Lycée Lakanal

PC

Résumé de cours de première année

2024 - 2025

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

I LIMITES ; CONTINUITÉ

I.1. Limites

I.1.a. Les définitions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, ou une réunion d'intervalles de ce type, et f une fonction définie sur I. Soit a un point de I ou une borne de I, avec éventuellement $a = \pm\infty$, et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On dit que f admet pour limite ℓ en a, et l'on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, lorsque :

ℓ	*a*	**Définition**
réel	réel	$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ \lvert x - a\rvert \le \alpha \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \le \varepsilon$
réel	$+\infty$	$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ A > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ x > A \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \le \varepsilon$
réel	$-\infty$	$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ A > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ x < -A \Rightarrow \lvert f(x) - \ell\rvert \le \varepsilon$
$+\infty$	réel	$\forall\ B > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ \lvert x - a\rvert \le \alpha \Rightarrow f(x) \ge B$
$-\infty$	réel	$\forall\ B > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ \lvert x - a\rvert \le \alpha \Rightarrow f(x) \le -B$
$+\infty$	$+\infty$	$\forall\ B > 0,\ \exists\ A > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ x \ge A \Rightarrow f(x) \ge B$
$-\infty$	$-\infty$	$\forall\ B > 0,\ \exists\ A > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ x \le -A \Rightarrow f(x) \le -B$
$-\infty$	$+\infty$	$\forall\ B > 0,\ \exists\ A > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ x \ge A \Rightarrow f(x) \le -B$
$+\infty$	$-\infty$	$\forall\ B > 0,\ \exists\ A > 0\ /\ \forall\ x \in I,\ x \le -A \Rightarrow f(x) \ge B$

On peut résumer tout ceci en écrivant que, de manière générale,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ lorsque, pour tout voisinage V_ℓ de ℓ dans $\mathbb{R}$, il existe un voisinage V_a de a dans I tel que : $\forall\ x \in I,\ x \in V_a \Rightarrow f(x) \in V_\ell$.

I.1.b. Limites usuelles

Limites usuelles en 0

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = 1}\ ;\ \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1}\ ;\ \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}\ ;\ \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1}\ .$$

Croissance comparée

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0}\ ;\ \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}\ ;\ \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty}\ ;\ \boxed{\lim_{x \to +\infty} x^a e^{-x} = 0}\ .$$

Formes indéterminées

$$\boxed{(+\infty) - (+\infty)}\ ;\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}}\ ;\ \boxed{\frac{0}{0}}\ ;\ \boxed{0 \times \infty}\ ;\ \boxed{0^0}\ ;\ \boxed{1^\infty}\ ;\ \boxed{(+\infty)^0}\ .$$

I.1.c. Les théorèmes

I.1.c.1 Théorème de la limite monotone

Soit $f : I \to J$ une fonction réelle, I intervalle. Soient a la borne inférieure de I, et b sa borne supérieure.

Premier cas : on suppose f croissante. Alors :

- f admet en a une limite à droite $\ell_d(a) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
  Cette limite est finie si et seulement si f est minorée.
- f admet en b une limite à gauche $\ell_g(b) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
  Cette limite est finie si et seulement si f est majorée.
- En tout point c de $]a, b[$, f admet une limite à gauche $\ell_g(c) \in \mathbb{R}$ et une limite à droite $\ell_d(c) \in \mathbb{R}$, et l'on a : $\ell_g(c) \le f(c) \le \ell_d(c)$.

Deuxième cas : on suppose f décroissante. Alors :

- f admet en a une limite à droite $\ell_d(a) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
  Cette limite est finie si et seulement si f est majorée.
- f admet en b une limite à gauche $\ell_g(b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
  Cette limite est finie si et seulement si f est minorée.
- En tout point c de $]a, b[$, f admet une limite à gauche $\ell_g(c) \in \mathbb{R}$ et une limite à droite $\ell_d(c) \in \mathbb{R}$, et l'on a : $\ell_g(c) \ge f(c) \ge \ell_d(c)$.

I.1.c.2. *Convergence par encadrement*

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une borne de I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que :

i – Les fonctions f et h admettent toutes deux pour limite ℓ en a ;

ii – Pour tout $x \in I$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe, et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

Cas d'une limite infinie

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un point de I ou une borne de I.

1. On suppose que :

i – $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, et ***ii*** – Pour tout $x \in I$: $f(x) \leq g(x)$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe, et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

De même :

2. On suppose que :

i – $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$; et ***ii*** – Pour tout $x \in I$: $g(x) \leq f(x)$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe, et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$.

I.1.c.2. *Caractérisation séquentielle d'une limite*

Soient f une fonctions définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une borne de I, et soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

i – La fonction f admet en a une limite égale à ℓ.

ii – Pour toute suite $(u_n)_{n \in I}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$:

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell.$$

I.2. *Continuité*

I.2.a. *Définition*

Une fonction $f : I \to J$ est dite continue en $a \in I$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

I.2.b. *Les théorèmes*

I.2.b.1. *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit f une fonction **continue** sur un **intervalle** I. Alors :

Version 1 : L'image de I par f est un intervalle.

Version 2 : Pour tous $a < b$ éléments de I :

Pour tout $y \in \left[\overleftrightarrow{f(a), f(b)}\right]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Version 3 : Pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Variante : le TVI **strict**

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I, **continue** et **strictement monotone**. Alors :

Pour tous $a < b$ éléments de I :

Pour tout $y \in \left[\overleftrightarrow{f(a), f(b)}\right]$, il existe un **unique** $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

I.2.b.2 *Théorème de la bijection*

Soit f une fonction définie sur un **intervalle** I, **continue** et **strictement monotone**. Alors

i – f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

ii – f^{-1} est continue, strictement monotone, de même monotonie que f.

I.2.b.3. Théorème des bornes atteintes

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$.

Alors l'image de $[a, b]$ par f est **un segment** $[m, M]$.

(m est alors le minimum de f sur $[a, b]$, et M son maximum).

Le théorème s'énonce également sous la forme plus concise, mais plus faible, suivante :

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

II DÉRIVATION

II.1. Premières propriétés

II.1.a. Quelques règles de dérivation

$$\boxed{(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'} \; ; \; \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g f' - f g'}{g^2}} \; ; \; \boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}} \; ;$$

$$\boxed{(f^n)' = n f^{n-1} \times f'} \; ; \; \boxed{\left(\frac{f}{g^n}\right)' = \frac{g f' - n f g'}{g^{n+1}}} \; ; \; \boxed{\left(\frac{1}{f^n}\right)' = -n \frac{f'}{f^{n+1}}} \, .$$

II.1.b. Théorème de dérivation d'une fonction réciproque

Soit $f : I \to J$ une application définie sur un **intervalle** I, **bijective** et **dérivable.**

Soit $b \in J$. Alors :

i – f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$.

ii – Lorsque cette condition est remplie, on a : $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$.

II.1.c. Théorème des extrema locaux

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $c \in I$.

On suppose que f admet un extremum local en c.

Alors : si c n'est pas une borne de I, $f'(c) = 0$.

II.2. Théorème de Rolle, théorème et inégalité des accroissements finis

II.2.a. Théorème de Rolle

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$, et **dérivable** sur $]a, b[$, avec $a < b$. On suppose que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

II.2.b. Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$, et **dérivable** sur $]a, b[$, avec $a < b$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

II.2.b. Inégalité accroissements finis

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$, et **dérivable** sur $]a, b[$, avec $a < b$.

Alors $|f(b) - f(a)| \leq (b - a) . \sup\limits_{x \in]a, b[} |f'(x)|$.

En particulier

Soit f une fonction **de classe** C^1 sur un **segment** $[a, b]$. Soit m le minimum de f' sur $[a, b]$, et soit M son maximum.

Alors : $(b - a) m \leq f(b) - f(a) \leq (b - a) M$.

II.3. Prolongement C^1

II.3.a. Théorème de prolongement C^1, version 1

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a un point de I.

On suppose f dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$. Alors :

- Si f' admet une limite finie en a, f est dérivable en a, et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$. *Remarquons que f' est alors continue en a.*
- Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm \infty$, alors f n'est pas dérivable en a.

  De plus, la courbe représentative de f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.
- Pas de conclusion lorsque f' n'admet pas de limite en a : dans ce cas, f peut être ou ne pas être dérivable en a.

II.3.b. Théorème de prolongement C^1, version 2

Soient I un intervalle, a un point de I, et f une fonction de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$.

On suppose que :

i – f admet une limite finie en a.

ii – f' admet une limite finie en a.

Alors

- On peut prolonger f en une fonction $\overline{f}$ de classe C^1 sur I, en posant

$$\overline{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

- On a : $\overline{f}'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$.

II.4. Convexité

II.4.a. Définition – inégalité de convexité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe sur I lorsque l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i – On a pour tout $(x, y) \in I^2$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

ii – On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, et pour tout

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

On dit que f est concave lorsque la fonction $-f$ est convexe.

II.4.b. Convexité et régularité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- $\bullet$ Si f est convexe sur I, elle y est continue.
- $\bullet\bullet$ On suppose f dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- $\bullet\bullet\bullet$ On suppose f deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

II.5. Dérivées successives – développements limités

II.5.a. Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions définies et de classe D^n sur I. Alors,

La fonction produit fg est de classe D^n sur I, et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

II.5.b. Formule de Taylor – Young

Soit f une fonction de classe D^n un intervalle I.

Soit x_0 un point de I.

Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left(x - x_0\right)^n.$$

II.4.c. Intégration et dérivation de développements limités

En résumé :

- On peut toujours intégrer terme à terme un DL à l'ordre n ; on obtient alors un DL à l'ordre $n+1$ de la primitive choisie (celle qui correspond au terme constant du nouveau DL).
- En revanche, on ne peut dériver terme à terme un DL à l'ordre n que si l'on sait que la fonction étudiée est n fois dérivable ; dans ce cas, on obtient le DL à l'ordre $n-1$ de la fonction dérivée au point considéré.

II.4.d. Développements limités usuels

- $\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \circ\left(x^{2n}\right)$; $\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \circ\left(x^{2n+1}\right)$;

  $\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \circ\left(x^n\right)$.
- $\sin x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \circ\left(x^{2n+1}\right)$ (un $\circ\left(x^{2n+2}\right)$ convient aussi)

  $\sin x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \circ\left(x^n\right)$.
- $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{k}(\alpha - j + 1)}{k!} x^k + \circ\left(x^n\right)$, ou encore :

  $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \circ\left(x^n\right)$.
- $\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \circ\left(x^n\right)$
- $\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \circ\left(x^n\right)$
- $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \circ\left(x^n\right)$
- $\ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \circ\left(x^n\right)$, et $\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \circ\left(x^n\right)$
- $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2k!} + \circ\left(x^{2n}\right)$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ\left(x^{2n+1}\right)$.

II.5. Formules de Taylor – Lagrange et Taylor – Laplace

II.5.a. Formule et inégalité de Taylor – Lagrange

La formule (hors – programme, mais à savoir démontrer)

Soit f une fonction de classe C^n sur un segment $[a, b]$ $(a < b)$, et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

L'inégalité

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un segment $[a, b]$ $(a \leq b)$.

Soit $M = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

II.5.b. Formule de Taylor – Laplace, ou Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

III INTÉGRATION

III.a. Inégalité de la moyenne

Soient f, g des fonctions continues par morceaux sur un segment non vide.

Alors $\left| \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} \left| f(x) \right| . \int_a^b \left| g(t) \right| \mathrm{d}t$.

III.b. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a < b$). Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En particulier

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} \right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

III.c. Inégalité intégrale de Cauchy – Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. Alors :

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \right) \left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

III.d. Changements de variable

Soit φ une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$, et soit f une fonction continue sur $\varphi([\alpha, \beta])$. Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

III.e. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t).v(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t) \cdot v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t) \cdot v'(t)\,\mathrm{d}t.$$