] \right)$, et l'union est disjointe.

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}\left(X \in [a, b[\right) = \mathbb{P}\left(X \in]a, b] \right) = \mathbb{P}\left(X \in]a, b[\right)$$

en découlent, compte – tenu du fait que $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 0$.

Enfin, puisque $f_X = F_X'$, sauf éventuellement en un nombre fini de points, on a bien

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t .$$

b. … et plus généralement…

De manière générale, pour tout domaine D de $\mathbb{R}$ sur lequel la notion d'intégrale a un sens :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f(t)\,\mathrm{d}t} .$$

On admet cette généralisation d'importance CAPITALE.

c. Univers – image, densités et fonction de répartition

Soit X une variable à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On note F_X la fonction de répartition de X, et f_X une densité de X.

Soient a la borne inférieure de $X(\Omega)$, et b sa borne supérieure. Alors :

- f_X est nulle sur $\mathbb{R} \setminus X(\Omega)$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- •• Pour tout $x \leq a$, $F_X(x) = 0$, et pour tout $x \geq b$, $F_X(x) = 1$.

Plus précisément :

- Etant donné un domaine D de $\mathbb{R}$, D est presque sûrement égal à $X(\Omega)$ si et seulement si f_X est non nulle sur D et nulle sur $\mathbb{R} \setminus D$, le tout à un ensemble fini de points près.
- •• La fonction de répartition de X est constante sur tout intervalle inclus (à un ensemble négligeable près) dans $\mathbb{R} \setminus X(\Omega)$.

5. Loi d'une variable aléatoire à densité

Lorsque l'on dispose d'une densité f d'une variable aléatoire X, on peut, grâce à la formule vue ci – dessus :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f(t)\,\mathrm{d}t}$$

déterminer $\mathbb{P}(X \in D)$, pour tout domaine D raisonnable. Lorsqu'on le fait, une source d'innombrables erreurs est de ne pas se préoccuper de $X(\Omega)$ (correspondant, à un ensemble négligeable près, au domaine de non – nullité de f : cf. **4.c.**).

D'où la convention suivante :

Lorsque l'on demande de déterminer la loi d'une variable aléatoire à densité X, cela signifie :

∘ préciser $X(\Omega)$;

∘∘ donner une densité de X.

Soient maintenant deux variables aléatoires X et Y, admettant respectivement pour densités des fonctions f_X et f_Y.

Il est facile de vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i – pour tout D « domaine raisonnable » de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in D) = \mathbb{P}(Y \in D)$;

ii – f_X et f_Y sont égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Par conséquent :

On dira que les vac. X et Y suivent la même loi lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

i – X et Y admettent des densités f_X et f_Y égales, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

ii – X et Y admettent une densité commune.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle, de densité f donnée par :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$ si $0 \leq x \leq a$, et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminer la valeur de a.

2. Donner l'expression de la fonction de répartition F_X de X.

Déterminer m tel que $F_X(m) = \dfrac{1}{2}$.

3. Calculer $\mathbb{P}\left(\dfrac{a}{2} \leq X \leq a\right)$.

Exercice 4

Soient deux réels α et a strictement positifs. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x.\mathbf{1}_{\left[0, \frac{a}{2}\right[}(x) + (a - x).\mathbf{1}_{\left[\frac{a}{2}, a\right[}(x).$$

1. Calculer la constante α pour que αf soit une densité de probabilité.

On choisit désormais cette valeur pour α, et l'on considère une variable aléatoire réelle X de densité αf.

2. Soit $b \in \left]0, \frac{a}{2}\right[$. Calculer les probabilités $\mathbb{P}\left(X > \frac{a}{2}\right)$ et $\mathbb{P}\left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right)$.

3. Montrer que pour tout $b \in \left]0, \frac{a}{2}\right[$, les évènements $A = \left(X > \frac{a}{2}\right)$ et $B = \left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right)$ sont indépendants.

Solutions

Exercice 3

1. Puisque f est une densité de probabilité, on a $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$, soit $\int_0^a \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x = 1$, et un petit calcul permet d'en déduire que $\frac{a}{3} = 1$: on a donc $\boxed{a = 3}$.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de vérifier que f est à valeurs positives, continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, puisque l'énoncé *affirme* que f est une densité de probabilité.

2. • Puisque $f_X(x)$ est nulle en – dehors de $[0, 3]$, on a $\forall\, x \in \left]-\infty, 0\right[,\ F_X(x) = 0$, et $\forall\, x \in \left]a, +\infty\right[,\ F_X(x) = 1$.

Pour tout $x \in [0, a]$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{3}\left(1 - \frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\left(t - \frac{t^2}{6}\right)\right]_0^x$,

donc $F_X(x) = \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9}$.

Finalement, la fonction de répartition de X est donnée par $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9} \text{ si } x \in [a, b] \\ 1 \text{ si } x > a \end{cases}}$.

•• Il est évident d'après ce qui précède que $F_X(m) = \frac{1}{2} \Rightarrow m \in [1, 3]$, et l'on a pour m appartenant à cet intervalle : $F_X(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6m - m^2}{9} = \frac{1}{2}$, donc $F_X(m) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m^2 - 12m + 9 = 0$.

On vérifie que le polynôme $2X^2 - 12X + 9$ admet pour racines $3 \pm 3\frac{\sqrt{2}}{2}$; la seule de ces deux racines qui appartienne à $[1, 3]$ est $3 - 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; le seul réel m tel que $F_X(m) = \dfrac{1}{2}$ est donc $\boxed{m = 3 - 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

3. Puisque $a = 3$: $P\left(\dfrac{a}{2} \leq X \leq a\right) = P\left(\dfrac{3}{2} \leq X \leq 3\right) = \displaystyle\int_{3/2}^{3} \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{t}{3}\right) \mathrm{d}t = \left[\dfrac{2}{3}\left(t - \dfrac{t^2}{6}\right)\right]_{3/2}^{3}$,

et l'on en déduit que $\boxed{P\left(\dfrac{a}{2} \leq X \leq a\right) = \dfrac{1}{4}}$.

Exercice 4

1. L'application f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, en $\dfrac{a}{2}$ ou en a. En outre, f est continue par morceaux, nulle en – dehors de l'intervalle de longueur finie $[0, a[$; par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a/2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a/2}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a/2} t\,\mathrm{d}t + \int_{a/2}^{a} (a-t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{a/2} - \left[\frac{(a-t)^2}{2}\right]_{a/2}^{a} = \frac{a^2}{4},$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(t)\,dt = 1$ si et seulement si $\alpha = \dfrac{4}{a^2}$.

On note que, pour cette valeur de α, la fonction αf est à valeurs positives ou nulles.

Ainsi, $\boxed{\alpha f \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } \alpha = \dfrac{4}{a^2}}$.

2. • La fonction f étant nulle en – dehors de $[0, a[$, X est presque sûrement à valeurs dans cet intervalle. On a donc : $\mathbb{P}\left(X > \dfrac{a}{2}\right) = \displaystyle\int_{a/2}^{a} \alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_{a/2}^{a} (a-t)\,\mathrm{d}t$. Il suffit alors de reprendre le calcul de la question précédente pour trouver que $\boxed{\mathbb{P}\left(X > \dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{4}{a^2}\left[\dfrac{(a-t)^2}{2}\right]_{a/2}^{a} = \dfrac{1}{2}}$.

Remarque

Ce résultat n'est guère étonnant : la courbe représentative de la fonction f (ou αf) admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$. Il est donc rassurant d'obtenir $\mathbb{P}\left(X > \dfrac{a}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X < \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ...

•• On a

$$\mathbb{P}\left(\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right) = \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}+b} \alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} \alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} \alpha f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{4}{a^2}\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} t\,\mathrm{d}t + \frac{4}{a^2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} (a-t)\,\mathrm{d}t\,,$$

car $\left[\frac{a}{2}-b,\frac{a}{2}\right]\subset\left[0,\frac{a}{2}\right]$ et $\left[\frac{a}{2},\frac{a}{2}+b\right]\subset\left[\frac{a}{2},a\right]$,

donc $\mathbb{P}\left(\frac{a}{2}-b<X\le\frac{a}{2}+b\right)=\frac{4}{a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}}-\frac{4}{a^2}\left[\frac{(a-t)^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b}=\boxed{1-\left(1-\frac{2b}{a}\right)^2}$.

3. Il suffit de reprendre ou d'adapter ce qui précède : on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}\left(\frac{a}{2}<X\le\frac{a}{2}+b\right)&=\frac{4}{a^2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b}(a-t)\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{a^2}\left[\frac{(a-t)^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b}\\&=\frac{1}{2}-\frac{\left(1-\frac{2b}{a}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{2b}{a}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{2b}{a}\right)^2\right),\\&=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B):\end{aligned}$$

Les événements A et B sont donc indépendants.

II LOIS CONTINUES USUELLES

1. Loi uniforme sur un intervalle de longueur finie non nulle

a. Définition

Soient a et b deux réels tels que $a<b$, et soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$.

On dit que X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, et on note $X \rightrightarrows \mathcal{U}([a,b])$, lorsque X est une variable aléatoire absolument continue, telle que :

i – $X(\Omega)$ est presque sûrement égal à $[a,b]$;

ii – X est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction $f=\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$.

La fonction f est donc définie par : $\forall\ x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } a\le x\le b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

b. Vérification

- L'application f définie par $\forall\ x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } a\le x\le b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à

valeurs positives, continue en tout point sauf en a et en b.

•• De plus, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t).\mathrm{d}t=\int_a^b f(t).\mathrm{d}t$ est clairement convergente, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}t = 1 :$$

L'application f est donc bien une densité de probabilité.

c. Fonction de répartition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et soit X une var. de loi $\mathcal{U}([a, b])$; déterminons la fonction de répartition de X.

Une densité de X est la fonction $f = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$; cette fonction étant nulle sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, on sait que pour tout $x < a$, $\mathbb{P}(X \le x) = 0$, et que pour tout $x > b$, $\mathbb{P}(X \le x) = 1$.

Soit maintenant un réel x appartenant à $[a, b]$. On a :

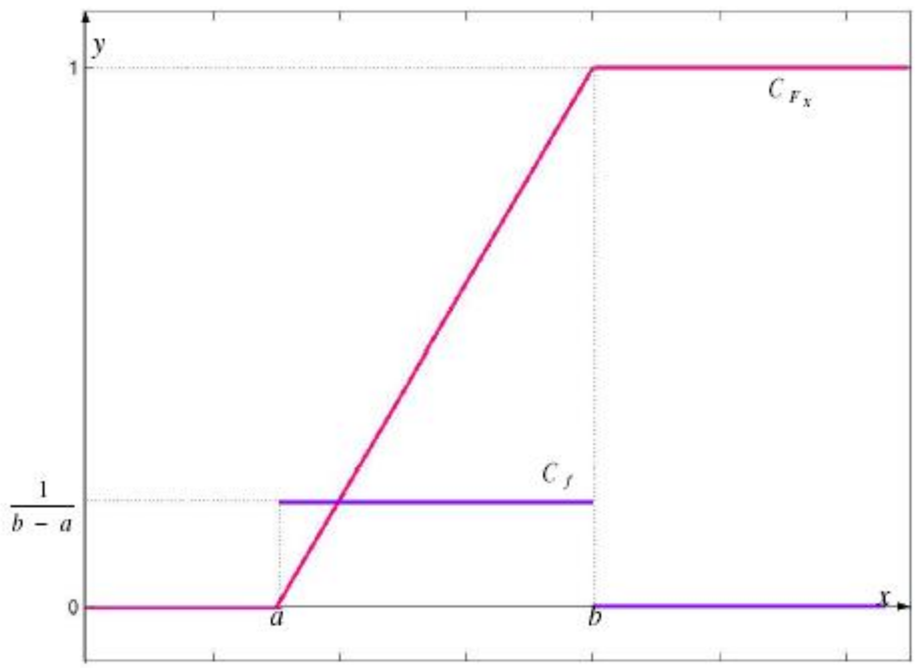
$$\mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty, a[$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^x \mathrm{d}t\,,$$

d'où : $\mathbb{P}(X \le x) = \frac{x-a}{b-a}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction de répartition de } X \text{ est donnée par : } \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } a \le x \le b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}}$.

Représentation



Allure des courbes représentatives C_{F_X} et C_f de la fonction de répartition et d'une densité d'une VAR de loi $\mathcal{U}([a, b])$.

d. Propriétés et remarques

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- Lorsque l'on dit, sans autre précision, que l'on choisit un réel " au hasard " entre a et b, il est sous – entendu que l'on modélise le nombre choisi par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[a, b]$.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([a, b])$. Alors :

- X est presque sûrement à valeurs dans $[a, b]$: $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = 1$.

- Pour tout intervalle I de longueur ℓ inclus dans $[a, b]$: $\mathbb{P}(X \in I) = \dfrac{\ell}{b - a}$.

- De même que l'on a défini la loi uniforme sur $[a, b]$, on peut définir des lois uniformes sur $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$: par exemple, une var. Y suit la loi uniforme sur $]a, b[$ lorsque Y est une var. absolument continue, admettant pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{b-a}\mathbf{1}_{]a,b[}(x)$.

Les quatre notions coïncident, car les densités sont égales sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

- De manière générale, D étant un domaine de $\mathbb{R}$, intervalle de longueur finie non nulle ou réunion finie d'intervalles de longueurs finies et non toutes nulles, on dit qu'une var. X suit la loi uniforme sur D lorsque X est une var. à densité, presque sûrement à valeurs dans D, et admettant pour densité la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{\ell(D)}\mathbf{1}_{D}(x)$,

où $\ell(D)$ désigne la longueur de D, définie comme la somme des longueurs des intervalles disjoints le composant.

- Il n'existe pas de loi uniforme sur $\mathbb{R}$, ou sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On considère une variable aléatoire absolument continue X de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1.a. Déterminer la loi (c'est – à – dire une densité) de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Déterminer a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq a)$.

1.b. Application : on choisit un nombre X au hasard entre -1 et $+1$ en suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la probabilité que le carré Y de ce nombre soit supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer la loi de $Y = e^{X}$.

3. Pour a non nul, déterminer la loi de $Y = aX + b$.

Solution

Puisque X suit la loi uniforme sur $[-1,1]$, une densité de X est la fonction $f_X : x \mapsto \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$; sa fonction de répartition est la fonction F_X définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

1.a. • La var $Y = X^2$ est presque sûrement à valeurs dans $[0,1]$.

On en déduit déjà que sa fonction de répartition F_Y vérifie : $\begin{cases} \forall y < 0,\ F_Y(y) = 0 \\ \forall y > 1,\ F_Y(y) = 1 \end{cases}$.

Pour $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{y}\right) - \mathbb{P}\left(X < -\sqrt{y}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{y}\right) - \mathbb{P}\left(X \leq -\sqrt{y}\right), \text{ car } X \text{ est une var. à densité.} \end{aligned}$$

Ainsi, F_Y est donnée par : $\forall y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right) & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$.

La fonction de répartition de Y est donc C^1 sur $]-\infty, 0[$, sur $]1, +\infty[$, et, par composition, sur $]0,1[$. Elle est de plus continue en 0 et en 1, car

$$\begin{aligned} \lim_{0^+} F_Y(y) &= \lim_{0^+}\left(F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right)\right) \\ &= 0 \text{ par continuité de } F_X \\ &= \lim_{0^-} F_Y(y), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{1^-} F_Y(y) &= \lim_{1^-}\left(F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right)\right) \\ &= \lim_{1^-}\left(F_X(1) - F_X(-1)\right) \text{ par continuité de } F_X \\ &= 1 = \lim_{1^+} F_Y(y). \end{aligned}$$

On sait alors que Y est une variable aléatoire absolument continue, et que la fonction f_Y, égale à F_Y' sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, et (par exemple), égale à 0 en 0 et en 1, est une densité de Y.

Explicitement, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(F_X'\left(\sqrt{y}\right) - F_X'\left(-\sqrt{y}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X\left(\sqrt{y}\right) - f_X\left(-\sqrt{y}\right)\right) & \text{si } y \in]0,1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases},$$

soit : $\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

•• Pour tout réel a, $\mathbb{P}(Y \leq a) + \mathbb{P}(Y > a) = 1$, donc :

$$\mathbb{P}(Y \leq a) = \mathbb{P}(Y > a) \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y \leq a) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq a),$$

d'où on déduit que $\mathbb{P}(Y \leq a) = \mathbb{P}(Y > a) \Leftrightarrow F_Y(a) = \dfrac{1}{2}$.

Or d'après ce qui précède,

$$\forall\ y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X\left(-\sqrt{y}\right) = \sqrt{y} & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}.$$

On a donc $\mathbb{P}(Y \leq a) = \mathbb{P}(Y > a) \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [0,1] \\ \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, d'où : $\boxed{\mathbb{P}(Y \leq a) = \mathbb{P}(Y > a) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}}$.

1.b. La probabilité cherché est :

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{2}\right) && \textit{que l'inégalité soit stricte ou large importe peu} \\ &= 1 - F_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} && \text{d'après } \mathbf{1.} \end{aligned}$$

2. La fonction $\varphi : x \mapsto e^x$ est de classe C^1, à dérivée strictement positive sur l'intervalle $X(\Omega) = [-1,1]$; le théorème de la bijection assure que $\varphi([-1,1]) = [e^{-1}, e]$, et la fonction réciproque de φ est, bien sûr, la fonction $x \mapsto \ln x$.

On en déduit, dans un premier temps, que Z est à valeurs dans $[e^{-1}, e]$; sa fonction de répartition F_Z est donc nulle sur $]-\infty, e^{-1}[$, égale à 1 sur $]e, +\infty[$.

D'autre part, il en ressort aussi que pour tout $z \in [e^{-1}, e]$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq \ln z) = \dfrac{\ln z + 1}{2}$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $F_Z = \begin{cases} 0 & \text{si } z < e^{-1} \\ \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq \ln z) = \dfrac{\ln z + 1}{2} & \text{si } z \in [e^{-1}, e] \\ 1 & \text{si } z > e \end{cases}$.

F_Z est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{e^{-1} ; e\}$; elle est continue, y compris en 0 et en 1, car :

$$\lim_{z \to (e^{-1})^-} F_Z(z) = 0 = F_Z\left(e^{-1}\right) = \lim_{z \to (e^{-1})^+} F_Z(z) = \lim_{z \to (e^{-1})^+} \frac{\ln z + 1}{2},$$

et : $\displaystyle\lim_{z \to e^+} F_Z(z) = 1 = F_Z(e) = \lim_{z \to e^-} F_Z(z) = \lim_{z \to e^-} \frac{\ln z + 1}{2}$.

Il en résulte que $\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire à densité}}$.

Une densité de Z est la fonction f_Z, égale à F_Z' sur $\mathbb{R} \setminus \{e^{-1} ; e\}$, et par exemple nulle en e^{-1} et en e.

On a alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, $f_Z(z) = \dfrac{\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(\ln z)}{\exp(\ln z)} \times \mathbf{1}_{[e^{-1}, e]}(z)$, et comme $z \in [e^{-1}, e] \Leftrightarrow \ln z \in [-1,1]$, on peut simplifier, et l'on obtient pour densité de Z la fonction f_Z définie par :

$$\boxed{\forall\ z \in \mathbb{R}\,,\ \ f_Z(z) = \frac{1}{2z} \times \mathbf{1}_{[\mathrm{e}^{-1},\,\mathrm{e}]}(z)}\,.$$

4. Un seul écueil : ne pas oublier de discuter suivant le signe de a.

Ceci étant entendu, on obtient le résultat suivant :

$$\boxed{T \text{ suit la loi } \begin{cases} \mathcal{U}\big([-a+b,\,a+b]\big) & \text{si } a > 0 \\ \mathcal{U}\big([a+b,\,-a+b]\big) & \text{si } a < 0 \end{cases}}\ .$$

2. Lois exponentielles

a. Définition

Soit λ un réel strictement positif, et soit X une variable aléatoire réelle.

On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, et l'on note $X \rightrightarrows \mathcal{E}(\lambda)$, lorsque :

i **–** X est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;

ii **–** X est une variable aléatoire absolument continue, admettant pour densité la fonction

$$f : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,.$$

f est donc définie par $\forall\ x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b. Vérification

- L'application f définie par $\forall\ x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs

positives, continue en tout point sauf en 0.

•• De plus, pour tout $A > 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda A}$. On a $\displaystyle\lim_{A \to +\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda A}\right) = 1$,

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Par suite, la fonction f est bien une densité de probabilité.

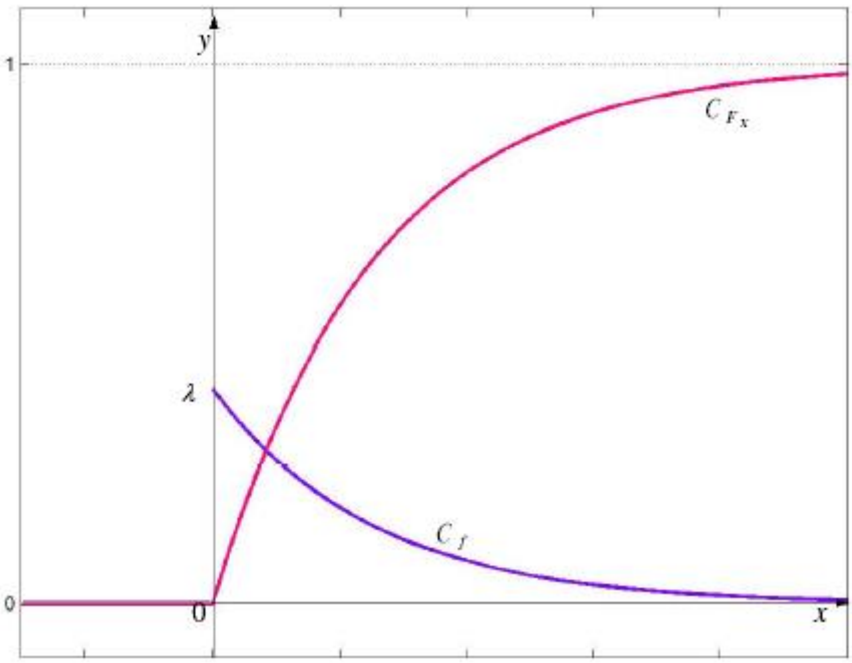
c. Fonction de répartition

Soit λ un réel strictement positif, et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$; déterminons la fonction de répartition F_X de X.

Une densité de X est la fonction $f : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{R^+}(x)$, qui est nulle sur $]-\infty, 0[$; on a donc pour tout

$x < 0$: $F_X(x) = 0$, et pour tout $x \geq 0$: $\displaystyle F_X(x) = \int_0^x \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Ainsi, la fonction de répartition de X est donnée par $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.



Allure des courbes représentatives C_{F_X} et C_f de la fonction de répartition et d'une densité d'une var. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

d. Remarque

Les lois exponentielles sont souvent utilisées pour modéliser des phénomènes chronologiques, par exemple une *durée de vie* ou un *temps d'attente* dans un processus continu.

e. Propriété d'amnésie des lois exponentielles

Les lois exponentielles sont caractérisées, parmi les lois absolument continues, par la propriété d'***amnésie***, déjà rencontrée dans le cas discret à propos des lois géométriques ; le but de l'exercice qui suit est d'établir ce fait.

Exercice 6

Soit X une var. absolument continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}(X > t) > 0$.

1. On suppose que X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que pour tout $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$: $\mathbb{P}_{(X > t)}(X > t + h) = \mathbb{P}(X > h)$.

On dit alors que la loi de la var. X *possède la propriété d'amnésie, ou qu'elle est sans mémoire.*

On suppose désormais que X obéit à une loi sans mémoire, ie. que

$$\forall\,(t,h)\in\left(\mathbb{R}^{+}\right)^{2}\ ,\ \mathbb{P}_{(X>t)}\,(X>t+h)\ =\ \mathbb{P}\,(X>h)\ ,$$

et l'on cherche à démontrer que X suit une loi exponentielle.

On note G_X la fonction de survie de X, définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $\forall\ t\geq 0\ ,\ G_X(t)=\mathbb{P}(X>t)$.

2. Montrer que G_X vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases}(\mathbf{1}) & G_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+}\\ (\mathbf{2}) & G_X(0)=1\\ (\mathbf{3}) & \forall\,(x,y)\in\left(\mathbb{R}^{+}\right)^{2}\ ,\ G_X(x+y)\ =\ G_X(x)\,G_X(y)\end{cases}.$$

3. Montrer que G_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+}$ (*on pourra utiliser la relation* $(\mathbf{3})$ *, et intégrer*).

4. Montrer que G_X est solution sur $\mathbb{R}^{+}$ de l'équation différentielle :

$$(E)\quad :\quad \begin{cases} f(0)=1\\ \forall\ x\in\mathbb{R}^{+}\ ,\ f'(x)\ =\ f'(0)\,f(x)\end{cases}.$$

5. Déterminer G_X , puis conclure.

Solution

1. Pour tout $t\in\mathbb{R}^{+}$, $\mathbb{P}(X>t)=1-\mathbb{P}(X\leq t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$; on a donc bien

$\forall\ t\in\mathbb{R}^{+}$, $\mathbb{P}(X>t)>0$, et pour tout $(t,h)\in\left(\mathbb{R}^{+}\right)^{2}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X>t)}\,(X>t+h)\ &=\ \frac{\mathbb{P}\,(X>t+h,\,X>t)}{\mathbb{P}\,(X>t)}\\ &=\ \frac{\mathbb{P}\,(X>t+h)}{\mathbb{P}\,(X>t)}\ ,\end{aligned}$$

car l'événement $(X>t)$ est inclus dans l'événement $(X>t+h)$.

On a donc : $\mathbb{P}_{(X>t)}\,(X>t+h)\ =\ \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}\ =\ \mathrm{e}^{-\lambda h}$, d'où : $\boxed{\mathbb{P}_{(X>t)}\,(X>t+h)\ =\ \mathbb{P}(X>h)}$.

2. • Par hypothèse, X est une var. absolument continue ; sa fonction de répartition est donc continue, et par suite l'application :

$$\begin{aligned}G_X\ :\ \mathbb{R}^{+}&\to\ \mathbb{R}\\ x\ &\mapsto 1-\mathbb{P}(X\leq x)\end{aligned}$$

est également continue.

• De plus, puisque X est une vac. à valeurs dans $\mathbb{R}^{+}$: $\mathbb{P}(X\leq 0)\ =\ 0$, et il en résulte que

$G_X(0)=1-\mathbb{P}(X\leq 0)=1$.

- Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

$$\begin{aligned} G_X(x+y) &= \mathbb{P}(X > x + y) \\ &= \mathbb{P}(X > x + y,\ X > x) && \text{car } (X > x) \subset (X > x + y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > x + y,\ X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} \mathbb{P}(X > x) && \text{on a bien } \mathbb{P}(X > x) \neq 0 \\ &= \mathbb{P}(X > y)\,\mathbb{P}(X > x) && \text{d'après la propriété d'amnésie} \\ &= G_X(x)\,G_X(y)\ . \end{aligned}$$

La fonction G_X vérifie donc les propriétés $(\mathbf{1})$, $(\mathbf{2})$ et $(\mathbf{3})$.

3. La fonction G_X est continue sur $\mathbb{R}^+$; soit H sa primitive sur cet intervalle s'annulant en 0, et soit a un réel strictement positif. En intégrant la relation $(\mathbf{3})$ par rapport à la variable y sur le segment $[0, 1]$, il vient :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^+\ ,\ \int_0^a G_X(x+y)\,\mathrm{d}y = G_X(x) \int_0^a G_X(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

soit : $\quad \forall\ x \in \mathbb{R}^+\ ,\ H(x + a) - H(x) = G_X(x)\,H(a)$.

La fonction G_X étant à valeurs strictement positives, H est strictement croissante, et $H(a) > H(0) = 0$; il est donc licite de diviser les deux membres de l'égalité précédente par $H(a)$.

On obtient : $\quad \forall\ x \in \mathbb{R}^+\ ,\ G_X(x) = \dfrac{1}{H(a)}\big(H(x + a) - H(x)\big)$.

La fonction H est de classe C^1 comme primitive d'une fonction continue, et il s'ensuit que

$G_X : x \mapsto \dfrac{1}{H(a)}\big(H(x + a) - H(x)\big)$ est également de classe C^1.

4. On sait déjà que $G_X(0) = 1$. De plus, d'après le résultat précédent, il est licite de dériver par rapport à y dans l'égalité $(\mathbf{3})$. On obtient alors : $\quad \forall\ (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2\ ,\ G_X'(x+y) = G_X(x)\,G_X'(y)$.

En particulier, en choisissant $y = 0$, il vient : $\quad \forall\ c \in \mathbb{R}^+\ ,\ G_X'(x) = G_X(x)\,G_X'(0)$:

La fonction G_X est donc solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle (E).

5. Posons $\lambda = -G_X'(0)$. D'après la question précédente, G_X est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle (linéaire, du premier ordre, homogène) : $y' = -\lambda\, y$; on sait alors qu'il existe un réel A tel que pour tout $x \geq 0$: $G_X(x) = A\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$; comme G_X vérifie de plus la condition initiale $G_X(0) = 1$, on a $A = 1$, et pour tout $x \geq 0$: $\boxed{G_X(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

Maintenant :

- Pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$, car X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$;
- Pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - G_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$: donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$.

Remarquons que le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbb{P}(X \leq x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = 1$ assure que λ est strictement positif.

Exercice 7

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et toutes de même loi. On pose $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $M = \operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n)$.

Déterminer les lois de m et M :

1. Lorsque $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

2. Lorsque $X_1, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Solution

La détermination des lois de m et M en fonction de celle des X_k s'effectue de la manière habituelle. Comme seuls les calculs terminaux font intervenir les lois $\mathcal{E}(\lambda)$ ou $\mathcal{U}([a, b])$, commençons par traiter le cas général.

On notera F la fonction de répartition des X_k, f une densité de ces variables aléatoires égale à F' là où F est de classe C^1, F_m et F_M les fonctions de répartition de m et M.

On a pour tout réel x :

$$F_m(x) = \mathbb{P}(m \leq x) = 1 - \mathbb{P}(m > x) = 1 - \mathbb{P}\big(\min(X_1, \ldots, X_n) > x\big) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k > x)\right)$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k > x) \qquad \text{par indépendance des } X_k$$

$$= 1 - \big(\mathbb{P}(X_1 > x)\big)^n \qquad \text{car les var. } X_k \text{ ont toutes la même loi}$$

$$= 1 - \big(1 - F(x)\big)^n \ .$$

De même,

$$F_M(x) = \mathbb{P}(M \leq x) = \mathbb{P}\big(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq x)\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leq x) \qquad \text{par indépendance des } X_k$$

$$= \big(\mathbb{P}(X_1 \leq x)\big)^n \qquad \text{car les var. } X_k \text{ ont toutes la même loi}$$

$$= \big(F(x)\big)^n \ .$$

La variables aléatoires X_k étant absolument continues, leur fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini E. Par composition, il en résulte que F_m et F_M sont continues sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus E$; les var. M et m sont donc elles aussi absolument continues, et l'on en obtient des densités f_m et f_M en dérivant F_m et F_M sur $\mathbb{R} \setminus E$, et en posant pour $x \in E$, par exemple, $f_m(x) = f_M(x) = 0$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$:

$$f_m(x) = n\big(1 - F(x)\big)^{n-1} f(x)\,, \quad \text{et} \quad f_M(x) = n\,F(x)^{n-1} f(x)\,.$$

Appliquons maintenant ceci aux deux cas particuliers demandés.

1. Lorsque $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a $F(x) = \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$, et l'on peut choisir pour f la fonction $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)$. On a alors $E = \{0\}$, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \boxed{f_m(x) = n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda n x}\chi_{\mathbb{R}^{+*}}(x)}\,, \quad \boxed{f_M(x) = n\lambda\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)\mathrm{e}^{-\lambda x}\chi_{\mathbb{R}^{+*}}(x)}\,.$$

Remarquons que m suit la loi $\mathcal{E}(n\lambda)$.

2. Lorsque $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a,b]\big)$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$, et l'on peut prendre $f(x) = \dfrac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}(x)$. Ainsi, $E = \{a, b\}$, et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \boxed{f_m(x) = n\frac{(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}\chi_{]a,b[}(x)}\,, \quad \boxed{f_M(x) = n\frac{(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}\chi_{]a,b[}(x)}\,.$$

3. Lois normales

a. Définition

Soient m un réel, σ un réel strictement positif, et soit X une variable aléatoire réelle.

On dit que X suit la loi normale de paramètres m et σ, et on note $X \rightrightarrows \mathcal{N}(m, \sigma)$, lorsque X est une variable aléatoire absolument continue, telle que :

i – l'univers – image de X est égal à $\mathbb{R}$, à un ensemble négligeable près ;

ii – X est une var. absolument continue, admettant pour densité la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

En particulier, X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de X.

La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée loi normale centrée réduite, pour des raisons qui deviendront rapidement claires.

b. Vérification

L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}^2$: $\displaystyle\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_A^B \mathrm{e}^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$.

On effectue dans cette intégrale le changement de variables $x = \frac{t - m}{\sigma}$. On obtient :

$$\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A-m}{\sigma}}^{\frac{B-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Or on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge, et est égale $\sqrt{2\pi}$.

On en déduit, en faisant tendre A vers $-\infty$, puis B vers $+\infty$ dans $\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A-m}{\sigma}}^{\frac{B-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$:

La fonction f est donc bien une densité de probabilité.

c. Remarques

- Il n'est pas possible d'exprimer la fonction de répartition $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$ d'une var. de loi normale à l'aide des fonctions usuelles.
- On trouve parfois la notation $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour $\mathcal{N}(m, \sigma)$: on s'attachera donc à lire soigneusement l'énoncé afin de prévenir tout risque de confusion.
- Les lois gaussiennes sont d'une importance capitale, car ce sont des lois limites *par excellence* : on reviendra sur ce point dans le chapitre *convergence et approximations*, à suivre…

d. Sur la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

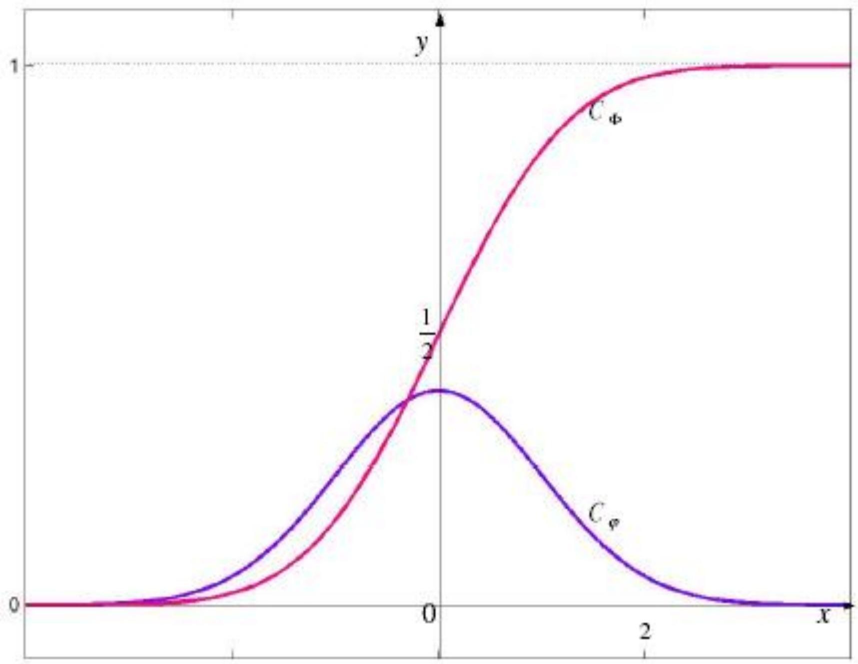
Notations

La fonction de répartition d'une var. de loi normale centrée réduite est habituellement notée Φ, et sa densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ se note φ.

Propriété

L'application φ est paire, et il en résulte que $\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$.

Représentation



Allure des courbes représentatives C_Φ et C_φ de la fonction de répartition Φ et de la densité usuelle φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

III FONCTIONS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE A DENSITÉ

On a déjà étudié ci - dessus de telles fonctions de vac. ; le but de ce paragraphe est de faire le point sur les méthodes à utiliser.

1. Le problème

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et soit u une fonction définie sur $X(\Omega)$.

On pose $Y = u(X)$. On admettra toujours, pour des raisons pratiques, que Y est une variable aléatoire (cela nous est nécessaire, puisqu'on n'a pas au programme du concours AST1 de définition des var. dans leur généralité).

Moyennant quoi, se posent encore les questions suivantes :

Si tel est le cas, Y est – elle une variable à densité ?

Si la réponse est encore affirmative, quel lien y a – t – il entre les densités de Y et celles de X ?

2. Contre – exemples et exemples

- Considérons pour commencer une variable absolument continue X et l'application u constante égale à a sur $\mathbb{R}$.

$Y = u(X)$ est alors la variable aléatoire certaine égale à a. Or une variable certaine **n'est pas** une variable à densité.

D'où une première réponse (négative) au problème posé :

Une fonction de variable à densité n'est pas nécessairement une variable à densité.

• • Considérons maintenant une variable aléatoire absolument continue X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est – à – dire une variable aléatoire admettant pour densité l'application f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = \lfloor x + 1 \rfloor$ ($\lfloor \quad \rfloor$ signifiant ici « partie entière »).

On démontre alors que $Y = u(X)$ est une variable aléatoire discrète, suivant la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

• • • Troisième et dernier contre – exemple, en exercice :

Soit X une vac. suivant la loi normale centrée – réduite, et soit u : $x \mapsto \dfrac{|X| + X}{2}$.

Montrer que $Y = u(X)$ n'est ni une variable aléatoire à densité, ni une variable aléatoire discrète.

• • • • Un résultat positif pour finir :

Théorème (premier théorème de transfert, ou théorème de transfert pour la loi)

Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, soit f_X une densité de X.

Soit u une application de classe C^1 sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, et telle que u' ne s'annule pas.

Alors $Y = u(X)$ est une variable à densité, et une densité de Y est : $f_Y = \left(\left(\dfrac{f_X}{|u'|}\right) \circ u^{-1}\right) \times \mathbf{1}_{u(I)}$.

Le mérite de ce résultat est qu'il assure, sous les hypothèses adéquates, que $Y = u(X)$ est bien une variable aléatoire. D'un point de vue théorique, c'est très bien, mais cela n'a pas d'intérêt pratique en AST1, puisque, comme on l'a dit plus haut, ce point sera systématiquement admis. Cet avantage étant écarté, ce théorème ne permet plus que de régler, au prix d'une formule laide aux hypothèses moches, les cas que l'approche habituelle traiterait de toutes façons en deux coups de cuillère à pot, d'où la consigne :
Oublier ce théorème.

3. La pratique

a. Le principe

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et soit u une fonction définie sur $X(\Omega)$.

On pose $Y = u(X)$.

La méthode pour déterminer si Y est une variable aléatoire à densité, discrète ou mixte est :

- de déterminer, aussi précisément que possible, l'univers – image $Y(\Omega)$.

Ensuite :

rare

•• Si $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable, Y est une variable aléatoire discrète. Dans ce cas, on cherche à déterminer $\mathbb{P}(Y = n)$, pour tout n dans $Y(\Omega)$.

••• Si $Y(\Omega)$ n'est ni fini ni dénombrable, (ce qui laisse penser que Y sera une variable à densité) :

- ◦ On détermine la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X.
- ◦◦ On vérifie ***soigneusement*** que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.
- ◦◦◦ Si tel est bien le cas, on peut conclure que Y est une variable à densité, et l'on obtient une densité de Y en dérivant F_Y là où c'est possible.

On est prié de faire, <u>soigneusement,</u> toutes les vérifications voulues avant de dériver sauvagement la fonction de répartition...

b. Un premier exemple : fonctions affines de variables aléatoires à densité

Proposition

Soient X une variable aléatoire réelle admettant une densité f_X, et a, b deux réels, avec $a \neq 0$.

Alors la variable aléatoire $Y = aX + b$ est une var. à densité, et l'application f_Y définie par :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

est une densité de Y.

Preuve

Notons E l'ensemble des points de discontinuité de f_X, et $E' = \{ax + b,\ x \in E\}$.

- Supposons tout d'abord a strictement positif. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$Y \leq y \Leftrightarrow aX + b \leq y \Leftrightarrow X \leq \dfrac{y-b}{a}$. Autrement dit, en notant respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y : $\forall\, y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = F_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)$.

Or F_X est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus E$. Par composition, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble fini E', et Y est donc bien une variable à densité.

De plus, on sait que toute application f positive, égale à F_Y' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, est une densité de Y. Mais (puisque f_X est une densité de X) la fonction

$y \mapsto \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ est positive, et coïncide avec $y \mapsto \frac{1}{a} F_X'\left(\frac{y-b}{a}\right) = F_Y'(y)$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points. L'égalité $\forall\ y \in \mathbb{R},\ F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ assure donc, par dérivation, que la fonction $y \mapsto \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ est une densité de Y.

•• De même, si l'on suppose a strictement négatif, alors :

$$\forall\ y \in \mathbb{R},\ Y \leq y \Leftrightarrow aX + b \leq y \Leftrightarrow X \geq \frac{y-b}{a},$$

donc :
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X > \frac{y-b}{a}\right) \quad \text{car } X \text{ est une vac.} \\ &= 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned}$$

On en conclut, comme dans le cas $a > 0$, dans un premier temps que Y est bien une var. à densité, et dans un deuxième temps que la fonction :

$$y \mapsto -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \underset{\text{à un ensemble fini près}}{=} -\frac{1}{a} F_X'\left(\frac{y-b}{a}\right) \underset{\text{à un ensemble fini près}}{=} F_Y'(y)$$

est une densité de Y.

Finalement, quel que soit le signe de a, Y est une var. à densité, et $f_Y : y \mapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ est une densité de cette variable aléatoire.

c. Trois autres exemples, en exercice

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, c'est-à-dire une variable aléatoire absolument continue admettant pour densité l'application f définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \geq x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On considère la variable aléatoire $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$, où λ est un réel strictement positif.

Montrer que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y.

Solution

Notons F_X la fonction de répartition de X, et F_Y celle de Y.

- La fonction $g : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$ est dérivable sur $[0,1[$, et pour tout $x \in [0,1[$:

$g'(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-x} > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires strict prouve alors que g réalise une bijection de

$[0,1[= X(\Omega)$ vers $\left[g(0), \lim\limits_{x \to 1^-} g(0) \right[= [0, +\infty[$.

Nous avons donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$, et l'on en déduit déjà que pour tout réel $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}
(Y \leq y) &= \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X) \leq y \right) && \text{par définition de la variable aléatoire } Y \\
&= \left(\ln(1 - X) \geq \lambda y \right) && \text{l'inégalité change de sens} \\
&= \left(1 - X \geq \mathrm{e}^{-\lambda y} \right) && \text{par croissance de la fonction exponentielle} \\
&= \left(X \leq 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} \right),
\end{aligned}$$

et il en résulte que $F_Y(y) = F_X\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right)$.

Or puisque X suit la loi $\mathcal{U}([0,1[)$, on a pour tout $x \in [0,1[$, $F_X(x) = x$. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} \in [0,1[$. Il s'ensuit que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $F_Y(y) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}$.

Ainsi, la fonction de répartition de Y est définie par $\forall\ y \in \mathbb{R}^+,\ F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On reconnaît bien sûr la fonction de répartition d'une loi usuelle, et on conclut sans mollir que

$\boxed{Y \text{ est une variable à densité, suivant la loi exponentielle } \mathcal{E}(\lambda)}$.

$\boxed{Y \text{ est donc bien une vac. , et une densité de } Y \text{ est la fonction } x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)}$.

Exercice 9

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[-1, \frac{3}{2}\right]\right)$. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Solution

La fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x - (-1)}{\frac{3}{2} - (-1)} = 2\,\dfrac{x+1}{5} & \text{si } -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}.$$

La VAR X est presque sûrement à valeurs dans $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$; les variations de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur ce segment sont les suivantes :

x	-1		0		1		$\frac{3}{2}$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$

et on en déduit que Y est presque sûrement à valeurs dans $\left[0, \frac{9}{4}\right]$; la fonction de répartition F_Y de Y vérifie donc :

$$\forall\ y < 0,\ F_Y(y) = 0 \text{, et } \forall\ y > \frac{9}{4},\ F_Y(y) = 1.$$

On tire également du tableau de variations précédent que :

- Pour tout $y \in \left]1, \frac{9}{4}\right]$: $\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{y}\right) = 2\,\frac{\sqrt{y}+1}{5}$;

•• pour tout $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{y}\right) - \mathbb{P}\left(X \leq -\sqrt{y}\right) \\
&= 2\frac{\sqrt{y}+1}{5} - 2\frac{-\sqrt{y}+1}{5} \\
&= \frac{4\sqrt{y}}{5}\ .
\end{aligned}$$

Finalement, la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$\forall\ y \in \mathbb{R},\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \dfrac{4\sqrt{y}}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2\,\dfrac{\sqrt{y}+1}{5} & \text{si } 1 < x \leq \dfrac{9}{4} \\ 1 & \text{si } x > \dfrac{9}{4} \end{cases}.$$

- Il est clair que F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \left\{0, 1, \frac{9}{4}\right\}$.

•• Vérifions rapidement que F_Y est continue. Pour cela, il suffit de prouver sa continuité en $0, 1$ et $\frac{9}{4}$.

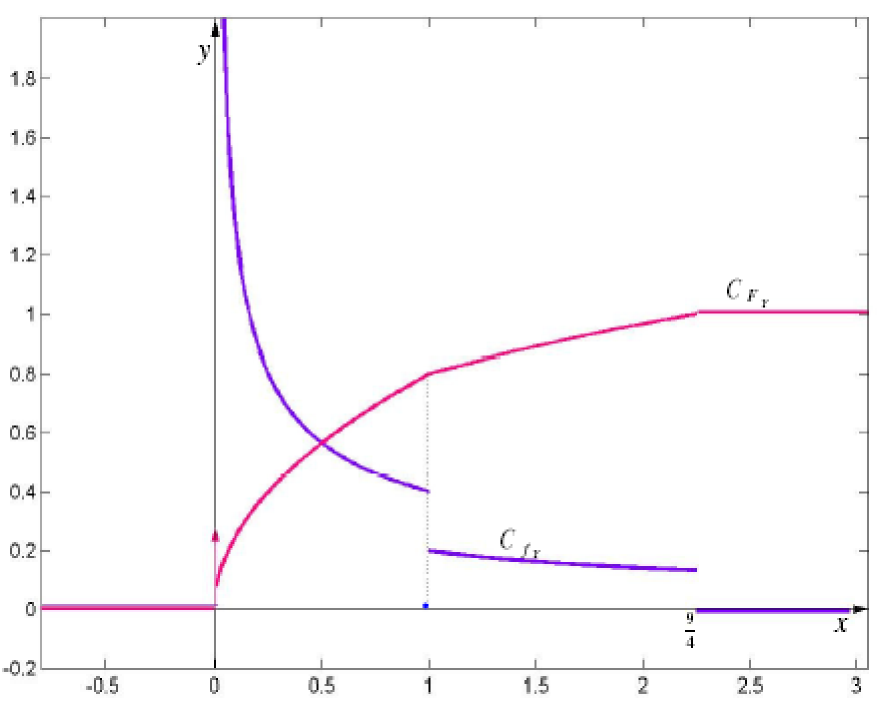
On a $0 = \lim\limits_{0^-} F_Y = F_Y(0) = \lim\limits_{0^+} \frac{4\sqrt{y}}{5} = \lim\limits_{0^+} F_Y$, d'où la continuité en 0, et les deux autres points se traitent de manière analogue.

Finalement, la var. Y est absolument continue, et on sait qu'une densité de Y est la fonction f_Y définie par

$$\forall\ y \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, 1, \frac{9}{4}\right\},\quad f_Y(y) = F_Y\,'(y) \text{, et par exemple : } f_Y(0) = f_Y(1) = f_Y\left(\frac{9}{4}\right) = 0\,.$$

Cette densité de Y est donc donnée par

$$\boxed{\forall\ y \in \mathbb{R},\quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \text{ si } x = 1 \text{ ou si } x \geq \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{2}{5\sqrt{y}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{5\sqrt{y}} & \text{si } 1 < x < \dfrac{9}{4} \end{cases}}\ .$$



Exercice 10

Démontrer le résultat annoncé en **1.** , exemple 2 :

Soit X variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est – à – dire une var. absolument continue admettant pour densité l'application f définie par $f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $u(x) = \lfloor x + 1 \rfloor$ ($\lfloor \ \rfloor$ signifiant ici « partie entière »).

Montrer que $Y = u(X)$ est une variable aléatoire discrète, suivant la loi géométrique $\mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

Solution

• $Y(\Omega) = \{\lfloor x + 1 \rfloor,\ x \in X(\Omega)\} = \{\lfloor x \rfloor + 1,\ x \in \mathbb{R}^+\} = \{n + 1,\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$.

•• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(\lfloor x + 1 \rfloor = n) = \mathbb{P}(n \leq X + 1 < n + 1) = \mathbb{P}(n - 1 \leq X < n),$$

donc : $\mathbb{P}(Y = n) = \int_{n-1}^{n} \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_{n-1}^{n} = e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} = e^{-\lambda(n-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$,

soit, en posant $p = 1 - e^{-\lambda}$ et $q = 1 - p = e^{-\lambda}$, $\mathbb{P}(Y = n) = q^{n-1} p$:

$\boxed{\text{la var. } Y \text{ suit donc bien la loi } \mathcal{G}(p)}$.

IV MOMENTS DE VARIABLES ALÉATOIRES A DENSITÉ

1. Espérance d'une variable aléatoire à densité

a. Définition

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue.

On dit que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument, et dans ce cas l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la var. X est le réel défini par : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t}$.

b. Propriétés de l'espérance

Les propriétés de base de l'espérance, énoncées pour des variables aléatoires discrètes, s'étendent au cas de var. absolument continues :

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires (discrètes ou à densité) à densité définies sur le même espace probabilisé, admettant une espérance. Alors :

Linéarité de l'espérance :

Pour tout réel α, la var. $\alpha X + Y$ admet une espérance, et $\boxed{\mathbb{E}(\alpha X + Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$.

Idempotence de l'espérance :

$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X))$ existe, et $\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)}$.

Isotonie (« croissance ») de l'espérance :

Si $X \leq Y$ presque sûrement, *i.e.* si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\boxed{\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)}$.

Nous admettrons ces résultats, qui ne sont pas forcément des évidences (la linéarité, notamment, est une conséquence du théorème de transfert pour l'espérance d'une fonction d'un couple de var., HP en AST1)

c. Théorème de transfert

On admet également le résultat suivant :

de transfert (ou théorème de transfert pour l'espérance)

Soit X une variable aléatoire absolument continue, de densité f. Soit $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

On suppose que $Y = \phi(X)$ est une variable aléatoire.

Alors Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f_X(t)\, dt$ converge absolument, et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f_X(t)\, dt .$$

Remarques

L'importance de ce théorème dépasse de loin celle du théorème de transfert pour la loi, énoncé précédemment à titre purement culturel, et HP en AST1 ; lorsque l'on parle **du** théorème de transfert, il n'y a pas d'ambiguïté : c'est du théorème de transfert pour l'espérance qu'il s'agit.

2. Moments d'une var à densité

a. Définition

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue, et soit f une densité de X.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

On dit que X admet un moment d'ordre r si et seulement si $\mathbb{E}\left(X^r\right)$ existe. Dans ce cas, le moment d'ordre r de X est le réel $m_r(X)$ défini par $m_r(X) = \mathbb{E}\left(X^r\right)$.

Il résulte alors du théorème de transfert que

La variable aléatoire X admet un moment d'ordre r si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$ est absolument convergente, et dans ce cas $m_r(X) = \mathbb{E}\left(X^r\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$.

Remarque

Il est facile de démontrer que lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$ converge, sa convergence est automatiquement absolue. Malgré cela, on est prié de montrer qu'on connaît son cours, que l'on sait que l'expression $m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$ provient du théorème de transfert… autrement dit, on est prié de ne pas oublier de vérifier l'hypothèse d'**absolue** convergence.

b. Exemple

Soit X une vac admettant pour densité la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x^3} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ (*on vérifierait facilement que f est bien une densité de probabilité*). Montrons que X admet un moment d'ordre 1, mais ne possède pas de moment d'ordre 2.

- La fonction f étant nulle sur $]-\infty, 1[$, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ équivaut à celle de $\int_{1}^{+\infty} x f(x)\, dx$, et en cas de convergence ces deux intégrales sont égales. Or pour tout $A > 1$:

$\int_1^A x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^A \frac{2}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{x} \right]_1^A = 2 - \frac{2}{A}$; on a donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A x\, f(x)\, \mathrm{d}x = 2$, et ceci assure la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, \mathrm{d}x$, ainsi que l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = 2$. La convergence est absolue puisque la fonction intégrée est à valeurs positives, donc $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre } 1}$, et $m_1(X) = 2$.

• • Pour tout $A > 1$: $\int_1^A x^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_1^A \frac{2}{x}\, \mathrm{d}x = 2 \ln A$. On en déduit que $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A x^2 f(x)\, \mathrm{d}x = +\infty$, et il s'ensuit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x$ diverge ; par conséquent, $\boxed{X \text{ n'admet pas de moment d'ordre } 2}$.

c. Propriétés

Proposition 1

> Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue, et soit $r \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.
>
> On suppose que X admet un moment d'ordre r.
>
> Alors, pour tout entier $s \in \llbracket 1, r \rrbracket$, X admet un moment d'ordre s.

Démonstration

Soit f une densité de X, et soit $s \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Montrer que X possède un moment d'ordre s revient à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^s f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

• On a, pour tout réel t tel que $|t| \geq 1$: $0 \leq |t|^s \leq |t|^r$, donc $0 \leq \left| t^s f(t) \right| \leq \left| t^r f(t) \right|$. Or par hypothèse, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, et il s'ensuit que les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} t^r f(t)\, \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^r f(t)\, \mathrm{d}t$ sont elles aussi absolument convergentes. Des considérations précédentes, il résulte que les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} t^s f(t)\, \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^s f(t)\, \mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.

• • D'autre part, pour tout réel t tel que $|t| < 1$, on a $|t|^s < 1$, et donc, puisque f est à valeurs positives, $\left| t^s f(t) \right| \leq f(t)$. La fonction f étant une densité, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge, et a fortiori $\int_{-1}^{1} f(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente. On déduit de ce qui précède et du critère de convergence par majoration pour les intégrales de fonctions à valeurs positives que l'intégrale $\int_{-1}^{1} t^s f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

• • • Par suite, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^s f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 2

> Soit X une variable à densité bornée. Alors X admet un moment de tout ordre.

Démonstration

Dire que X est bornée revient à dire qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $X(\Omega) \subset [-M, M]$; si tel est le cas, X admet une densité f nulle en – dehors du segment $[-M, M]$. Cette fonction f est continue sur $[-M, M]$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$\forall\, t \in [-M, M],\ \left|t^r f(t)\right| \leq M^r f(t)$.

L'intégrale $M^r \int_{-M}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t = M^r \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ; le critère de convergence par majoration pour les intégrales de fonctions positives assure alors que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-M}^{M} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, et que X possède un moment d'ordre r.

Remarque

Ce résultat s'étend naturellement au cas où X est presque sûrement bornée, *i.e.* au cas où il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\mathbb{P}(X \in [-M, M]) = 1$.

3. Variance et écart – type

a. Variance

Définition

Soit X une var. à densité admettant une espérance.

On dit que X possède une variance si et seulement si la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ possède une espérance, et dans ce cas on définit la variance de X, notée $\mathbb{V}(X)$, par :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}.$$

Proposition (Formule de Huygens – Köenig)

Soit X une variable aléatoire à densité. Alors

i – X possède une variance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2 ;

ii – Lorsque X possède une variance : $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$.

Démonstration

i – • Considérons tout d'abord une variable aléatoire T, ainsi qu'un réel a ; supposons que T admet un moment d'ordre 2. Alors T admet également un moment d'ordre 1 : les variables aléatoires T^2, aT et a admettent toutes trois une espérance, et, par linéarité, il en résulte que $\mathbb{E}\left(T^2 + 2aT + a^2\right) = \mathbb{E}\left((T + a)^2\right)$ existe. Nous avons ainsi démontré que si une variable aléatoire T admet un moment d'ordre 2, alors, pour tout réel a, la var $T + a$ admet un moment d'ordre 2.

Revenons maintenant à notre variable aléatoire X.

•• Si X possède un moment d'ordre 2, alors X possède également une espérance. On applique ce qui précède avec $a = -\mathbb{E}(X)$, et on en déduit que $Y = X + a$ possède un moment d'ordre 2. Ainsi, $\mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$ existe, ce qui signifie que X possède une variance.

••• Si X admet une variance, alors la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}(X)$ existe et possède un moment d'ordre 2.

On applique à nouveau ce qui précède, avec cette fois – ci $a = \mathbb{E}(X)$; on en déduit que $X = Y + a$ possède un moment d'ordre 2.

ii – On a démontré que X possède une variance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2.

Si tel est le cas, on a de plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2,\end{aligned}$$

et ceci achève la démonstration.

Propriétés

Proposition

Soit X une var à densité admettant une variance. Alors :

i – $\mathbb{V}(X) > 0$.

ii – Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la vac $aX + b$ possède une variance, et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.

Démonstration

i – On sait déjà que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) \geq 0$, car $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ est à valeurs positives ; il nous reste donc à vérifier que $\mathbb{V}(X) \neq 0$. Raisonnons par l'absurde : supposons $\mathbb{V}(X) = 0$. Alors : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t - \mathbb{E}(X)\right)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction $t \mapsto \left(t - \mathbb{E}(X)\right)^2 f(t)$ est à valeurs positives, on en déduit que cette fonction est nulle en tout point où elle est continue, donc sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Or $t \mapsto \left(t - \mathbb{E}(X)\right)$ ne s'annule qu'en un point ; la fonction f est donc nulle, sauf peut – être en un nombre fini de points. Par suite, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, ce qui contredit la définition d'une densité. L'hypothèse formulée est donc absurde, et il s'ensuit que $\mathbb{V}(X) > 0$.

ii – La linéarité de l'espérance assure que $\mathbb{E}(aX + b)$ existe, et que $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$. Nous avons donc $\left((aX + b) - \mathbb{E}(aX + b)\right)^2 = a^2\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$; on en déduit l'existence de

$\mathbb{V}(aX+b)$, ainsi que l'égalité :

$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}\big((aX+b) - \mathbb{E}(aX+b)\big)^2 = a^2\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = a^2\mathbb{V}(X).$$

b. Ecart – type ; variables centrées réduites

Les définitions ci – dessous sont analogues à celles qui ont été données pour des variables aléatoires discrètes :

Définition 1

Soit X une variable aléatoire absolument continue possédant une variance.

On définit l'écart – type de X, noté $\sigma(X)$, par $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$.

Remarque

Cette définition a bien un sens, car la variance de X est positive.

Définition 2

Soit X une variable aléatoire absolument continue.

- • On dit que X est une variable ***centrée*** lorsque X possède une espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$;
- • • On dit que X est une variable ***réduite*** lorsque X possède une variance et $\mathbb{V}(X) = 1$.

Proposition

Soit X une variable aléatoire absolument continue possédant une variance.

Alors la var. $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Remarques

- • La variance d'une variable à densité étant non nulle, on a $\sigma(X) \neq 0$: La var. X^* est donc bien définie.
- • • On dit parfois que X^* est la variable centrée réduite issue de X.

La démonstration de ce résultat est identique à celle qui a été vue dans le cas de variables aléatoires discrètes.

4. espérance et variance des lois continues usuelles

a. Le résultat

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant l'une des lois continues au programme : loi uniforme sur un segment $[a, b]$, loi exponentielle de paramètre λ, ou loi normale de paramètres m et σ.

Alors X possède une espérance et une variance, et :

- Si X suit la loi $\mathcal{U}([a,b])$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$.
- • Si X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$.
- • • Si X suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = m}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \sigma^2}$.

b. Les démonstrations

- ***Loi uniforme sur un segment***

On sait que $f = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}$ est une densité de X. La VAR X est bornée presque sûrement, car $\mathbb{P}\left(X \in [a,b]\right) = 1$. Par suite, X admet un moment de tout ordre.

En particulier, X admet une espérance, et l'on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } f \text{ est nulle en } - \text{ dehors de } [a,b] \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b,\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$.

De même, X admet un moment d'ordre 2, et :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{3}\,\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{4\left(b^2+ab+a^2\right) - 3\left(a^2+2ab+b^2\right)}{12},\end{aligned}$$

et l'on obtient bien comme annoncé : $\mathbb{V}(X) = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$.

- • **Lois exponentielles**

Rappel

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et : $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$.

Moyennant quoi **:**

∘ Considérons tout d'abord une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathcal{E}(1)$; une densité de Y est donc la fonction $f \,:\, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. La fonction f étant nulle sur $\mathbb{R}^-$, le moment d'ordre r de Y est donné par

$m_r(Y) = \int_0^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^r \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, sous réserve de convergence absolue de cette intégrale. Or :

-- On sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^r \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et que $\int_0^{+\infty} t^r \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = r!$

-- La convergence est absolue, puisque la fonction intégrée est positive.

Ainsi, Y possède un moment de tout ordre, et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$: $m_r(Y) = r!$.

∘∘ Revenons maintenant à notre variable aléatoire X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On sait que $Y = \lambda X$ suit la loi $\mathcal{E}(1)$; la linéarité de l'espérance assure alors que X admet un moment de tout ordre, et que pour tout

$r \in \mathbb{N}^*$: $m_r(X) = m_r\left(\frac{1}{\lambda}Y\right) = \mathbb{E}\left((\lambda X)^r\right) = \frac{1}{\lambda^r}\mathbb{E}(Y^r) = \frac{1}{\lambda^r}m_r(Y) = \frac{r!}{\lambda^r}$.

En particulier, X possède une espérance et une variance, et l'on a :

$\mathbb{E}(X) = m_1(X) = \frac{1}{\lambda}$, et $\mathbb{V}(X) = m_2(X) - m_1(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

• • • Loi normales

∘ Considérons tout d'abord une var. Y suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$; une densité de Y est donc la fonction

$f \,:\, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, on intègre par parties dans l'intégrale $\int_A^B t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B (t)\left(t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t$,

en posant $v(t) = t$ et $u(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1, donc l'intégration par parties est licite, et donne :

$$\int_A^B t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[u(t)v(t)\right]_A^B - \int_A^B u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_A^B + \int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t .$$

On fait alors tendre successivement A vers $-\infty$, puis B vers $+\infty$. On a par croissance comparée

$\lim_{A\to-\infty} A\,\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} = \lim_{B\to+\infty} B\,\mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}} = 0$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, car f est une densité ; ceci assure la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$, ainsi que l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 1$.

La convergence étant bien sûr absolue (la fonction intégrée est positive), Y admet un moment d'ordre 2, et $m_2(Y) = 1$. On sait alors que la variable aléatoire Y admet également un moment d'ordre 1, et l'on a : $m_1(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,dt = 0$, puisque la fonction intégrée est impaire. Ainsi, Y possède une espérance et une variance, et l'on a : $\mathbb{E}(Y) = m_1(Y) = 0$, et $\mathbb{V}(Y) = m_2(Y) - m_1(Y)^2 = 1$.

∘ ∘ Posons maintenant $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$; on sait que Y suit la loi normale centrée réduite, et $X = \sigma Y + m$.

Il en résulte que X possède une espérance et une variance, et que :

$\mathbb{E}(X) = \sigma\,\mathbb{E}(Y) + m = m$, et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2\,\mathbb{V}(Y) = \sigma^2$.

5. Quatre exercices d'application

Exercice 11

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, admettant toutes f pour densité de probabilité .

2. Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

3. A quelle condition Y admet – elle une espérance ? Lorsque cette condition est remplie, calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Solution

1. • La fonction f est continue sauf en 0, et elle est à valeurs positives.

• • Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a, sous réserve de convergence : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t)^2}$.

Cette intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et l'on a pour tout $A > 0$, $\int_0^A \dfrac{dt}{(1+t)^2} = 1 - \dfrac{1}{1+A}$; il en résulte que $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A \dfrac{dt}{(1+t)^2} = 1$: l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est donc convergente, et de valeur égale à 1.

Par suite, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est une densité de probabilité}}$.

Par ailleurs, ce calcul prouve que, si X est une variable aléatoire de densité f, sa fonction de répartition F est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, et vérifie : $\forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$, d'où $1 - F(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

2. Toutes les variables aléatoires X_k, $k \in [\![1, n]\!]$, sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, il en est donc de même pour Y ; sa fonction de répartition F_Y est de ce fait nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} 1 - F_Y(y) = \mathbb{P}(Y > y) &= \mathbb{P}\big(\min(X_1,\ldots,X_n) > y\big) = \mathbb{P}\big(X_1 > y,\ldots,X_n > y\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > y).\mathbb{P}(X_2 > y)\ldots.\mathbb{P}(X_n > y) \quad \text{par indépendance des } X_k \\ &= \big(\mathbb{P}(X_1 > y)\big)^n \quad \text{car les } X_k \text{ ont toutes la même loi} \\ &= \frac{1}{(1+y)^n} \quad \text{d'après } \mathbf{1.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall\ y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(1+y)^n} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$. La fonction F_Y est alors clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$; elle est continue, y compris en 0, car $\lim\limits_{0^-} F_Y(y) = 0 = F_Y(0) = \lim\limits_{0^+} F_Y(y)$. Il en résulte que $\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$. Une densité de Y est la fonction f_Y, égale à F_Y' sur $\mathbb{R}^*$, et par exemple égale à n en 0, ce qui donne : $\boxed{\forall\ y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \dfrac{n}{(1+y)^{n+1}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)}$.

3. La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y$ converge absolument, et dans ce cas on a $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y$; la fonction f_Y étant nulle sur $\mathbb{R}^-$, on obtient donc

$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y = n\int_0^{+\infty} \dfrac{y}{(1+y)^{n+1}}\,\mathrm{d}y$, sous réserve de convergence de cette intégrale (la convergence sera alors automatiquement absolue, puisque la fonction intégrée est positive).

Or pour tout $A > 0$:

$$\begin{aligned} n\int_0^A \frac{y}{(1+y)^{n-1}}\,\mathrm{d}y = n\int_0^A \frac{y+1-1}{(1+y)^{n+1}}\,\mathrm{d}y &= n\int_0^A \left(\frac{y+1}{(1+y)^{n+1}} - \frac{1}{(1+y)^{n+1}}\right)\mathrm{d}y \\ &= n\int_0^A \left(\frac{1}{(1+y)^{n}} - \frac{1}{(1+y)^{n+1}}\right)\mathrm{d}y\ , \end{aligned}$$

donc :

- si $n = 1$, alors pour tout $A > 0$,

$$n\int_0^A \frac{y}{(1+y)^{n-1}}\,\mathrm{d}y = \int_0^A \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^2}\right)\mathrm{d}y = \ln(1+A) - 1 + \frac{1}{1+A},$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\int_0^A \dfrac{y}{(1+y)^{n-1}}\,\mathrm{d}y = +\infty$:

$\boxed{\text{lorsque } n = 1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y \text{ diverge, } Y \text{ ne possède donc pas d'espérance}}$.

- • Lorsque $n \geq 2$,

$$n\int_0^A\left(\frac{1}{(1+y)^n}-\frac{1}{(1+y)^{n+1}}\right)\mathrm{d}y = n\left[-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(1+y)^{n-1}}+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+y)^n}\right]_0^A$$

$$=\frac{1}{n-1}+\left(\frac{1}{(1+A)^n}-\frac{n}{n-1}\frac{1}{(1+A)^{n-1}}\right),$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^A \frac{y}{(1+y)^{n-1}}\mathrm{d}y = \frac{1}{n-1}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y$ converge et vaut $\frac{1}{n-1}$:

$\boxed{\text{lorsque } n \geq 2,\ Y \text{ possède une espérance, et } \mathbb{E}(Y)=\frac{1}{n-1}}$.

Exercice 12

Soit X une var. à densité sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

On suppose que la fonction de répartition F_X de X est une application de classe C^1 et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, et l'on pose $Y = F_X(X)$.

1. Déterminer la loi et une densité de Y.

2. Donner sans calculs les valeurs de $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Solution

1. Y est à valeur dans $]0,1[$, sa fonction de répartition F_Y est donc nulle sur $\mathbb{R}^-$, égale à 1 sur $[1,+\infty[$.

D'autre part, F_Y est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{-\infty} F_Y = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F_Y = 1$; de plus, par hypothèse, F_Y est strictement croissante. Alors, d'après le théorème du même nom, F_Y réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$.

Il en résulte que pour tout $y \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}\big(F_X(X) \leq y\big) \\ &= \mathbb{P}\big(X \leq F_X^{-1}(y)\big) \\ &= F_X\big(F_X^{-1}(y)\big) \\ &= y\,. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ y & \text{si } y \in]0,1[\\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi usuelle, et l'on en conclut que $\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{U}(]0,1[)}$.

Une densité de Y est donc la fonction $f_Y = \chi_{]0,1[}$.

2. Le cours assure que Y possède une espérance et une variance, et que $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}}$, $\boxed{\mathbb{V}(Y)=\frac{1}{12}}$.

Exercice 13

Loi de Railegh

On considère l'application f définie par : $\forall\ t \in \mathbb{R}\ ,\ f(t) = t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit alors X une var. absolument continue sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, admettant f pour densité. *A titre culturel, on dit que X suit la* ***loi de Rayleigh.***

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de la var X .

3. Montrer que X admet des moments de tous ordres, et les calculer.

Préciser en particulier l'espérance et la variance de X .

4. On pose $Y = X^2$.

Déterminer la loi de Y , ainsi que son espérance, et sa variance.

Exercice 14

Lois gamma et lois de Pareto

p et λ désignent deux réels strictement positifs. On désigne par $I(p, \lambda)$ l'intégrale :

$$I(p,\lambda) = \int_0^{+\infty} \lambda^p\, x^{p-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x ,$$

et on note $\Gamma(p) = I(p, 1)$.

1.a. Montrer que, pour tout x réel strictement positif, $x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \leq x^{p-1}$, puis montrer que pour tout a réel, strictement positif, $\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x$ converge. En déduire la convergence de l'intégrale $I(p, \lambda)$ à la borne zéro .

1.b. Montrer que pour x suffisamment grand, $0 \leq x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \leq \dfrac{1}{x^2}$; puis montrer que pour tout a réel, strictement positif, $\int_a^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge. En déduire la convergence de l'intégrale $I(p, \lambda)$ à la borne $+\infty$.

1.c. En effectuant le changement de variable $x = \dfrac{u}{\lambda}$, montrer que $I(p, \lambda) = \Gamma(p)$.

1.d. Calculer $\Gamma(1)$ et montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$. En déduire que pour tout n , entier naturel non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

1.e. Montrer que la fonction g définie par $g(u) = 0$ si $u \leq 0$ et $g(u) = \dfrac{1}{\Gamma(p)}\lambda^p\, u^{p-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda u}$ sinon, est une densité d'une variable aléatoire U ; puis vérifier que $E(U) = \dfrac{p}{\lambda}$ et $V(U) = \dfrac{p}{\lambda^2}$. On dira qu'une telle variable aléatoire U suit la loi $\gamma(p, \lambda)$ (loi gamma).

2. Soient θ un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f_X définie comme suit :

$$f_X(x) = 0 \text{ si } x \leq 1 \text{ et } f_X(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{\theta+1}{\theta}} \text{ sinon (loi de Pareto).}$$

2.a. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité et déterminer sa fonction de répartition F_X.

2.b. Pour quelles valeurs de θ la variable aléatoire X admet – elle une espérance ? Une variance?

Calculer $E(X)$ et $V(X)$ lorsque ces valeurs existent.

2.c. Soit $Y = \ln X$. On admettra que Y est une variable aléatoire. Déterminer en fonction de θ les expressions de la fonction de répartition F_Y de Y, de la densité f_Y de Y, de $E(Y)$ et de $V(Y)$.

Solution

L'intégrale $I(p,\lambda)$ n'est généralisée qu'en $+\infty$ et éventuellement en 0 (si $p < 1$), car la fonction $x \mapsto \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, cette intégrale converge si et seulement si $I_1(p,\lambda) = \int_0^1 \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}\, dx$ et $I_2(p,\lambda) = \int_1^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}\, dx$ sont toutes deux convergentes.

1.a. On a pour tout $t > 0$: $\exp(-\lambda t) \leq 1$, donc $t^{p-1} e^{-\lambda t} \leq t^{p-1}$ $\quad (*)$.

Or, pour $0 < x \leq 1$, $\int_x^1 t^{p-1} dt = \left[\frac{x^p}{p}\right]_x^1 = \frac{1-x^p}{p} \leq \frac{1}{p}$. On déduit alors de la relation $(*)$ que pour $0 < x \leq 1$, on a: $\int_x^1 \lambda^p t^{p-1} e^{-\lambda t} dt \leq \lambda^p \int_x^1 t^{p-1}\, dt \leq \frac{\lambda^p}{p}$.

La fonction $x \mapsto \int_x^1 \lambda^p t^{p-1} e^{-\lambda t} dt$ est décroissante (car la fonction intégrée est positive) et majorée (par $\frac{\lambda^p}{p}$), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet, lorsque $x \to 0^+$, une limite finie. Par suite,

$\boxed{\text{l'intégrale } I_1(p,\lambda) = \int_0^1 \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}\, dx \text{ est convergente}}$.

Il revient au même de dire que pour tout $a > 0$, $\int_0^1 \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}\, dx$ converge.

1.b. On a par croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} \left(x^{p+1} e^{-\lambda x}\right) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $A \geq 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq A \Rightarrow x^{p+1} e^{-\lambda x} \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe $A \geq 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq A \Rightarrow x^{p+1} e^{-\lambda x} \leq 1$.

On a donc, pour tout $x \geq A$: $x^{p-1} e^{-\lambda x} \leq \frac{1}{x^2}$.

Il en résulte que pour tout $x \geq A$: $\int_A^x t^{p-1} e^{-\lambda t}\, dt \leq \int_A^x \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{A} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{A}$.

La fonction $x \mapsto \int_A^x t^{p-1} e^{-\lambda t}\, dt$ est croissante (car la fonction intégrée est positive), et majorée (par $\frac{1}{A}$) ; elle admet donc, en vertu du théorème de la limite monotone, une limite finie lorsque $x \to +\infty$. Il en résulte que l'intégrale $\int_A^{+\infty} t^{p-1} e^{-\lambda t}$ dt est convergente. Il en résulte que l'intégrale $I_2(p,\lambda) = \int_1^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}\, dx$ est elle aussi convergente, ou encore (cela revient au même), que

$\boxed{\text{pour tout } a > 0 \text{, l'intégrale } \int_a^{+\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}\, dx \text{ converge}}$.

Finalement, $\boxed{I_1(p,\lambda) \text{ et } I_2(p,\lambda) \text{ convergent, donc } I(p,\lambda) \text{ converge}}$.

1.c. On a, en posant $x = \dfrac{u}{\lambda}$ dans l'intégrale $\int_w^v \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$ pour $0 < w < v$:

$$\int_w^v \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx = \int_{\lambda w}^{\lambda v} \lambda^p \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{p-1} e^{-\lambda \frac{u}{\lambda}} \frac{du}{\lambda} = \int_{\lambda w}^{\lambda v} u^{p-1} e^{-u}\, du .$$

En faisant tendre successivement w vers 0, et v vers $+\infty$, on obtient bien comme désiré :

$\boxed{I(p,\lambda) = \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-u}\, du = \Gamma(p)}$.

1.d. • On a $\boxed{\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\, du = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u}\, du = \lim\limits_{A \to +\infty} \left(1 - e^{-A}\right) = 1}$.

• • Soit p un réel strictement positif, intégrons par parties dans l'intégrale partielle $\Gamma_{\varepsilon,A}(p+1) = \int_\varepsilon^A u^p e^{-u}\, du$. Les fonctions $f : u \mapsto u^p$ et $g : u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$, avec pour tout $u \in [\varepsilon, A]$, $f'(u) = p\, u^{p-1}$, et $g'(u) = e^{-u}$.

On a bien $\Gamma_{\varepsilon,A}(p+1) = \int_\varepsilon^A f(u)\, g'(u)\, du$, l'intégration par parties est donc licite, et donne

$$\begin{aligned}\Gamma_{\varepsilon,A}(p+1) &= \big[f(u)\, g(u)\big]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A f'(u)\, g(u)\, du \\ &= \left(\varepsilon^p e^{-\varepsilon} - A^p e^{-A}\right) + p \int_\varepsilon^A u^{p-1} e^{-u}\, du .\end{aligned}$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers 0, $\varepsilon^p e^{-\varepsilon}$ tend vers 0, car p est strictement positif. D'autre part, la convergence de $\Gamma(p)$ assure celle de $\int_0^A u^{p-1} e^{-u}\, du$. Ce premier passage à la limite donne donc $\int_0^A u^p e^{-u}\, du = -A^p e^{-A} + p \int_0^A u^{p-1} e^{-u}\, du$. On fait ensuite tendre A vers $+\infty$: $\lim\limits_{A \to +\infty} A^p e^{-A} = 0$ par croissance comparée, et, à nouveau, on sait que les intégrales $\Gamma(p+1)$ et $\Gamma(p)$ convergent. Ce deuxième passage à la limite donne donc $\boxed{\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)}$.

• • • La relation $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$ s'en déduit via une récurrence sans difficulté (récurrence qu'il faudrait faire puisque la question est posée, mais j'ai franchement la flemme).

1.e. • La fonction g est positive, continue sauf éventuellement en zéro (si $p - 1 < 0$). Il résulte de la question **c.** que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, du = 1$: la fonction g est donc une densité de probabilité, et par suite

$\boxed{\text{il existe une variable aléatoire } U \text{ admettant } g \text{ pour densité de probabilité}}$.

• • Les intégrations par parties suggérées ne sont pas utiles, ou plutôt ont déjà été effectuées en **d.** :

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} u\, g(u)\, du = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \lambda^p u^p e^{-\lambda u}\, du = \frac{1}{\lambda\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \lambda^{p+1} u^p e^{-\lambda u}\, du = \frac{I(p+1,\lambda)}{\lambda\Gamma(p)}$;

on sait que l'intégrale $I(p+1,\lambda)$ converge et vaut $\Gamma(p+1)$; la convergence est évidemment absolue (la fonction intégrée est positive), donc $\boxed{U \text{ possède une espérance}}$, et l'on a $E(U) = \frac{\Gamma(p+1)}{\lambda\Gamma(p)}$, d'où d'après **d.** :

$\boxed{E(U) = \frac{p}{\lambda}}$.

De la même façon, $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\, g(u)\, du = \int_0^{+\infty} \lambda^{p+2} u^{p+1} e^{-\lambda u}\, du = \frac{I(p+2,\lambda)}{\lambda\Gamma(p)}$; on en déduit que U possède un moment d'ordre 2, et que :

$$E(U^2) = \frac{I(p+2,\lambda)}{\lambda^2\Gamma(p)} = \frac{\Gamma(p+2)}{\lambda^2\Gamma(p)} = \frac{p(p+1)\Gamma(p)}{\lambda^2\Gamma(p)} = \frac{p(p+1)}{\lambda^2}.$$

Ainsi, $\boxed{U \text{ possède une variance}}$, et $\boxed{V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \frac{p(p+1)}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}}$.

2.a. • La fonction f_X est positive, continue sauf en 1. Pour tout $x > 1$, on a:

$$\int_1^x \frac{1}{\theta} t^{-\frac{\theta+1}{\theta}}\, dt = -\left[t^{-\frac{1}{\theta}}\right]_1^x = 1 - x^{-\frac{1}{\theta}}, \text{ d'où } \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{\theta} t^{-\frac{\theta+1}{\theta}}\, dt = 1.$$

Il résulte de ceci, et de la nullité de f_X sur $]-\infty, 1]$, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt$ converge et vaut 1 :

$\boxed{\text{la fonction } f_X \text{ est donc bien une densité de probabilité}}$.

•• On a $F_X(x) = 0$ si $x \le 1$. Si maintenant $x \ge 1$, le calcul précédent donne

$$\boxed{F_X(x) = \int_1^x \frac{1}{\theta} t^{-\frac{\theta+1}{\theta}}\, dt = 1 - x^{-\frac{1}{\theta}}}.$$

2.b. • X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} t \cdot \frac{1}{\theta} \cdot t^{-\frac{\theta+1}{\theta}}\, dt$ est convergente (la convergence sera alors automatiquement absolue, puisque la fonction intégrée est positive).

Pour $x > 1$, on a $\int_1^x t^{1-\frac{\theta+1}{\theta}}\, dt = \int_1^x t^{-\frac{1}{\theta}}\, dt = \frac{1}{\theta-1}\left(x^{\frac{\theta-1}{\theta}} - 1\right)$.

On voit donc que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t \cdot \frac{1}{\theta} \cdot t^{-\frac{\theta+1}{\theta}}\, dt$ converge si et seulement si $\frac{\theta-1}{\theta} < 0$, c'est – à – dire ici si et seulement si $\theta < 1$. Par conséquent, $\boxed{X \text{ possède une espérance si et seulement si } \theta < 1}$.

De plus, lorsque tel est le cas: $\boxed{E(X) = \frac{1}{1-\theta}}$.

•• De même, X possède une variance si et seulement si elle possède un moment d'ordre 2, donc si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\theta} \cdot t^{-\frac{\theta+1}{\theta}}\, dt$ est convergente (là encore, la convergence sera alors absolue). De la même façon que précédemment, on montre que ceci est réalisé si et seulement si $\theta < \frac{1}{2}$, et que dans ces conditions

$E\left(X^2\right) = \frac{1}{1-2\theta}$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ possède une variance si et seulement si } \theta < \frac{1}{2}}$, et alors

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{1-2\theta} - \frac{1}{(1-\theta)^2} = \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2(1-2\theta)}}.$$

2.c. Y est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, sa fonction de répartition F_Y est donc nulle sur $\mathbb{R}^-$.

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln X \leq y) = P\left(X \leq e^y\right)$, d'où d'après **2.a.** :

$F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\theta}}$.

Finalement, pour tout y réel, $F_Y(y) = \left(1 - e^{-\frac{y}{\theta}}\right)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)$; on en conclut que $\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)}$.

On sait alors que $\boxed{Y \text{ admet pour densité la fonction } f_Y : y \mapsto \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)}$, que Y possède une espérance et une variance, et que $\boxed{E(Y) = \theta}$ et $\boxed{V(Y) = \theta^2}$.