Lycée Lakanal

2024 - 2025

PC

Suites numériques

Résumé du cours de première année

0. *Préliminaires sommatoires*

1. Sommes classiques

a. *Somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique*

Proposition 1

i – Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **arithmétique** de raison r. Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a \leq b$:

$$\sum_{k=a}^{b} u_k = (b-a+1)\,u_a + \frac{(b-a)(b-a+1)}{2}\,r = (b-a+1)\,\frac{u_a + u_b}{2}$$

$$= \boxed{(\text{nombre de termes}) \times (\text{moyenne du premier et du dernier terme})}\,.$$

ii – Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **géométrique** de raison $q \neq 1$. Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a \leq b$:

$$\sum_{k=a}^{b} u_k = u_a\,\frac{1-q^{b-a+1}}{1-q} = \boxed{(\text{premier terme}) \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}}\,.$$

b. *Autres sommes usuelles*

Nom	Valeur	Degré d'importance
Somme des premiers entiers	$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	**à connaître impérativement**
Somme des premiers carrés	$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	**à connaître**
Somme des premiers cubes	$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	**Mieux vaut connaître**
Formule du binôme de Newton	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$	**à connaître impérativement (formule ET démonstration)**
Formule de Vandermonde	$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$	**Non exigible, mais à savoir démontrer. Utile notamment en probas.**

Nom	Valeur	Degré d'importance
Formule d'Euler	$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$	**utile pour des calculs d'espérance**
Formule de Pascal	$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$	**A connaître**
Formule de Pascal généralisée	$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$	**On peut ne pas la connaître, mais on doit savoir la redémontrer (récurrence facile)**

2. Permutation de symboles sommatoires

a. *Deux exemples théoriques*

Proposition 2 **(Fubini)**

i – Somme double rectangulaire

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ une famille de nombres complexes bi – indexés. Alors,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_{i,j}}.$$

ii – Somme double triangulaire

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ une famille de nombres complexes bi – indexés. Alors,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}\right)}.$$

b. *Premiers exemples pratiques*

Exercice 1

Formule de Taylor pour les polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \mathbb{C}$.

1. Pour $j \in \ 0, n\ $, rappeler l'expression développée de $P^{(j)}$, sous forme de somme.

2.a. Montrer que $P = \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(X-a)^j$.

2.b. En déduire que : $\forall\ k \in \ 0, n\ ,\ a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Exercice 2

1. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour tout réel x :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

2. Soit x un réel. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n-i} \dfrac{x^j}{i!\,j!}$.

On pourra poser $k = i + j$ *dans la somme intérieure.*

Exercice 3

Formule de l'espérance par antirépartition

1. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, et X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$.

   Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k)$.

   On rappelle que l'espérance de X *est donnée par :* $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X = k)$.

2. Soient r et n deux entiers naturels. Une urne contient des boules numérotées de 1 à r.
   On effectue une succession de n tirages avec remise dans cette urne. Soit $X_{r,n}$ la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus.
   Déterminer un équivalent simple lorsque r tend vers $+\infty$ de $\mathbb{E}(X_{r,n})$.

I Suites numériques : généralités

1. Définition de la limite d'une suite numérique

Inutile de rappeler ce qu'est une suite croissante, décroissante, majorée, minorée ? Vérifier tout de même que l'on sait écrire de manière symbolique chacune de ces propriétés.

a. *Convergence d'une suite réelle ou complexe*

Définition 1 (convergence d'une suite numérique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique, et λ un nombre réel ou complexe.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers** λ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N,\ \left| u_n - \lambda \right| \leq \varepsilon .$$

Propriété (convergence d'une suite complexe)

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers le complexe λ si et seulement si les suites $\left(\operatorname{Re}(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{Im}(u_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re}(\lambda)$ et $\operatorname{Im}(\lambda)$.

Sauf mention expresse du contraire, les suites considérées ici seront désormais des suites numériques **réelles.**

b. *Suite réelle de limite infinie*

Définition 2 (suite réelle de limite infinie)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $+\infty$** si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \geq A .$$

- La suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $-\infty$** si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \leq -A .$$

Exercice 4

Lemme de Cesàro

Soit $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers un réel λ. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

On souhaite prouver le ***lemme de Césaro*** :

la suite $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et admet pour limite λ.

1. Ecrire la définition mathématique du fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lambda$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_1, \left| \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \right) - \lambda \right| \leq \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1 - 1} \left| a_k - \lambda \right| \right) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

3. En déduire que :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_2, \left| b_n - \lambda \right| \leq \varepsilon .$$

Conclure.

2. Théorème de la limite monotone

Théorème (de la limite monotone)

- Toute suite croissante (*resp.* décroissante) admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (*resp.* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).
- Toute suite croissante majorée (*resp.* décroissante minorée) converge dans $\mathbb{R}$.
- Toute suite croissante non majorée (*resp.* décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (*resp.* vers $-\infty$).

- *Ce résultat est ESSENTIEL, non seulement pour l'étude des* ***suites*** *numériques réelles, mais aussi pour l'étude des* ***séries*** *numériques réelles (à termes positifs) : C'est en effet ce théorème de limite monotone qui nous offre le théorème fondamental sur les séries à termes positifs…*
- *Le théorème donne aussi, théoriquement, les limites en cas de convergence : si* $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *est croissante majorée,* $\lim u_n = \sup\left(u_n\right)$*, et, si* $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *est décroissante minorée,* $\lim u_n = \inf\left(u_n\right)$.

3. Théorème des gendarmes (ou de convergence par encadrement, ou du sandwich, ou des épaulettes…)

Théorème

Soient $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, et $\left(w_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, on ait : $u_n \leq v_n \leq w_n$. On suppose de plus que $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(w_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ont même limite ℓ . Alors,

1_ la suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et

2_ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Il convient de savoir démontrer ce théorème : assurez – vous que vous en êtes capables.
La preuve constitue un exemple simple de preuve epsilonnesque, comme celle de l'unicité, sous réserve d'existence, de la limite (qu'il est également bon de savoir démontrer).

4. Suites adjacentes – suites extraites

a. *Définition*

Deux suites numériques réelles $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** lorsque :

i) l'une est croissante et l'autre est décroissante,

ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n - v_n\right) = 0$.

b. *Théorème des suites adjacentes*

Soient $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors,

1_ $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, et

2_ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Corollaire : théorème des segments emboîtés

Soit $\left(I_n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left[a_n , b_n\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de segments non vides et dont la longueur tend vers 0 . Alors, l'ensemble $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Exercice 5

Constante d'Euler

Montrer que les suites $\left(G_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(K_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$G_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n \quad \text{et} \quad K_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln\left(n+1\right)$$

convergent vers la même limite γ .

c. *Suites extraites*

Généralités

- On appelle ***suite extraite*** d'une suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, où φ est une application application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers lui - même.

•• La convergence d'une suite (vers une certaine limite λ) entraîne celle de toutes ses suites extraites (vers la même limite).

Les suites extraites intervenant régulièrement sont celles des termes d'indices pairs et impairs. Il existe pour ces suites une réciproque importante au résultat énoncé ci - dessus :

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ont même limite λ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite λ.

•• ***En particulier,*** si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes**, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 6

Théorème spécial des séries alternées

1. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique réelle. On suppose que :

• $\forall\ n \in \mathbb{N}\ , u_n > 0$.

•• La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

••• $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

II Comparaison des suites numériques

1. Négligeabilité et prépondérance

a. Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est *négligeable* devant** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\underline{\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n \geq N\ ,\ |u_n| \leq \varepsilon |v_n|}\ .$$

On note alors : $u_n = o(v_n)$ (***notations de Hardy***).

On dit aussi que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est *prépondérante* devant** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Propriété pratique fondamentale (critère du quotient pour la négligeabilité)

Lorsque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne s'annule pas à partir d'un certain rang** :

$$\underline{u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}\ .$$

c. Règles de calcul sur les « petits o »

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne s'annulant pas à partir d'un certain rang** . Alors :

1_ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{o(v_n)}{v_n} = 0$.

2_ En particulier : $u_n = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

3_ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ o(\lambda v_n) = \lambda\, o(v_n) = o(v_n)$.

4_ $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$; $\circ(v_n) - \circ(v_n) = \circ(v_n)$.

5_ $o(u_n) . o(v_n) = o(u_n v_n)$.

6_ $u_n . o(v_n) = o(u_n v_n)$.

En particulier (*parfois utile en pratique…*) : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ n^{\alpha}\, o(v_n) = o(n^{\alpha} v_n)$.

d. Echelle de comparaison classique

On note exceptionnellement ici " $u_n \ll v_n$ " pour " $u_n = o(v_n)$ ".

On a pour tous réels $b > a > 1$, pour tous réel $\beta > \alpha > 0$ et pour tout $\delta \in \mathbb{R}$:

$$(\ln n)^{\delta} \ll n^{\alpha} \ll n^{\beta} \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n .$$

2. Equivalence

a. Théorème – définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est *équivalente* à** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$u_n - v_n = o(v_n) .$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ssi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On dit donc que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont ***équivalentes***, et l'on note $u_n \sim v_n$.

On a : $\underline{u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = \circ(v_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n)}$.

b. Propriété pratique fondamentale (critère du quotient pour l'équivalence)

Lorsque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **ne s'annule pas à partir d'un certain rang** , $u_n \sim v_n$ implique que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas non plus à partir d'un certain rang (*pas forcément le même…*) et :

$$\underline{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1} .$$

c. Lien entre négligeabilité et équivalence

$$\underline{u_n + o(u_n) \sim u_n} \; .$$

3. Equivalents usuels

Ils se déduisent des équivalents usuels et des développements limités usuels pour les fonctions réelles. A titre d'exemples :

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers 0 , *i.e.* telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$. Alors :

1_ $\ln(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$.

2_ $e^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$.

3_ $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$.

4_ $1 - \cos \varepsilon_n \sim \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$.

5_ $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$.

6_ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; (1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \varepsilon_n$.

4. Domination

Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est *dominée par*** $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\exists A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \; |u_n| \leq A |v_n| \; .$$

On note alors $u_n = O(v_n)$.

On dispose là aussi du critère du quotient :

lorsque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang N , $u_n = O(v_n)$ si et seulement si la suite

$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est bornée.

Exercice 7

Trouver un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

1. $\dfrac{50n^4 - 3n^2 + 5n - 1}{3n^2 + 4}$.

2. $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \exp\left(-\dfrac{1}{2n}\right)$.

3. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + 1 - \dfrac{1}{2n}$.

4. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} - \dfrac{4}{n^2}$.

5. $\sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$.

6. $3 + e^{\frac{1}{n}} - \dfrac{6}{n}$.

7. $\ln(n+1) - \ln(n+2)$.

8. $\ln\left(\cos\dfrac{2}{n}\right) - e^{\tan\frac{1}{n^2}} + 1$.

9. $e^{\arccos\frac{1}{n}} - e^{\frac{\pi}{2}} \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

10. $e^{e^{e^{-n}}} - e$.

III Suites usuelles

0. Suites arithmétiques, suites géométriques

Fait partie du bagage minimal... pour faire une 1[ère] STT dans des conditions raisonnables. En prépa, ne pas savoir ce qui suit serait impardonnable. On en remet donc une couche :

- Si $\left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r :

$$\forall\, n \geq n_0\,,\; u_n = u_{n_0} + \left(n - n_0\right) r\,,$$

et
$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \left(n - n_0 + 1\right) u_{n_0} + \frac{\left(n - n_0\right)\left(n - n_0 + 1\right)}{2} r = \left(n - n_0 + 1\right) \frac{u_n + u_{n_0}}{2}\,.$$

- Si $\left(u_n\right)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q :

$$\forall\, n \geq n_0\,,\; u_n = u_{n_0}\, q^{\,n - n_0}\,,$$

et si $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} \frac{1 - q^{\,n - n_0 + 1}}{1 - q}\,.$

On précise qu'avoir besoin de changer d'indice, et de se ramener à une somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} q^k$, est à la fois une preuve de maladresse, et une source importante d'erreurs.

1. Suites arithmético – géométriques

> On appelle ***suite arithmético – géométrique*** toute suite récurrente définie par la donnée d'un premier terme u_0 et par une relation de récurrence de la forme :
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = a\, u_n + b\;,\text{où } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \text{ et } b \in \mathbb{R}^*\,.$$

Il ne sert à rien de retenir l'expression du terme général d'une telle suite : il sera toujours demandé de donner la démonstration de ce résultat (le programme précise qu'on doit connaître la méthode, pas la formule finale…). Pour l'obtenir, on adopte la démarche suivante :

◦ On résout l'équation caractéristique associée : $x = a\,x + b$.

Cette équation admet une unique solution, notons – là ℓ.

◦◦ On introduit la suite auxiliaire $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; v_n = u_n - \ell$.

◦◦◦ Un calcul semi – idiot permet de constater que la suite $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de de raison a. Comme on sait donner l'expression du terme général d'une telle suite, on en déduit aisément l'expression de u_n.

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

> On appelle ***suite récurrente linéaire d'ordre 2*** toute suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1, et par une relation de récurrence du type :
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\;,\text{où } a \text{ et } b \text{ sont des complexes.}$$

Note : l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ est un sous – espace vectoriel de dimension 2 de l'espace des suites numériques.

Pour obtenir l'expression du terme général d'une telle suite, on considère **l'équation caractéristique** associée à cette récurrence linéaire du second ordre : $x^2 = a x + b$, et l'on cherche les racines de cette équation, à l'aide du discriminant $\Delta = a^2 + 4b$. *Ensuite, fô distinguer :*

a. ***Dans le cas d'une suite complexe***

Si $\underline{\Delta \neq 0}$ **:** l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2.

Il existe dans ce cas deux nombres complexes λ et μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}.$$

Si $\underline{\Delta = 0}$ **:** l'équation caractéristique admet une racine double r_0.

Il existe dans ce cas deux nombres complexes λ et μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n}.$$

b. ***Dans le cas d'une suite réelle***

On suppose donc ici que a et b sont réels.

Si $\underline{\Delta \neq 0}$ **:** l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2.

Il existe dans ce cas deux nombres réels λ et μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}.$$

Si $\underline{\Delta = 0}$ **:** l'équation caractéristique admet une racine double r_0.

Il existe dans ce cas deux nombres réels λ et μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n}.$$

Si $\underline{\Delta < 0}$ **:** l'équation caractéristique admet deux racines complexes non réelles, conjuguées, r_1 et r_2. Posons $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$.

Il existe dans ce cas deux nombres réels λ et μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)}.$$

IV Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

A. Les résultats utilisés

Théorème 1 **Théorème de la limite monotone**

- Toute suite croissante (*resp.* décroissante) admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (*resp.* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).
- Toute suite croissante majorée (*resp.* décroissante minorée) converge dans $\mathbb{R}$.
- Toute suite croissante non majorée (*resp.* décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (*resp.* vers $-\infty$).

Théorème 2 **Intervalles stables**

> Soit f une fonction réelle, et J un domaine de $\mathbb{R}$, et a un élément de J. On suppose que f est définie sur J et que, pour tout $x \in J$, $f(x)$ appartient encore à J.
>
> Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est bien définie, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

Théorème 3 **Croissance de la fonction et monotonie de la suite**

> Soit f une fonction réelle, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
>
> On suppose f croissante. Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone**.

Théorème 4 **Limites et points fixes**

> Soit f une fonction réelle, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
>
> On suppose que f est continue, et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ appartenant à l'ensemble de définition de f. Alors ℓ est un ***point fixe*** de f : $f(\ell) = \ell$.

Théorème 5 **(une conséquence directe de l'inégalité des accroissements finis)**

> Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur un segment $[a, b]$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[a, b]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit ℓ un point fixe de f.
>
> Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell|$, où $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

B. Plan d'étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

0. ***Étude de l'application f***

1. ***Recherche des limites éventuelles***

2. ***Recherche d'intervalles stables, et définition de la suite***

3. ***Monotonie de la suite***

a_ ***Si l'application f est croissante sur I***

La suite (u_n) est monotone.

b_ ***Si l'application f est décroissante sur I***

Les suites extraites des termes d'indices pairs et impairs sont monotones, de monotonie contraires. On peut dès lors essayer de prouver qu'elles sont adjacentes.

c_ ***Si l'application f n'est ni croissante, ni décroissante sur I***

On vérifie si on ne s'est pas trompé dans les calculs, si on a bien lu l'énoncé, si l'intervalle stable choisi est vraiment judicieux…

4. ***Étude de la convergence de la suite***

C. Deux exemples – types

Exercice 8

1. Montrer que l'équation $2 + \ln x = x$ admet exactement deux solutions a et b, avec $0 < a < b$.

2. Soit α un réel tel que $\alpha > b$. Montrer que l'on peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2 + \ln u_n,$$

et que cette suite converge vers b.

3. On suppose maintenant que $\alpha \in \left]a, b\right[$. Que dire de la suite (u_n) ?

4. Même question lorsque $\alpha \in \left]0, a\right[$.

1. La fonction $\varphi : x \mapsto 2 + \ln x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, d'où ses variations :

x	0		1		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

La fonction φ est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\left]0, 1\right]$; on a $\lim\limits_{0^+} \varphi = -\infty$ et $\varphi(1) > 0$. D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique réel $a \in \left]0, 1\right]$ tel que $\varphi(a) = 0$. De même, φ est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $\left]1, +\infty\right[$, avec $\varphi(1) > 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = -\infty$, il existe donc un unique réel $b \in \left]1, +\infty\right[$ tel que $\varphi(b) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } 2 + \ln x = x \text{ admet exactement deux solutions } a \text{ et } b,\ \text{avec } 0 < a < b}$.

2. • Soit maintenant $f : x \mapsto 2 + \ln x$. La fonction f est définie sur $\left[b, +\infty\right[$, croissante, et d'après **1.**, $\varphi(b) = b$, on en déduit que $f\left(\left[b, +\infty\right[\right) \subset \left[b, +\infty\right[$. $\boxed{\text{On peut donc définir une suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ par } u_0 = \alpha > b \text{ et}}$ $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2 + \ln u_n}$. En outre, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \in \left[b, +\infty\right[$.

•• On a $\varphi(b) = 0$; la fonction φ est croissante sur $\left[b, +\infty\right[\subset \left[1, +\infty\right[$, elle y est donc positive. Autrement dit, pour tout $x \in \left[b, +\infty\right[$, $x \geq f(x)$, par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est de plus minorée (par b), donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Comme f est continue, $\lim (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un point fixe de f, on a donc, d'après **1.**, $\lim (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{a, b\}$. Avoir $\lim (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = a$ est impossible (puisque la suite est minorée par b), on en conclut que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } b}$.

3. On procède de la même façon qu'en **2.** :

La fonction f est bien définie sur $\left]a, b\right[$, et on montre que cet intervalle est stable par f ; on peut donc définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \alpha \in]a,b[$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

On vérifie ensuite que φ est négative sur $]a,b[$; on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est majorée (par b), donc elle converge. A nouveau, la continuité de f assure que $\lim (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe de cette fonction.

$\lim (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = a$ est exclu, car $u_0 > a$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Par conséquent, là encore $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } b}$.

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était bien définie, elle serait à valeurs dans $]-\infty, a[$ (car c'est un intervalle stable par f), décroissante (car φ est négative sur $]0,a[$), minorée par 0 (si $u_n < 0$, u_{n+1} n'est pas défini), donc convergente. Mais puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante avec $u_0 < a$, sa limite ne peut être un point fixe de f. Ceci est absurde, et on en conclut qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 0$ (et qu'à partir du rang suivant, la suite n'est plus définie).

Exercice 9

A savoir faire parfaitement en deux minutes

Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, et la relation de récurrence :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

V Deux autres types de suites courants

1. Sommes de Riemann

Théorème (cas général)

Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

En pratique, lorsque l'on est amené à déterminer la limite d'une somme de Riemann, il est toujours possible de se ramener au cas où $a = 0$ et $b = 1$. On utilise alors une forme simplifiée du théorème précédent :

Théorème (un cas particulier fondamental)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10

Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+k}{n^2+k^2}$, **b.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+k}{k(n+2k)}$.

2. Suites implicites

Il s'agit de suites dont le terme général u_n est la solution (supposée unique, sous certaines conditions), d'une équation dépendant de n : par exemple, u_n unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$, ou u_n unique solution positive de l'équation $\frac{x-n}{x+n} - e^x = 0$… de façon générale, u_n unique solution d'une équation $f_n(x) = 0$.

Le jeu est alors d'étudier la monotonie d'une telle suite, de déterminer sa limite, éventuellement d'en donner un développement asymptotique... le tout **sans jamais chercher une expression explicite de son terme général**, à moins bien sûr que l'énoncé ne le demande.

Aux concours, on s'attend à une certaine pratique dans ce domaine ; si aucun théorème général n'est exigible, il est donc cependant nécessaire d'avoir traité quelques exemples de suites de ce type.

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{nx} + x - 2.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel en lequel f_n s'annule.

On notera désormais u_n ce réel.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est décroissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et admet pour limite 0.

4. En remarquant que $n u_n = \ln(2 - u_n)$:

a. montrer que $u_n \sim \frac{\ln(2)}{n}$;

b. en déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n} - \frac{\ln(2)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$;

c. prouver enfin l'existence d'un réel a, que l'on déterminera, tel que :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n} - \frac{\ln(2)}{2n^2} + \frac{a}{n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right).$$